

Capitolul 2

Teoria Relativității

2.1 Introducere

Studiul legilor fizicii se face în general în sisteme de referință inerțiale. Problema care se pune este aceea de a formula legile fizicii în diverse sisteme de referință. Această problemă a fost rezolvată prin creerea de către Albert Einstein începând din 1905 a teoriei relativității restrânse și generale.

Teoria relativității restrânse se referă doar la sistemele de referință inerțiale și la invarianța legilor fizicii față de aceste sisteme. În Teoria relativității generale se abordează legile fizicii în sisteme arbitrare și neinertiale. Apariția teoriei relativității a negat sistemul deja constituit al mecanicii newtoniene care fusese construit pe baza unor concepte ca spațiul și timpul absolut și al unor viteze infinite de propagare a interacțiilor. Formularea de către Maxwell a legilor electromagnetismului a permis să se stabilească că interacțiile de acest tip se propagă cu viteză finită, viteză care în vid este egală cu viteza luminii c :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (2.1)$$

Având în vedere importanța acesteia vom menționa câteva caracteristici ale sale:

1. Ea este viteza tuturor undelor electromagnetice în vid independent de frecvență.
2. Nici un semnal nu poate fi transmis în vid sau în alt mediu cu o viteză mai mare decât viteza luminii.

3. Din relația (2.1) rezultă că viteza luminii depinde de două constante universale ε_0 permitivitatea vidului și μ_0 permeabilitatea vidului. Aceasta înseamnă că ea va avea aceeași valoare $c = 2,99733 \times 10^8$ m/s în orice sistem de referință galilean. Rezultă astfel o primă concluzie și anume că principiul relativității galileene nu se aplică în cazul luminii.

4. Se poate arata că ecuațiile Maxwell nu sunt invariante în raport cu transformările Galilei.

2.2 Bazele experimentale ale teoriei relativității

Studiul fenomenelor magnetice și electrice a condus la sfârșitul secolului XIX la introducerea ipotezei eterului. Eterul era considerat un mediu deosebit de restul mediilor materiale în care se presupune că pătrunde. El era considerat suportul material al câmpului electromagnetic. Au existat două modalități de a formula legile fenomenelor electromagnetice pentru corpurile în mișcare:

a) *Ipoteza antrenării complete a eterului.* Această ipoteză a fost formulată de Hertz și presupune că eterul este antrenat de corpurile în mișcare, antrenarea fiind completă în apropierea lor. Ipoteza a fost introdusă pentru ca să se păstreze invarianța legilor electrodinamicii față de transformările lui Galilei. Ipoteza a fost infirmată experimental de fenomenul aberației stelare (Bradley) și experiența Fizeau pentru determinarea vitezei de propagare a luminii în medii în mișcare.

b) *Ipoteza neantrenării eterului.* Eterul nu participă la mișcarea corpurilor. Din acest motiv la suprafața Pământului ar exista un vânt eteric a cărui viteză este de 30 km/s (viteza de deplasare a Pământului în jurul Soarelui). Ipoteza a fost propusă de Lorentz care a renunțat la aplicarea principiului relativității fenomenelor electromagnetice. Astfel, eterul devine un sistem de referință inerțial privilegiat, viteza luminii față de acesta fiind c iar față de alt sistem de referință valoarea vitezei luminii este dată de relația galileană de compunere a vitezelor.

Deoarece proprietățile optice, electrice și magnetice ale substanțelor depind de pozițiile și vitezele relative ale constituenților microscopici purtători de sarcină, teoria lui Lorentz era în bună concordanță cu experiența. Lorentz a demonstrat că principiul relativității se păstrează până

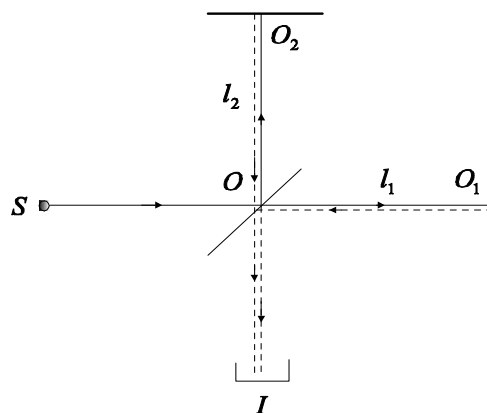


Figura 2.1: Dispozitivul experimental folosit de Michelson și Morley

la efecte care sunt de ordinul unu în raport cu v/c .

Rămânea posibilitatea ca să se pună în evidență mișcarea unui sistem de referință față de eterul fix prin efecte de ordinul doi în v/c . O astfel de experiență își propune să măsoare viteza vântului de eter față de Pământ prin măsurarea vitezei luminii dintr-un sistem de referință legat de Pământ.

2.2.1 Experiența Michelson și Morley

Dispozitivul experimental (Fig.2.1) constă dintr-o sursă de lumină (S), o oglindă (O) semitransparentă care să permită împărțirea fascicolului în două componente și două oglinzi (O_1 și O_2). Brațul OO_1 are lungimea l_1 , brațul OO_2 are lungimea l_2 .

Fasciculul de lumină ce pleacă din S este separat în O în două fascicole, unul care se propagă spre O_1 și altul care se propagă spre O_2 care apoi după reflexii și transmisii pe oglinzi ajung să interfere în punctul I . Deoarece porțiunile SO și OI sunt comune diferența de drum optic între cele două fascicule se datorează porțiunilor OO_1 și OO_2 .

Să considerăm deplasarea prin eter cu viteza v , a interferometrului. Calculăm timpii în care fasciculele de lumină parcurg drumurile OO_1O și OO_2O . Pentru aceasta vom considera valabile transformările Galilei pentru viteze. Calculul timpului în care raza ce străbate brațul OO_1O îl vom face în sistemul de referință legat de interferometru care se deplasează

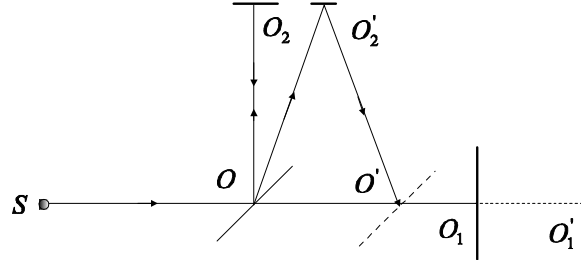


Figura 2.2: Schemă pentru calculul lui t_2 în sistemul de referință al eterului

față de eter cu v .

$$t_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1-v^2/c^2} \quad (2.2)$$

Calculul timpului în care raza ce străbate brațul OO_2O îl vom face în sistemul de referință al eterului (Fig. 2.2).

Pentru aceasta vom aplica teorema lui Pitagora:

$$l_2^2 + \left(\frac{1}{2}vt_2\right)^2 = \left(\frac{1}{2}ct_2\right)^2 \quad (2.3)$$

De aici rezultă:

$$t_2 = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (2.4)$$

Diferența de timp între cele două raze este:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2}{c} \left(\frac{l_1}{1-v^2/c^2} - \frac{l_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \quad (2.5)$$

Rotind interferometrul cu 90° rezultă că:

$$t'_1 = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (2.6)$$

și:

$$t'_2 = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{1-v^2/c^2} \quad (2.7)$$

Astfel:

$$\Delta t' = t'_1 - t'_2 = \frac{2}{c} \left(\frac{l_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{l_2}{1 - v^2/c^2} \right) \quad (2.8)$$

Corespunzător diferențelor de timp Δt și $\Delta t'$ în I se înregistrează anumite franje de interferență. Prin rotirea întregului dispozitiv cu 90° ar trebui să se observe o deplasare a sistemului de franje corespunzătoare diferenței de timp ΔT .

$$\Delta T = \Delta t - \Delta t' = \frac{2(l_1 + l_2)}{c} \left[\frac{1}{1 - \beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right] \quad (2.9)$$

Pentru viteze mult mai mici decât viteza luminii se obține:

$$\Delta T \simeq \frac{2(l_1 + l_2)}{c} \left[1 + v^2/c^2 - 1 - \frac{1}{2}v^2/c^2 \right] \quad (2.10)$$

$$\Delta T \simeq \frac{2(l_1 + l_2)}{c} \frac{v^2}{c^2} \quad (2.11)$$

Efectul observabil este de ordin 2 în v/c . Rezultatul experiențelor a fost unul negativ, adică nu s-a observat nici o deplasare a sistemului de franje de interferență deși precizia experimentelor inițiale ar fi putut pune în evidență vitezele de ordinul a 10 km/s, iar experiențele mai recente chiar de ordinul metrilor pe secundă.

Au existat o serie de încercări de explicare a acestor rezultate.

a) ipoteza eterului antrenat - care a fost infirmată de alte experiențe;
b) ipoteza că viteza luminii are valoare absolută în sistemul de referință al sursei (teoria balistică a lui Ritz). Ea a fost infirmată deoarece aceeași experiență realizată cu o sursă extraterestră dă un rezultat tot negativ.

c) ipoteza contracției Lorentz-Fitzgerald. Orice corp în mișcare față de eterul fix se contractă pe direcția de mișcare conform relației:

$$l(v) = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (2.12)$$

unde l_0 este lungimea corpului în repaus față de sistemul de referință al eterului.

Chiar cu această ipoteză mișcarea Pământului față de un sistem de referință privilegiat s-ar pune în evidență prin efectuarea unui experiment de tip Michelson și Morley cu aceeași poziție a dispozitivului și observarea sistemului de franje la două momente astfel alese încât valorile corespunzătoare vitezei Pământului să difere esențial. Ipoteza a fost infirmată de experimentul realizat în 1935 de Kennedy și Thorndyke.

2.2.2 Experiența lui Bertozzi

Rezultatele experimentului au fost publicate de W. Bertozzi în *American Journal of Physics* 32, 1964 p 551. Experimentul a răspuns la întrebarea: viteza luminii poate fi depășită? Pentru aceasta se consideră mișcarea unor electroni într-un accelerator Van-der Graff. Electronii sunt accelerați la o diferență de potențial U care este cunoscută cu o bună precizie. Energia cinetică căpătată de electroni este:

$$E_c = eU \quad (2.13)$$

Electronii cad pe un disc de aluminiu căruia îi cedează energia lor și-i măresc temperatura. Astfel poate fi măsurată cu precizie energia pe care electronii o cedează discului în unitatea de timp. Pe baza mecanicii nerelativiste ar trebui ca pătratul vitezei să fie egal cu:

$$v^2 = \frac{2}{m} E_c \quad (2.14)$$

Viteza este măsurată prin determinarea timpului în care electronii accelerați străbat o regiune în care nu există câmp electric până ce ajung la discul considerat.

Astfel graficul $v^2 = v^2(E_c)$ ar trebui să fie o dreaptă. Se constată că pentru energii ale electronilor mai mari decât 10^5 eV graficul teoretic nu corespunde cu cel experimental și se observă că pe măsură ce energia cinetică crește, viteza se apropie asimptotic de valoarea limită c (Fig.2.3).

Concluziile care se trag din totalitatea experimentelor realizate sunt:

- a) Teoriile câmpului electromagnetic bazate pe ipoteza eterului sunt inconsistente, deoarece eterul ar trebui să aibă proprietăți contradictorii.
- b) Prin nici o experiență nu a putut să fie pusă în evidență mișcarea uniformă a sistemului de referință propriu față de un sistem de referință privilegiat (eterul).

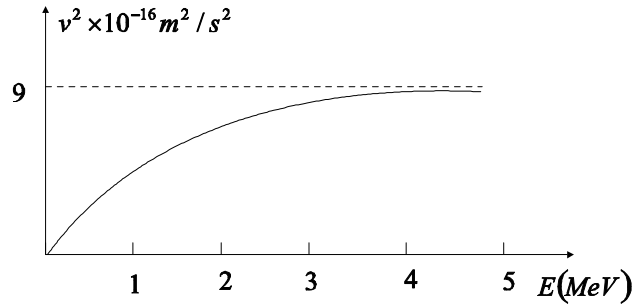


Figura 2.3: Rezultatul experimentului Bertozzi: pătratul vitezei tinde asimptotic către o anumită limită

c) Experimentele de tip Michelson și Morley pot fi explicate dacă admitem că viteza luminii în vid are aceiași valoare indiferent de mișcarea sursei sau observatorului.

2.3 Postulatele teoriei relativității

Teoria relativității se bazează pe două principii fundamentale:

1. *Principiul relativității restrânse:*

Legile fizicii și rezultatele tuturor experiențelor efectuate sunt aceleași în toate sistemele de referință inerțiale; nu există sistem de referință inerțial preferențial.

2. *Principiul constanței vitezei luminii:*

Valoarea vitezei de propagare a luminii în vid este aceeași în toate sistemele de referință inerțiale.

Primul principiu constituie o generalizare la toate fenomenele fizice a proprietății de invarianță în raport cu translația la viteză constantă, proprietate admisă în fizica nerelativistă la fenomene mecanice.

Dacă se admite valabilitatea ecuațiilor Maxwell într-un sistem inerțial având în vedere incompatibilitatea acestora cu transformările Galilei, trebuie să renunțăm la valabilitatea acestora din urmă. Aceasta duce la reformularea legilor mecanicii și la găsirea altor transformări față de care acestea și ecuațiile Maxwell trebuie să fie invariante. Trebuie remarcat că valabilitatea legilor lui Maxwell și a primului principiu al teoriei relativității duce la rezultatul privind invarianța vitezei luminii în vid.

Aceasta însă nu înseamnă că cel de-al doilea principiu poate fi considerat ca derivat din primul principiu. Aceasta deoarece teoria relativității este o teorie generală iar electromagnetismul este o teorie particulară care trebuie să satisfacă condițiile impuse de teoria relativității restrânse.

Al doilea principiu are o formulare ce pare particulară datorită referirii la un fenomen fizic particular - și anume acela al propagării luminii în vid. Se va constata că orice alt fenomen particular de propagare cu viteza c într-un anumit sistem de referință inerțial, satisface în mod obligatoriu aceeași proprietate de invarianță (adică valoarea vitezei de propagare se păstrează constantă în orice alt sistem de referință). Principiul al doilea duce la recunoașterea unei viteze invariante. Atunci când ne referim la viteza luminii o facem pentru a preciza valoarea acesteia.

Determinarea pozițiilor și momentelor presupune existența unor rigle și ceasornice proprii fiecărui sistem de referință inerțial. Referitor la măsurarea lungimilor trebuie remarcat că etaloanele sunt identice în mecanica newtoniană. Ele pot fi alese arbitrar, deoarece legile fizicii se exprimă la fel indiferent de etalon.

Măsurarea timpului nu poate fi considerată în afara evenimentelor ce-i măsoară scurgerea. Practic nu se măsoară timpul ci se precizează momente. Reperul temporal presupune măsurarea timpului în fiecare loc prin considerarea unor ceasornice locale. Posibilitatea de a defini ceasornice identice în orice punct din spațiu rezultă din proprietatea de omogenitate a spațiului (legile fizicii sunt independente de locurile unde se produc procesele respective).

Problema care se pune este aceea a definirii unui timp comun pentru punctele A și B , adică de a corela indicațiile din cele două puncte (într-un sistem de referință inerțial dat). Aceasta înseamnă să se dea o semnificație pentru simultaneitate. Vom utiliza în continuare definiția pentru sincronizare dată de Einstein. Să considerăm de exemplu că la momentul t_A (măsurat de ceasornicul din A) este emis un semnal luminos care ajunge în B unde se consideră că se reflectă și că ajunge din nou în A la momentul t'_A . Vom considera că momentul în care semnalul ajunge în punctul B este t_B (măsurat cu ceasornicul din B). Timpul necesar parcurgerii drumului AB și BA este $\Delta t = t'_A - t_A$. Duratele în care semnalele parcurg drumurile AB și BA sunt egale. Atunci momentul asociat evenimentului care constă în ajungerea semnalului luminos în B va fi:

$$\frac{t_A + t'_A}{2}$$

indicat de ceasornicul din A .

În mod natural vom considera că pentru ca cele două ceasornice din A și B să fie simultane este necesar ca indicația t_B a ceasornicului din B să coincidă cu indicația ceasornicului din A considerată pentru evenimentul respectiv. Rezultă că pentru ca cele două ceasornice să fie sincrone este necesar ca:

$$t_B = \frac{1}{2}(t_A + t'_A) \quad (2.15)$$

În acest mod pot fi sincronizate toate ceasornicele din sistemul de referință considerat. Pe baza operației de sincronizare, simultaneitatea pentru două evenimente ce se desfășoară în locuri diferite, se poate introduce prin egalitatea momentelor de timp t_A și t_B indicate de ceasornicele din punctele respective.

Introducem acum și al doilea principiu al teoriei relativității prin considerarea distanței D dintre punctele A și B și a vitezei luminii c . Momentul emisiei semnalului din A , t_A și cel al recepției semnalului în punctul B adică t_B sunt legate prin relația:

$$t_B - t_A = \frac{D}{c} \quad (2.16)$$

În virtutea principiilor teoriei relativității ecuația de mai sus trebuie să se verifice în orice alt sistem de referință inerțial, adică:

$$t'_B - t'_A = \frac{D'}{c} \quad (2.17)$$

În general spunem că două evenimente sunt corelabile printr-un semnal luminos dacă momentele când au loc evenimentele și distanța dintre ele satisfac o relație de tipul (2.16).

2.3.1 Intervalul spațio-temporal

Așa cum am discutat, un eveniment este definit prin locul unde se petrece și momentul de timp când se petrece, adică poate fi caracterizat cu ajutorul a trei coordonate spațiale și una temporală. Adesea este

comod să utilizăm un spațiu reprezentativ cu patru dimensiuni, trei axe fiind axele de coordonate, iar a patra axa timpului. În acest spațiu un eveniment va fi reprezentat printr-un punct. Astfel de puncte se numesc puncte de univers. În cursul evoluției spațio-temporale a unei particule, punctul de univers descrie o anumită curbă în acest spațiu. Curba poartă numele de linie de univers. Pentru o particulă fixă, linia de univers este o dreaptă paralelă cu axa timpului.

Să transcriem principiul invarianței vitezelor în limbaj matematic. Pentru aceasta vom considera două sisteme de referință S și S' care se deplasează unul față de altul cu viteza v , astfel încât axele Ox și $O'x'$ coincid, iar axele Oy și Oz să fie paralele cu $O'y'$ și respectiv cu $O'z'$.

Să considerăm primul eveniment, emisia unui semnal luminos din punctul de coordonate (x_1, y_1, z_1) la momentul t_1 în sistemul de referință S și cel de-al doilea eveniment sosirea acestui semnal în punctul caracterizat de coordonatele (x_2, y_2, z_2) la momentul t_2 . Semnalul se propagă cu viteza c astfel că spațiul parcurs este $c(t_2 - t_1)$. Pe de altă parte drumul parcurs este:

$$\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right]^{1/2}$$

Atunci:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2 = 0 \quad (2.18)$$

Aceleași două evenimente pot fi observate și în sistemul S' . Fie x'_1, y'_1, z'_1 și t'_1 coordonatele primului eveniment și x'_2, y'_2, z'_2 și t'_2 coordonatele celui de-al doilea eveniment. Viteza luminii fiind aceeași avem o relație analoagă cu cea dată de (2.18):

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2 (t'_2 - t'_1)^2 = 0 \quad (2.19)$$

Dacă (x_1, y_1, z_1, t_1) și (x_2, y_2, z_2, t_2) sunt coordonatele a două evenimente oarecare, cantitatea:

$$s_{12}^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \quad (2.20)$$

este numită intervalul spațio-temporal dintre cele două evenimente (sau interval de univers).

Dacă două evenimente sunt infinitezimal vecine intervalul se scrie:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.21)$$

Expresiile anterioare permit să se considere că intervalul din punct de vedere formal este o distanță între două puncte ale spațiului reprezentativ. Astfel, dacă $ds^2 = 0$ într-un sistem de referință inerțial atunci $ds'^2 = 0$ în alt sistem de referință inerțial iar ds^2 și ds'^2 trebuie să fie proporționale:

$$ds'^2 = a ds^2 \quad (2.22)$$

Coeficientul a trebuie să depindă doar de viteza relativă a celor două sisteme. Dacă a ar depinde de coordonate și de timp, diferitele puncte din spațiu nu ar mai fi echivalente. Coeficientul a nu depinde nici de direcția vitezei căci în acest caz ar contrazice izotropia spațiului.

Să considerăm trei sisteme de referință inerțiale S, S_1, S_2 . Fie $\vec{v}_1$ viteza relativă a lui S_1 față de S și $\vec{v}_2$ viteza relativă a lui S_2 față de S . Atunci:

$$ds^2 = a(v_1) ds_1^2 \quad (2.23)$$

$$ds^2 = a(v_2) ds_2^2 \quad (2.24)$$

și

$$ds_1^2 = a(v_{12}) ds_2^2 \quad (2.25)$$

De aici rezultă:

$$\frac{a(v_1)}{a(v_2)} = a(v_{12}) \quad (2.26)$$

Dar v_{12} depinde nu numai de valorile absolute ale lui $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ ci și de unghiul dintre ele. Acest unghi însă nu trebuie să apară în membrul drept al relației (2.26). Din relația (2.26) rezultă că această constantă este egală cu unitatea. Rezultă că:

$$ds^2 = ds'^2 \quad (2.27)$$

Egalitatea intervalelor infinitezimale determină și egalitatea intervalelor finite:

$$s = s' \quad (2.28)$$

Rezultă o concluzie foarte importantă și anume aceea că intervalul dintre două evenimente este același în toate sistemele de referință inerțiale.

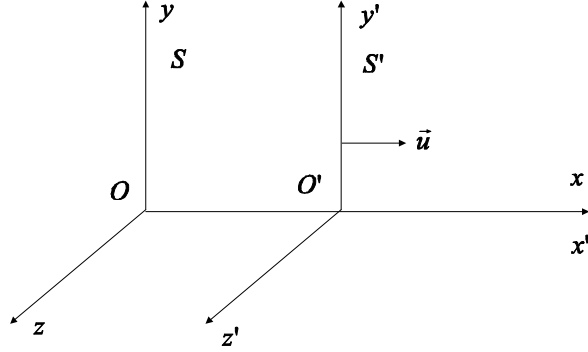


Figura 2.4: Sistemul S' este în mișcare cu viteza $\vec{u}$ față de sistemul S .

2.4 Transformările Lorentz

2.4.1 Transformările Lorentz speciale

Ne propunem să găsim formulele de transformare de la un sistem de referință la altul adică să găsim formulele ce exprimă coordonatele x', y', z', t' ale unui eveniment într-un sistem de referință S' în funcție de coordonatele x, y, z, t ale aceluiași eveniment raportat la sistemul de referință S (Fig.2.4).

Noile transformări trebuie să fie liniare ca și transformările lui Galilei, deoarece ecuațiile de grad mai înalt au mai multe soluții și atunci observațiile dintr-un sistem de referință s-ar interpreta în mod neunivoc în alte sisteme de referință. Trebuie să existe o corespondență biunivocă între coordonatele aceluiași eveniment în diverse sisteme de referință. În plus pentru fenomenele mecanice obișnuite noile transformări trebuie să se reducă la transformările lui Galilei.

Vom considera cele două sisteme de referință ca în Fig. 2.4 (axe Ox și $O'x'$ se suprapun iar axele Oy și Oz sunt paralele cu Oy' și respectiv Oz'). Sistemul S' se deplasează cu viteza u constantă de-a lungul axei Ox . În cazul celor două sisteme coordonatele y și z nu sunt afectate de mișcarea reciprocă a sistemelor adică $y' = y$ și $z' = z$. Într-adevăr să presupunem:

$$y' = ax + by + cz + dt \quad (2.29)$$

Pentru un eveniment din planul Oxz avem $y = 0$ și $y' = 0$ adică:

$$0 = ax + cz + dt$$

pentru orice x , z și t . Aceasta implică $a = 0$, $c = 0$ și $d = 0$.

Rezultă:

$$y' = by \quad (2.30)$$

Sistemele fiind echivalente este necesar ca și

$$y = by' \quad (2.31)$$

De aici rezultă $b^2 = 1$ adică $b = \pm 1$. Pentru aceeași orientare a axelor, $b = 1$ și $y = y'$. Dacă axele sunt în sensuri contrare $b = -1$. În mod analog ajungem la concluzia că $z = z'$.

Pentru coordonatele x' , x relația de transformare nu trebuie să depindă de coordonatele y și z .

$$x' = \alpha (x - ut) \quad (2.32)$$

unde α nu depinde de coordonate ci eventual de viteza u de translație dintre cele două sisteme de referință. În mod analog dacă considerăm transformarea inversă ea trebuie să aibă aceeași formă, singura schimbare este aceea că viteza relativă a lui S față de S' este $-u$.

$$x = \alpha (x' + ut') \quad (2.33)$$

Coeficientul α trebuie să fie același în virtutea echivalenței sistemelor de referință. Pentru determinarea lui α vom aplica principiul constanței vitezei luminii în vid. Să considerăm că în momentul în care originile celor două sisteme O și O' coincid se emite un semnal luminos. Un punct oarecare în care ajunge semnalul luminos are coordonatele $x = ct$ în S și $x' = ct'$ în S' . Aplicăm transformările pentru acest punct:

$$ct' = \alpha (c - u) t \quad (2.34)$$

și:

$$ct = \alpha (c + u) t' \quad (2.35)$$

Înmulțind membru cu membru relațiile (2.34) și (2.35) rezultă:

$$c^2 tt' = \alpha^2 (c^2 - u^2) tt'$$

Atunci:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (2.36)$$

Rezultă:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (2.37)$$

și:

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (2.38)$$

Pentru a determina transformarea timpului vom înlocui (2.37) în relația (2.38). Atunci:

$$x = \frac{x - ut}{1 - u^2/c^2} + \frac{ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (2.39)$$

Rezultă:

$$t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (2.40)$$

În mod analog:

$$t = \frac{t' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (2.41)$$

Rezumând: transformările Lorentz exprimă trecerea de la un sistem de referință la altul care se mișcă față de primul cu viteză constantă. Ele sunt:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (2.42)$$

$$y' = y \quad (2.43)$$

$$z' = z \quad (2.44)$$

$$t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (2.45)$$

sau:

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (2.46)$$

$$y = y' \quad (2.47)$$

$$z = z' \quad (2.48)$$

$$t = \frac{t' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (2.49)$$

Transformările lui Galilei se obțin ca un caz limită când $c \rightarrow \infty$ sau în mod aproximativ când $u \ll c$.

2.4.2 Consecințe ale transformărilor Lorentz

Contrația lungimilor

Să considerăm o bară în repaus față de sistemul S' care este în mișcare uniformă cu viteza u față de sistemul S . Deoarece bara este în repaus față de sistemul S' , coordonatele extremităților sale x'_1 și x'_2 sunt independente de momentul măsurării. Lungimea:

$$l_0 = x'_2 - x'_1 \quad (2.50)$$

reprezintă lungimea de repaus sau lungimea proprie a barei.

Pentru a determina lungimea barei din sistemul S măsurăm coordonatele capetelor barei x_1 și x_2 la același moment de timp. Legăturile dintre coordonatele x_1 , x_2 și x'_2 , x'_1 se obțin cu ajutorul transformărilor Lorentz:

$$x'_2 = \frac{x_2 - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (2.51)$$

$$x'_1 = \frac{x_1 - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (2.52)$$

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (2.53)$$

Notând cu $l = x_2 - x_1$ lungimea barei măsurate din sistemul S atunci:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (2.54)$$

Rezultă că la măsurarea unei bare în mișcare se obține o lungime mai mică decât atunci când bara este măsurată în repaus. Această contracție se numește contracția Lorentz.

Relativitatea simultaneității

Să considerăm două evenimente A și B simultane în sistemul S . Aceasta înseamnă că evenimentele au loc la același moment de timp. Considerăm că ele au loc în punctele de coordonate $(x_1, 0, 0)$ și $(x_2, 0, 0)$. În sistemul S' evenimentul A se petrece la momentul:

$$t_1 = \frac{t - \frac{u}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (2.55)$$

iar evenimentul B se petrece la momentul:

$$t_2 = \frac{t - \frac{u}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (2.56)$$

Se observă că:

$$t_1 - t_2 = \frac{u}{c^2} \frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \neq 0 \quad (2.57)$$

Rezultă că în sistemul S' cele două evenimente nu sunt simultane.

Dilatarea duratelor

Să considerăm două evenimente care au loc în același punct de coordonate (x', y', z') din sistemul S' , la momentele t'_1 și t'_2 . Timpul care separă cele două evenimente în sistemul S' este $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ și poartă numele de timp propriu.

Dacă măsurăm intervalul de timp dintre cele două evenimente în sistemul S , față de care S' se deplasează cu viteza u de-a lungul axei Ox obținem:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad (2.58)$$

Legătura dintre momentele de timp din cele două sisteme de referință se obține cu ajutorul transformărilor Lorentz:

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (2.59)$$

și

$$t_2 = \frac{t'_2 + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (2.60)$$

Atunci:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.61)$$

Efectul poartă numele de dilatare a timpului, deoarece timpul măsurat în sistemul S este mai mare decât cel măsurat în sistemul propriu. Rezultă că ceasurile în mișcare par a rămâne în urma celor aflate în repaus.

Compunerea vitezelor

Considerăm în continuare că sistemul S' se deplasează cu viteza u de-a lungul axei Ox . Diferențiind relațiile (2.46)-(2.49) se obține:

$$dx = \frac{dx' + udt'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (2.62)$$

$$dy = dy' \quad (2.63)$$

$$dz = dz' \quad (2.64)$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{u}{c^2} \cdot dx'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (2.65)$$

Atunci prin împărțirea relației (2.62) la (2.65) rezultă:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + udt'}{dt' + \frac{u}{c^2}dt'} \quad (2.66)$$

Deoarece $v'_x = dx'/dt'$ din relația (2.66):

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2}} \quad (2.67)$$

Prin împărțirea lui (2.63) la (2.65) rezultă:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{dt' + \frac{u}{c^2} dx'} = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \quad (2.68)$$

În mod analog:

$$v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u}{c^2} \cdot v'_x} \quad (2.69)$$

În cazul limită când $c \rightarrow \infty$ se regăsesc formulele de compunere a vitezelor din mecanica clasică: $v_x = v'_x + u$, $v_y = v'_y$, $v_z = v'_z$.

2.5 Universul cuadrimensional

2.5.1 Cuadrivectorul spațiu- timp

În relativitate evenimentul este noțiunea fundamentală. El este caracterizat de trei coordonate spațiale (x, y, z) și una temporală (t).

Vom utiliza pentru coordonatele spațiale notația $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Astfel, într-un sistem S un eveniment va fi specificat prin coordonate (x_1, x_2, x_3, t) iar într-un alt sistem de referință S' prin coordonatele (x'_1, x'_2, x'_3, t') . Dacă considerăm două evenimente $E_1(x_1, x_2, x_3, t_1)$ și $E_2(y_1, y_2, y_3, t_2)$ în S și aceleași două evenimente în alt sistem S' , $E_1(x'_1, x'_2, x'_3, t'_1)$ și $E_2(y'_1, y'_2, y'_3, t'_2)$ atunci mărimile care reprezintă intervalele spațio-temporale în cele două sisteme de referință:

$$\Delta s^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 - c^2 (t_1 - t_2)^2$$

și:

$$\Delta s'^2 = (x'_1 - y'_1)^2 + (x'_2 - y'_2)^2 + (x'_3 - y'_3)^2 - c^2 (t'_1 - t'_2)^2$$

sunt egale.

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2 \quad (2.70)$$

Această proprietate sugerează, din punct de vedere matematic, o structură de tip spațiu vectorial a mulțimii evenimentelor. Fiecărui eveniment

îi corespunde în acest spațiu un punct, mărimea Δs^2 având în acest spațiu rolul de normă deoarece ea este un invariant.

În acest nou spațiu, cuadrimensional introducem formal notația $x_4 = ix_0 = ict$. Se poate astfel scrie:

$$\Delta s^2 = \sum_{\mu=1}^4 (\Delta x_{\mu})^2 = \sum_{k=1}^3 (\Delta x_k)^2 - (\Delta x_0)^2 \quad (2.71)$$

Această mărime o putem considera ca o definiție a “lungimii” în spațiul respectiv. Trebuie remarcat că această “lungime” nu este afectată de schimbarea sistemului de coordonate.

Definim cuadrivectorul spațiu-timp ca fiind ansamblul de patru coordonate ce caracterizează un eveniment (trei spațiale și una temporală). $(x_1, x_2, x_3, x_4 = ix_0 = ict)$. Mai mult, cele patru coordonate pot fi considerate ca fiind componentele unei raze vectoare cuadrimensionale, care poate fi privită ca fiind echivalentul vectorului de poziție în spațiul tridimensional.

Pentru a ușura modul în care se vor exprima mărimile ce vor interveni în continuare vom utiliza notațiile:

$$\beta = \frac{u}{c} \quad (2.72)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (2.73)$$

Dacă se ține cont de notațiile introduse mai sus, atunci relațiile de transformare (2.42-2.45) dintre coordonatele unui eveniment în $S (x_1, x_2, x_3, x_4)$ și ale aceluiași eveniment în $S' (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$ se scriu:

$$x'_1 = \frac{x_1 + i\frac{u}{c}(ict)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \alpha (x_1 + i\beta x_4) \quad (2.74)$$

$$x'_2 = x_2 \quad (2.75)$$

$$x'_3 = x_3 \quad (2.76)$$

$$x'_4 = ict' = ic \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \alpha (x_4 - i\beta x_1) \quad (2.77)$$

Dacă reprezentăm cuadrivectorul spațiu-timp printr-o matrice coloană atunci putem introduce o matrice de transformare, astfel că relațiile (2.74-2.77) se pot scrie astfel:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & i\beta\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\alpha & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

Putem generaliza și vom defini un cuadrivector ca fiind ansamblul mărimilor A_1, A_2, A_3, A_4 care se transformă la trecerea de la un sistem de referință la alt sistem de referință cu ajutorul aceleiași matrice de transformare ca și cuadrivectorul spațiu-timp. Se poate defini norma în acest spațiu:

$$\sum_{\mu=1}^4 A_\mu^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 \quad (2.79)$$

Se poate demonstra că această mărime este un invariant în orice sistem de referință inerțial.

Timpul propriu

Pentru a defini acest concept ne imaginăm că se observă dintr-un sistem de referință inerțial un corp care este în mișcare arbitrară, de care este legat un ceasornic. Mișcarea corpului poate fi considerată uniformă la orice moment de timp. Rezultă că se poate atașa de corp un sistem de referință inerțial pentru un interval de timp infinitezimal. În intervalul de timp dt măsurat de ceasornicul aflat în repaus, ceasornicul aflat în mișcare parcurge distanța:

$$\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$$

Problema care se pune este aceea de a determina timpul indicat de ceasornicul aflat în mișcare. El este în repaus față de sistemul de referință atașat de el. Atunci $x'_1 = x'_2 = x'_3 = 0$. Se ține cont că intervalul spatio-temporal este constant:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2 dt^2 = -c^2 d\tau^2 \quad (2.80)$$

unde τ reprezintă timpul măsurat de ceasornicul mobil în sistemul de referință legat de el. El poartă denumirea de timp propriu.

Deoarece:

$$\frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{dt^2} = v^2$$

rezultă:

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{c^2 dt^2}} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2 dt^2}{c^2 dt^2}} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.81)$$

Semnificația lui $d\tau$ este aceea de interval de timp infinitezimal măsurat în sistemul instantaneu propriu de referință al corpului.

Integrând această expresie rezultă timpul indicat de ceasornicul mobil față de cel indicat de ceasornicul fix. Dacă viteza este constantă:

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 = (t_2 - t_1) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.82)$$

Formula arată că timpul propriu al unui corp în mișcare este mai scurt decât timpul în sistemul de referință față de care se deplasează corpul.

2.5.2 Cuadrivectorii viteză și accelerație

Pornind de la cuadrivectorul spațiu-timp, este posibil să formăm un nou cuadrivector:

$$u_i = \frac{dx_i}{d\tau} \quad (2.83)$$

El poartă numele de cuadriviteză a unei particule. Componentele sale se explicitază astfel:

$$u_i = \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{dx_i}{dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \alpha v_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.84)$$

$$u_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = \frac{ic dt}{dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = i\alpha c \quad (2.85)$$

Putem face notația:

$$u_i = \frac{dx_i}{d\tau} = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3, i\alpha c) = (\alpha \vec{v}, i\alpha c) \quad (2.86)$$

Se observă că:

$$\sum_{i=1}^4 u_i u_i = \alpha^2 v^2 - \alpha^2 c^2 = -c^2 \quad (2.87)$$

Din punct de vedere geometric u_i este un cuadvivector tangent la linia de univers.

În mod analog se poate defini cuadvivectorul accelerație:

$$w_i = \frac{du_i}{d\tau} \quad (2.88)$$

Astfel:

$$w_i = \frac{du_i}{d\tau} = \frac{d(\alpha v_i)}{dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \alpha \left(v_i \frac{d\alpha}{dt} + \alpha a_i \right), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.89)$$

unde $a_i = dv_i/dt$. Deoarece:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{\alpha^3}{c^2} (\vec{v} \vec{a}) \quad (2.90)$$

relația (2.89) devine:

$$w_i = \alpha^2 a_i + \frac{\alpha^4}{c^2} (\vec{v} \vec{a}) v_i, \quad i = 1..3 \quad (2.91)$$

$$w_4 = \frac{du_4}{d\tau} = ic \frac{d\alpha}{dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{i\alpha^4 (\vec{v} \vec{a})}{c} \quad (2.92)$$

Atunci:

$$w_i = \frac{du_i}{d\tau} = \left(\alpha^2 \vec{a} + \frac{\alpha^2}{c^2} (\vec{v} \vec{a}) \vec{v}, \quad \frac{i\alpha^4 (\vec{v} \vec{a})}{c} \right) \quad (2.93a)$$

Dacă se derivează relația (2.87) la τ se obține:

$$\sum_{i=1}^4 u_i w_i = 0 \quad (2.94)$$

Cuadvivectorul accelerație este ortogonal pe cuadvivectorul viteză.

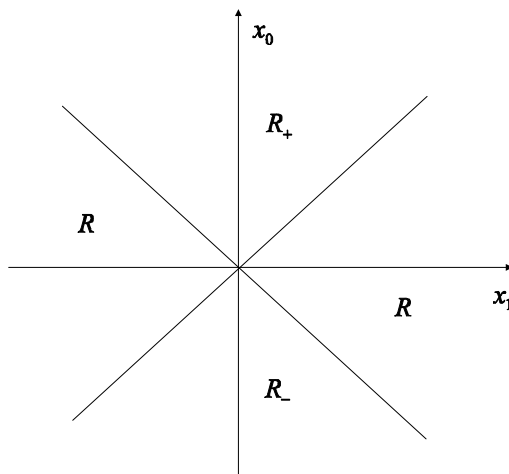


Figura 2.5: Împărțirea în trei regiuni a spațiului cuadridimensional de către conul luminos

2.5.3 Intervale spațiale și temporale

Un eveniment se poate reprezenta într-un spațiu cuadridimensional care are trei axe pe care se reprezintă coordonatele spațiale (x_1, x_2 , și x_3) și a patra pe care se reprezintă coordonata temporală ($x_0 = ct$). Un eveniment care are loc într-un anumit loc și la un anumit moment de timp este reprezentat printr-un punct în acest spațiu, punct care este numit punct de univers.

Mulțimea tuturor evenimentelor (punctelor de univers) corelabile cu evenimentul 0 (evenimentul caracterizat de coordonatele nule) este dată de ecuația:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (2.95)$$

Aceasta este ecuația unei hipersuprafețe tridimensionale în spațiul $k^{(4)}$ numită hipercon luminos.

Deoarece nu putem reprezenta un spațiu cuadridimensional vom considera intersecția hiperconului luminos cu planul de coordonate (x_1, x_0) (Fig. 2.5). Dreptele de intersecție a hiperconului luminos cu planul considerat satisfac ecuațiile $x_1 = \pm x_0 = \pm ct$. Hiperconul luminos împarte spațiul în trei regiuni:

R_+ : mulțimea evenimentelor separate de origine prin intervalul $\Delta s^2 <$

0 și caracterizate prin $t > 0$; (intervalul Δs^2 este considerat între un punct din spațiu și evenimentul 0)

R_- : mulțimea evenimentelor separate de origine prin intervalul $\Delta s^2 < 0$ și caracterizate prin $t < 0$;

R : mulțimea evenimentelor separate de origine prin intervalul $\Delta s^2 > 0$.

Vom considera un nou sistem de referință S' care se deplasează cu viteza u de-a lungul axei Ox_1 și care are axele paralele cu axele sistemului S inițial. Trebuie remarcat că evenimentul caracterizat prin coordonatele $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ și $x_0 = 0$ ($t = 0$) prin aplicarea relațiilor de transformare Lorentz în noul sistem de coordonate este caracterizat de coordonatele $x'_1 = 0, x'_2 = 0, x'_3 = 0$ și $x'_0 = 0$. Aceasta arată că evenimentul 0 are coordonatele nule în toate sistemele de referință. În cazul unui eveniment caracterizat de coordonatele (x_1, x_2, x_3, x_0) aplicând transformările lui Lorentz, noile coordonate (x'_1, x'_2, x'_3, x'_0) în sistemul S' sunt:

$$x'_1 = \alpha(x_1 - \beta x_0) \quad (2.96)$$

$$x'_2 = x_2 \quad (2.97)$$

$$x'_3 = x_3 \quad (2.98)$$

$$x'_0 = \alpha(x_0 - \beta x_1) \quad (2.99)$$

În Fig. 2.6 reprezentăm axele Ox_1, Ox_0 ale sistemului S și axele Ox'_1, Ox'_0 sistemului S' .

Ecuția axei Ox'_1 se obține punând $x'_0 = 0$, de unde rezultă $x_0 = \beta x_1$. Aceasta este ecuația unei drepte care face unghiul

$$\theta = \arctan \frac{x_0}{x_1} = \arctan \beta \quad (2.100)$$

cu axa Ox_1 .

Ecuția axei Ox'_0 se obține pentru $x'_1 = 0$, adică $x_1 = \beta x_0$ care este o dreaptă ce face tot unghiul:

$$\theta = \arctan \frac{x_1}{x_0} = \arctan \beta \quad (2.101)$$

cu axa Ox_0 .

Unghiul cu care sunt rotite noile axe față de cele vechi este mai mic decât $\pi/4$, deoarece $\beta = u/c < 1$.

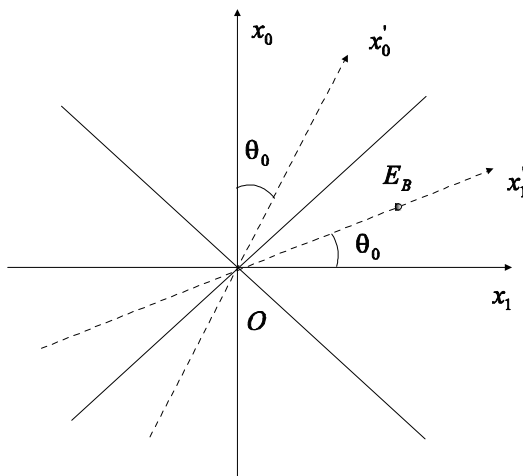


Figura 2.6: Reprezentarea sistemului S și a sistemului S'

Intervale de tip spațial

Spunem că două evenimente sunt separate printr-un interval de tip spațial dacă $\Delta s^2 > 0$. Datorită caracterului invariant al intervalului spațio-temporal, în orice sistem de referință $\Delta s^2 > 0$. Există câteva proprietăți pe care le au aceste intervale:

a) Nu există sistem de referință în care evenimentele să se petreacă în același loc (de aici denumirea de separare spațială). Presupunând că există un astfel de sistem de referință ar rezulta că:

$$\Delta s^2 = -c^2 t^2 \leq 0 \quad (2.102)$$

ceea ce contrazice ipoteza separării spațiale.

b) Există un sistem de referință pentru care evenimentele sunt simultane.

Pentru a demonstra posibilitatea ca cele două evenimente să fie simultane vom considera pentru simplificare evenimentul E_A ca fiind evenimentul 0 și un eveniment E_B din regiunea considerată. Pentru ca evenimentele E_A și E_B să fie simultane este necesar ca să găsim un sistem de referință a cărui axă Ox'_1 să treacă prin E_B . Acest lucru este posibil deoarece se poate găsi o axă Ox'_1 , care trece prin E_B : ea trebuie rotită cu un unghi $\theta < \pi/4$ față de Ox_1 , fapt ce este posibil.

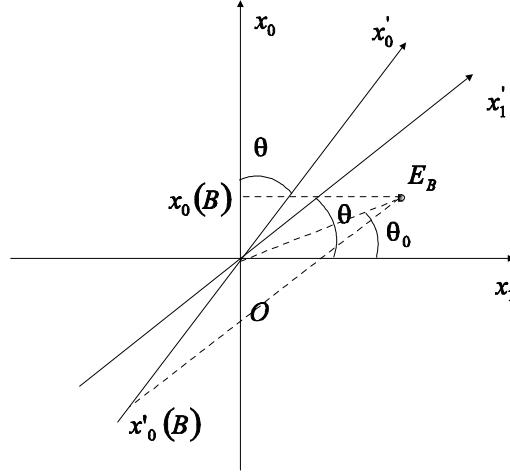


Figura 2.7: Evenimentul E_B în sistemul S este ulterior evenimentului 0, iar în sistemul S' este anterior evenimentului 0.

c) Ordinea în timp a două evenimente separate spațial poate fi inversată.

Considerăm din nou originea O în E_A și evenimentul E_B reprezentat printr-un punct al planului, $B(x_1, x_0)$ cu $x_0(B) > 0$ (Fig.2.7).

Vom considera un nou sistem de referință astfel încât unghiul dintre Ox_1 și Ox'_1 să fie $\theta > \theta_0$.

Atunci $x'_0(B) < 0$, adică în noul sistem de referință evenimentul E_B este anterior evenimentului E_A . Rezultă că ordinea temporală a celor două evenimente este inversată în cele două sisteme de referință.

Caracterul relativ al ordinii în timp a celor două evenimente face ca pe baza reprezentărilor obișnuite privind corelarea fizică a diferitelor evenimente, să excludem posibilitatea unei legături de tip cauză efect în cazul unei separări de tip spațial.

Intervale de tip temporal

Spunem că două evenimente sunt separate printr-un interval de tip temporal dacă $\Delta s^2 < 0$. În cazul a două evenimente despărțite printr-un astfel de interval există posibilitatea corelării lor printr-un semnal cu viteza $v < c$.

Invers se poate afirma că dacă două evenimente pot fi corelate printr-

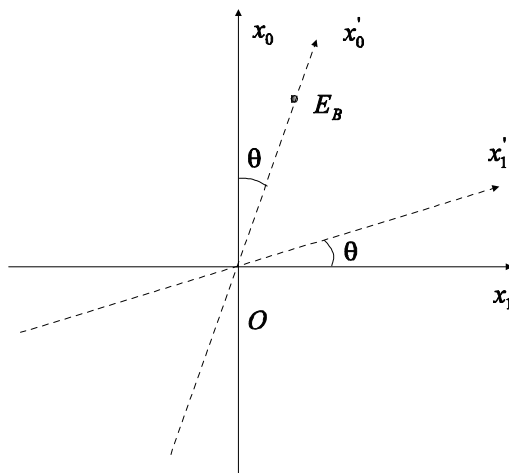


Figura 2.8: Evenimentele E_B și O se petrec în același loc în sistemul S'

un semnal cu viteză mai mică decât cea a luminii intervalul care le separă este unul de tip temporal:

$$\Delta s^2 = (\vec{r}_B - \vec{r}_A)^2 - c^2 (t_B - t_A)^2 = v^2 \Delta t^2 - c^2 \Delta t^2 = (v^2 - c^2) (t_B - t_A)^2 < 0$$

Există o serie de proprietăți pe care le satisface intervalul de tip temporal.

a) Nu există nici un sistem de referință în care cele două evenimente să fie simultane. Dacă $t_B = t_A$, atunci rezultă că $\Delta s^2 > 0$; fapt ce ar contrazice definiția dată intervalului temporal $\Delta s^2 < 0$.

b) Există un sistem de referință în care cele două evenimente se petrec în același loc. Pentru acestea trebuie găsit un sistem de referință a cărui axă Ox'_0 să treacă prin E_B . Acest lucru este posibil deoarece $\theta < \pi/4$ (Fig. 2.8).

c) Ordinea în timp a două evenimente separate printr-un interval temporal nu se modifică. Acest lucru se poate justifica considerând tot o reprezentarea grafică. Faptul că ordinea temporală a acestor tipuri de evenimente nu poate fi schimbată arată faptul că ele pot fi evenimente legate cauzal. Invers intervalul spațio temporal dintre două evenimente legate cauzal este de tip temporal.

Intervalul izotrop

Este cazul când $\Delta s^2 = 0$. În acest caz E_B se află pe hiperconul luminos cu vârful în E_A . Acest interval poate fi considerat ca o limită a intervalului temporal în sensul că astfel de evenimente pot fi corelate printr-un semnal luminos (viteza luminii fiind viteza maximă în univers).

2.6 Elemente de dinamică relativistă

2.6.1 Funcția lui Lagrange

În mecanica clasică formularea cea mai generală a legilor de mișcare se obține din principiul variațional al minimei acțiuni care postulează că în mișcarea între două puncte A și B integrala numită acțiune:

$$S = \int_A^B L dt \quad (2.103a)$$

are valoare minimă.

Mărimea L este funcția lui Lagrange și ea depinde de coordonate și viteze (pentru sistemele în care există legături funcția lui Lagrange depinde de coordonatele și vitezele generalizate). Ea este invariantă la transformările Galilei. Funcția Lagrange trebuie construită pentru fiecare sistem în parte. Astfel pentru sistemul particulă liberă ea are forma:

$$L = \sum_{i=1}^3 \frac{m_0 \dot{x}_i^2}{2} = \sum_{i=1}^3 \frac{m_0 v_i^2}{2} = \frac{m_0 v^2}{2} \quad (2.104)$$

unde $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$.

Impulsul asociat coordonatei x_i este:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \quad (2.105)$$

În teoria relativității formularea principiului variațional trebuie făcută în așa fel încât acesta și consecințele sale să fie în concordanță cu principiile acestei teorii. Pentru o particulă liberă integrala care definește acțiunea trebuie construită cu ajutorul unui scalar invariant la

schimbarea sistemului de referință. Deoarece un scalar invariant este intervalul spatio-temporal atunci vom defini acțiunea astfel:

$$S = k \int_A^B ds \quad (2.106)$$

Dacă se ține cont că:

$$ds = -cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.107)$$

și de relația (2.81) funcția lui Lagrange are forma:

$$L = -kc\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.108)$$

Pentru determinarea constantei k se ține cont că pentru o particulă liberă atunci când $v \ll c$ funcția lui Lagrange este dată de relația (2.104). Pentru viteze mici relația (2.108) devine:

$$L \simeq -kc \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) = -kc + \frac{k}{2} \frac{v^2}{c} \quad (2.109)$$

Termenul kc este o constantă care nu are nici o importanță. Atunci prin identificarea lui (2.109) și (2.103a) se obține:

$$\frac{m_0 v^2}{2} = \frac{k}{2} \frac{v^2}{c} \quad (2.110)$$

Rezultă:

$$k = m_0 c \quad (2.111)$$

Funcția lui Lagrange are astfel forma:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.112)$$

2.6.2 Energia și impulsul

Prin definiție impulsul particulei are componentele:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{unde } i = 1, 2, 3 \quad (2.113)$$

Atunci putem scrie că:

$$\vec{p} = m_0 \alpha \vec{v} \quad (2.114)$$

Energia particulei o vom defini ca și în cazul nerelativist:

$$W = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{x}_i - L = \sum_{i=1}^3 p_i v_i - L = \vec{p} \vec{v} - L \quad (2.115)$$

$$W = m_0 \alpha v^2 + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0 \alpha c^2 \quad (2.116)$$

Aceasta înseamnă că energia particulei nu se anulează când viteza particulei devine zero. Această energie poartă numele de energie de repaus a particulei. Ținând cont de expresia cuadrivectorului viteză:

$$u = (\alpha \vec{v}, \quad i c \alpha)$$

și observând că $\vec{p} = m_0 \alpha \vec{v}$, iar $W = m_0 \alpha c^2 = -i m_0 c u_4$ se poate defini cuadrivectorul energie-impuls:

$$p = m_0 u = \left(\vec{p}, \quad \frac{i}{c} W \right) \quad (2.117)$$

Ținând cont de (2.87) norma cuadrivectorului energie-impuls este:

$$\sum_{i=1}^4 p_i^2 = \sum_{i=1}^4 m_0^2 u_i^2 = -m_0^2 c^2 \quad (2.118)$$

Explicităm relația (2.118) și obținem:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - \frac{W^2}{c^2} = -m_0^2 c^2$$

$$p^2 - \frac{W^2}{c^2} = -m_0^2 c^2$$

Rezultă:

$$W^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (2.119)$$

Aceasta este relația care leagă energia unei particule de impulsul său în mecanica relativistă.

a) Rezultă că masa nu mai este o constantă ci depinde de viteza particulei. Pentru a determina variația masei cu viteza se pornește de la definiția impulsului:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (2.120)$$

Dar s-a dedus că:

$$\vec{p} = m_0 \alpha \vec{v} \quad (2.121)$$

Atunci din (2.120) și (2.121) rezultă:

$$m = m_0 \alpha = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.122)$$

b) Pornind de la expresia variației masei cu viteza (2.122) și relația (2.116) rezultă pentru energia totală expresia:

$$W = mc^2 \quad (2.123)$$

c) Energia cinetică se definește ca fiind diferența dintre energia totală și energia de repaus:

$$E_c = W - W_0 = mc^2 - m_0 c^2 \quad (2.124)$$

Pentru viteze mici $v \ll c$ se obține:

$$\begin{aligned} E_c &= m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \approx m_0 \left(\frac{1}{1 - v^2/2c^2} - 1 \right) \\ E_c &= m_0 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1 \right) \approx \frac{m_0 v^2}{2} \end{aligned} \quad (2.125)$$

Aceasta este expresia energiei cinetice din mecanica clasică.

d) Definițiile anterioare sunt compatibile cu existența particulelor cu masă de repaus nulă. Pentru acestea legătura dintre energie și impuls este:

$$W = cp \quad (2.126)$$

În plus dacă se consideră că ele nu au masă de repaus este necesar ca viteza lor să fie $v = c$.

2.6.3 Particulă aflată sub acțiunea unei forțe

Dacă asupra particulei acționează o forță impulsul și energia particulei variază. Definim componentele cuadrivectorului forță pornind de la analogia cu cazul tridimensional:

$$K_i = \frac{dp_i}{d\tau} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.127)$$

unde p_i sunt componentele cuadrivectorului energie-impuls. Din (2.127):

$$K_i = m_0 \frac{du_i}{d\tau} = m_0 w_i \quad (2.128)$$

Componentele cuadrivectorului forță pot fi puse în legătură cu componentele vectorului forță din spațiul tridimensional. Dacă se ține cont de (2.81) atunci:

$$K_i = \alpha \frac{dp_i}{dt} = \alpha F_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.129)$$

unde F_i sunt componentele vectorului forță.

Se înmulțește relația 2.128 cu u_i și apoi se însumează după indicele i . Se obține:

$$\sum_{i=1}^4 K_i u_i = \sum_{i=1}^4 m_0 w_i u_i = m_0 \sum_{i=1}^4 w_i u_i = 0 \quad (2.130)$$

deoarece cuadrivectorii accelerație și viteză sunt ortogonali. Rezultă că și cuadrivectorii forță și viteză sunt ortogonali. Rescriem relația (2.130) desfășurat:

$$K_1 u_1 + K_2 u_2 + K_3 u_3 + K_4 u_4 = 0$$

$$K_4 u_4 = -K_1 u_1 - K_2 u_2 - K_3 u_3 \quad (2.131)$$

Deoarece $u_4 = ic\alpha$ și $K_i = \alpha F_i$, $u_i = \alpha v_i$ pentru $i = 1, 2, 3$ atunci (2.131) devine:

$$ic\alpha K_4 = -\alpha^2 (F_1 v_1 + F_2 v_2 + F_3 v_3) = -\alpha^2 \vec{F} \vec{v}$$

Astfel:

$$K_4 = \frac{i}{c} \alpha \vec{F} \vec{v} \quad (2.132)$$

Știind că produsul $\vec{F} \vec{v}$ reprezintă tocmai puterea, cuadrivectorul K se mai numește cuadrivectorul forța-putere. El poate fi scris astfel:

$$K = \frac{dp}{d\tau} = \left(\alpha \vec{F}, \quad i \frac{\alpha}{c} \vec{F} \vec{v} \right) \quad (2.133)$$

2.6.4 Echivalența dintre masă și energie

Pentru a determina această legătură vom considera relația:

$$\frac{dp_4}{d\tau} = K_4 \quad (2.134)$$

Deoarece:

$$p_4 = \frac{i}{c} W \quad , \quad d\tau = \frac{dt}{\alpha} \quad , \quad K_4 = i \frac{\alpha}{c} \vec{F} \vec{v} \quad (2.135)$$

se obține:

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \vec{v} \quad (2.136)$$

unde:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m_0 \frac{d(\alpha \vec{v})}{dt} = m_0 \left(\vec{v} \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \frac{d\vec{v}}{dt} \right)$$

Atunci:

$$\frac{dW}{dt} = m_0 v^2 \frac{d\alpha}{dt} + m_0 \alpha \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.137)$$

Pentru determinarea expresiei $\vec{v}d\vec{v}/dt$ vom deriva pe α . Avem:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}\vec{v}}{c^2}}} = \frac{\alpha^3}{c^2} \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Rezultă:

$$\vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{c^2}{\alpha^3} \frac{d\alpha}{dt} \quad (2.138)$$

Atunci relația 2.137 devine:

$$\frac{dW}{dt} = m_0 v^2 \frac{d\alpha}{dt} + \frac{m_0 c^2}{\alpha^2} \frac{d\alpha}{dt} = m_0 c^2 \frac{d\alpha}{dt} \quad (2.139)$$

Se integrează relația 2.139 între două momente de timp:

$$W_2 - W_1 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \right) = m_2 c^2 - m_1 c^2 \quad (2.140)$$

sau:

$$\Delta W = \Delta m c^2 \quad (2.141)$$

Rezultă că:

$$\Delta m = \frac{\Delta W}{c^2} \quad (2.142)$$

Relația de mai sus arată că unei variații a energiei particulei îi corespunde o variație a masei acesteia. Deși relația a fost stabilită între variația masei unei particule și variația energiei sale cinetice relației (2.142) i se atribuie o semnificație universală.