

Capitolul 1

Optică

1.1 Unde electromagnetice

1.1.1 Ecuația undelor electromagnetice

Existența undelor electromagnetice rezultă din ecuațiile Maxwell. Pentru început vom considera un mediu omogen, liniar, izotrop și nedisipativ. Considerăm că în acest mediu nu există distribuții de sarcină sau curenți liberi. În acest caz ecuațiile lui Maxwell devin:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.4)$$

Deoarece mediul de mai sus este liniar, omogen și izotrop:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (1.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.6)$$

Atunci ecuațiile de mai sus devin:

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.7)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1.8)$$

$$\nabla \vec{E} = 0 \quad (1.9)$$

$$\nabla \vec{H} = 0 \quad (1.10)$$

Din aceste ecuații rezultă că un câmp electric variabil în timp generează un câmp magnetic, care la rândul lui generează un câmp electric. Vom arăta că perturbația produsă se propagă în spațiu din aproape în aproape, cu o viteză finită, sub formă de unde electromagnetice.

Pentru a deduce ecuația undelor vom aplica operatorul rotor ecuației (1.7):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \varepsilon \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}) \quad (1.11)$$

Utilizând relația (1.8), relația (1.11) devine:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (1.12)$$

sau:

$$\nabla (\nabla \vec{H}) - \Delta \vec{H} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (1.13)$$

Cum $\nabla \vec{H} = 0$ relația (1.13) devine:

$$\Delta \vec{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.14)$$

În același mod se obține pentru intensitatea câmpului electric $\vec{E}$ ecuația:

$$\Delta \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.15)$$

Ecuațiile (1.14) și (1.15) sunt analoage cu ecuația generală a undelor. De aici rezultă că viteza de propagare a undelor electromagnetice este:

$$v = (\mu \varepsilon)^{-1} \quad (1.16)$$

În cazul când unda se propagă în vid:

$$v = c = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1} = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (1.17)$$

Această valoare este egală cu viteza luminii în vid, fapt ce duce la presupunerea că lumina este o undă de natură electromagnetică. Într-un mediu transparent în care $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ și $\mu = \mu_0 \mu_r$ se obține:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n} \quad (1.18)$$

unde:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \quad (1.19)$$

este indicele de refracție al mediului. Pentru materiale nemagnetice $\mu_r = 1$ și $n = \sqrt{\varepsilon_r}$. Forma soluțiilor pentru undele electromagnetice armonice plane este:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k} \vec{r} \right) \right] \quad (1.20)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k} \vec{r} \right) \right] \quad (1.21)$$

unde:

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u} \quad (1.22)$$

este vectorul de undă, iar $\vec{u}$ este vectorul unitar orientat în sensul direcției de propagare. Dacă sursa undelor este punctiformă se produc unde sferice și soluțiile ecuațiilor (1.14) și (1.15) au forma:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{E}_0}{r} \exp [i (\omega t - kr)] \quad (1.23)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{H}_0}{r} \exp [i (\omega t - kr)] \quad (1.24)$$

Spectrul undelor electromagnetice

În 1867 când Maxwell a publicat pentru prima dată teoria sa despre electromagnetism, banda frecvențelor cunoscute ale undelor electromagnetice se întindea din infraroșu până în ultraviolet. Deși aceasta este regiunea undelor electromagnetice studiate în principal de optică, ea reprezintă un mic segment din spectrul acestora.

Spectrul undelor electromagnetice acoperă un domeniu foarte larg. Astfel, în funcție de frecvență sau lungimea de undă, undele electromagnetice pot fi calificate în radiații gama, raze X, radiații ultraviolete, radiații vizibile, radiații infraroșii, unde radio.

1. Undele radio În 1887, la opt ani după moartea lui Maxwell, Heinrich Hertz, profesor de fizică la Technische Hochschule în Karlsruhe din Germania a generat și a detectat primele unde electromagnetice. Undele obținute de Hertz sunt astăzi clasificate ca fiind în domeniul de radiofrecvență care se întinde de la câțiva herți la 109 Hz (lungimea de undă variază de la câțiva km la 0,3 m). Aceste unde sunt emise de circuitele electro-oscilante. De exemplu un curent alternativ de 50 Hz ce trece prin liniile de transmisie a energiei generează o undă electromagnetică cu $\lambda = \frac{c}{\nu} = 6 \times 10^6 \text{ m} = 6 \times 10^3 \text{ km}$.

Nu există limită superioară teoretică pentru astfel de unde. Frecvențele cele mai mici ale acestei benzi sunt utilizate în emisiile de radio și televiziune.

2. Microundele Regiunea microundelor are frecvențele cuprinse între 10^9 Hz până la $3 \times 10^{11} \text{ Hz}$. Lungimile de undă corespunzătoare sunt cuprinse între 30 cm și 1 mm. Radiațiile capabile să penetreze atmosfera Pământului au lungimile de undă cuprinse între 1 cm și 30 cm. Microundele sunt importante pentru comunicațiile cu vehiculele din spațiul cosmic și deasemenea în radioastronomie. Microundele sunt utilizate în telefonie, pentru ghidarea avioanelor, în cuptoarele cu microunde, pentru determinarea vitezelor (radar). Ca exemplu atomii neutri de hidrogen, distribuiți în vaste regiuni din spațiul cosmic emit microunde cu lungimea de undă de 21 cm ($\nu = 1420 \text{ MHz}$).

3. Radiațiile infraroșii Regiunea infraroșie se extinde de la $3 \times 10^{11} \text{ Hz}$ până la $4 \times 10^{14} \text{ Hz}$. Regiunea infraroșie este împărțită în 4 regiuni:

- a) infraroșul apropiat (780-3000 nm)
- b) infraroșul intermediar (3000-6000 nm)
- c) infraroșul îndepărtat (6000-15000 nm)
- d) infraroșul extrem (15000 nm - 1,0 mm)

Aceasta este o împărțire arbitrară. Trebuie remarcat că orice material radiază și absoarbe unde infraroșii datorită agitației termice a moleculelor sale.

Moleculele unui obiect cu temperatura deasupra lui 0 K emit radiații infraroșii chiar dacă acestea au o intensitate mică. Pe de altă parte radiații infraroșii sunt emise într-un spectru continuu de corpurile calde. Trebuie remarcat că jumătate din energia emisă de Soare corespunde

domeniului infraroșu, iar becurile emit mai multă radiație infraroșie decât lumină.

Ca orice creatură cu sânge cald și corpul omenesc emite radiații infraroșii de la 3000 nm având un maxim al emisiei în jur de 10000 nm.

Această emisie este datorată tranzițiilor ce au loc între nivelele de vibrație ale moleculelor.

Energia radiațiilor infraroșii este măsurată cu dispozitive care răspund la absorbția de radiații infraroșii. Unele detectoare pot fi cuplate prin intermediul unui sistem de scanare la un tub catodic fapt care duce la producerea unei imagini în infraroșu. Un astfel de aparat este cunoscut sub numele de termograf.

Ca exemplu de emițător poate fi dat laserul cu CO_2 . Folosit ca sursă de putere continuă cu nivelul de 100W este utilizat mult în industrie, în special în tăieri de precizie și tratamente termice. Emisia sa din infraroșu $(18,3 - 23) \mu\text{m}$ este ușor absorbită de corpul uman fapt ce îl face util în medicină pentru diverse operații.

4. Lumina Lumina corespunde radiațiilor electromagnetice din banda de frecvențe $3,84 \times 10^{14} \text{ Hz} - 7,69 \times 10^{14} \text{ Hz}$ sau lungimilor de undă cuprinse în intervalul (390 nm - 780 nm). Ea este produsă prin rearanjarea electronilor în atomi și molecule adică prin tranzițiile electronilor în interiorul acestora.

În materialele incandescente, în filamentele metalice încălzite puternic, gradul de agitație termică este mare astfel că electronii care sunt accelerați suferă frecvente ciocniri. Rezultă o emisie numită radiație termică și aceasta este sursa principală de lumină.

Din contră în cazul în care se umple un tub cu un gaz și se realizează o descărcare electrică, atomii se excită și emit o radiație caracteristică diverselor nivele energetice, determinând o serie de linii sau benzi de frecvențe bine determinate.

Un astfel de dispozitiv este cunoscut sub numele de tub de descărcare. Astfel Kryptonul 86 are liniile foarte înguste. Linia cu lungimea de undă $\lambda = 605,780210 \text{ nm}$ și lărgimea la semiînălțime egală cu $0,000470 \text{ nm}$ (ceea ce corespunde la o lărgime de 400 MHz), din 1983 este utilizată la definirea unității de lungime ($1\text{m} = 1650763,73$ lungimi de undă ale Kr 86).

Newton a fost primul care a observat că lumina albă este un amestec

de culori din spectrul vizibil.

Culoarea reprezintă răspunsul fenomenologic și psihologic al omului la diferitele frecvențe ale spectrului care se extinde de $3,84 \times 10^{14}$ Hz pentru roșu și care trece prin galben, verde, albastru și violet la aproximativ $7,69 \times 10^{14}$ Hz. Culoarea nu este o proprietate a luminii însăși ci o manifestare a sistemului nervos uman.

5. Radiațiile ultraviolete Lângă spectrul radiațiilor luminoase se găsește spectrul radiațiilor ultraviolete (între 8×10^{14} Hz și $3,4 \times 10^{16}$ Hz) descoperit de Johann Willhelm Ritter (1776-1810).

Ochiul uman nu poate percepe undele ultraviolete deoarece corneea absoarbe în particular radiațiile cu lungimile de undă cele mai mici iar cristalinul absoarbe puternic radiațiile cu lungimea de undă din jurul a 300 nm. Insectele, de exemplu albinele, pot percepe radiațiile ultraviolete.

Atomii emit radiații ultraviolete când au loc dezexcitări ale electronilor de pe nivelele energetice cele mai înalte pe nivele energetice mai joase ale atomilor.

O altă situație este atunci când doi atomi cărora le lipsește câte un electron de valență se combină în molecule biatomice astfel că aceștia se cuplează în perechi în procesul de creare a legăturii chimice. Ei sunt puternic legați de ansamblul astfel creat și în consecință stările excitate ale acestor molecule sunt în ultraviolet. Moleculele din atmosferă N_2 , O_2 , CO_2 și H_2O au astfel de rezonanțe în ultraviolet.

6. Razele X Au fost descoperite în 1895 de Wilhelm Conrad Röntgen (1845-1923). Ele au domeniul cuprins, în mare, între frecvențele $2,4 \times 10^{16}$ Hz până la 5×10^{19} Hz, având lungimile de undă foarte mici (6×10^{-3} nm - 1,25 nm).

O metodă practică de obținere a acestor radiații este aceea de a accelera electroni și a-i orienta către ținte realizate din diverse materiale. Aceasta determină o decelerare rapidă a electronilor care vor emite o radiație de frânare. În plus atomii țintei pot deveni ionizați în cursul acestui bombardament. Pot fi eliminați electronii din păturile interioare foarte apropiate de nucleu. Atunci când o astfel de stare este ocupată de un electron din păturile superioare se pot emite radiații X. Rezultatul obținut este o radiație specifică materialului țintei și ea poartă numele

de radiație caracteristică.

Radiografiile cu raze X produc mai degrabă umbre decât o imagine fotografică. Au fost realizate telescoape cu raze X care sunt plasate pe orbite cosmice, microscopie cu raze X, rețele de difracție pentru raze X. În 1984 un grup de la Lawrence Livermore National Laboratory a reușit să realizeze un laser cu lungimea de undă de 20,6 nm.

7. Razele gama Sunt radiațiile electromagnetice cu frecvențe mai mari de 5×10^{19} Hz și sunt radiațiile electromagnetice cu lungimile de undă cele mai mici. Ele sunt emise în tranzițiile între nivelele energetice ale particulelor ce alcătuiesc nucleul atomic. Datorită lungimilor de undă mici este practic imposibil să se observe comportarea ondulatorie a acestora.

Transversalitatea undelor electromagnetice plane

Vom arăta că pentru o undă electromagnetică plană vectorii $\vec{E}$ și $\vec{H}$ oscilează perpendicular pe direcția de propagare a undei. Aplicând operatorul divergență relației (1.20):

$$\nabla \vec{E}(\vec{r}, t) = \nabla \vec{E}_0 \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k} \vec{r} \right) \right]$$

$$\nabla \vec{E}(\vec{r}, t) = -i [E_{ox}k_x + E_{oy}k_y + E_{oz}k_z] \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k} \vec{r} \right) \right]$$

Se obține:

$$\nabla \vec{E}(\vec{r}, t) + i\vec{k} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (1.25)$$

Ținând cont de relația (1.9) care spune că divergența câmpului electric este nulă, din relația (1.25) rezultă că:

$$\vec{E} \vec{k} = 0$$

adică:

$$\vec{E} \perp \vec{k}$$

ceea ce înseamnă că vectorul câmp electric din unda electromagnetică este perpendicular pe direcția de propagare.

În mod analog se demonstrează că și:

$$\vec{H} \perp \vec{k} \quad (1.26)$$

Vom arăta în continuare ca vectorii $\vec{E}$ și $\vec{H}$ sunt perpendiculari între ei.

Pentru aceasta aplicăm rotorul relației (1.21). Calculăm componenta după Ox:

$$\left(\nabla \times \vec{H}\right)_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = -ik_y H_z + ik_z H_y = -i \left(\vec{k} \times \vec{H}\right)_x$$

Relații analoage se obțin și pentru celelalte componente. Astfel rezultă că:

$$\nabla \times \vec{H} = -i \left(\vec{k} \times \vec{H}\right) \quad (1.27)$$

Ținând cont de relația (1.7) se obține:

$$-i \left(\vec{k} \times \vec{H}\right) = -\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.28)$$

Considerând intensitatea câmpului electric dată de relația (1.20) atunci relația (1.28) devine:

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \varepsilon \vec{E} \quad (1.29)$$

Cum:

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$$

și lungimea de undă este:

$$\lambda = v \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{2\pi}{\omega}$$

atunci:

$$\vec{u} \times \vec{H} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{E} \quad (1.30)$$

sau:

$$\vec{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(\vec{u} \times \vec{H}\right) \quad (1.31)$$

În mod analog:

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left(\vec{u} \times \vec{E}\right) \quad (1.32)$$

Pentru unda directă vectorii $\vec{u}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$ formează un triedru drept (Fig. 1.1)

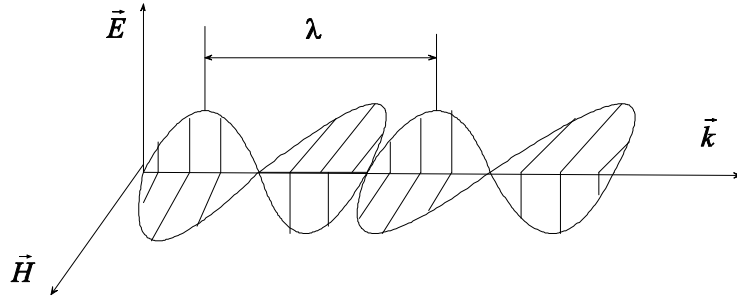


Figura 1.1: Structura unei unde electromagnetice plane

Din relația (1.31) rezultă:

$$|\vec{E}| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} |\vec{u} \times \vec{H}| \quad (1.33)$$

adică:

$$|\vec{E}| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} |\vec{H}| \quad (1.34)$$

de unde:

$$\sqrt{\varepsilon} |\vec{E}| = \sqrt{\mu} |\vec{H}| \quad (1.35)$$

Intensitatea undelor electromagnetice

Densitatea de energie datorată câmpului electric este:

$$w_E = \varepsilon \frac{E^2}{2} \quad (1.36)$$

iar densitatea de energie a câmpului magnetic este:

$$w_B = \mu \frac{H^2}{2} \quad (1.37)$$

Deoarece în cazul unei unde plane $H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E$ relația (1.37) devine:

$$w_B = \mu \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{E^2}{2} = \varepsilon \frac{E^2}{2} = w_E \quad (1.38)$$

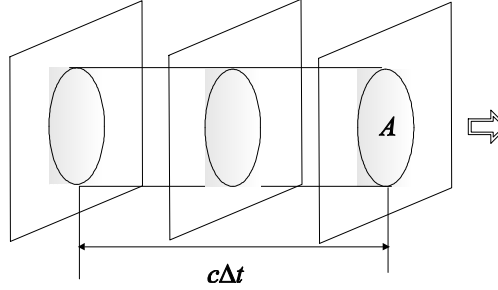


Figura 1.2: Transportul energiei electromagnetice

Densitatea totală de energie în cazul unei unde plane este:

$$w = w_E + w_B = \varepsilon E^2 \quad (1.39)$$

Pentru a caracteriza propagarea energiei se va utiliza vectorul Poynting definit ca:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (1.40)$$

În cazul unei unde plane:

$$S = EH = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H^2 \quad (1.41)$$

Vom arăta că vectorul Poynting este legat de transportul de energie prin unitatea de suprafață în unitatea de timp.

Fig. 1.2 arată o undă electromagnetică care se propagă cu viteza c prin aria A . Într-un mic interval de timp Δt numai energia conținută în volumul cilindric de bază A și înălțime $c\Delta t$, $w(c\Delta t)A$ va trece prin aria A . Atunci energia care trece prin unitatea de arie în unitatea de timp este:

$$\frac{wc\Delta t A}{A\Delta t} = wc$$

Tinând cont de 1.39, expresia de mai sus devine:

$$wc = \varepsilon E^2 c = \varepsilon \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2 = S$$

În discuția precedentă nu am ținut cont că intensitatea câmpului electric și inducția câmpului magnetic depind de timp și am considerat că peste tot densitatea de energie este aceeași.

Din acest motiv se va considera că intensitatea undelor electromagnetice este dată de valoarea medie a modulului vectorului Poynting. El reprezintă fluxul de energie ce trece prin unitatea de suprafață:

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \langle |\vec{E} \times \vec{H}| \rangle \quad (1.42)$$

Cum:

$$\vec{E} \times \vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{E} \times (\vec{u} \times \vec{E}) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [E^2 \vec{u} - \vec{E} (\vec{E} \vec{u})] \quad (1.43)$$

rezultă:

$$\vec{E} \times \vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2 \vec{u} \quad (1.44)$$

Atunci:

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle E^2 \rangle \quad (1.45)$$

Considerând pentru vectorul intensitate a câmpului electric a unei plane o reprezentare reală $E = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r})$ intensitatea unei electromagnetice plane este:

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \vec{r}) \rangle$$

Cum media temporală a cosinusului este 1/2 rezultă:

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \quad (1.46)$$

Vectorul Poynting poate fi utilizat pentru a caracteriza transportul de energie printr-o suprafață numai în cazul unui câmp electromagnetic variabil în timp. Să considerăm un condensator plan încărcat și plasat într-un câmp magnetic constant în timp astfel ca $\vec{E} \perp \vec{B}$. Vectorul

Poynting este diferit de zero pe o suprafață perpendiculară pe armăturile condensatorului, indicând un transport de energie. Lucrul acesta nu este adevărat deoarece câmpul electromagnetic este unul static și nu avem nici un transport de energie prin suprafața considerată.

1.1.2 Polarizarea undelor electromagnetice

Unde polarizate liniar

Undele sunt polarizate liniar dacă vectorii $\vec{E}$ și $\vec{H}$ păstrează o direcție determinată în spațiu în decursul propagării. Planul definit de $\vec{E}$ și $\vec{k}$ poartă numele de plan de polarizare.

Unde polarizate eliptic și circular

Acestea sunt undele în care vectorii $\vec{E}$ și $\vec{H}$ pot fi considerați ca o sumă formată din două unde perpendiculare de frecvențe egale care se propagă de-a lungul aceleiași direcții (de exemplu Oz). Astfel:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_{10}\vec{e}_x \cos(\omega t - kz - \varphi_1) + E_{20}\vec{e}_y \cos(\omega t - kz - \varphi_2) \quad (1.47)$$

Se schimbă originea timpului astfel încât la momentul $t = 0$ să avem $kz - \varphi_1 = 0$ și se notează cu $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ diferența de fază dintre cele două unde. Atunci:

$$\vec{E} = E_{10}\vec{e}_x \cos(\omega t) + E_{20}\vec{e}_y \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.48)$$

Vom demonstra în general că vârful vectorului $\vec{E}$ descrie o elipsă într-un plan perpendicular pe direcția de propagare. Considerăm componentele după cele două direcții:

$$E_x = E_{10} \cos \omega t \quad (1.49)$$

$$E_y = E_{20} \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.50)$$

Rezultă:

$$\frac{E_y}{E_{20}} = \cos(\omega t) \cos \varphi + \sin(\omega t) \sin \varphi \quad (1.51)$$

Atunci ținând cont de (1.49) relația (1.51) devine:

$$\frac{E_y}{E_{20}} = \frac{E_x}{E_{10}} \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{E_x^2}{E_{10}^2}} \sin \varphi \quad (1.52)$$

Din această relație rezultă:

$$\frac{E_x^2}{E_{10}^2} + \frac{E_y^2}{E_{20}^2} - \frac{2E_x E_y}{E_{10} E_{20}} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (1.53)$$

Aceasta este ecuația unei elipse ale cărei axe sunt inclinate față de sistemul de axe Oxy. Efectuând derivatele:

$$\frac{dE_x}{dt} = -E_{10}\omega \sin(\omega t) \quad (1.54)$$

$$\frac{dE_y}{dt} = -E_{20}\omega \sin(\omega t - \varphi) \quad (1.55)$$

Se observă că la $t = 0$, $dE_x/dt = 0$ și $dE_y/dt = E_{20}\omega \sin \varphi$. Dacă $\varphi > 0$ atunci $dE_y/dt > 0$ și elipsa este parcursă în sens invers acelor de ceasornic. Spunem că există o elicitate pozitivă iar polarizarea este o polarizare stânga. Dacă $\varphi < 0$, $dE_y/dt < 0$, elipsa este parcursă în sensul acelor de ceasornic și polarizarea este dreapta.

Particularizări

a) $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$

Atunci:

$$\frac{E_y^2}{E_{02}^2} + \frac{E_x^2}{E_{01}^2} = 1 \quad (1.56)$$

Aceasta este o elipsă raportată la axele principale de coordonate (Fig. 1.3b).

b) $\varphi = \pm \pi/2$ și $E_{10} = E_{20}$

Atunci unda este polarizată circular. Dacă $\varphi = \pi/2$ unda este polarizată circular stânga. Dacă $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ unda este polarizată circular dreapta.

c) $\varphi = 0$ sau $\varphi = \pi$ atunci:

$$\left(\frac{E_x}{E_{10}} \mp \frac{E_y}{E_{20}} \right)^2 = 0 \quad (1.57)$$

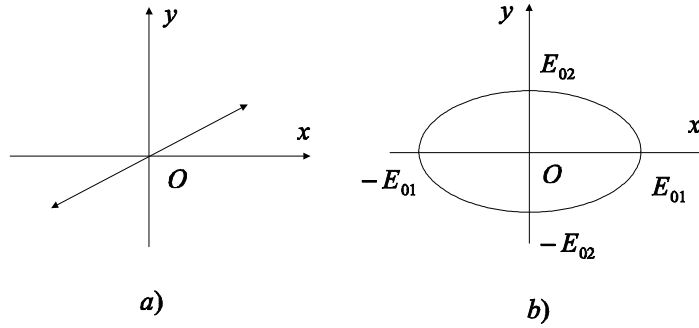


Figura 1.3: Lumină polarizată: a) liniar b) eliptic

de unde

$$\frac{E_x}{E_y} = \pm \frac{E_{10}}{E_{20}} \quad (1.58)$$

În acest caz unda este liniar polarizată (Fig. 1.3a).

Producerea luminii polarizate

Lumina naturală O sursă obișnuită de lumină constă dintr-o mulțime de emițători atomici. Fiecare atom emite un tren de unde polarizat în timp de 10^{-8} s. Astfel sunt emise diverse trenuri de undă a căror polarizare se modifică într-o manieră care nu poate fi precizată. Deoarece aceste schimbări sunt atât de rapide trebuie să ne referim la o singură stare a luminii astfel emisă. Lumina de acest tip poartă numele de lumină naturală.

Din punct de vedere matematic lumina naturală se poate reprezenta în termenii a două unde arbitrare, liniar polarizate perpendicular una pe alta cu amplitudini egale a căror fază relativă variază aleatoriu și extrem de rapid. Se spune că cele două unde sunt necoerente.

O undă monocromatică perfectă poate fi privită ca un tren de undă infinit. Această undă poate fi descompusă în două componente perpendiculare pe direcția de propagare, cu aceiași frecvență și cu faza relativă egală cu zero. Astfel, o undă monocromatică este totdeauna polarizată.

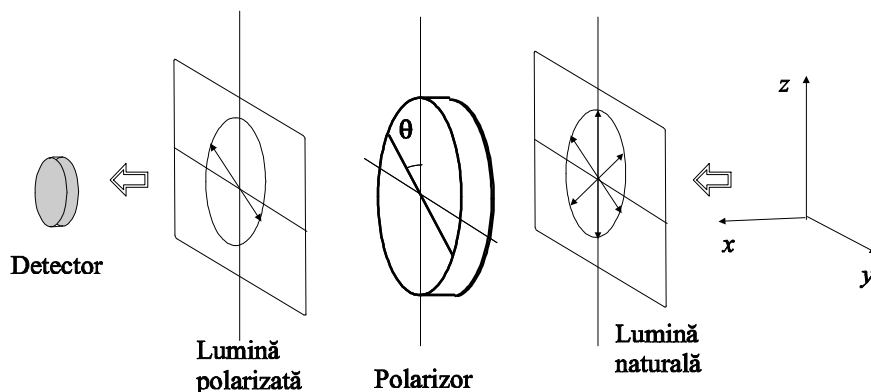


Figura 1.4: Obținerea luminii liniar polarizate cu ajutorul unui polarizor

Polarizori. Un dispozitiv optic pe care cade lumina naturală și din care lumina iese polarizată poartă numele de polarizor.

Dacă se ține cont că lumina naturală este reprezentată de două unde necoerente iar dispozitivul permite doar trecerea unei singure unde, aparatul poartă numele de polarizor liniar. Obținerea luminii polarizate se realizează în principal prin patru mecanisme fizice: dicroismul (sau absorbția selectivă), reflexia, împrăștierea și birefringența (dubla refracție).

Legea lui Mallus Prin definiție, dacă lumina naturală este incidentă pe un polarizor ideal ca în Fig. 1.4, numai lumina din starea $\mathcal{P}$ va putea fi transmisă. În starea $\mathcal{P}$ vectorul $\vec{E}$ va fi orientat după o anumită direcție numită axa de transmisie a polarizorului. Numai componenta câmpului electric paralelă cu axa de transmisie va trece prin polarizor. Dacă polarizorul se rotește răspunsul detectorului nu se va modifica datorită simetriei luminii nepolarizate.

Să presupunem că introducem un polarizor identic cu primul a cărui axă de transmisie face cu direcția axei de transmisie a primului polarizor un unghi θ . Dacă amplitudinea câmpului electric transmis prin primul polarizor este E_0 numai componenta $E_0 \cos \theta$ paralelă cu axa celui de-al doilea polarizor va trece prin acesta (Fig. 1.5). Atunci:

$$I(\theta) = E_0^2 \cos^2 \theta \quad (1.59)$$

Intensitatea maximă a luminii ce ajunge în final pe detector se obține

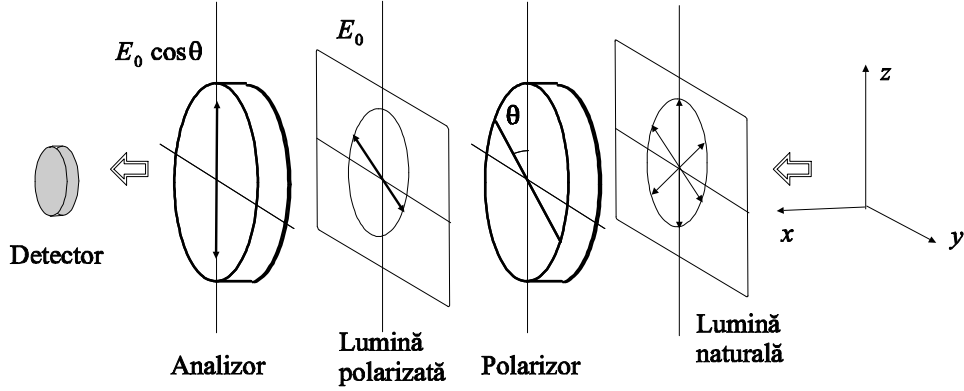


Figura 1.5: Legea lui Mallus

când $\theta = 0$. Atunci $I(0) = E_0^2$, astfel că ecuația (1.59) se scrie ca:

$$I(\theta) = I(0) \cos^2 \theta \quad (1.60)$$

Această relație este cunoscută sub numele de legea lui Mallus.

Dicroism

În sens larg termenul de dicroism se referă la absorbția selectivă a uneia din componentele unui fascicol incident.

Să considerăm o undă electromagnetică incidentă pe o rețea realizată din fire metalice ca în Fig. 1.6. Câmpul electric poate fi descompus în acest caz în două componente ortogonale. Componenta după direcția axei Oz va genera un curent în rețeaua de fire. Astfel energia câmpului electromagnetic va fi transferată firelor care se vor încălzi. În plus electronii accelerați în direcția axei Oz vor determina apariția unei radiații electromagnetice în direcție opusă propagării undei inițiale. Cum este de așteptat unda incidentă tinde să fie anulată de unda care este datorată accelerării electronilor și care se propagă în sens invers. Această radiație apare ca o undă reflectată.

Din contră, pe direcția Oy electronii nu sunt liberi să se deplaseze și din acest motiv componenta corespunzătoare câmpului rămâne neschimbată.

Ipoteza poate fi confirmată utilizând microunde și o rețea formată

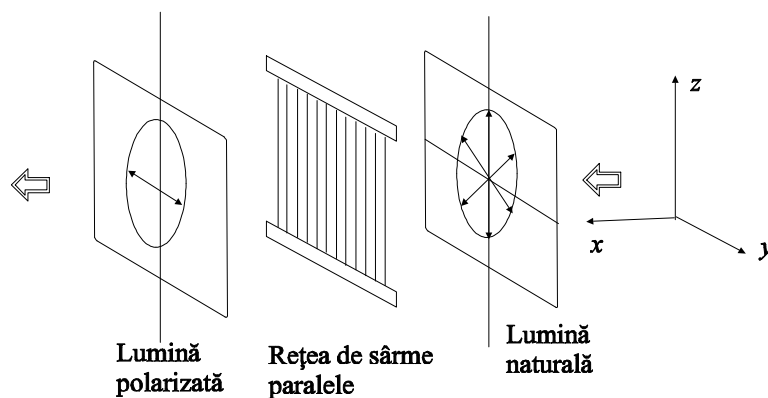


Figura 1.6: Rețea de sârme paralele care acționează ca un polarizor pentru undele electromagnetice

din fire conductoare. Chiar dacă pare extrem de dificil de a se realiza acest lucru, o astfel de rețea a fost construită de G. R. Bird și M. Parrish Jr. (2160 fire pe mm); “The wire grid as a near-infrared polarizer” în J. Opt. Soc. Am. 50, 886 (1960).

Anumite materiale prezintă proprietatea de dicroism din cauza unei anizotropii din structura lor cristalină. Un astfel de material este turmalina. Pentru o astfel de substanță există o anumită direcție cunoscută ca axă optică, care este determinată de structura atomică a substanței. Componenta câmpului electric al unei luminoase care este perpendiculară pe axa optică este puternic absorbită. Cu cât grosimea cristalului este mai mare cu atât absorbția este mai puternică. Astfel o lamă cu fețele paralele cu axa optică cu grosimea de câțiva milimetri constituie un polarizor liniar. Axa optică devine astfel axă de transmisie. Totuși cristalele de turmalină sunt mici și în plus procesul de absorbție este dependent de lungimea de undă.

În anul 1938 Lamb a inventat folia polarizatoare de tip H care este utilizată și astăzi ca polarizor. Ea nu mai conține cristale dicroice ci molecule alungite care joacă rolul rețelei de fire. Pentru obținerea acesteia o folie de alcool polivinilic se încălzește și este întinsă pe o anumită direcție. În acest caz moleculele se aliniază în direcția respectivă. Folia este apoi introdusă într-o soluție de iod. Iodul impregnează plasticul și se atașează la capetele acestor molecule unindu-le, formând lanțuri moleculare. Electronii de conducție ai iodului se pot deplasa de-a lun-

gul acestor lanțuri, ei jucând rolul electronilor de conducție din cazul rețelei de fire. Componenta câmpului electric care este paralelă cu aceste lanțuri acționează puternic asupra electronilor astfel că ea este puternic absorbită. În folia de tip H elementele care produc dicroismul sunt molecule astfel că nu există probleme cu împrăștierea luminii. Folia de tip H este un polarizor efectiv pentru întreg spectrul vizibil, cu o eficiență mai mică în regiunea albastră.

1.2 Reflexia și refracția

Fenomenele de reflexie și refracție se petrec la suprafața de separație dintre două medii. Fenomenele fizice sunt caracterizate din punct de vedere energetic introducând noțiunile de factor de reflexie și factor de transmisie pentru un flux de energie.

Din punct de vedere formal problema se reduce la a considera condițiile la limită pentru vectorii $\vec{E}$ și $\vec{H}$, condiții care se reduc la egalitatea componentelor tangențiale de o parte și de alta a suprafeței de separație a celor două medii dielectrice.

1.2.1 Unde electromagnetice la incidență normală pe suprafața de separație a două medii

Considerăm că cele două medii neconductoare și nemagnetice sunt caracterizate de permitivitățile relative $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Astfel, în primul mediu viteza de propagare a undei este:

$$v_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{c}{n_1} \quad (1.61)$$

iar în al doilea mediu:

$$v_2 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}} = \frac{c}{n_2} \quad (1.62)$$

Presupunem că unda vine din mediul 1 și cade perpendicular pe suprafața mediului 2. Ecuațiile undelor plane cu polarizare liniară pentru unda incidentă, reflectată și refractată pentru situația arătată în Fig. 1.7 sunt următoarele:

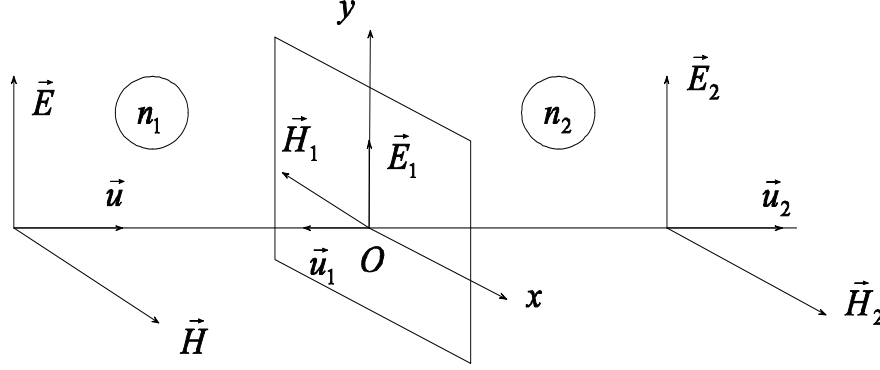


Figura 1.7: Poziția relativă a vectorilor $\vec{E}$, $\vec{H}$ și $\vec{u}$ în unda incidentă, reflectată și refractată când $n_2 < n_1$ (toți vectorii trebuie considerați în planul de separație dintre cele două medii).

$$E = E_{00} \exp [i\omega (t - z/v_1)] \quad ; \quad H = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_0}} E = n_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E \quad (1.63)$$

$$E_1 = E_{10} \exp [i\omega_1 (t + z/v_1)] \quad ; \quad H_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_0}} E_1 = n_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_1 \quad (1.64)$$

$$E_2 = E_{20} \exp [i\omega_2 (t - z/v_2)] \quad ; \quad H_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0}{\mu_0}} E_2 = n_2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_2 \quad (1.65)$$

Ținând cont de faptul că vectorii $\vec{E}$, $\vec{H}$ și $\vec{u} = \vec{k}/k$ formează un triedru drept, pentru cele trei unde (incidentă, reflectată și refractată) condițiile la limită se scriu:

$$E + E_1 = E_2 \quad (1.66)$$

$$H - H_1 = H_2 \quad (1.67)$$

Condițiile sunt scrise sub formă scalară deoarece am presupus că vectorii $\vec{E}$, $\vec{E}_1$ și $\vec{E}_2$ au aceiași direcție, iar vectorii $\vec{H}$, $\vec{H}_1$ și $\vec{H}_2$ sunt situați de-a lungul unei alte direcții care este perpendiculară pe vectorul $\vec{E}$.

Trebuie remarcat că sensurile vectorilor $\vec{E}_1$ și $\vec{H}_1$ sunt determinate de raportul indicilor de refracție n_1 și n_2 la orice moment de timp t . Atunci pentru suprafața $z = 0$ (adică suprafața de separație dintre cele două medii):

$$E_{00} \exp(i\omega t) + E_{10} \exp(i\omega_1 t) = E_{20} \exp(i\omega_2 t) \quad (1.68)$$

Identitatea de mai sus nu poate fi verificată decât dacă $\omega = \omega_1 = \omega_2$. Ne așteptăm la un astfel de rezultat deoarece nu există nici un motiv fizic pentru care frecvența unei incidente și reflectate să se schimbe la suprafața de separație a celor două medii.

Atunci relațiile (1.66) și (1.67) se scriu:

$$E_{00} + E_{10} = E_{20} \quad (1.69)$$

$$H_{00} - H_{10} = H_{20} \quad (1.70)$$

Cum $H_{00} = n_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{00}$, $H_{10} = n_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{10}$, $H_{20} = n_2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{20}$ ecuațiile de mai sus devin:

$$E_{00} + E_{10} = E_{20}$$

$$n_1 E_{00} - n_1 E_{10} = n_2 E_{20} \quad (1.71)$$

Rezultă:

$$E_{10} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_{00} \quad (1.72)$$

$$E_{20} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_{00} \quad (1.73)$$

Definim coeficientul de reflexie:

$$r = \frac{E_{10}}{E_{00}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (1.74)$$

și coeficientul de transmisie:

$$t = \frac{E_{20}}{E_{00}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad (1.75)$$

În cazul în care $n_1 > n_2$ vectorii $\vec{E}_{10}$ și $\vec{E}_{00}$ au același sens. Aceasta înseamnă că vectorii $\vec{E}_1$ și $\vec{E}$, la suprafața de separație, oscilează în fază în timp ce vectorii $\vec{H}$ și $\vec{H}_1$ oscilează în opoziție de fază (diferența de fază dintre ei fiind egală cu π).

În cazul în care $n_1 < n_2$ vectorii $\vec{E}_{10}$ și $\vec{E}_{00}$ au sensuri contrare, ceea ce înseamnă că ei oscilează în opoziție de fază iar vectorii $\vec{H}$ și $\vec{H}_1$ oscilează în fază. S-a stabilit astfel regula care în optică se enunță astfel: Dacă lumina se reflectă pe suprafața unui mediu mai refringent ($n_2 > n_1$) apare o diferență de fază egală cu π între unda incidentă și cea reflectată.

Se observă că semnul lui E_{20} coincide totdeauna cu semnul lui E_{00} , aceasta semnificând că întotdeauna unda transmisă este în fază cu unda incidentă. Definim în continuare factorul de reflexie și cel de transmisie.

Factorul de reflexie reprezintă raportul dintre fluxul mediu de energie din unda reflectată și fluxul mediu de energie din unda incidentă. Astfel:

$$R = \frac{\langle S_1 \rangle}{\langle S \rangle} = \frac{E_{10}^2}{E_{00}^2} \quad (1.76)$$

Factorul de transmisie reprezintă raportul dintre fluxul mediu de energie din unda transmisă și fluxul mediu de energie din unda incidentă. Astfel:

$$T = \frac{\langle S_2 \rangle}{\langle S \rangle} = \frac{\langle E_2 H_2 \rangle}{\langle E H \rangle} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} \langle E_2^2 \rangle}{\sqrt{\varepsilon_1} \langle E^2 \rangle} = \frac{n_2 E_{20}^2}{n_1 E_{00}^2} \quad (1.77)$$

Utilizând relațiile (1.74) și (1.75) se obține pentru acești coeficienți:

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad (1.78)$$

$$T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (1.79)$$

Se observă că se verifică egalitatea:

$$R + T = 1 \quad (1.80)$$

Egalitatea 1.80 este o consecință a legii conservării energiei.

Să estimăm factorul de reflexie și cel de transmisie pentru lumina ce cade din aer pe sticlă. Cum $n_1 = 1$ și $n_2 = 1,5$ obținem $R = 4\%$ și $T = 96\%$. Astfel sticla obișnuită reflectă numai o mică parte din lumina care cade pe ea.

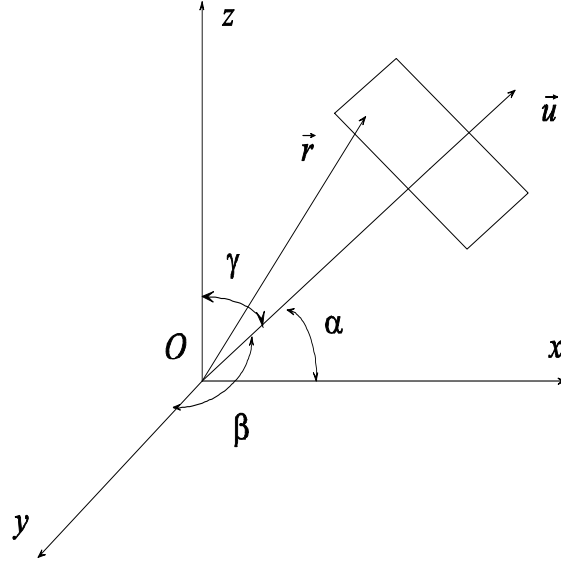


Figura 1.8: Undă tridimensională

1.2.2 Legile reflexiei și refracției în cazul undelor electromagnetice

Considerăm o undă electromagnetică ce cade sub un unghi pe suprafața de separație a două medii dielectrice transparente. Direcția de propagare a unei unde electromagnetice plane este dată de vectorul de propagare $\vec{u}$ ai cărui cosinuși directori sunt $\cos \alpha$, $\cos \beta$ și $\cos \gamma$ (Fig. 1.8)

Atunci ecuația de propagare a undei se poate scrie:

$$E = E_0 \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{v_1} \right) \right] \quad (1.81)$$

sau:

$$E = E_0 \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{v_1} \right) \right] \quad (1.82)$$

Alegem sistemul de referință astfel încât planul xOy să fie suprafața de separație dintre cele două medii dielectrice (Fig.1.9) . Considerând

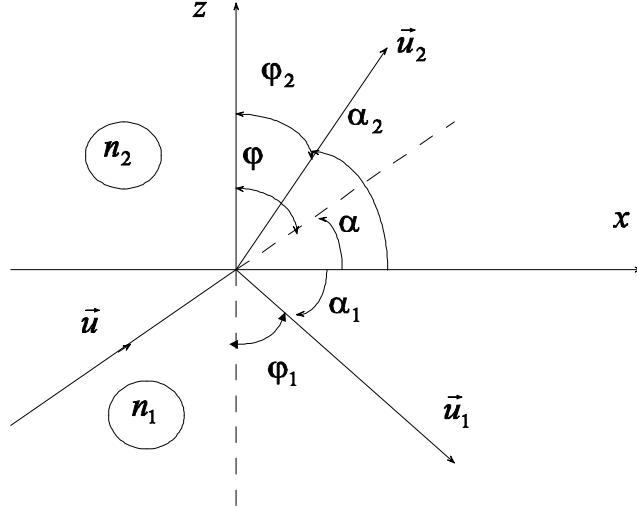


Figura 1.9: Diagramă ce ilustrează legile reflexiei și refracției: $\vec{u}$ este versorul direcției de propagare a unei incidente, $\vec{u}_1$ este versorul direcției de propagare a unei reflectate, $\vec{u}_2$ este versorul direcției de propagare a unei refractate

că $\vec{u}$ se află în planul xOz , $\cos \beta = 0$, relația 1.82, care descrie unda incidentă devine:

$$E = E_{00} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x \cos \alpha + z \cos \gamma}{v_1} \right) \right] \quad (1.83)$$

Pentru discuția ulterioară vom considera că unda este polarizată liniar iar vectorul unei incidente $\vec{E}$ oscilează după axa Oy . Atunci unda reflectată este:

$$E_1 = E_{10} \exp \left[i\omega_1 \left(t - \frac{x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1}{v_1} \right) \right] \quad (1.84)$$

iar cea refractată:

$$E_2 = E_{20} \exp \left[i\omega_2 \left(t - \frac{x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2}{v_2} \right) \right] \quad (1.85)$$

Condiția la limită implică egalitatea componentelor tangențiale ale intensității câmpului electric pentru $z = 0$.

$$E_t + E_{t1} = E_{t2} \quad (1.86)$$

Această condiție trebuie îndeplinită pentru $z = 0$ (adică pe suprafața de separație a celor două medii) în orice moment de timp. Componentele tangențiale ale undelor incidentă, reflectată și refractată au următoarele expresii:

$$E_t = E_{00t} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x \cos \alpha}{v_1} \right) \right] \quad (1.87)$$

$$E_{1t} = E_{10t} \exp \left[i\omega_1 \left(t - \frac{x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1}{v_1} \right) \right] \quad (1.88)$$

$$E_{2t} = E_{20} \exp \left[i\omega_2 \left(t - \frac{x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2}{v_2} \right) \right] \quad (1.89)$$

Egalitatea 1.86 este îndeplinită dacă:

a) Pulsațiile celor trei unde sunt egale

$$\omega = \omega_1 = \omega_2 \quad (1.90)$$

b)

$$\frac{\cos \beta_1}{v_1} = \frac{\cos \beta_2}{v_2} = 0 \quad (1.91)$$

Presupunând ca vectorul $\vec{u}$ se află în planul Oxz rezultă că și vectorii $\vec{u}_1$ și $\vec{u}_2$ ai unde reflectate și ai celei refractate se află în planul acesta. Aceasta este prima lege a reflexiei, respectiv refracției: undele incidentă, reflectată și refractată sunt în același plan.

c) $\cos \alpha = \cos \alpha_1$ de unde rezultă $\alpha = \pm \alpha_2$

Din cele două situații posibile, cea cu semnificație corespunde cazului $\alpha = \alpha_1$. Am obținut astfel legea reflexiei undelor electromagnetice. Trecând la unghiurile complementare $\varphi = \pi/2 - \alpha$, $\varphi_1 = \pi/2 - \alpha_1$ se obține formularea uzuală a acestei legii și anume că unghiul de reflexie este egal cu unghiul de incidență: $\varphi = \varphi_1$.

d)

$$\frac{\cos \alpha}{v_1} = \frac{\cos \alpha_2}{v_2}. \quad (1.92)$$

Din Fig. 1.9 se observă că $\alpha + \varphi = \pi/2$ și $\alpha_2 + \varphi_2 = \pi/2$ atunci relația 1.92 se scrie ca:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1.93)$$

Legea obținută poartă numele de legea lui Snellius. Observăm că această lege este o consecință a condițiilor la limită impuse de legile lui Maxwell. Rezultă ca direcțiile undelor reflectată și refractată sunt bine determinate.

1.2.3 Relațiile lui Fresnel

Relațiile lui Fresnel stabilesc relații între amplitudinile undelor incidentă, reflectată și refractată.

Pentru a le deduce nu trebuie ținut cont de dependența temporală a intensității câmpului electric și magnetic. Vom formula condițiile la limită pentru proiecțiile amplitudinilor vectorilor $\vec{E}$ și $\vec{H}$. Pentru aceasta asimilăm lumina nepolarizată cu o sumă de două unde plane ce se propagă în aceeași direcție și care au aceeași viteză de fază v , fiind polarizate de-a lungul a două direcții perpendiculare și a căror fază sunt independente una față de cealaltă. Este ușor de calculat la un moment dat intensitatea rezultantă a câmpului $|\vec{E}|$ cu condiția să cunoaștem cele două proiecții pe suprafața de separare a celor două medii $E_{\parallel}$ și $E_{\perp}$.

$$E = \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2} \quad (1.94)$$

Invers, cunoscând pe $\vec{E}$ putem să-l descompunem în cele două componente $E_{\parallel}$ și $E_{\perp}$. Alegem cele două direcții astfel:

a) prima componentă $E_{\parallel}$ se consideră în planul unde incidente, plan ce este determinat de normala la suprafața de separație a celor două medii și direcția de propagare a unde incidente.

b) a doua componentă $E_{\perp}$ se consideră pe o direcție perpendiculară pe planul de incidență.

În continuare vom analiza ce se petrece cu fiecare din cele două componente:

1) *componenta din planul de incidență*

Alegerea direcțiilor vectorilor $\vec{E}_{\parallel}$, $\vec{E}_{1\parallel}$ și $\vec{E}_{2\parallel}$ este prezentată în Fig. 1.10. Aceste direcții vor fi fixate atunci când se va face discuția finală.

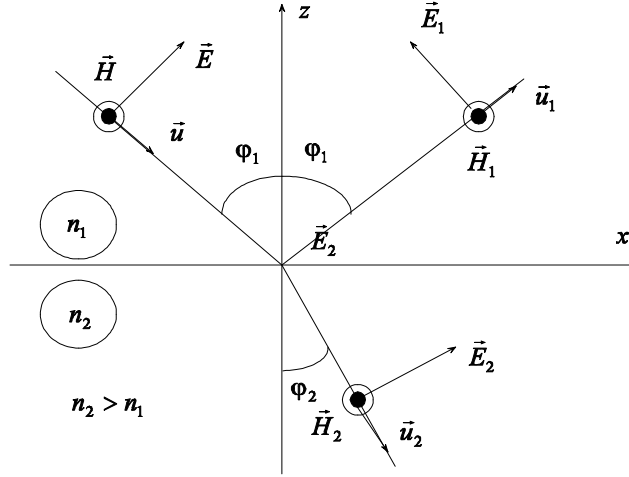


Figura 1.10: Direcțiile vectorilor $\vec{E}$ și $\vec{H}$ la suprafața de separație a două medii când vectorul $\vec{E}$ se află în planul de incidență

Fixarea orientării acestor vectori determină și fixarea orientării vectorilor $\vec{H}$, $\vec{H}_1$ și $\vec{H}_2$. În cazul considerat vectorii sunt perpendiculari pe planul de incidență. Vom pune condițiile la limită pentru proiecțiile vectorilor $\vec{E}$ și $\vec{H}$ în planul Ozx . Pentru ușurarea scrierii vom renunța la indicele "paralel" ($\parallel$). Condițiile la limită sunt:

$$E_{00} \cos \varphi_1 - E_{10} \cos \varphi_1 = E_{20} \cos \varphi_2 \quad (1.95)$$

$$H_{00} + H_{10} = H_{20} \quad (1.96)$$

Considerăm că lumina se propagă în medii nemagnetice:

$$\begin{aligned} H_{00} &= n_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{00} \\ H_{10} &= n_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{10} \\ H_{20} &= n_2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{20} \end{aligned} \quad (1.97)$$

Astfel relația (1.96) devine:

$$E_{00} + E_{10} = \frac{n_2}{n_1} E_{20} \quad (1.98)$$

Ținând cont de legea refracției din acest caz:

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1.99)$$

relația (1.98) devine:

$$E_{00} + E_{10} = E_{20} \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} \quad (1.100)$$

Deoarece relația (1.95) se mai scrie:

$$E_{00} - E_{10} = E_{20} \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} \quad (1.101)$$

din (1.100) și (1.101) se obține:

$$\frac{E_{00} - E_{10}}{E_{00} + E_{10}} = \frac{\sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{\sin \varphi_1 \cos \varphi_1} = \frac{\sin 2\varphi_2}{\sin 2\varphi_1} \quad (1.102)$$

Astfel se obține:

$$E_{10} = E_{00} \frac{\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2}{\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2} = E_{00} \frac{\sin (\varphi_1 - \varphi_2) \cos (\varphi_1 + \varphi_2)}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2) \cos (\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (1.103)$$

Atunci:

$$E_{10} = E_{00} \frac{\operatorname{tg} (\varphi_1 - \varphi_2)}{\operatorname{tg} (\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (1.104)$$

Adunând relațiile (1.100) și (1.101) se obține:

$$2E_{00} = E_{20} \left(\frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} + \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} \right) \quad (1.105)$$

de unde:

$$E_{20} = E_{00} \frac{2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2) \cos (\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (1.106)$$

Ținem cont că avem de-a face cu componentele paralele cu planul de incidență. Atunci relațiile (1.104) și (1.106) se rescriu:

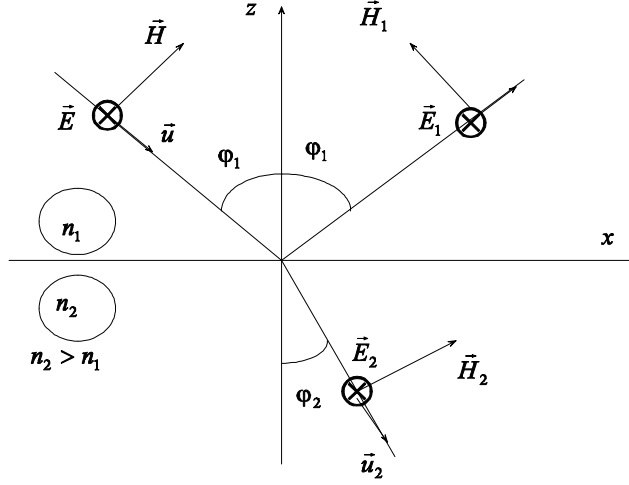


Figura 1.11: Direcțiile vectorilor $\vec{E}$ și $\vec{H}$ la suprafața de separație a două medii când vectorul $\vec{E}$ este perpendicular pe planul de incidență

$$(E_{10})_{\parallel} = (E_{00})_{\parallel} \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2)}{\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (1.107)$$

$$(E_{20})_{\parallel} = (E_{00})_{\parallel} \frac{2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (1.108)$$

Se pot exprima astfel coeficienții de reflexie și de transmisie:

$$r_{\parallel} = \frac{E_{10}}{E_{00}} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2)}{\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (1.109)$$

$$t_{\parallel} = \frac{E_{20}}{E_{00}} = \frac{2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (1.110)$$

2) *componenta perpendiculară pe planul de incidență*

În acest caz direcțiile vectorilor $\vec{H}$, $\vec{H}_1$ și $\vec{H}_2$ sunt reprezentate în Fig. 1.11 iar vectorii intensitate câmp electric sunt normali pe planul de incidență:

Condițiile la limită satisfăcute de aceștia la suprafața de separație a celor două medii dielectrice sunt:

$$E_{00} + E_{10} = E_{20} \quad (1.111)$$

$$H_{00} \cos \varphi_1 - H_{10} \cos \varphi_1 = H_{20} \cos \varphi_2 \quad (1.112)$$

Relațiile dintre intensitățile câmpurilor electrice și intensitățile câmpurilor magnetice sunt date de (1.97) astfel încât egalitatea (1.112) se poate scrie:

$$n_1 E_{00} \cos \varphi_1 - n_1 E_{10} \cos \varphi_1 = n_2 E_{20} \cos \varphi_2 \quad (1.113)$$

sau:

$$E_{00} - E_{10} = E_{20} \frac{n_2 \cos \varphi_2}{n_1 \cos \varphi_1} = E_{20} \frac{\cos \varphi_2 \sin \varphi_1}{\cos \varphi_1 \sin \varphi_2} \quad (1.114)$$

Adunând (1.111) cu (1.114) se obține:

$$2E_{00} = E_{20} \frac{\sin \varphi_2 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1}{\cos \varphi_1 \sin \varphi_2}$$

de unde:

$$E_{20} = E_{00} \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (1.115)$$

Prin scăderea relațiilor (1.111) și (1.114) rezultă:

$$2E_{10} = E_{20} \left(1 - \frac{\cos \varphi_2 \sin \varphi_1}{\cos \varphi_1 \sin \varphi_2} \right) \quad (1.116)$$

de unde ținând cont de expresia lui E_{20} se obține:

$$E_{10} = -E_{00} \frac{\sin (\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (1.117)$$

Deoarece am avut de-a face cu componentele perpendiculare pe planul de incidență atunci vom rescrie relațiile (1.115) și (1.117) astfel:

$$(E_{20})_{\perp} = (E_{00})_{\perp} \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (1.118)$$

$$(E_{10})_{\perp} = -(E_{00})_{\perp} \frac{\sin (\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (1.119)$$

Coeficienții de reflexie și transmisie sunt:

$$r_{\perp} = -\frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (1.120)$$

$$t_{\perp} = \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (1.121)$$

1.2.4 Interpretarea relațiilor lui Fresnel

Coefficienții de reflexie și transmisie

Vom examina forma coeficienților de reflexie și transmisie pentru întreg domeniul de valori al unghiului de incidență $\varphi_1 \in [0, \pi/2]$. Considerăm cazurile:

a) Indicele de refracție al mediului pe care cade lumina este mai mare decât al mediului din care vine lumina ($n_2 > n_1$). Atunci din legea refracției se obține $\varphi_1 > \varphi_2$. Rezultă că pentru toate valorile lui φ , $r_{\perp} < 0$.

În cazul incidenței normale $\varphi_1 \rightarrow 0$, $\varphi_2 \rightarrow 0$, $r_{\parallel}$ este dat de relația (1.74):

$$[r_{\parallel}]_{\varphi_1 \rightarrow 0} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \quad (1.122)$$

Astfel $r_{\parallel}$ pornește de la o valoare pozitivă când $\varphi_1 = 0$ și descrește la zero când $\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ deoarece la $\frac{\pi}{2}$ tangenta este ∞ . Această valoare particulară a unghiului de incidență $\varphi_1 = \varphi_B$ poartă numele de unghi de incidență Brewster. Aceasta înseamnă că la acest unghi nu există componenta $\vec{E}_{\parallel}$ a câmpului electric din unda reflectată. Pentru acest unghi de incidență lumina reflectată va conține numai vectorii $\vec{E}$ care oscilează perpendicular pe planul de incidență. Când unghiul φ_1 crește peste valoarea φ_B , $r_{\parallel}$ devine negativ atingând valoarea -1 când $\varphi_1 = \pi/2$.

Pentru a studia modul de variație al coeficienților de transmisie vom prelucra pe rând expresiile (1.121) și (1.110). Astfel pentru coeficientul de transmisie perpendicular se obține:

$$t_{\perp} = \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2} = \frac{2 \cos \varphi_1}{\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1} =$$

$$t_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \varphi_1}{n_2 \cos \varphi_2 + n_1 \cos \varphi_1}$$

Când $\varphi_1 \rightarrow 0$, $\varphi_2 \rightarrow 0$ și $\cos \varphi_1 \simeq \cos \varphi_2 \simeq 1$

$$(t_{\perp})_{\varphi_1=0} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad (1.123)$$

Când $\varphi_1 \rightarrow \pi/2$, $\cos \varphi_1 \rightarrow 0$ și $t_{\perp} \rightarrow 0$.

Pentru coeficientul de transmisie paralel se obține:

$$t_{\parallel} = \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$t_{\parallel} = \frac{2 \cos \varphi_1}{\left(\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1\right) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$t_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \varphi_1}{(n_2 \cos \varphi_2 + n_1 \cos \varphi_1) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Când $\varphi_1 \rightarrow 0$, $\varphi_2 \simeq \varphi_1 \simeq \varphi_1 - \varphi_2 \simeq 0$

$$t_{\parallel} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} \quad (1.124)$$

Când $\varphi_1 \rightarrow \pi/2$, $\cos \varphi_1 \rightarrow 0$ și $t_{\parallel} \rightarrow 0$.

Când unghiul de incidență φ_1 crește coeficienții de transmisie scad. În Fig. 1.12 sunt reprezentați coeficienții de transmisie și reflexie în cazul $n_2 > n_1$.

b) Indicele de refracție al mediului pe care cade lumina este mai mic decât al mediului din care vine lumina ($n_2 < n_1$). Atunci $\varphi_2 > \varphi_1$ și $r_{\perp}$ va fi pozitiv. El crește de la valoarea sa inițială și atinge valoarea sa maximă la un unghi numit unghi limită φ_l . Unghiul limită φ_l este unghiul pentru care unghiul de refracție $\varphi_2 = \pi/2$. Pentru $\varphi > \varphi_l$ nu mai există rază refractată, indiferent de modul în care oscilează vectorul

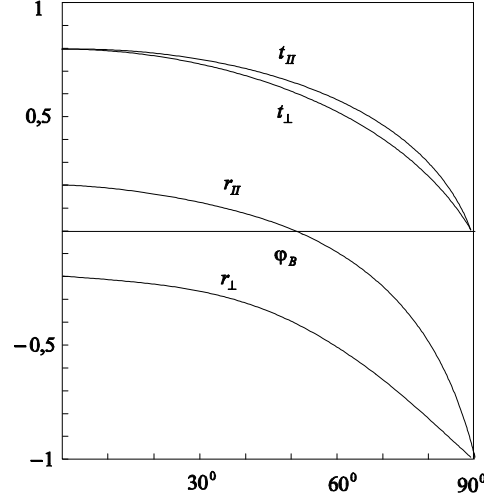


Figura 1.12: Coeficienții de reflexie și transmisie în funcție de unghiul de incidență la interfața aer ($n_1 = 1$)- sticlă ($n_2 = 1,5$)

$\vec{E}$. Spunem că are loc fenomenul de reflexie totală. Din acest motiv $r_{\parallel} = 1$ și $r_{\perp} = 1$.

Coeficientul de reflexie paralel este inițial negativ. El devine zero când $\varphi_1 = \varphi'_B$ pentru care $\text{tg}(\varphi'_B + \varphi_2) \rightarrow \infty$, deoarece $\varphi'_B + \varphi_2 = \pi/2$. El atinge valoarea 1 pentru $\varphi = \varphi_l$.

Variația acestor coeficienți pentru acest caz este reprezentată în Fig. 1.13.

Modificarea fazei

În cazul în care $n_2 > n_1$ din ecuația (1.120) rezultă $r_{\perp} < 0$. Altfel spus $\vec{E}_{1\perp}$ are sens opus față de $\vec{E}_{0\perp}$. Aceasta înseamnă că între unda incidentă $\vec{E}_{0\perp}$ și unda reflectată $\vec{E}_{1\perp}$ există o diferență de fază egală cu π .

Astfel componenta normală pe planul de incidență suferă un salt de fază egal cu π prin reflexie când indicele de refracție al mediului din care vine lumina este mai mic decât al mediului pe care aceasta cade.

Deoarece $t_{\perp}$ și $t_{\parallel}$ sunt întotdeauna pozitivi, diferența de fază dintre unda incidentă și cea transmisă este $\Delta\varphi = 0$.

Lucrurile sunt mai puțin evidente pentru cazul undelor ce oscilează în planul de incidență $\vec{E}_{0\parallel}$, $\vec{E}_{1\parallel}$, și $\vec{E}_{2\parallel}$. Este necesar să definim ce înseamnă

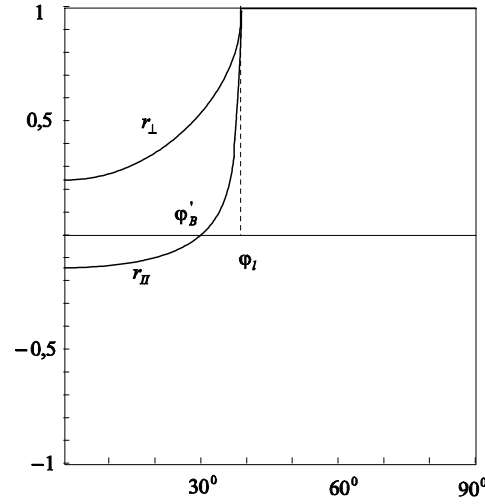


Figura 1.13: Coeficienții de reflexie funcție de unghiul de incidență la interfața sticlă ($n_1 = 1,5$)- aer ($n_2 = 1$)

că vectorii sunt în fază, deoarece vectorii sunt coplanari dar nu sunt colineari.

Pentru aceasta vom ține cont de faptul că pentru unda plană:

$$\vec{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} (\vec{u} \times \vec{H})$$

Din această relație rezultă că $\vec{E} \perp \vec{H}$, iar $\vec{E}$ este în opoziție de fază cu $\vec{H}$. Din Fig. 1.10 se observă că vectorii $\vec{H}$, $\vec{H}_1$, $\vec{H}_2$ sunt în fază. Din acest motiv și vectorii $\vec{E}$, $\vec{E}_1$ și $\vec{E}_2$ sunt în fază. Dacă doi dintre vectorii intensitate câmp magnetic sunt în opoziție de fază, atunci și vectorii intensitate a câmpului electric corespunzători sunt în opoziție de fază. Având în vedere relațiile (1.97), (1.109) și (1.110):

$$H_{10} = r_{\parallel} H_{00}$$

$$H_{20} = \frac{n_2}{n_1} t_{\parallel} H_{00}$$

Astfel dacă $r_{\parallel} > 0$, H_{00} și H_{10} sunt în fază, și E_{00} și E_{10} sunt în fază. Dacă $r_{\parallel} < 0$, H_{00} și H_{10} sunt în opoziție de fază, și E_{00} și E_{10} sunt în

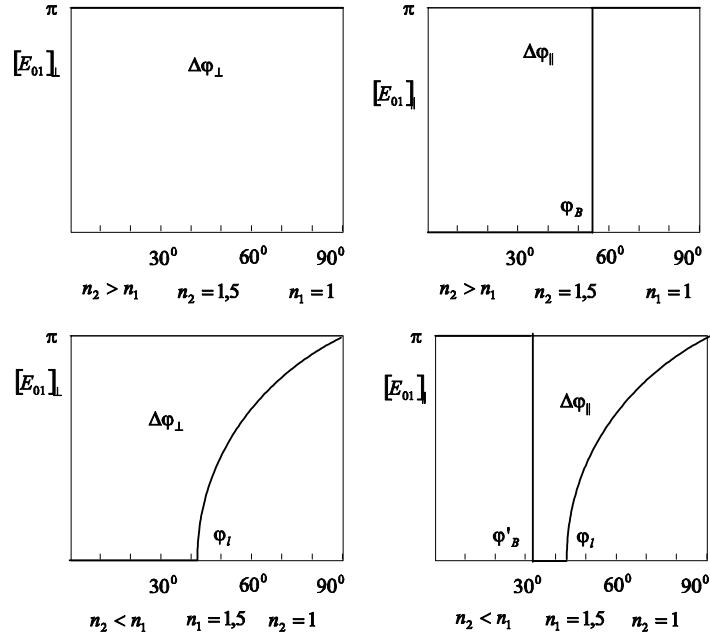


Figura 1.14: Defazajul pentru componentele paralele și perpendiculare ale câmpului electric

opозиție de fază.

Coeficientul de reflexie se poate exprima astfel:

$$\begin{aligned}
 r_{\parallel} &= \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2)}{\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2)} = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cos(\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \sin(\varphi_1 + \varphi_2)} \\
 r_{\parallel} &= \frac{\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2}{\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2} = \frac{\sin \varphi_1 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{\sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_2} \\
 r_{\parallel} &= \frac{\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}{\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2} = \frac{\frac{n_2}{n_1} \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}{\frac{n_2}{n_1} \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2} \\
 r_{\parallel} &= \frac{n_2 \cos \varphi_1 - n_1 \cos \varphi_2}{n_2 \cos \varphi_1 + n_1 \cos \varphi_2} \quad (1.125)
 \end{aligned}$$

Pentru ca unda reflectată și cea incidentă să fie în fază ($\Delta\varphi_{\parallel} = 0$) este necesar ca $r_{\parallel} > 0$, adică:

$$n_2 \cos \varphi_1 - n_1 \cos \varphi_2 > 0$$

Dacă se ține cont de legea refracției se obține:

$$\sin \varphi_1 \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 > 0$$

sau;

$$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cos(\varphi_1 + \varphi_2) > 0$$

Când $n_1 < n_2$ acest lucru se petrece dacă:

$$(\varphi_1 + \varphi_2) < \pi/2$$

Când $n_1 > n_2$ acest lucru se petrece când:

$$(\varphi_1 + \varphi_2) > \pi/2$$

Astfel dacă $n_1 < n_2$, $\vec{E}_{\parallel}$ și $\vec{E}_{1\parallel}$ vor fi în fază ($\Delta\varphi_{\parallel} = 0$) când $\varphi_1 < \varphi_B$ și vor fi în opoziție de fază când $\varphi_1 > \varphi_B$.

În cazul că $n_1 > n_2$, $r_{\parallel}$ este negativ când $\varphi_1 < \varphi'_B$ ceea ce înseamnă că $\vec{E}_{\parallel}$ și $\vec{E}_{1\parallel}$ vor fi în opoziție de fază ($\Delta\varphi_{\parallel} = \pi$) și $r_{\parallel}$ este pozitiv când $\varphi_1 > \varphi'_B$ și $\varphi_1 < \varphi_l$. Pentru unghiuri de incidență mai mari decât unghiul limită φ_l , $r_{\parallel}$ devine complex și $\Delta\varphi_{\parallel}$ crește până la π .

În cazul $n_1 > n_2$ coeficientul $r_{\perp}$ este pozitiv pentru unghiuri mai mici decât unghiul limită φ_l ceea ce înseamnă că $\Delta\varphi = 0$. Pentru unghiuri mai mari decât φ_l , $r_{\perp}$ devine complex, iar defazajul crește de la 0 la $\pi/2$. În Fig. 1.14 sunt reprezentate defazaajele.

Factorii de reflexie și transmisie

Să considerăm un fascicol de lumină cilindric incident pe o suprafață cum este reprezentat în Fig. 1.15. Deoarece intensitatea a fost definită ca energia medie ce traversează în unitatea de timp unitatea de suprafață perpendiculară pe direcția de propagare, puterea undei incidente este:

$$P = IA \cos \varphi_1 \quad (1.126)$$

unde I este intensitatea undei.

În mod analog $I_1 A \cos \varphi_1$ este puterea undei reflectate, I_1 fiind intensitatea undei reflectate, iar $I_2 A \cos \varphi_2$ este puterea undei transmise, unde I_2 este intensitatea undei refractate.

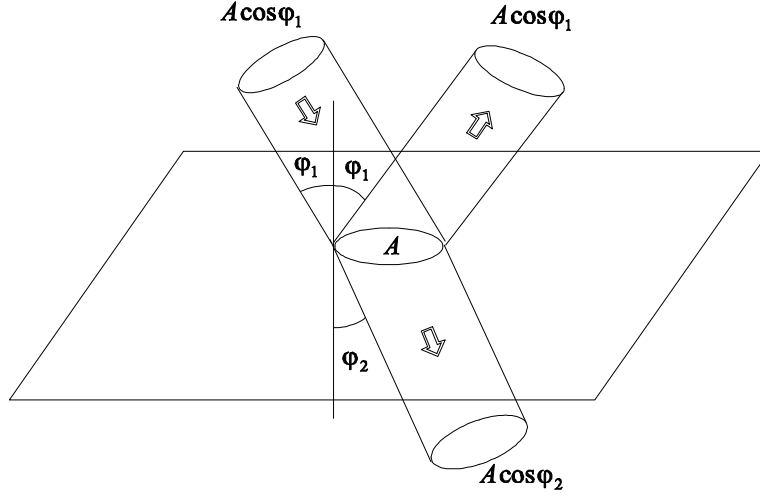


Figura 1.15: Reflexia și transmisia unui fascicol incident

Definim factorul de reflecție R ca fiind raportul dintre puterea undei reflectate și puterea undei incidente:

$$R = \frac{I_1 A \cos \varphi_1}{I A \cos \varphi_1} = \frac{I_1}{I} \quad (1.127)$$

Factorul de transmisie este raportul dintre puterea undei refractate și puterea undei incidente:

$$T = \frac{I_2 A \cos \varphi_2}{I A \cos \varphi_1} = \frac{I_2 \cos \varphi_2}{I \cos \varphi_1} \quad (1.128)$$

În cazul mediilor nemagnetice $I \sim \sqrt{\epsilon} E^2 \sim n E^2$

Atunci:

$$R = \left(\frac{E_{01}}{E_{00}} \right)^2 = r^2 \quad (1.129)$$

și:

$$T = \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{E_{02}}{E_{00}} \right)^2 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} = \frac{n_2 \cos \varphi_2}{n_1 \cos \varphi_1} \left(\frac{E_{02}}{E_{00}} \right)^2 = \frac{n_2 \cos \varphi_2}{n_1 \cos \varphi_1} t^2 \quad (1.130)$$

Legea conservării energiei se scrie considerând situația din Fig. 1.15:

$$I A \cos \varphi_1 = I_1 A \cos \varphi_1 + I_2 A \cos \varphi_2 \quad (1.131)$$

sau:

$$n_1 E_{00}^2 \cos \varphi_1 = n_1 E_{01}^2 \cos \varphi_1 + n_2 E_{02}^2 \cos \varphi_2$$

$$1 = \left(\frac{E_{01}}{E_{00}} \right)^2 + \frac{n_2 \cos \varphi_2}{n_1 \cos \varphi_1} \left(\frac{E_{02}}{E_{00}} \right)^2 = r^2 + \frac{n_2 \cos \varphi_2}{n_1 \cos \varphi_1} t^2 \quad (1.132)$$

$$1 = T + R \quad (1.133)$$

Relația 1.133 este valabilă în lipsa absorbției.

Este util să se utilizeze factorii de reflexie și transmisie pentru unde în care $\vec{E}$ oscilează paralel sau perpendicular pe planul de incidență. Astfel:

$$R_{\parallel} = r_{\parallel}^2 \quad (1.134)$$

$$R_{\perp} = r_{\perp}^2 \quad (1.135)$$

$$T_{\perp} = \frac{n_2 \cos \varphi_2}{n_1 \cos \varphi_1} t_{\perp}^2 \quad (1.136)$$

$$T_{\parallel} = \frac{n_2 \cos \varphi_2}{n_1 \cos \varphi_1} t_{\parallel}^2 \quad (1.137)$$

Dacă $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi/2$ se observă ca $R_{\parallel} = 0$ în timp ce $R_{\perp}$ nu se anulează. Aceasta duce la concluzia că pentru un anumit unghi de incidență suprafața nu reflectă decât o undă electromagnetică polarizată și anume cu vectorul $\vec{E}$ perpendicular pe planul de incidență. Unda incidentă paralelă cu planul de incidență nu va suferi nici o reflexie în acest caz. Vectorul $\vec{E}$ al undei reflectate va vibra într-un plan perpendicular pe planul de incidență. De aici rezultă legea lui Brewster.

Cum $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi/2$ atunci $\sin \varphi_2 = \cos \varphi_1$. Din legea reflexiei se obține:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{\sin \varphi_1}{\cos \varphi_1} = \operatorname{tg} \varphi_1 \quad (1.138)$$

Rezultă că pentru un anumit unghi care satisface relația de mai sus unda reflectată este polarizată rectiliniu perpendicular pe planul de incidență. Acest unghi poartă numele de unghi Brewster. În Fig. 1.16 sunt reprezentați factorii de transmisie și reflexie în cazul $n_1 > n_2$.

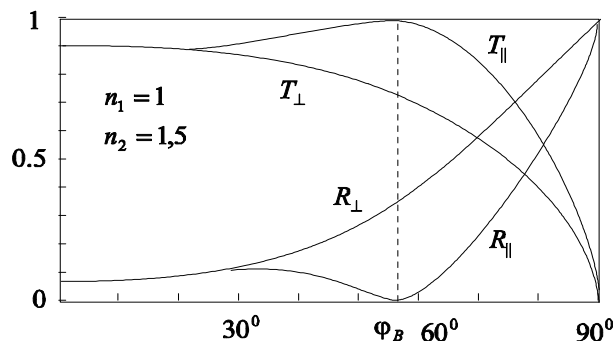


Figura 1.16: Factorii de transmisie și reflexie.

1.2.5 Reflexia totală

În cazul în care lumina provine dintr-un mediu cu indicele de refracție mai mare decât al mediului pe care are loc reflexia ($n_1 > n_2$) există un unghi de incidență limită $\varphi = \varphi_l$ pentru care $\varphi_2 = \pi/2$ și direcția unei refractate este tangentă la suprafața de separație a celor două medii:

$$\sin \varphi_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \varphi \quad (1.139)$$

Cum $n_1/n_2 > 1$, iar valoarea maximă pe care o poate lua $\sin \varphi_2$ este 1, atunci valoarea maximă a unghiului de incidență corespunzătoare acestui caz este:

$$\sin \varphi = \sin \varphi_l = \frac{n_2}{n_1} \quad (1.140)$$

Când $\varphi > \varphi_l$ are loc reflexia totală. Tot fluxul incident este reflectat și nu există undă refractată. Astfel, energia unei incidente rămâne în totalitate în interiorul primului mediu.

Două exemple simple pun în evidență acest fenomen. În Fig. 1.17 sunt reprezentate prisme de sticlă în care lumina suferă o reflexie totală.

Când lumina vine din interiorul sticlei, unghiul limită este $\varphi_l = 42^\circ$. Rezultă că lumina ce cade sub unghiuri de 45° pe fețele interioare ale prismelor suferă reflexie totală.

O aplicație practică a fenomenului sunt fibrele optice (Fig. 1.18) în care lumina suferă reflexii totale ori de câte ori ea ajunge la suprafața

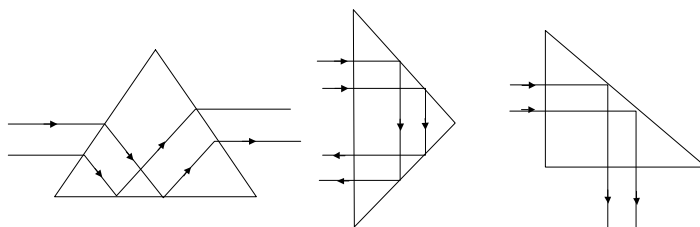


Figura 1.17: Prisme cu reflexie totală

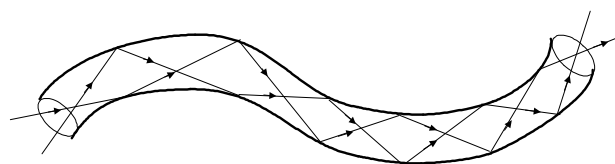


Figura 1.18: Fibră optică

acestora. Fibrele optice sunt folosite în transmisia informației printr-un semnal modulat. Pentru aceasta este necesar ca ele să fie de o puritate extremă, pentru că eventualele neomogenități și incluziuni de aer duc la pierderi mari de energie.

Efectul reflexiei totale permite explicarea reflexiei suferite de undele radio în atmosferă. Se știe că la o altitudine cuprinsă între 100 și 300 km deasupra Pământului se găsește o pătură ionizată ce reflectă undele radio cu $\lambda > 10$ m. Undele foarte scurte ce sosesc din spațiu pot traversa ionosfera.

Studiul undei refractate

Este inexact să se considere că fluxul total de energie nu penetrează deloc în cel de-al doilea mediu și că el este în totalitate reflectat la suprafața de separație a celor două medii. Vom demonstra că în cazul reflexiei totale unda electromagnetică pătrunde puțin în cel de-al doilea mediu și se propagă de-a lungul suprafeței de separare a celor două medii.

Pentru aceasta vom scrie expresia caracteristică a undei refractate în mediul al doilea care se propagă în direcția Ox' (Fig.1.19):

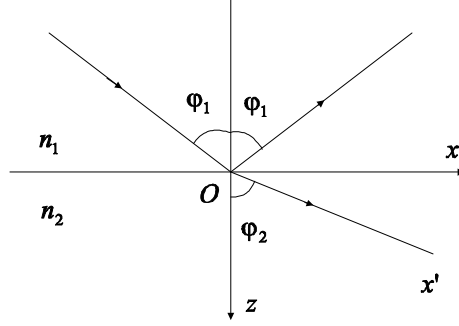


Figura 1.19: Diagrama ce ilustrează refracția pe un mediu cu indice de refracție mai mare $n_2 > n_1$

$$E_2 = E_{20} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x'}{v_2} \right) \right]$$

$$E_2 = E_{20} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x \sin \varphi_2 + z \cos \varphi_2}{v_2} \right) \right]$$

$$E_2 = E_{20} \exp \left(-\frac{i\omega z \cos \varphi_2}{v_2} \right) \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{v_2 / \sin \varphi_2} \right) \right] \quad (1.141)$$

În această expresie primii doi factori definesc amplitudinea unei unde care se propagă de-a lungul axei Ox cu viteza $v_2 / \sin \varphi_2$. Amplitudinea complexă depinde de coordonata z care caracterizează adâncimea de penetrație a undeii în mediul al doilea. Această undă poartă numele de undă **evanescentă**.

Deoarece în cazul reflexiei totale $\sin \varphi > \sin \varphi_l = n_2 / n_1$, adică

$$(n_1 \sin \varphi) / n_2 > 1$$

atunci:

$$\cos \varphi_2 = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_2} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \varphi \right)^2} \quad (1.142)$$

$$\cos \varphi_2 = \pm i \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \varphi \right)^2 - 1} \quad (1.143)$$

Pentru $\varphi > \varphi_l$ radicalul din (1.143) este o mărime pozitivă. Atunci amplitudinea undei considerate devine o amplitudine reală:

$$A = E_{20} \exp \left(-\frac{i\omega z \cos \varphi_2}{v_2} \right) = E_{20} \exp \left[\pm \frac{\omega z}{v_2} \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \varphi \right)^2 - 1} \right] \quad (1.144)$$

$$A = E_{20} \exp \left[\pm \frac{2\pi z}{\lambda} \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \varphi \right)^2 - 1} \right] \quad (1.145)$$

Semnul plus din exponentul funcției exponențiale de mai sus corespunde unei creșteri infinite a amplitudinii în mediul al doilea, fapt ce nu are semnificație fizică. Semnul minus corespunde unei funcții a cărei amplitudine scade rapid cu distanța în mediul al doilea pornind de la suprafața de separație a celor două medii.

Aceasta înseamnă că în mediul al doilea unda există doar într-un strat superficial a cărui grosime este de ordinul lungimii de undă a radiației.

Studiul undei reflectate

Vom porni de la formulele lui Fresnel:

$$\frac{(E_{10})_{\parallel}}{(E_{00})_{\parallel}} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2)}{\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2)} = \frac{\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2}{\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2} \quad (1.146)$$

$$\frac{(E_{10})_{\parallel}}{(E_{00})_{\parallel}} = \frac{\sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{\sin \varphi \cos \varphi + \sin \varphi_2 \cos \varphi_2} \quad (1.147)$$

Ținând cont că $\sin \varphi_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \varphi$ și de relația (1.143) obținem din (1.147):

$$\frac{(E_{10})_{\parallel}}{(E_{00})_{\parallel}} = \frac{n_{12}^2 \cos \varphi + i \sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}}{n_{12}^2 \cos \varphi - i \sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}} \quad (1.148)$$

unde $n_{12} = \frac{n_2}{n_1} < 1$.

Analog din:

$$\frac{(E_{10})_{\perp}}{(E_{00})_{\perp}} = -\frac{\sin(\varphi - \varphi_2)}{\sin(\varphi + \varphi_2)} = -\frac{\sin \varphi \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi} \quad (1.149)$$

obținem:

$$\frac{(E_{10})_{\perp}}{(E_{00})_{\perp}} = \frac{\cos \varphi + i\sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}}{\cos \varphi - i\sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}} \quad (1.150)$$

Atunci pentru unghiuri de incidență mai mari decât unghiul limită $\varphi > \varphi_l$ avem:

$$\left| \frac{(E_{10})_{\parallel}}{(E_{00})_{\parallel}} \right| = \left| \frac{(E_{10})_{\perp}}{(E_{00})_{\perp}} \right| = 1 \quad (1.151)$$

Aceasta înseamnă că în cazul unei reflexii totale fluxul de energie se întoarce în primul mediu. Când are loc un proces staționar nu este necesar să se țină cont de fracția de energie ce trece în al doilea mediu.

Pentru a studia dependența factorului de reflexie de unghiul de incidență φ considerăm un caz concret și anume trecerea luminii din sticlă în aer ($n_2 < n_1$). Unghiul Brewster se determină din relația $\tan \varphi_B = n_{12}$ și rezultă $\varphi_B = 33^\circ$. Unghiul limită pentru sticlă este $\varphi_l = 42^\circ$.

Dependența de unghiul φ al factorilor de reflexie:

$$R_{\parallel} = \left| \frac{(E_{10})_{\parallel}}{(E_{00})_{\parallel}} \right|^2 \quad (1.152)$$

$$R_{\perp} = \left| \frac{(E_{10})_{\perp}}{(E_{00})_{\perp}} \right|^2 \quad (1.153)$$

se obține utilizând formulele (1.148) și (1.149) și este prezentată în Fig.1.20:

Analizând aceste formule se ajunge la concluzia că pentru $\varphi = 0$ factorul de reflexie este de 4%. Pentru $\varphi = \varphi_B$, $R_{\parallel} = 0$, ceea ce înseamnă că nu se reflectă decât undele pentru care vectorul $\vec{E}$ oscilează pe o direcție perpendiculară pe planul de incidență ($R_{\perp} \neq 0$).

Când $\varphi \rightarrow \varphi_l$ (și nu când $\varphi \rightarrow \pi/2$ ca în cazul $n_2 > n_1$) fluxul de energie este reflectat în totalitate, dând loc unui fenomen de reflexie totală.

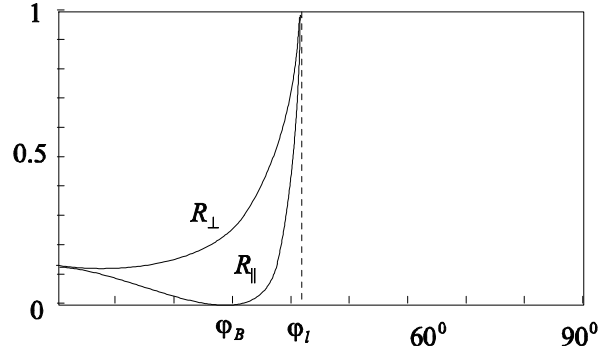


Figura 1.20: Dependența factorilor de reflexie funcție de unghiul de incidență

Pentru a stabili relația dintre fazele undelor este comod să se lucreze cu numere complexe. Pentru aceasta vom ține cont că:

$$|z| = 1, \quad z = \frac{a + ib}{a - ib} = e^{i\delta}, \quad \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{a}{b}$$

Un efect al reflexiei totale este schimbarea stării de polarizare a radiației. Vom demonstra că o undă polarizată liniar se transformă într-o undă polarizată eliptic. Introducem notațiile:

$$\frac{(E_{10})_{\parallel}}{(E_{00})_{\parallel}} = \exp(i\delta_{\parallel}) \quad (1.154)$$

$$\frac{(E_{10})_{\perp}}{(E_{00})_{\perp}} = \exp(i\delta_{\perp}) \quad (1.155)$$

Dacă se consideră pentru unda incidentă faza inițială nulă, $\delta_{\parallel}$ și $\delta_{\perp}$ fazele undelor reflectate se obține:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\delta_{\parallel}}{2} \right) = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}}{n_{12}^2 \cos \varphi} \quad (1.156)$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\delta_{\perp}}{2} \right) = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}}{\cos \varphi} \quad (1.157)$$

De aici rezultă ca $\delta_{\parallel} \neq \delta_{\perp}$, adică fazele componentelor reflectate $E_{\parallel}$ și $E_{\perp}$ nu sunt egale, ceea ce implică faptul că unda reflectată este eliptic

polarizată. Notăm cu $\delta = \delta_{\parallel} - \delta_{\perp}$ diferența de fază între componenta paralelă și cea perpendiculară. Atunci:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\delta}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\delta_{\parallel}}{2} - \frac{\delta_{\perp}}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\delta_{\parallel}}{2} \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{\delta_{\perp}}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg} \left(\frac{\delta_{\parallel}}{2} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\delta_{\perp}}{2} \right)} \quad (1.158)$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\delta}{2} \right) = \frac{\cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n_{12}^2}}{\sin^2 \varphi} \quad (1.159)$$

Se observă că $\operatorname{tg} \left(\frac{\delta}{2} \right)$ se anulează de două ori

a) pentru $\varphi = \varphi_l$, deoarece $\sin \varphi_l = n_{12}$

b) pentru $\varphi = \pi/2$, deoarece $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ (aceasta este incidență razantă)

Pentru a obține valoarea lui φ pentru care δ este maxim egalăm cu zero derivata la φ a expresiei (1.159):

$$\frac{d}{d\varphi} \operatorname{tg} \left(\frac{\delta}{2} \right) = 0 \quad (1.160)$$

Se obține:

$$\sin^2 \varphi_m = \frac{2n_{12}^2}{1 + n_{12}^2} \quad (1.161)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_m}{2} = \frac{1 - n_{12}^2}{2n_{12}} \quad (1.162)$$

Atunci, rezultă că cu cât este mai mare diferența între indicii de refracție ai celor două medii, cu atât este mai mare defazajul între cele două vibrații:

Pentru a obține o polarizare circulară este necesar ca:

$$\delta_m = \frac{\pi}{2} \quad (1.163)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_m}{2} = 1 \quad (1.164)$$

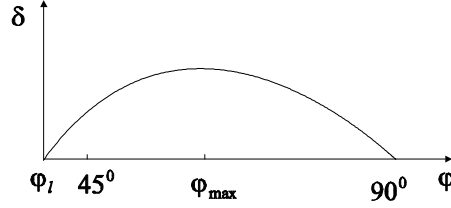


Figura 1.21: $\delta = \delta_{\parallel} - \delta_{\perp}$ în funcție de unghiul de incidență φ

Rezultă că diferența dintre indicii de refracție ai celor două medii trebuie să fie foarte mare. Din (1.164) și (1.1620) rezultă:

$$\frac{1 - n_{12}^2}{2n_{12}} = 1 \quad (1.165)$$

Din această relație rezultă $n_{12} = 0,4$, valoare care în gama opticii geometrice este realizabilă în cazul trecerii luminii din diamant ($n_1 = 2,4$) în aer ($n_2 = 1$).

În Fig.1.21 este reprezentat $\delta = \delta_{\parallel} - \delta_{\perp}$ în funcție de unghiul de incidență. În cazul unei reflexii la suprafața sticlă-aer $\varphi_m = 51^\circ$; printr-o singură reflexie nu se poate obține o polarizare circulară deoarece $\tan\left(\frac{\delta}{2}\right) = 0,42$.

Studiind reflexia totală, Fresnel a elaborat un procedeu de producere a luminii circular polarizate prin reflexie totală. Se demonstrează că utilizând o prismă de sticlă de formă corespunzătoare (Fig. 1.22) se poate obține prin două reflexii succesive pe fețele acesteia un defazaj $\delta = \pi/2$.

Aceasta se datorează faptului că pentru o singură reflexie pe suprafață $\tan\delta/2 = 0,42$, de unde $\delta = 45^\circ$. Pentru a se asigura egalitatea amplitudinilor celor două unde polarizate, planul de polarizare al unde primare trebuie să facă un unghi de 45° cu planul figurii. Pentru a transforma lumina circular polarizată în lumină liniar polarizată trebuie introdus cu ajutorul unui dispozitiv un defazaj suplimentar egal cu $\pi/2$ între undele polarizate pe cele două direcții ortogonale. Pentru aceasta se utilizează o lamă sfert de undă.

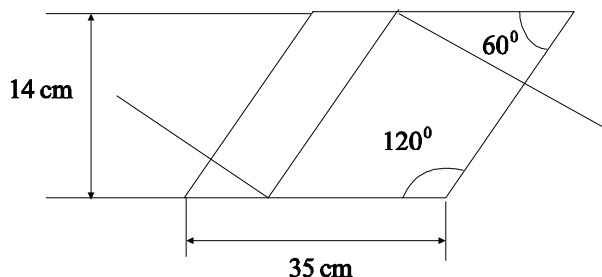


Figura 1.22: Obținerea unei unde circular polarizată printr-o dublă reflexie

1.2.6 Reflexia pe metale a undelor electromagnetice

O caracteristică a mediilor conductoare este prezența unui mare număr de sarcini electrice libere (acestea pot circula în interiorul materialului). Pentru metale aceste sarcini sunt electronii. Curentul obținut prin aplicarea unui câmp electric este direct proporțional cu conductivitatea mediului. Pentru un dielectric care nu posedă electroni de conducție conductivitatea este nulă, în timp ce pentru metale este finită. În cazul unui conductor perfect, conductivitatea este infinită. Aceasta înseamnă că dacă se aplică un câmp electric alternativ electronii vor urma oscilațiile câmpului și electronii vor reemite energia electromagnetică. În metalele reale electronii de conducție suferă ciocniri cu ionii rețelei cristaline astfel că o parte din energia electromagnetică se transformă ireversibil în căldură. Absorbția energiei unei unde electromagnetice este funcție de conductivitatea metalului.

Astfel, pentru a elabora o teorie a reflexiei undelor electromagnetice pe suprafețele metalice trebuie ținut cont de undele secundare generate de oscilațiile forțate ale electronilor liberi a căror densitate este foarte mare în metale. O teorie riguroasă trebuie să fie cuantică deoarece mișcarea electronilor în metale necesită aplicarea mecanicii cuantice.

Totuși, proprietățile optice caracteristice metalelor pot fi interpretate și în cadrul unei teorii fenomenologice.

În primul rând cele mai multe metale prezintă un factor mare de reflexie iar o mare parte din radiație este absorbită într-un strat subțire. Experiența arată că unda electromagnetică reflectată este eliptic polarizată, cu excepția cazului în care incidența este normală.

Raportul dintre fluxul de energie reflectat și absorbit trebuie să depindă de conductivitatea metalului. Experiența arată că cu cât conductivitatea este mai mare cu atât mai bine sunt reflectate undele luminoase.

Penetrarea undei în interiorul metalului duce inevitabil la apariția unui curent de conducție $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ și a efectului Joule corespunzător. Din ecuațiile Maxwell ținând cont de termenul caracteristic care ia în considerație conductibilitatea mediului ($\vec{j} \neq 0$) se obține:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.166)$$

În ipoteza unor medii liniare și omogene $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ și $\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ rezultă:

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (1.167)$$

Pentru această ecuație vom considera o soluție de forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp \left[i\omega \left(t - \frac{nz}{c} \right) \right] \quad (1.168)$$

Aceasta este o undă plană care se propagă de-a lungul axei Oz. Introducând (1.168) în (1.167) se obține:

$$-\frac{\omega^2}{c^2} n^2 = -\omega^2 \varepsilon \mu + i\sigma \mu \omega \quad (1.169)$$

adică:

$$n^2 = c^2 \varepsilon \mu - i\sigma \mu \frac{c^2}{\omega} \quad (1.170)$$

Considerând $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ iar $\mu = \mu_0$ ($\mu_r = 1$) se obține:

$$n^2 = \varepsilon_r - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \quad (1.171)$$

În acest caz indicele de refracție rezultă a fi o mărime complexă:

$$n = n_r - i\chi \quad (1.172)$$

în care n_r este partea reală (indice de refracție propriu-zis) iar χ coeficientul de extincție.

Înlocuim (1.172) și (1.171); rezultă:

$$n^2 - \chi^2 = \varepsilon_r \quad (1.173)$$

$$2n_r\chi = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} \quad (1.174)$$

Relațiile (1.173) și (1.174) permit calcularea lui n_r și χ . Unda progresivă poate fi scrisă sub forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\left(-\frac{\chi\omega}{c}z\right) \exp i\left(\omega t - \frac{n_r\omega z}{c}\right) \quad (1.175)$$

În această reprezentare intensitatea undei este $I \sim \langle \vec{E}\vec{E}^* \rangle$. Se obține:

$$I(z) = I_0 \exp[-2\mu z] \quad (1.176)$$

Relația 1.176 descrie cantitativ descreșterea intensității radiației pe măsură ce aceasta penetrează mediul respectiv. În ecuația de mai sus μ poartă numele de coeficient de absorbție și este dat de expresia:

$$\mu = \frac{\chi\omega}{c} \quad (1.177)$$

Relația (1.176) dedusă din ecuațiile câmpului electromagnetic a fost demonstrată prima dată pe cale experimentală de către Beer.

Ecuația (1.175) este din punct de vedere formal ecuația unei unde plane. Vom utiliza formulele pe care le-am discutat anterior înlocuind indicii de reflexie real n prin cantitatea complexă $n_r - i\chi$ a cărei parte reală caracterizează refracția undei electromagnetice iar partea imaginară caracterizează absorbția radiației.

Dacă n este un număr complex, putem spune că, formal unghiul φ_2 de refracție este complex pentru toate unghiurile de incidență cu excepția cazului când unghiul de incidență $\varphi = 0$. Relația care trebuie verificată este:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_2} = n' = n_r - i\chi \quad (1.178)$$

Situația este asemănătoare cu cea din cazul reflexiei totale când φ_2 este o cantitate complexă numai când $\varphi > \varphi_l$. Acest fapt determină polarizarea eliptică a radiației. Rezultă că dacă pe o suprafață metalică cade o undă cu polarizare rectilinie, unda reflectată este polarizată eliptic.

Studiul undei refractate prezintă o serie de dificultăți deoarece ea este absorbită în totalitate într-un strat subțire de la suprafața metalului. De aceea studiul experimental se concentrează asupra undei reflectate de suprafața metalului. Metoda a fost propusă de Drude.

Dacă o unda electromagnetică este reflectată de o suprafață metalică, obținem o undă polarizată eliptic și în consecință trebuie să apară o diferență de fază între $\vec{E}_{1\parallel}$ și $\vec{E}_{1\perp}$. Măsurând defazaajul δ și folosind factorul de reflexie pentru un unghi de incidență dat se determină n_r și χ , constante care sunt legate de constantele mediului σ și ε .

Introducerea indicelui de refracție complex n permite utilizarea formulelor lui Fresnel stabilite pentru undele care se propagă în medii dielectrice:

$$\frac{(E_{10})_{\parallel}}{(E_{00})_{\parallel}} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2)}{\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2)} = \rho_1 \exp(i\delta_{\parallel}) \quad (1.179)$$

$$\frac{(E_{10})_{\perp}}{(E_{00})_{\perp}} = -\frac{\sin(\varphi - \varphi_2)}{\sin(\varphi + \varphi_2)} = \rho_2 \exp(i\delta_{\perp}) \quad (1.180)$$

Cum $\delta_{\parallel} \neq \delta_{\perp}$, atunci există un defazaaj între cele două componente ortogonale ale vectorului $\vec{E}$ fapt ce implică polarizarea eliptică a undei reflectate de metal. Astfel se determină diferența $\delta = \delta_{\parallel} - \delta_{\perp}$.

Vom considera un caz simplu și anume cel al incidenței normale pe suprafața metalului. În cazul general:

$$\frac{E_{10}}{E_{00}} = \frac{n - 1}{n + 1} \quad (1.181)$$

Introducând $n = n_r - i\chi$:

$$\frac{E_{10}}{E_{00}} = \frac{(n_r - 1) - i\chi}{(n_r + 1) + i\chi} \quad (1.182)$$

coeficientul de reflexie este:

$$R = \frac{E_{10}}{E_{00}} \frac{E_{10}^*}{E_{00}^*} = \frac{(n_r - 1)^2 + \chi^2}{(n_r + 1)^2 + \chi^2} \quad (1.183)$$

adică:

$$R = 1 - \frac{4n_r}{(n_r + 1)^2 + \chi^2} \quad (1.184)$$

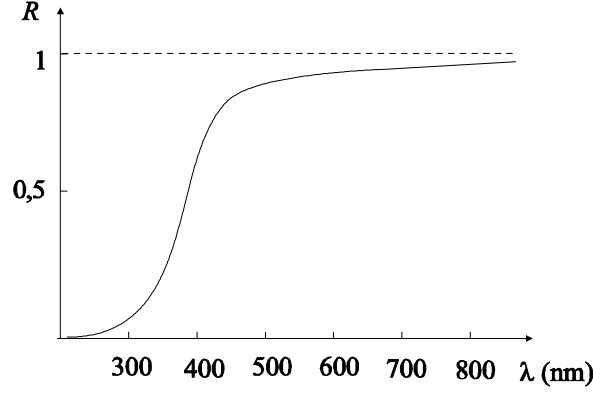


Figura 1.23: Coeficientul de reflexie al argintului funcție de lungimea de undă

Se pot determina astfel n_r și χ , R și δ fiind mărimi accesibile experimental.

Împărțind relațiile (1.173) și (1.174) rezultă:

$$\frac{n_r^2 - \chi^2}{2n_r\chi} = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0\omega}{\sigma} \quad (1.185)$$

sau:

$$\frac{1 - \left(\frac{\chi}{n_r}\right)^2}{2\left(\frac{\chi}{n_r}\right)} = \frac{\varepsilon\omega}{\sigma} \quad (1.186)$$

Dacă $\left(\frac{\chi}{n_r}\right) \rightarrow 1$ atunci rezultă $\sigma \rightarrow \infty$. Dar cum $\sigma = 2n_r\chi\varepsilon_0\omega$ rezultă că $\chi \rightarrow \infty$ și $n_r \rightarrow \infty$. Din (1.184) rezultă $R \rightarrow 1$, adică un conductor perfect reflectă în totalitate unda electromagnetică ce cade pe el. Măsurătorile asupra lui R arată că acesta nu este egal cu unitatea. Factorul de reflexie este dependent de lungimea de undă și tinde spre 1 în regiunea infraroșie a spectrului. În Fig. 1.23 este arătată variația factorul de reflexie al argintului cu lungimea de undă a radiației incidente.

Curba arată că pentru lumina vizibilă și pentru radiațiile ultraviolete argintul nu este un conductor perfect. O bună concordanță cu teoria o găsim în domeniul luminii roșii și a regiunii infraroșii a spectrului.

1.3 Interferența luminii

Afirmăm că două unde luminoase interferă dacă intensitatea rezultantă prin suprapunerea lor nu este egală cu suma intensităților fiecărei unde în parte.

O contribuție importantă în interpretarea fenomenelor de interferență a fost furnizată de Fresnel, Young și alți fizicieni de la începutul secolului al XIX -lea. Ei au dezvoltat o teorie ondulatorie bazată pe ideea că lumina este o perturbație care se propagă într-un mediu numit eter. Teoria a cunoscut un succes deosebit deoarece a explicat o serie de probleme (interferența, difracția), însă ea a impus ipoteze suplimentare privitoare la eter.

Teoria electromagnetică care a urmat a permis simplificarea problemelor și a rezolvat o serie de probleme complicate de interferență. Dificultățile nu apar în cazul undelor monocromatice ci în cazul undelor luminoase reale care sunt pulsuri luminoase sau pachete de unde. Totuși trebuie remarcat că studiul interferenței undelor armonice este foarte important deoarece un puls luminos se poate reprezenta printr-o sumă finită sau infinită de unde monocromatice.

1.3.1 Oscilații coerente

Presupunem că într-un punct din spațiu coexistă două unde electromagnetice oarecare $\vec{E}_1$ și $\vec{E}_2$ (în cazul general nemonocromatice) determinate de sursele S_1 și S_2 . În virtutea principiului superpoziției:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (1.187)$$

Atunci:

$$\vec{E}^2 = \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1\vec{E}_2 \quad (1.188)$$

În cazul măsurării unui flux de energie electromagnetică (în cazul undelor luminoase se determină fluxul de energie luminoasă ce iluminează o suprafață), trebuie ținut cont de inerția inerentă a aparatelor de măsură care în general este foarte mare. Este practic imposibil de a fi realizat fără un efect de inerție un studiu experimental al proceselor a căror durată este de ordinul duratei de excitație a atomului, cu toate că există

dispozitive de măsură al căror timp de răspuns este de 10^6 mai mic decât cel al ochiului (0, 1 s).

Trebuie considerată media temporală a relației (1.188) pe un interval de timp t' suficient de mare. Acest interval de timp trebuie adaptat inerției receptorului optic. Atunci înlocuim expresia (1.188) cu media ei temporală:

$$\langle \vec{E}^2 \rangle = \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 \rangle = \langle \vec{E}_1^2 \rangle + \langle \vec{E}_2^2 \rangle + 2 \langle \vec{E}_1 \vec{E}_2 \rangle \quad (1.189)$$

Atunci când se măsoară energia totală care este proporțională cu $\langle \vec{E}^2 \rangle$ pot apare două situații:

a) când $\langle \vec{E}_1 \vec{E}_2 \rangle = 0$

$$\langle \vec{E}^2 \rangle = \langle \vec{E}_1^2 \rangle + \langle \vec{E}_2^2 \rangle \quad (1.190)$$

iar

$$I = I_1 + I_2 \quad (1.191)$$

b) când $\langle \vec{E}_1 \vec{E}_2 \rangle \neq 0$

$$\langle \vec{E}^2 \rangle \neq \langle \vec{E}_1^2 \rangle + \langle \vec{E}_2^2 \rangle \quad (1.192)$$

iar

$$I \neq I_1 + I_2 \quad (1.193)$$

În primul caz intensitatea totală este egală cu suma intensităților (nu avem interferență). În al doilea caz intensitatea totală nu este egală cu suma intensităților și există interferență.

Se observă că inegalitatea $\langle \vec{E}_1 \vec{E}_2 \rangle \neq 0$ exprimă condiția necesară pentru apariția fenomenului de interferență.

Dacă cele două unde considerate $\vec{E}_1$ și $\vec{E}_2$ sunt polarizate liniar pe direcții perpendiculare $\vec{E}_1 \vec{E}_2 = 0$ și termenul de interferență devine nul. Dacă undele considerate au frecvențe diferite valoarea mediei temporale a produsului $\vec{E}_1 \vec{E}_2$ este nulă. Astfel rezultă două condiții necesare dar nu suficiente pentru ca două unde să interfere: ele trebuie să aibă aceeași frecvență și să nu fie polarizate liniar pe direcții perpendiculare.

Considerăm un caz mai general și anume acela în care într-un punct se suprapun două unde a căror fază depind de timp dar de frecvențe egale. Pentru simplificare vom presupune că amplitudinile celor două unde variază lent în raport cu timpul.

$$E = E_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (1.194)$$

unde E_0 și φ sunt mărimii ce depind de timp. Considerăm că într-un punct se suprapun două unde de acest tip:

$$E_1(t) = E_{10}(t) \cos[\omega t - \varphi_1(t)] \quad (1.195)$$

$$E_2(t) = E_{20}(t) \cos[\omega t - \varphi_2(t)] \quad (1.196)$$

Unda rezultantă se obține prin însumarea celor două unde plane:

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) \quad (1.197)$$

Compunerea celor două oscilații o vom face fazorial. Se obține:

$$E_0^2(t) = E_{10}^2(t) + E_{20}^2(t) + 2E_{10}E_{20} \cos[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)] \quad (1.198)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{E_{10}(t) \sin \varphi_1(t) + E_{20}(t) \sin \varphi_2(t)}{E_{10}(t) \cos \varphi_1(t) + E_{20}(t) \cos \varphi_2(t)} \quad (1.199)$$

Considerând că amplitudinile $E_{10}(t)$ și $E_{20}(t)$ sunt constante în timp atunci media temporală a lui $E_0^2(t)$ este:

$$\langle E_0^2(t) \rangle = E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20} \frac{1}{t'} \int_0^{t'} \cos[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)] dt \quad (1.200)$$

Dacă în intervalul de timp t' diferența de fază variază de un mare număr de ori, $\cos[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]$ ia când valori pozitive când valori negative, integrala este nulă:

$$\int_0^{t'} \cos[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)] dt = 0 \quad (1.201)$$

și nu avem interferență.

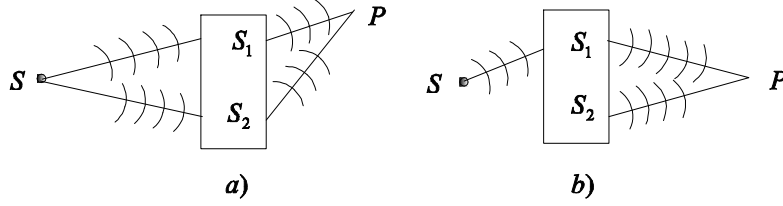


Figura 1.24: Obținerea interferenței: a) divizarea frontului de undă b) divizarea amplitudinii

Condiția necesară și suficientă pentru obținerea interferenței este ca diferența de fază $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ să rămână constantă în timp. Spunem că două unde sunt coerente dacă diferența de fază dintre ele rămâne constantă în cursul observațiilor. Trebuie observat că două unde armonice monocromatice de aceeași frecvență sunt coerente, diferența de fază dintre ele fiind constantă în timp.

Pentru a obține două unde luminoase coerente a căror suprapunere să determine apariția interferenței, există două posibilități reprezentate formal în Fig. 1.21.

- a) prin divizarea frontului de undă
- b) prin divizarea amplitudinii

În aceste cazuri diferența de fază este:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} [SS_2P - SS_1P] \quad (1.202)$$

1.3.2 Interferența a două unde monocromatice

Fie două surse S_1 , S_2 care emit undele monocromatice E_1 și E_2 de aceeași pulsație ω ale căror vibrații au aceeași direcție (Fig.1.25). Din acest motiv problema poate fi tratată scalar. În plus vom considera că distanțele de la cele două surse la punctul de interferență r_1 și r_2 sunt mult mai mari decât distanța dintre surse.

$$E_1 = E_{10} \cos(\omega t - kr_1) \quad (1.203)$$

$$E_2 = E_{20} \cos(\omega t - kr_2) \quad (1.204)$$

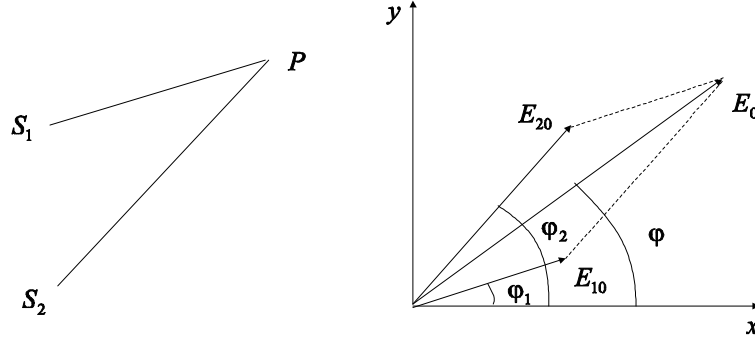


Figura 1.25: Suprapunerea a două unde luminoase

Unda rezultantă este:

$$E = E_1 + E_2 \quad (1.205)$$

Exprimând fazele celor două unde în punctul în care are loc interferența:

$$\varphi_1 = \omega t - kr_1$$

$$\varphi_2 = \omega t - kr_2$$

compunerea celor două unde se face fazorial (Fig.1.25):

$$E^2 = E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (1.206)$$

unde $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = k(r_2 - r_1)$ reprezintă defazajul dintre cele două unde. Se observă că pentru unde monocromatice acesta este constant în timp iar condiția pentru obținerea interferenței este îndeplinită.

Deoarece $I \sim E^2$, $I_1 \sim E_{10}^2$, $I_2 \sim E_{20}^2$ atunci intensitatea unde rezultante se exprimă:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi \quad (1.207)$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos [k(r_2 - r_1)] \quad (1.208)$$

Dacă se ține cont de expresia lui $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/vT = 2\pi n/cT$, expresia diferenței de fază dintre cele două unde se poate scrie:

$$\Delta\varphi = k(r_2 - r_1) = \frac{2\pi n(r_2 - r_1)}{cT} = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \quad (1.209)$$

În expresia de mai sus $\delta = n(r_2 - r_1)$ poartă numele de diferență de drum optic în timp ce $\delta_g = r_2 - r_1$ poartă numele de diferență de drum geometric.

Considerând cazul a două unde de amplitudini egale $E_{10} = E_{20} = E_0$, $I_1 = I_2 = I_0$ intensitatea unei rezultante devine:

$$I = 2I_0(1 + \cos \Delta\varphi) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}\right) \quad (1.210)$$

Intensitatea rezultantă este maximă atunci când:

$$\cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = 1 \quad (1.211)$$

adică în cazul că $2\pi\delta/\lambda_0 = 2m\pi$, unde m este un număr întreg. Rezultă condiția pentru drumul optic:

$$\delta = m\lambda_0 \quad (1.212)$$

În acest caz intensitatea rezultantă este:

$$I_M = 4I_0 \quad (1.213)$$

Intensitatea minimă se obține atunci când:

$$\cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = -1 \quad (1.214)$$

adică în cazul că $2\pi\delta/\lambda_0 = (2m + 1)\pi$. Rezultă:

$$\delta = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} \quad (1.215)$$

În acest caz intensitatea rezultantă este nulă:

$$I_m = 0 \quad (1.216)$$

1.3.3 Coerența temporală și spațială

Când se studiază fenomenul de interferență a două unde care provin de la sursele S_1 și S_2 obținute pornindu-se de la o singură sursă primară S , există două cauze care influențează fenomenul de interferență:

1) distribuția spectrală a undelor emise de sursa S (sursa nu emite o undă strict monocromatică).

2) extinderea spațială a sursei S (sursa S nu este punctuală).

Coerența temporală

Considerăm că unda emisă de sursa primară este cvasimonocromatică: ea este caracterizată de intensitatea spectrală I_ν care este proporțională cu energia asociată benzii de frecvență cuprinsă între ν și $\nu + d\nu$. În general $I_\nu(\nu)$ este o curbă centrată în jurul unei frecvențe ν_0 .

Există două tipuri principale ale distribuției spectrale a undelor emise de o sursă de lumină:

1) Distribuția spectrală Lorentz:

$$I_n(\nu) = \frac{I_0}{1 + 4\pi^2\tau_c^2(\nu - \nu_0)^2} \quad (1.217)$$

care are lărgimea la semiînălțime egală cu:

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{1}{2\pi\tau_c} \quad (1.218)$$

Lărgimea la semiînălțime depinde de parametrul τ_c care reprezintă așa numita viața medie a stării excitate în care se află emițătorul. El reprezintă practic durată trenului de unde emis de sursă.

2) Distribuția gaussiană:

$$I_n(\nu) = I_0 \exp \left[-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (1.219)$$

care are lărgimea la semiînălțime egală cu:

$$\Delta\nu_{1/2} = 2\sigma(2\ln 2)^{1/2} = 2,35\sigma \quad (1.220)$$

Această distribuție este atribuită efectului Doppler, adică variației frecvenței undei emise de atomi datorită mișcării lor.

Pentru simplificare vom asimila astfel de distribuții cu distribuții dreptunghiulare cu lărgimea $\Delta\nu_{1/2}$ centrate pe frecvența ν_0 . Pentru un sistem interferențial dat, diferența de fază în punctul de observație P depinde de frecvența unei monocromatice considerate:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = \frac{2\pi\delta\nu}{c} = 2\pi\nu\tau \quad (1.221)$$

unde $\tau = \delta/c$.

Sursa S nefiind monocromatică, fiecare din componentele monocromatice dau propriul sistem de franje de interferență. Intensitatea luminii în punctul P este sumă a intensităților asociate fiecărei componente în parte:

$$I = \sum_i 2I_0(\nu) (1 + \cos 2\pi\nu_i\tau) \quad (1.222)$$

Sistemele de franje asociate fiecărei frecvențe ν_i se suprapun și de aceea imaginea este neclară. Dacă însă spectrul de frecvențe este suficient de îngust suprapunerea nu este perceptibilă. Ținând cont de relația (1.221) diferența maximă dintre defajazele undelor ce ajung în punctul P este $\Delta(\Delta\varphi) = 2\pi\Delta\nu_{1/2}\tau$. Sistemul de franje asociat undelor cuasi-monocromatice care interferă este clar dacă:

$$\Delta(\Delta\varphi) = 2\pi\Delta\nu_{1/2}\tau \ll 2\pi \quad (1.223)$$

sau:

$$\Delta\nu_{1/2}\tau \ll 1 \quad (1.224)$$

De aici rezultă:

$$\tau \ll \frac{1}{\Delta\nu_{1/2}} = \tau_c \quad (1.225)$$

unde τ_c poartă numele de durată de coerență.

În termeni de drum optic această condiție se scrie:

$$\delta = c\tau \ll c\tau_c = L_c \quad (1.226)$$

unde mărimea L_c poartă denumirea de lungime de coerență și reprezintă practic lungimea trenului de undă emis de sursă:

Deoarece $\nu = c/\lambda$:

$$\Delta\nu = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

lungimea de coerență poate fi exprimată astfel:

$$L_c = c\tau_c = c(\Delta\nu_{1/2})^{-1} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda_{1/2}} \quad (1.227)$$

Vom estima aceste mărimi pentru o lampă cu mercur și pentru o radiație laser.

Pentru o lampă cu vapori de mercur pe care este plasat un filtru interferențial de lărgime $\Delta\lambda = 10 \text{ nm}$ pentru radiația $\lambda_0 = 550 \text{ nm}$ se obține:

$$L_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \simeq 30 \text{ } \mu\text{m} \quad (1.228)$$

$$\tau_c = \frac{L_c}{c} \simeq 10^{-13} \text{ s} \quad (1.229)$$

Pentru un laser He-Ne cu $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$ și banda de frecvențe $\Delta\nu_{1/2} = 1,4 \times 10^6 \text{ Hz}$ se obține:

$$\tau_c = \frac{1}{\Delta\nu_{1/2}} = 0,7 \times 10^{-9} \text{ s} \quad (1.230)$$

$$L_c = c\tau_c = 20 \text{ cm}$$

În Fig. 1.26 este prezentat schematic cazul precedent. Dacă $\tau \ll \tau_c$, ($\delta \ll L_c$) undele care se întâlnesc în P provin din același tren de unde (Fig.1.26a), diferența de fază este constantă și undele vor interfera.

Dacă însă $\tau > \tau_c$, ($\delta > L_c$) undele provin de la trenuri de undă succesive (Fig. 1.26b) iar diferența de fază este aleatorie astfel că fenomenul de interferență nu se produce.

Coerența spațială

Problema coerenței spațiale intervine atunci când unda primară este emisă de o sursă extinsă. Atunci unda nu este caracterizată de un singur vector de undă ci de un ansamblu de vectori de undă de același modul dar

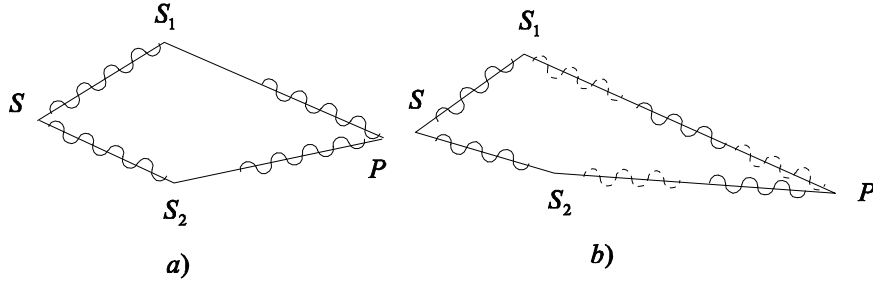


Figura 1.26: Coerența temporală

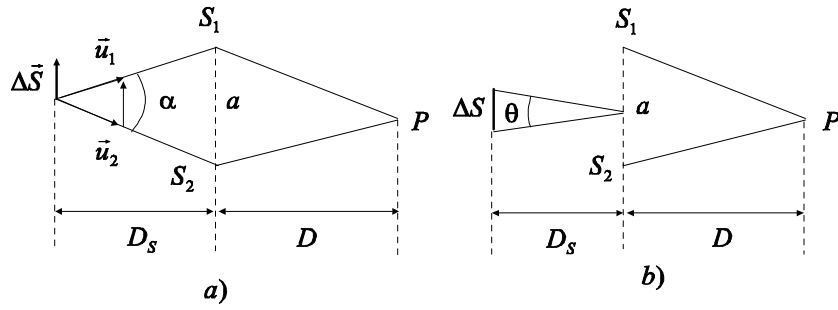


Figura 1.27: Coerența spațială

cu direcții diferite. Ne propunem să evaluăm influența acestei extinderi a sursei primare asupra fenomenului de interferență. Pentru aceasta vom încerca să evaluăm influența deplasării unei surse primare punctiforme.

Considerăm un dispozitiv de tip Young, sursele secundare S_1 , S_2 și punctul de interferență P fiind considerate fixe (Fig. 1.27). Când sursa S se deplasează cu $\Delta \vec{S}$ variația diferenței de fază a undelor ce ajung în P este:

$$\Delta(\Delta\varphi) = 2\pi\nu \frac{\Delta\delta}{c} \quad (1.231)$$

unde:

$$\Delta\delta = \Delta[(SS_2P) - (SS_1P)] = \Delta[(SS_2) - (SS_1)] \quad (1.232)$$

Dar $\Delta(SS_2) = -\vec{u}_2\Delta\vec{S}$ și $\Delta(SS_1) = -\vec{u}_1\Delta\vec{S}$ rezultă:

$$\Delta\delta = -\vec{u}_2\Delta\vec{S} + \vec{u}_1\Delta\vec{S} \quad (1.233)$$

astfel că diferența dintre diferențele de fază este:

$$\Delta(\Delta\varphi) = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta\vec{S}(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \quad (1.234)$$

Trebuie remarcat că în urma deplasării sursei într-o direcție perpendiculară pe vectorul $(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$ nu apare nici o modificare a diferenței de fază.

Dacă $\Delta\vec{S}$ - deplasarea sursei este paralelă cu $(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$ atunci:

$$\Delta\vec{S}(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = \Delta S \times 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \simeq \Delta S \alpha \quad (1.235)$$

Rezultă:

$$\Delta(\Delta\varphi) = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta S \alpha \quad (1.236)$$

Să considerăm în continuare că sursa primară este extinsă. În acest caz fiecare punct S_i furnizează propriul său sistem de franje independente, astfel că în punctul P intensitatea rezultantă este:

$$I = \sum_i 2I_i (1 + \cos \Delta\varphi_i) \quad (1.237)$$

unde:

$$\Delta\varphi_i = 2\pi\nu_i\tau_i = \frac{1}{c}[(S_i S_2 P) - (S_i S_1 P)] \quad (1.238)$$

Asimilăm sursa extinsă S cu o fantă de lărgime ΔS . Pentru ca franjele să se observe punem condiția ca pentru punctele cele mai depărtate între ele:

$$\Delta(\Delta\varphi) \ll 2\pi \quad (1.239)$$

Dacă se notează cu D_s distanța de la sursa S la sursele S_1 și S_2 atunci $\Delta S = D_s\theta$ iar $\alpha = \frac{S_1 S_2}{D_s} = \frac{a}{D_s}$ (Fig. 1.27b). Relația (1.236) se scrie:

$$\Delta(\Delta\varphi) = \frac{2\pi a\theta}{\lambda} \quad (1.240)$$

În relațiile de mai sus θ este unghiul sub care se vede sursa primară din planul surselor S_1 și S_2 . Atunci relația (1.239) devine:

$$\frac{a\theta}{\lambda} \ll 1 \quad (1.241)$$

Mărimea:

$$l_s = \frac{\lambda}{\theta} \quad (1.242)$$

poartă denumirea de lungime de coerență. Condiția precedentă se scrie ca:

$$a \ll l_s \quad (1.243)$$

Ca ordin de mărime vom considera două exemple din astronomie:

- a) în cazul Soarelui $\theta \simeq 32''$ de unde $l_s \simeq 60 \mu\text{m}$ considerând pentru lungimea de undă valoarea medie de 550 nm (lumina verde).
- b) în cazul planetei Venus $\theta \simeq 1''$ și $l_s \simeq 2 \text{ mm}$.

1.3.4 Dispozitive interferențiale

Dispozitivul Young

Dispozitivul Young constă dintr-o sursă S care iluminează două fante F_1 și F_2 (Fig. 1.28). Cele două fante practicate într-un paravan E devin conform principiului lui Huygens două surse secundare de oscilații care determină interferența pe ecranul E' aflat la distanța D de planul surselor.

Intensitatea luminoasă într-un punct de pe ecran este dată de formula generală:

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right) \quad (1.244)$$

unde I_0 este intensitatea luminoasă corespunzătoare fiecărei fante în parte. Considerând dispozitivul în aer diferența de drum optic dintre cele două unde este:

$$\delta = F_2P - F_1P = r_2 - r_1 \quad (1.245)$$

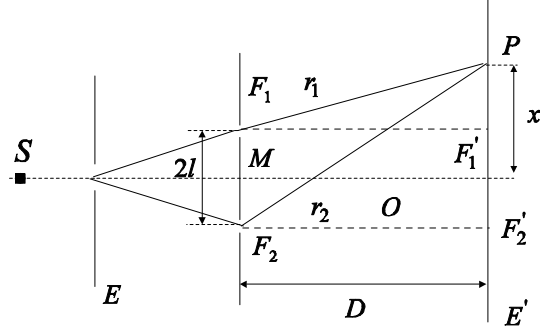


Figura 1.28: Dispozitivul Young

Pentru a calcula această diferență de drum vom considera că $D \gg 2l$ și $D \gg x$ (D este de ordinul decimetrilor sau metrilor, iar $2l$ și x sunt de ordinul zecimilor de milimetri).

Considerăm triunghiurile $\triangle F_1PF'_1$ și $\triangle F_2PF'_2$ în care aplicăm teorema lui Pitagora:

$$r_1^2 = D^2 + (x - l)^2 \quad (1.246)$$

$$r_2^2 = D^2 + (x + l)^2 \quad (1.247)$$

Prin scăderea celor două relații se obține:

$$(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 4xl \quad (1.248)$$

În această relație $\delta = r_2 - r_1$ iar $r_2 + r_1 \simeq 2D$ deoarece înclinarea celor două direcții față de orizontală este foarte mică.

Atunci:

$$\delta = \frac{2xl}{D} \quad (1.249)$$

Din cele discutate mai sus știm că se obține intensitate maximă pe ecran atunci când diferența de drum este un număr întreg de lungimi de undă:

$$\frac{2xl}{D} = m\lambda_0 \quad (1.250)$$

Din această relație se obțin pozițiile maximelor de interferență pe ecran:

$$x_m = m \frac{\lambda_0 D}{2l} \quad (1.251)$$

Intensitatea luminii este minimă atunci când diferența de drum optic este egală cu un număr impar de semilungimi de undă:

$$\frac{2xl}{D} = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} \quad (1.252)$$

Atunci pozițiile minimelor (sau a franjelor întunecoase) pe ecran sunt:

$$x'_m = (2m + 1) \frac{\lambda_0 D}{4l} \quad (1.253)$$

Distanța dintre două maxime sau minime consecutive poartă numele de interfranjă și se notează cu i :

$$i = (x_{m+1} - x_m) = \frac{\lambda_0 D}{2l} \quad (1.254)$$

Trebuie remarcat că pentru a se obține franjele de interferență este necesar ca diferența de drum dintre undele care interferă să fie mai mică decât lungimea de coerență $\delta \ll L_c$, deoarece amplitudinile și fazele sunt constante doar în intervalul de timp τ_c . De exemplu dacă se consideră $2l = 0,05$ mm, $D = 50$ cm iar lungimea de coerență $L_c = 30$ μ m ($\lambda = 546$ nm, cu $\Delta\lambda = 10$ nm) distanța la care undele care interferă mai pot fi coerente este:

$$x_{\max} = \frac{D\delta}{2l} \ll \frac{DL_c}{2l} = 30 \text{ cm} \quad (1.255)$$

Oglinzile Fresnel

Dispozitivul permite să se folosească drept surse coerente cele două imagini ale aceleiași surse reale de lumină obținute în două oglinzi plane. Schema dispozitivului este prezentată în Fig.1.29.

O_1O și O_2O sunt două oglinzi plane dispuse sub un unghi α foarte mic. Sursa S (sub formă de fantă perpendiculară pe planul figurii) este așezată pe bisectoarea unghiului O_1OO_2 la distanța r de locul de contact

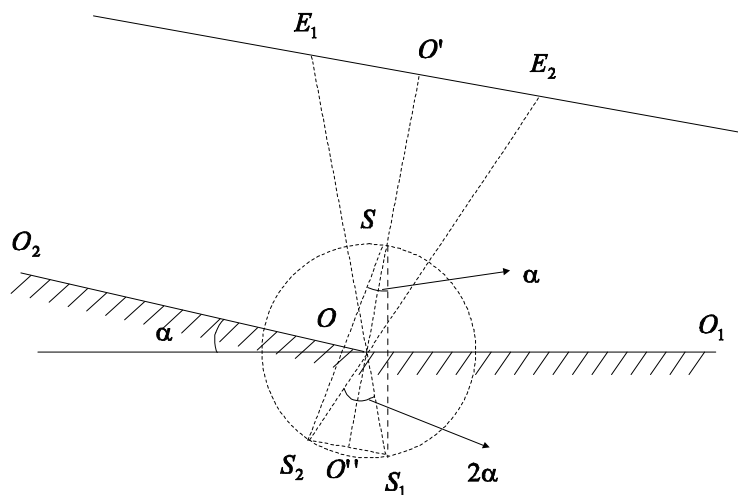


Figura 1.29: Oglinzile Fresnel

al oglinzilor. S_1 și S_2 , imaginile virtuale ale lui S în cele două oglinzi sunt cele două surse coerente.

Fenomenul de interferență se observă pe un ecran E paralel cu muchia comună și perpendicular (în acest caz) pe bisectoarea unghiului $\widehat{O_1OO_2}$.

Se observă că undele provenite de la S_1 (undele provenite de la S și reflectate pe oglinda O_1) le găsim în interiorul unghiului $\widehat{E_1OO_1}$ iar undele provenite de la S_2 , în interiorul unghiului $\widehat{E_2OO_2}$. Interferența apare în regiunea din spațiu în care undele provenite de la cele două surse se suprapun, adică în interiorul unghiului $\widehat{E_1OE_2}$. Pe ecran, franjele de interferență vor fi obținute între punctele E_1 și E_2 .

Deoarece S_1 este simetricul lui S față de OO_1 , iar S_2 este simetricul lui S față de OO_2 atunci triunghiurile $\triangle S_1OS$ și $\triangle S_2OS$ sunt isoscele și $SO = S_1O = S_2O$, adică punctele S_1, S_2 și S se află pe un cerc de rază r .

În plus $\widehat{S_2OS_1} = 2\widehat{S_2SS_1} = 2\alpha$; $\widehat{S_2SS_1} = \alpha$ deoarece $SS_1 \perp OO_1$ și $SS_2 \perp OO_2$.

În $\triangle S_2OS_1$ isoscel

$$S_2S_1 = 2S_2O'' = 2r \sin \alpha$$

S_2S_1 joacă rolul lui "2l" din cazul dispozitivul lui Young. Presupunem

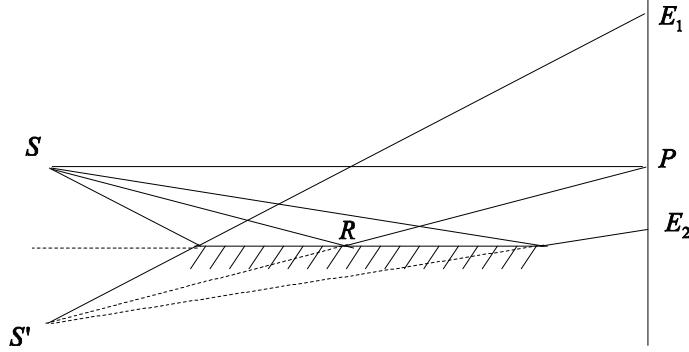


Figura 1.30: Oglinda Lloyd

distanța de la dreapta de intersecție a oglinzilor până la ecran ca fiind cunoscută și anume $OO' = d$. Atunci distanța D de la planul surselor S_1 și S_2 la ecran este:

$$D = O''O + OO' = r \cos \alpha + d \quad (1.256)$$

Rezultă că interfranja are valoarea:

$$i = \frac{(d + r \cos \alpha) \lambda}{2r \sin \alpha} \quad (1.257)$$

Deoarece α este foarte mic putem aproxima $\cos \alpha \approx 1$ și $\sin \alpha \approx \alpha$ astfel că interfranja este dată cu o foarte bună aproximație de relația:

$$i = \frac{(d + r) \lambda}{2r \alpha} \quad (1.258)$$

Oglinda Lloyd

Aceasta este o oglindă plană deasupra căreia este plasată la o înălțime foarte mică sursa S de lumină monocromatică (Fig.1.30). Ecranul pe care se "prind" franjele de interferență este plasat perpendicular pe planul oglinzii.

Într-un punct P de pe ecran ajunge direct o parte a frontului de undă datorat sursei S iar o altă parte ajunge prin reflexia pe oglinda O . Astfel în punctul P interferează două unde: una provenită direct din S iar alta care

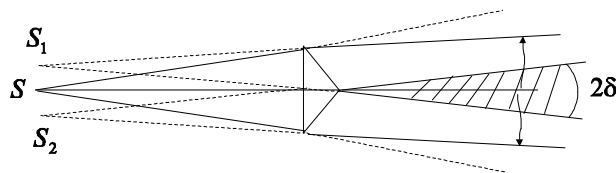


Figura 1.31: Biprisma Fresnel

pare a proveni din S' (imaginea lui S în oglindă). Această a doua undă este o undă ce s-a reflectat pe oglindă. Atunci S și S' sunt cele două surse de lumină coerentă. Se observă că sursa S' nu poate acoperi pe ecran decât porțiunea dintre E_1 și E_2 (care sunt punctele unde ajung razele reflectate pe marginile oglinzii). Franjele de interferență vor fi obținute pe ecran între E_1 și E_2 .

Dacă vom considera D distanța de la planul surselor la ecran și $2h$ distanța dintre cele două surse, valoarea interfranței este:

$$i = \frac{\lambda D}{2h} \quad (1.259)$$

Diferența de drum dintre razele ce interferă în punctul P este:

$$\delta = (S'P - \frac{\lambda}{2}) - SP \quad (1.260)$$

când reflexia are loc pe un mediu cu indice de refracție mai mare decât acela din care provine lumina.

Biprisma Fresnel

Biprisma are un unghi la vârf foarte apropiat de 180° , astfel că unghiurile de la capete sunt foarte mici (Fig. 1.31). Sursa primară este constituită dintr-o fantă dreptunghiulară uniform iluminată cu lumină paralelă. Fiecare din prismele respective formează câte o imagine a sursei S într-un plan perpendicular pe axa optică ce conține pe S . Se demonstrează că distanța dintre surse este:

$$S_1 S_2 = 2l(n-1)\alpha \quad (1.261)$$

unde cu n am notat indicele de refracție al materialului prisme, iar l este distanța dintre sursa S și prismă. Câmpul interferențial este dat de

regiunea în care undele, ce par a proveni de la sursele secundare S_1 și S_2 se suprapun. Ca o observație, dacă se mărește lărgimea fantei primare crește iluminarea ecranului dar scade contrastul franjelor. Pentru a ameliora contrastul franjelor trebuie ameliorată monocromaticitatea luminii.

1.3.5 Franje localizate de egală înclinare

Trebuie remarcat că sistemele interferențiale ca Oglinzile Fresnel și Biprisma Fresnel sunt sensibile la dimensiunile sursei primare. Pentru ca franjele să fie contrastante este necesar ca sursa primară să fie cât mai fină (îngustă) - de dimensiuni cât mai mici, fapt ce face ca luminozitatea franjelor obținute să fie foarte mică. Problema care se pune este aceea de a realiza un sistem interferențial capabil să dea fenomene de interferență cu contrast mare dar cu o sursă largă, adică cu o sursă a cărei luminozitate să fie mare. Dacă revenim la schema din Fig. 1.27 se observă:

$$\Delta(\Delta\varphi) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \vec{S}(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \quad (1.262)$$

Interferența e cu atât mai bună cu cât $\Delta(\Delta\varphi)$ este mai mică și ea devine maximă dacă $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$. Acest fapt se petrece pentru toate sistemele care sunt capabile de a produce două unde pornind de la o singură undă incidentă, adică de a obține două unde coerente prin divizarea amplitudinii. Lamele cu fețe plan paralele constituite din doi dioptri plani realizează o astfel de dedublare a unei incidente.

Atunci când sursa este extinsă, undele care interferă sunt cele care provin din aceeași rază primară. Deoarece grosimea este constantă, direcțiile de propagare a acestor unde sunt paralele iar interferența se obține la infinit.

Presupunem că o undă incidentă cade pe o lamă cu fețe plan paralele. O parte din această undă este reflectată iar o altă parte este transmisă. Ambele raze au amplitudini mai mici decât ale razei incidente. Spunem că amplitudinea a fost divizată. Dacă cele două unde pot fi aduse într-un punct ele pot interfera dacă diferența de drum dintre ele este mai mică decât lungimea de coerență. Dacă această diferență este mai mare decât lungimea de coerență, în punctul respectiv ajung grupuri de undă diferite și fenomenul nu apare. Din acest motiv lama trebuie să fie subțire. O lamă este subțire dacă grosimea ei este mai mică decât lungimea de coerență a radiației respective.

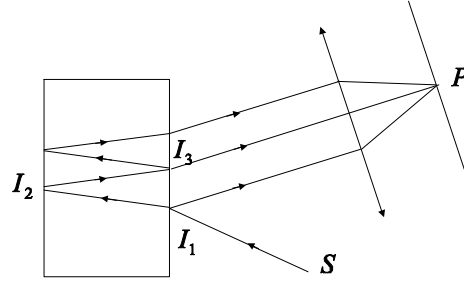


Figura 1.32: Interferența realizată prin divizarea amplitudinii

În Fig. 1.32 este prezentat un mod practic de a se realiza interferența. Din unda incidentă SI_1 în punctul I_1 apare o undă reflectată și una refractată. Unda refractată se reflectă în I_2 pe a doua față a lamei și se refractă în punctul I_3 pe prima față a lamei. Direcțiile de propagare a celor două unde astfel obținute sunt paralele. Pentru ca ele să interfere, în calea lor trebuie pusă o lentilă astfel ca ele să ajungă în același punct P din planul focal al acesteia, unde interfere.

Divizarea amplitudinii unei unde incidente

Fie o undă luminoasă cu amplitudinea egală cu unitatea care cade pe o lamă cu fețe plan paralele sub un unghi de incidență foarte mic în raport cu normala (Fig. 1.33). Indicele de refracție al mediului din care vine lumina este n_0 iar indicele de refracție al mediului pe care cade lumina este n . Coeficienții de reflexie și transmisie pentru primul dioptru sunt, indiferent de polarizarea undei incidente:

$$r_1 = \frac{n_0 - n}{n_0 + n} \quad (1.263)$$

$$t_1 = \frac{2n_0}{n_0 + n} \quad (1.264)$$

Pentru al doilea dioptru acești coeficienți sunt:

$$r_2 = \frac{n - n_0}{n_0 + n} \quad (1.265)$$

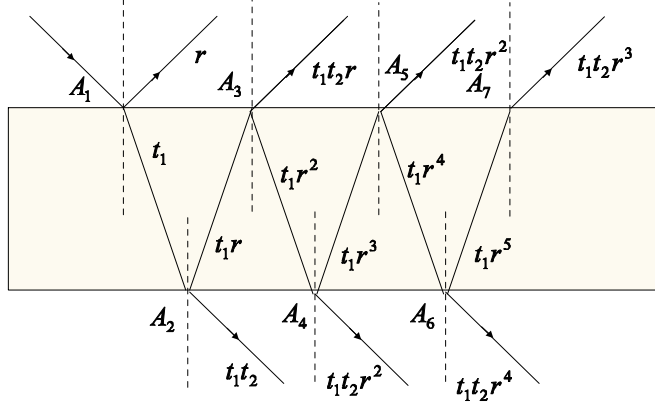


Figura 1.33: Amplitudinea undelor transmisă și reflectată

$$t_2 = \frac{2n}{n_0 + n} \quad (1.266)$$

Constatăm că dacă $n > n_0$, $r_2 = -r_1 = r > 0$. Deoarece $r_1 < 0$ înseamnă că la reflexia pe primul dioptru are loc o modificare a fazei unei reflectate față de cea incidentă cu π . Amplitudinile undelor care apar din unda primă datorită reflexiilor și refracțiilor succesive sunt prezentate direct în Fig. 1.33.

Pentru sticlă aflată în aer $n = 1,5$, $n_0 = 1$. Se obține astfel pentru undele ce revin în mediul inițial (reflectate):

$$r = 0,2 \quad t_1 t_2 r = 0,192 \quad t_1 t_2 r^3 = 0,0076 \quad t_1 t_2 r^5 = 0,0003$$

Pentru undele transmise:

$$t_1 t_2 = 0,96 \quad t_1 t_2 r^2 = 0,038 \quad t_1 t_2 r^4 = 0,0015 \quad t_1 t_2 r^6 = 0,00006$$

Din valorile de mai sus rezultă că ne putem limita la studiul interferenței primelor două unde reflectate sau transmise deoarece amplitudinile restului razelor sunt foarte mici. Pe de altă parte deoarece amplitudinile primelor două unde reflectate au aproape aceiași valoare, franjele obținute prin reflexie sunt mai contrastante decât cele obținute prin transmisie.

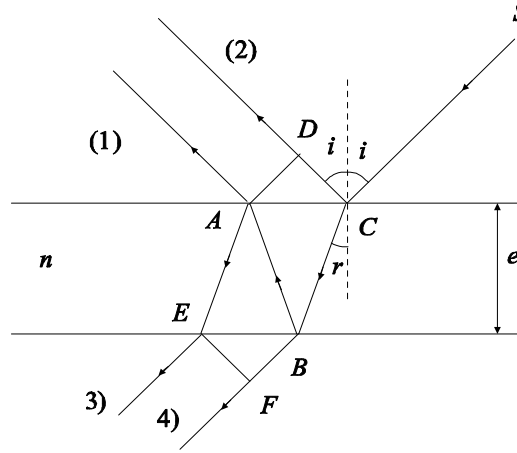


Figura 1.34: Diferența de drum optic în cazul lamei cu fețe plan paralele

Pentru sticlă argintată $r = 0,95$, $t_1 t_2 = 0,01$. Rezultă:

$$r = 0,95 \quad t_1 t_2 r = 0,0095 \quad t_1 t_2 r^3 = 0,0086 \quad t_1 t_2 r^5 = 0,0077$$

$$t_1 t_2 = 0,01 \quad t_1 t_2 r^2 = 0,0095 \quad t_1 t_2 r^4 = 0,0081 \quad t_1 t_2 r^6 = 0,0073$$

În acest caz nu ne putem limita la studiul a două unde. Prin reflexie toate undele cu excepția primeia au aproape aceeași amplitudine. Prin transmisie toate undele au amplitudini apropiate.

Diferența de drum în cazul unei lame cu fețe plan paralele

Să considerăm cazul unei lame (Fig.1.34) pentru care, prin reflexie, se poate considera că la interferență contribuie doar primele două unde. Aceasta este cazul unui coeficient de reflexie mic și a unui coeficient de refracție mare.

Pentru razele (1) și (2) diferența de drum optic este:

$$\delta = n(AB + BC) - \left(DC - \frac{\lambda}{2} \right) \quad (1.267)$$

În relația de mai sus:

$$AB = BC = \frac{e}{\cos r}$$

$$DC = 2eAC \sin i = 2e \operatorname{tg} r \sin i$$

Atunci:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2ne}{\cos r} - 2e \frac{\sin r}{\cos r} \sin i + \frac{\lambda}{2} = \frac{2ne}{\cos r} - 2en \frac{\sin^2 r}{\cos r} + \frac{\lambda}{2} \\ \delta &= 2ne \cos r + \frac{\lambda}{2} \end{aligned} \quad (1.268)$$

Pentru unghiuri de incidență mici, r este mic și:

$$\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2} \quad (1.269)$$

Pentru unda transmisă:

$$\delta = 2n(BA + AE) - BF \quad (1.270)$$

$$\delta = 2ne \cos r \quad (1.271)$$

Se observă că în acest caz nu avem pierdere de $\lambda/2$.

Inelele lui Haidinger Acestea sunt figurile de interferență care se obțin când o lamă cu fețe plan paralele este iluminată de o sursă extinsă (Fig. 1.35). Intensitatea obținută este egală cu:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda} \quad (1.272)$$

unde diferența de drum optic δ este dată de relația (1.268).

Deoarece grosimea lamei este constantă ansamblul punctelor pentru care diferența de fază este aceeași este definită de un unghi de refracție $r = ct$ adică de un unghi de incidență constant $i = ct$. De aici provine și numele de franje de egală înclinare (în raport cu normala la lamă). Inelele sunt localizate la infinit, însă cu ajutorul unei lentile convergente ele pot fi observate în planul focal al acesteia.

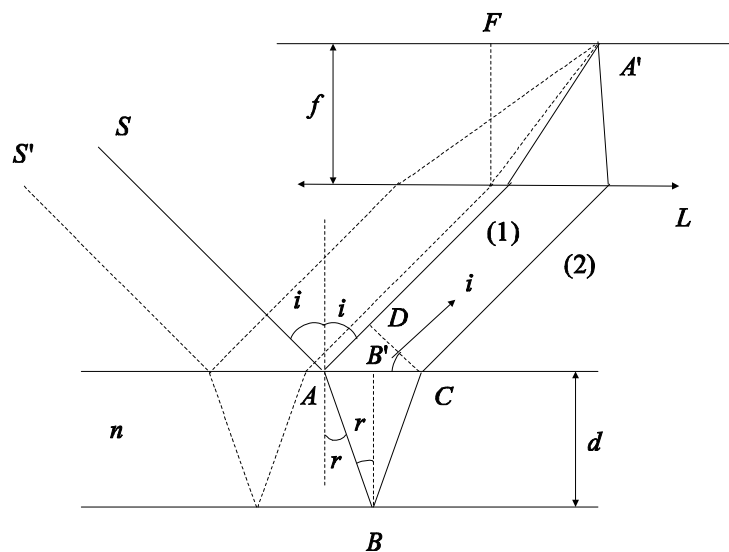


Figura 1.35: Inelel Haidinger

Strat antireflex

Pentru a micșora pierderile de energie din fluxul incident suprafețele sunt supuse unor tratamente specifice. Astfel pe sticla lentilelor unui obiectiv fotografic cu indicele de refracție n_s , se depune un strat transparent cu indicele de refracție n (Fig. 1.36).

Vom considera că pe sistem cade o undă cu amplitudinea E_0 sub incidență aproape normală. Pentru ca interferența să fie distructivă este necesar ca amplitudinile celor două unde să fie egale iar diferența de drum să fie egală cu un număr impar de semilungimi de undă. Vom analiza pe rând cele două condiții.

a) Pentru ca amplitudinile primelor două unde să fie egale este necesar ca:

$$r_1 = r_2 t_1 t_2 \quad (1.273)$$

unde:

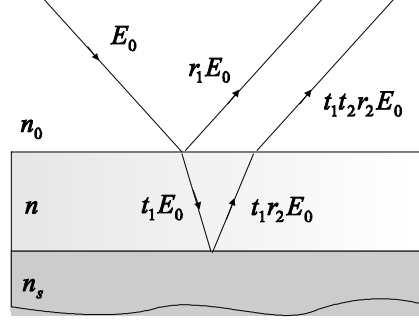


Figura 1.36: Strat antireflex (n) pe sticlă (n_s)

$$t_1 = \frac{2n_0}{n_0 + n} \quad t_2 = \frac{2n}{n + n_s} \quad (1.274)$$

$$r_1 = \frac{n_0 - n}{n_0 + n} \quad r_2 = \frac{n - n_s}{n + n_s} \quad (1.275)$$

Deoarece factorii de transmisie sunt apropiați ca valoare de unitate este suficient ca $r_1 = r_2$, adică:

$$\frac{n_0 - n}{n_0 + n} = \frac{n - n_s}{n + n_s} \quad (1.276)$$

Se obține:

$$n = \sqrt{n_0 n_s} \quad (1.277)$$

Dacă lumina vine din aer pe sticlă $n_0 = 1$, iar $n_s = 1,5$ și $n = 1,22$. Nu există materiale cu un indice de refracție așa mic. Materialele al căror indice de refracție se apropie de astfel de valoare sunt: florura de magneziu MgF_2 ($n = 1,35$) sau AlF_3 3NaF ($n = 1,36$) care se depune pe sticlă prin evaporare în vid.

b) Diferența de drum trebuie să fie egală cu un număr impar de semilungimi de undă pe ambele fețe ale stratului antireflex. De aici rezultă:

$$\delta = 2ne = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (1.278)$$

deoarece în această caz pierderea de o semilungime de undă are loc pe ambele fețe ale stratului antireflex. Rezultă:

$$e = \frac{\lambda}{4n} (2m + 1) \quad (1.279)$$

Pentru ca gradul de coerență temporală să fie cât mai mare este nevoie ca grosimea stratului antireflex să fie cât mai mică. Ea se obține pentru $m = 0$ și atunci:

$$e = \frac{\lambda}{4n} \quad (1.280)$$

Deoarece, în general, lumina incidentă este lumină albă alegem condiția de minim pentru lungimea de undă pentru care sensibilitatea spectrală este maximă. Aceasta este radiația verde pentru care $\lambda = 550 \text{ nm}$. Obținem pentru grosimea stratului antireflex grosimea $e = 0,12 \text{ }\mu\text{m}$. Deoarece pentru celelalte radiații interferența nu este total distructivă apar reflexe bleu sau violet. Prin această tehnică reflexia se poate reduce sub 1%.

Mărirea coeficientului de reflexie

Pentru mărirea coeficientului de reflexie este necesar ca interferența dintre razele reflectate să fie constructivă. Din acest motiv este nevoie ca diferența de drum optic să fie egală cu un număr întreg de lungimi de undă, iar grosimea lamei să fie cât mai mică. Pentru aceasta indicele de refracție al stratului antireflex trebuie să fie mai mare decât indicele de refracție al sticlei pentru a se evita pierderea unei semilungimi de undă. Atunci grosimea stratului este dată tot de relația (1.280). O astfel de substanță este sulfura de zinc al cărui indice de refracție este $n = 2,35$. Deoarece amplitudinea unei incidente este egală cu unitatea, amplitudinile celor două unde sunt:

$$A_1 = -r_1 = \frac{n - 1}{n + 1} = 0,4$$

$$A_2 = t_1 t_2 r_2 = \frac{2}{1 + n} \frac{2n}{1 + n} \frac{n - n_0}{n + n_0} = 0,189$$

Astfel coeficientul de reflexie în intensitate este egal cu amplitudinea unei obținută prin interferența celor două unde:

$$R = I = (A_1 + A_2)^2 = 0,347 \quad (1.281)$$

Se observă că acesta este practic de 9 ori mai mare decât coeficientul de reflexie pentru sticla pură.

Interferometrul Fabri -Pérot

Vom studia mai întâi interferența unui mare număr de fascicule luminoase care apar prin transmisie atunci când o undă de lumină cade pe o lamă transparentă dielectrică cu fețe plan paralele de grosime e și indice de refracție n . Pentru a calcula amplitudinea rezultantă vom ține cont de valoarea amplitudinilor și a diferenței de fază dintre undele care interferă.

După cum rezultă din Fig. 1.33, amplitudinile undelor care interferă sunt:

$$\begin{aligned} E_1 &= t_1 t_2 E_0 \\ E_2 &= t_1 t_2 r^2 E_0 e^{i\varphi} \\ E_3 &= t_1 t_2 r^4 E_0 e^{i2\varphi} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (1.282)$$

unde:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \quad (1.283)$$

unde δ este diferența de fază dintre două unde succesive. În plus:

$$r_1^2 + t_1 t_2 = 1 \quad (1.284)$$

Această relație se poate scrie și altfel:

$$R + T = 1 \quad (1.285)$$

unde $R = r_1^2$ și $T = t_1 t_2$ sunt factorii de reflexie, respectiv de transmisie în intensitate. Atunci amplitudinile complexe ale undelor transmise sunt:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 T \\ E_2 &= E_0 R T e^{i\varphi} \\ E_3 &= E_0 R^2 T e^{i2\varphi} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (1.286)$$

Amplitudinea complexă rezultantă în punctul P este suma amplitudinilor complexe ale undelor transmise:

$$E = \sum E_i = E_0 T [1 + R e^{i\varphi} + R^2 e^{i2\varphi} + \dots + R^k e^{ik\varphi} \dots] \quad (1.287)$$

Această sumă este o progresie geometrică cu rația $R e^{i\varphi}$. Cum $R < 1$:

$$E = E_0 T \frac{1}{1 - R e^{i\varphi}} \quad (1.288)$$

Intensitatea luminii transmise este:

$$I \sim |E|^2 \sim |E_0|^2 T^2 \frac{1}{|1 - R e^{i\varphi}|^2} \quad (1.289)$$

După câteva operații elementare se obține:

$$I = I_0 \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi} \quad (1.290)$$

$$I = I_0 \frac{T^2}{(1 - R)^2} \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (1.291)$$

Pentru $\varphi = 2m\pi$ unde m este un număr întreg, intensitatea undeii în punctul P este maximă:

$$I = I_0 \left(\frac{T}{1 - R} \right)^2 = I_{\max} \quad (1.292)$$

În absența absorbției $T = 1 - R$, $I_{\max} = I_0$. Dacă $A \neq 0$, adică dacă există absorbție $I_{\max} < I_0$. Atunci:

$$I = \frac{I_{\max}}{1 + M \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (1.293)$$

unde:

$$M = \frac{4R}{(1 - R)^2} \quad (1.294)$$

Funcția:

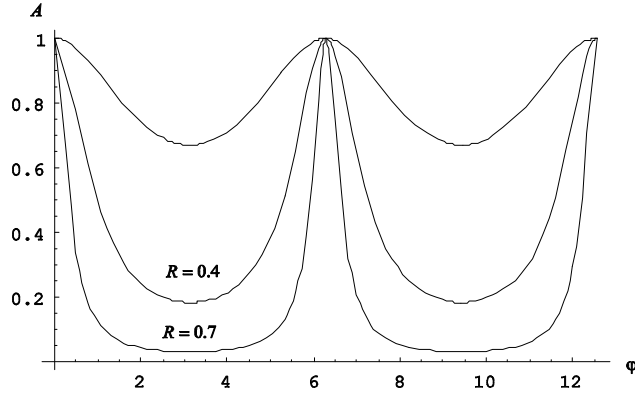


Figura 1.37: Funcția lui Airy pentru diverși factori de reflexie

$$A(\varphi) = \frac{1}{1 + M \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (1.295)$$

poartă numele de funcția lui Airy și este reprezentată în Fig.1.37. Ea constă dintr-o succesiune de maxime cu profil lorentzian, lărgimea la semiînălțime determinându-se din condiția $A(\varphi) = 0,5$:

$$\frac{1}{1 + M \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{2} \quad (1.296)$$

Rezultă:

$$\Delta\varphi = \frac{4}{\sqrt{M}} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}} \quad (1.297)$$

Cu cât R este mai mare ca atât maximele sunt mai ascuțite.

Interferometrul Fabry-Pérot (Fig.1.38) este utilizat ca un spectrometru cu înaltă rezoluție precum și ca o cavitate rezonantă în laser. În principiu interferometrul Fabri-Pérot constă din două suprafețe puternic reflectante paralele aflate la distanța e una de alta. În practică se utilizează două lame de sticlă plane paralele cu câte o suprafață argintată. Lățimea stratului de aer cuprins între cele două lame este de câțiva milimetri până la câțiva centimetri atunci când aparatul este utilizat ca interferometru. Distanța dintre cele două lame este mult mai mare atunci când este utilizat ca o cavitate rezonantă (de ordinul dm).

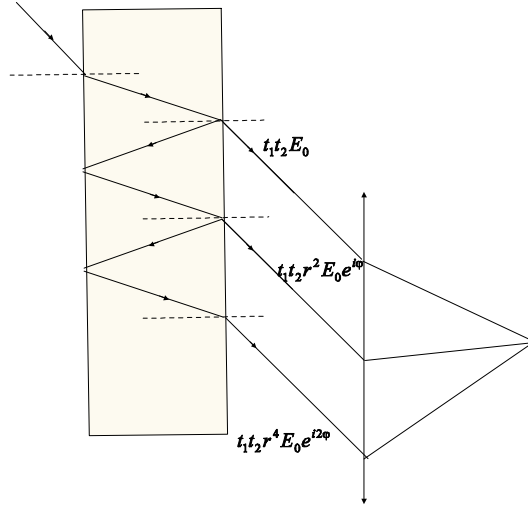


Figura 1.38: Interferometrul Fabry-Pérot

Interfereometrul Fabry-Pérot utilizat ca spectrometru

Datorită fineței inelelor obținute, interferometrul Fabry-Pérot este utilizat ca spectrometru, în vederea analizei cu precizie a distribuției spectrale a surselor luminoase. Vom estima diferitele mărimi caracteristice:

a) Dispersia:

$$D = \left| \frac{d\varphi}{d\lambda} \right| \quad (1.298)$$

cu $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2e \cos r$. Rezultă:

$$D = \left| -\frac{2\pi}{\lambda^2} 2e \cos r \right| = \frac{4\pi e}{\lambda^2} \cos r \quad (1.299)$$

b) Factorul de finețe:

$$F = \frac{2\pi}{\Delta\varphi} = \frac{\pi\sqrt{M}}{2} \quad (1.300)$$

În spectrul vizibil pentru cele mai multe interferometre Fabry-Pérot $F = 30$.

c) Puterea de rezoluție:

$$P_R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (1.301)$$

unde $\Delta\lambda$ corespunde lărgimii la semiînălțime a maximelor funcției lui Airy.

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta\varphi_{1/2}}{D} \quad (1.302)$$

Atunci:

$$P_R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\pi\sqrt{M}e \cos r}{\lambda} = pF \quad (1.303)$$

unde p este ordinul de interferență:

$$p = \frac{2e \cos r}{\lambda} \quad (1.304)$$

În tabelul alăturat se observă că puterea de rezoluție variază mult dacă factorul de reflexie R crește de la 0,8 la 0,99. Am considerat $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$, $e = 1 \text{ cm}$ și $i = 0$.

R	0,80	0,9	0,95	0,99
F	14	30	61	313
P_R	$0,56 \times 10^6$	$1,2 \times 10^6$	$2,45 \times 10^6$	125×10^6
$\Delta\lambda$	0,89	0,42	0,21	0,004

Interferometrul Fabry-Pérot utilizat ca o cavitate rezonantă

Interferometrul Fabry-Pérot este utilizat în laserii cu gaz drept cavitate rezonantă capabilă să transmită numai anumite radiații luminoase din cele ce sunt prezente în fascicolul inițial. Astfel, radiațiile pentru care $\Delta\varphi = 2m\pi$ unde m este întreg sunt singurele transmise, iar dacă ținem cont de alura curbei ce dă intensitatea transmisă I_t , toate celelalte radiații sunt practic anulate prin interferență distructivă. La incidență normală:

$$\varphi = \frac{4\pi ne}{\lambda} = 2m\pi \quad (1.305)$$

de unde:

$$\lambda = \frac{2ne}{m} \quad (1.306)$$

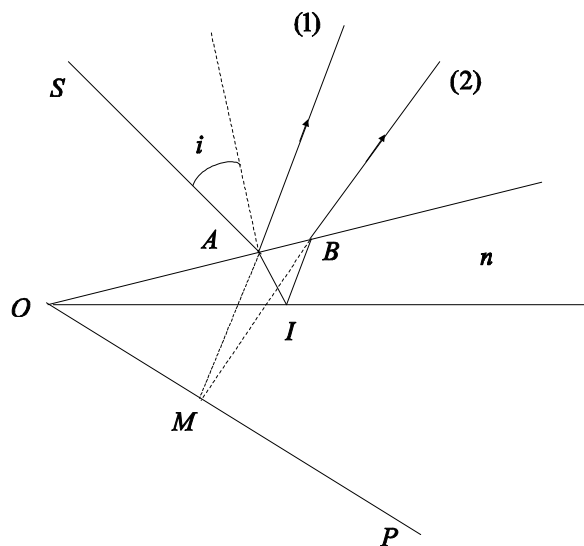


Figura 1.39: Pana optică

Afirmăm că cele două lame formează o cavitate rezonantă. Ansamblul interferometric este un mediu optic activ ce amplifică unda care-l traversează; se obține astfel un amplificator de unde luminoase de frecvențe bine determinate.

1.3.6 Pana optică

Pana optică este formată din două suprafețe plane ce fac între ele un unghi mic și care delimitează un mediu optic cu indicele de refracție n (Fig.1.39).

Fie n indicele de refracție al penei aflată în aer, SA raza incidentă și razele coerente (1) și (2). Acestea par a proveni dintr-un plan ce trece prin O . Acesta este planul de localizare a franjelor provenite de la razele paralele cu SA .

În cazul incidenței normale pe fața superioară planul de localizare al franjelor devine foarte apropiat de această suprafață. Spunem că franjele sunt localizate pe lamă.

La incidență normală B este foarte apropiat de A iar diferența de

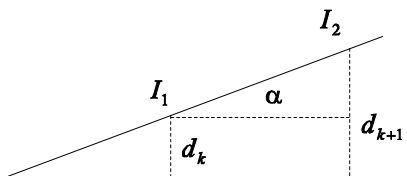


Figura 1.40: Pana optică; punctele I_1 și I_2 în care se formează două maxime succesive

drum dintre cele două raze este:

$$\delta = 2nd + \frac{\lambda}{2} \quad (1.307)$$

unde d este grosimea penei în acel loc.

Condiția de maxim este:

$$\delta = 2nd + \frac{\lambda}{2} = m\lambda \quad (1.308)$$

Fie d_m grosimea lamei la care se obține maximum de ordin m și d_{m+1} grosimea lamei la care se obține maximum de ordinul $m + 1$. Atunci:

$$2nd_m + \frac{\lambda}{2} = m\lambda \quad (1.309)$$

$$2nd_{m+1} + \frac{\lambda}{2} = (m + 1)\lambda \quad (1.310)$$

Prin scăderea din relația (1.310) a relației (1.309) se obține:

$$2n(d_{m+1} - d_m) = \lambda$$

Din Fig. 1.40 rezultă că interfranța se poate scrie astfel:

$$i = I_1 I_2 = \frac{(d_{m+1} - d_m)}{\sin \alpha} = \frac{1}{2n} \frac{\lambda}{\sin \alpha} \quad (1.311)$$

Cum α este foarte mic:

$$i = \frac{\lambda}{2n\alpha} \quad (1.312)$$

Franjele de interferență care se obțin sunt drepte paralele cu muchia penei.

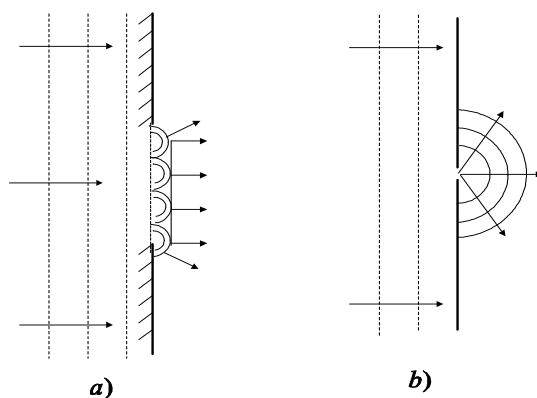


Figura 1.41: Unda difractată: a) pe o apertură mare b) pe o apertură mică

1.4 Difrakția undelor

1.4.1 Principiul Huygens - Fresnel

Se pune problema de a studia ce se petrece atunci când unda luminoasă cade pe anumite obstacole.

Un studiu atent al repartiției iluminării la frontiera dintre regiunea luminoasă și regiunea de umbră geometrică a obiectelor opace de diverse forme a arătat că lumina poate ocoli corpurile interpușe între sursă și un ecran. Fenomenul poartă denumirea de difracție.

Problema a fost parțial rezolvată de Huygens care a considerat că fiecare punct al frontului de undă la un moment dat, devine sursă secundară de oscilație. La un moment ulterior noul front de undă este dat de înfășurătoarea fronturilor undelor secundare.

Astfel poate fi explicată calitativ propagarea undelor prin aperturi mari care este prezentată în Fig.1.41 a.

Trebuie remarcat faptul că în ambele cazuri la marginea obstacolului lumina pătrunde în regiunea de umbră geometrică. În cazul unei aperturi mici (Fig. 1.41 b) dacă asupra acesteia cade o undă plană, elementul de suprafață al aperturii acționează ca o sursă punctiformă și în cealaltă parte a ecranului se formează o undă sferică. Totuși luarea în considerare doar a principiului lui Huygens nu permite explicarea în detaliu a fenomenelor respective. Nu este elucidată distribuția intensității undelor

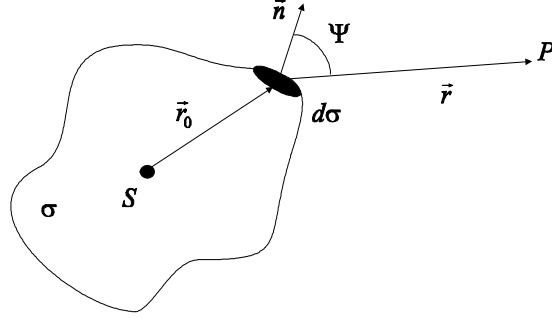


Figura 1.42: Construcție pentru aplicarea principiului Huygens-Fresnel

în zona de difracție. Deoarece intensitatea luminoasă este proporțională cu pătratul amplitudinii vectorului câmp electric, problema se reduce la determinarea amplitudinii undei în zonele de difracție.

Pentru a rezolva această problemă Fresnel a completat principiul lui Huygens, rezultând astfel principiul Huygens - Fresnel (Fig.1.42).

Înconjurăm sursa S de oscilație cu o suprafață σ și vom considera perturbația care se manifestă în punctul P situat în exteriorul acestei suprafețe. Această perturbație va fi o rezultantă a acțiunii tuturor undelor secundare emise de fiecare element de suprafață $d\sigma$. Vom studia deci suprapunerea în punctul P a tuturor undelor secundare emise de fiecare element de suprafață $d\sigma$. Toate oscilațiile secundare sunt coerente (fazele și amplitudinile lor sunt diferite de ale sursei primare). Atunci în punctul P amplitudinea undei secundare este proporțională cu amplitudinea surselor secundare, proporțională cu suprafața elementului emițător și invers proporțională cu distanța de la elementul $d\sigma$ la punctul P . Fresnel a introdus în plus și un coeficient de oblicitate $k(\Psi)$ a cărui valoare este maximă atunci când direcția normalei $\vec{n}$ coincide cu direcția lui $\vec{r}$ ($\Psi = 1$) și devine nul când $\Psi \geq \pi/2$. Introducerea coeficientului exprimă absența undelor ce s-ar propaga în sens opus. Atunci amplitudinea vibrațiilor provenite de la un element de arie $d\sigma$ se poate determina astfel:

Dacă admitem că sursa S oscilează după legea:

$$E = E_0 \exp(-i\omega t) \quad (1.313)$$

în punctul A amplitudinea va fi proporțională cu:

$$\frac{E_0}{r_0} \exp(ikr_0) \exp(-i\omega t) \quad (1.314)$$

În punctul P perturbația determinată de elementul de suprafață $d\sigma$ va fi invers proporțională cu distanța r :

$$dE = k(\Psi) \left[\frac{E_0 \exp(ikr_0)}{r_0} \right] \frac{\exp(ikr)}{r} d\sigma \quad (1.315)$$

unde $k = 2\pi/\lambda$.

1.4.2 Clasificarea fenomenelor de difracție

Cele mai multe fenomene de difracție se obțin cu ajutorul unui ecran opac care conține o apertură de formă arbitrară. Undele secundare care provin din diverse părți ale aperturii interferă și dau naștere unei imagini de difracție. Fenomenele de difracție se pot clasifica astfel în două mari clase:

a) Fenomenele în care sursa și ecranul de observație se află la distanță finită față de obstacolul ce produce difracția poartă numele de difracție Fresnel. În acest caz nu se poate neglija curbura suprafeței de undă a undelor ce ating obstacolul respectiv.

b) Fenomenele în care sursa de lumină și paravanul pe care se observă figura de difracție se găsesc la o distanță infinită față de apertura care provoacă difracția poartă denumirea de difracție Fraunhofer. Ea este difracția suferită de undele plane. Practic, aceste fenomene sunt ușor de tratat teoretic. Pentru a obține difracția Fraunhofer se plasează sursa de lumină în focarul unei lentile convergente și se observă imaginea de difracție în planul focal al altei lentile convergente.

1.4.3 Difracția Fresnel. Teoria zonelor Fresnel

Fie o sursă S care emite o undă sferică monocromatică și o suprafață de undă σ de rază R ca în Fig. 1.43.

Într-un punct P exterior suprafeței σ perturbația totală este definită de expresia:

$$E_o(P) = \frac{E_0 \exp(ikR)}{R} \int \int_{\sigma} k(\Psi) \frac{\exp(ikr)}{r} d\sigma \quad (1.316)$$

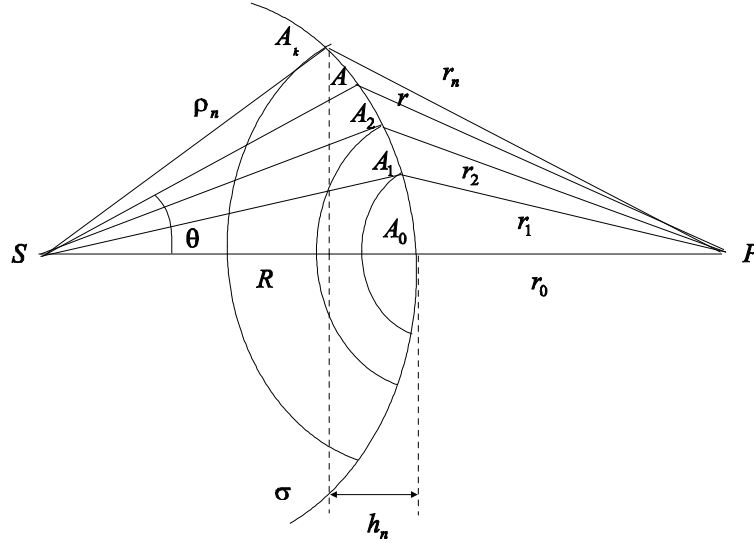


Figura 1.43: Difracție Fresnel. Zone Fresnel

Pentru a efectua această sumare vom folosi metoda propusă de Fresnel și anume aceea de a diviza frontul de undă în zone inelare numite zone Fresnel. Împărțirea se face în așa fel încât diferența de drum optic în punctul P a undelor secundare ce provin de la două zone vecine să fie $\lambda/2$ (diferența de fază este π). Astfel undele ce provin din două zone vecine sunt în opoziție de fază, încât în P se formează un minim de interferență.

Astfel:

$$A_1P - A_0P = A_2P - A_1P = \dots = A_nP - A_{n-1}P \dots = \lambda/2$$

Rezultă:

$$A_nP - A_0P = n \frac{\lambda}{2} \quad (1.317)$$

sau:

$$r_n = r_0 + n \frac{\lambda}{2} \quad (1.318)$$

Vom demonstra în continuare că ariile zonelor Fresnel sunt egale. Notățiile ρ_n și h_n sunt arătate în Fig.1.43.

Astfel:

$$\rho_n^2 = R^2 - (R - h_n)^2 = r_n^2 - (r_0 + h_n)^2 \quad (1.319)$$

De aici:

$$h_n = \frac{r_n^2 - r_0^2}{2(R + r_0)} \quad (1.320)$$

Din relația (1.318) se obține:

$$r_n^2 = r_0^2 + r_0 n \lambda + n^2 \frac{\lambda^2}{4}$$

$$r_n^2 - r_0^2 = r_0 n \lambda + n^2 \frac{\lambda^2}{4}$$

În cazul când $\lambda \ll r_0$ rezultă:

$$r_n^2 - r_0^2 = r_0 n \lambda \quad (1.321)$$

și înlocuind în relația 1.320:

$$h_n = k \frac{r_0}{R + r_0} \frac{\lambda}{2} \quad (1.322)$$

Aria zonei de înălțime h_n este:

$$S_n = n \frac{2\pi r_0 R}{(R + r_0)} \frac{\lambda}{2} = 2\pi R h_n \quad (1.323)$$

și atunci aria zonei n este:

$$S = S_{n+1} - S_n = \frac{\pi r_0 R \lambda}{R + r_0} \quad (1.324)$$

Se observă că toate zonele Fresnel au aceeași arie.

Elementul de suprafață al unei zone este:

$$d\sigma = 2\pi (R \sin \theta) R d\theta \quad (1.325)$$

Dar:

$$r^2 = (R + r_0)^2 - 2R(R + r_0) \cos \theta + R^2 \quad (1.326)$$

și deci:

$$2rdr = 2R(R + r_0) \sin \theta d\theta \quad (1.327)$$

astfel că:

$$d\sigma = \frac{2\pi Rr}{R + r_0} dr \quad (1.328)$$

Presupunem că în interiorul unei zone $k(\Psi)$ este constant.
Atunci perturbația creată de zona n în punctul P este:

$$E_n = 2\pi \frac{E_0 \exp(ikR)}{R + r_0} \int_{r_0 + (n-1)\lambda/2}^{r_0 + n\lambda/2} k_n \exp(ikr) dr \quad (1.329)$$

unde k_n este coeficientul de oblicitate în zona respectivă.

$$\begin{aligned} \int_{r_0 + (n-1)\lambda/2}^{r_0 + n\lambda/2} \exp(ikr) dr &= \frac{\exp[ik(r_0 + n\lambda/2)] - \exp[r_0 + (n-1)\lambda/2]}{ik} = \\ &= \frac{[\exp(ikr_0)] \{ \exp(ink\lambda/2) - \exp[ik(n-1)\lambda/2] \}}{ik} = \\ &= \exp(ikr_0) \frac{[\exp(ink\lambda/2)] [1 - \exp(-ik\lambda/2)]}{ik} = \\ &= \frac{\exp(ikr_0) (-1)^n 2\lambda}{i2\pi} = i \frac{\exp(ikr_0) (-1)^{n+1} \lambda}{\pi} \end{aligned}$$

deoarece:

$$\exp(ink\lambda/2) = \exp\left(in \frac{2\pi\lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{2}\right) = \exp(in\pi) = (-1)^n$$

$$1 - \exp(-ik\lambda/2) = 1 - \exp\left(-i \frac{\lambda}{2} \frac{2\pi}{\lambda}\right) = 2$$

Atunci pentru o zonă Fresnel:

$$E_n = 2i\lambda \frac{(-1)^{n+1} E_0 \exp[ik(r_0 + R)]}{R + r_0} k_n \quad (1.330)$$

Se observă că amplitudinile E_n iau alternativ valori pozitive și negative. Aceasta înseamnă că undele ce provin din zone adiacente sunt în opoziție de fază și tind să se anuleze. Calculul contribuției tuturor zonelor Fresnel se rezumă la calculul unei serii cu semne alternante:

$$E = |E_1| - |E_2| + |E_3| - |E_4| + \dots$$

Regrupăm termenii astfel:

$$E = \frac{|E_1|}{2} + \left(\frac{|E_1|}{2} - |E_2| + \frac{|E_3|}{2} \right) + \left(\frac{|E_3|}{2} - |E_4| + \frac{|E_5|}{2} \right) + \dots \quad (1.331)$$

Întrucât factorul $k_n(\Psi)$ nu variază substanțial de la o zonă la altă zonă putem presupune:

$$\left(\frac{|E_{k-1}|}{2} - |E_k| + \frac{|E_{k+1}|}{2} \right) \cong 0 \quad (1.332)$$

Rezultatul sumei (1.331) depinde de numărul n de zone Fresnel.

Dacă n este impar:

$$E = \frac{|E_1|}{2} + \left(\frac{|E_1|}{2} - |E_2| + \frac{|E_3|}{2} \right) \dots + \left(\frac{|E_{n-2}|}{2} - |E_{n-1}| + \frac{|E_n|}{2} \right) + \frac{|E_n|}{2}$$

și:

$$E \cong \frac{|E_1|}{2} + \frac{|E_n|}{2} \quad (1.333)$$

Dacă n este par:

$$E = \frac{|E_1|}{2} + \dots + \left(\frac{|E_{n-3}|}{2} - |E_{n-2}| + \frac{|E_{n-1}|}{2} \right) + \frac{|E_{n-1}|}{2} - |E_n|$$

Dar pentru n mare $|E_n| \cong |E_{n-1}|$ și:

$$E \cong \frac{|E_1|}{2} - \frac{|E_n|}{2} \quad (1.334)$$

Astfel:

$$E \cong \frac{|E_1|}{2} \pm \frac{|E_n|}{2} \quad (1.335)$$

unde semnul plus corespunde pentru n impar iar semnul minus corespunde pentru n par.

Putem considera pentru ultima zonă Fresnel $\Psi = \pi/2$ și $k(\Psi) = 0$. Atunci:

$$E = \frac{|E_1|}{2} \quad (1.336)$$

De aici rezultă că amplitudinea vibrațiilor în P este jumătate din amplitudinea creată în P de prima zonă Fresnel. Intensitatea radiației fiind proporțională cu pătratul amplitudinii, rezultă că intensitatea globală în P este $1/4$ din cea determinată de prima zonă Fresnel.

Se pot face o serie de experiențe spectaculoase pentru a pune în evidență aceste concluzii. Astfel putem determina aria primei zone Fresnel. Pentru undele luminoase când $R = 1\text{m}$ și $r_0 = 1\text{ m}$ aceasta este de aproximativ 1mm^2 . Astfel dacă se lasă descoperită doar prima zonă Fresnel, intensitatea luminoasă va fi de 4 ori mai intensă decât în cazul întregului front de undă. Dacă se lasă descoperite doar primele două zone luminoase iluminarea în punctul P devine foarte mică.

Într-o altă experiență presupunem că aria unei deschideri circulare practică într-un ecran opac este egală, pentru valori bine determinate pentru R și r_0 , cu aria primei zone Fresnel. Dacă deplasăm punctul P în lungul drepte care îl unește cu sursa de lumină se observă o variație periodică a intensității luminoase. Aceasta se produce deoarece devin active succesiv una, două, trei, etc. zone Fresnel. Aceasta se datorează faptului că aria unei zone Fresnel este o funcție ce depinde de r_0 , R și λ .

Amplitudinea în punctul P poate fi mărită dacă se utilizează așa numitele "rețele zonale". Acestea sunt astfel construite încât acoperă toate zonele Fresnel pare sau impare. Dacă se acoperă toate zonele pare atunci:

$$E = |E_1| + |E_2| + \dots + |E_{2n-1}| \quad (1.337)$$

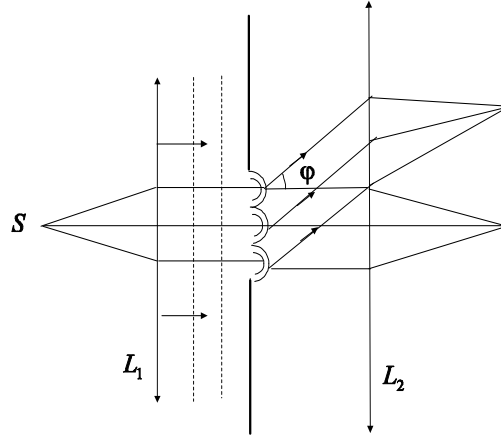


Figura 1.44: Dispozitiv pentru realizarea difracției unei unde plane

și deci se obține o creștere importantă a iluminării punctului P (și a unei mici zone din jurul său).

Dacă sunt acoperite doar primele m zone Fresnel iar restul sunt lăsate libere $|E_n| \rightarrow 0$ deoarece $\Psi(\pi/2) = 0$. Atunci:

$$E_0(P) = \frac{1}{2} |E_{m+1}| \quad (1.338)$$

Astfel se observă că în punctul P intensitatea luminoasă este diferită de zero.

1.4.4 Difrakția Fraunhofer

În Fig.1.44 se prezintă schema unui dispozitiv de observare a difracției undelor plane.

Undele emise de sursa punctiformă S sunt transformate de lentila L_1 într-o undă plană, care va traversa apertura (circulară sau dreptunghiulară) practică în ecran. Razele ce provin de la această deschidere trec prin lentila L_2 și dau o imagine de difracție pe un ecran aflat în planul focal al lentilei L_2 .

Aplicarea principiului Huygens-Fresnel în acest caz este foarte simplă. Admitem că suprafața σ se confundă cu planul ecranului și cuprinde în întregime apertura considerată. În cazul cel mai simplu, adică al

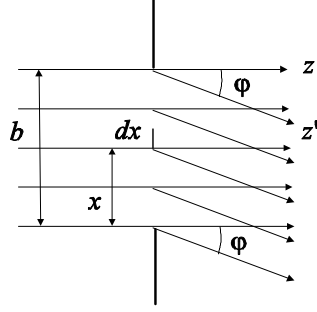


Figura 1.45: Unda difractată după direcția φ

incidenței normale a undei pe suprafața ecranului, diferența de drum dintre undele ce provin din diverse porțiuni ale fantei este determinată de unghiul φ de difracție. Aceasta deoarece toate undele difractate sub un unghi φ dat sunt strânse în același punct din planul focal.

Calculul intensității sistemului de franje de difracție se rezumă la calculul interferenței undelor emise de sursele elementare fictive. Cum toate aceste surse sunt coerente vom calcula amplitudinea vibrației rezultante și apoi vom calcula pătratul acesteia. Aceasta va permite calculul intensității luminoase în planul focal.

Să considerăm o undă plană care cade pe o fantă de lărgime b (Fig. 1.45) practică în ecranul opac. Vom considera axa Ox în lungul fantei de lărgime b , iar axa Oz perpendiculară pe suprafața fantei.

Considerăm că segmentul dx emite o undă plană în direcția φ cu defazajul:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}x \sin \varphi = kx \sin \varphi \quad (1.339)$$

Pentru a determina amplitudinea acestei unde considerăm că fanta în totalitate emite o radiație de amplitudine E_0 . În consecință un segment dx din fanta de lărgime b va determina o undă a cărei amplitudine este $E_0 dx/b$. Atunci unda emisă de segmentul dx în direcția φ este:

$$dE_\varphi = \frac{E_0 dx}{b} \exp[i(\omega t - kx \sin \varphi)] \quad (1.340)$$

Intensitatea câmpului electric E_φ datorat interferenței acestor unde, emise de toate zonele dx se obține integrând expresia de mai sus:

$$E_\varphi = \frac{E_0}{b} \exp(i\omega t) \int_0^b \exp(-ikx \sin \varphi) dx \quad (1.341)$$

$$E_\varphi = \frac{E_0}{b} \exp(i\omega t) \frac{\exp(-ikx \sin \varphi)}{-ik \sin \varphi} \Big|_0^b$$

$$E_\varphi = E_0 \exp(i\omega t) \frac{\exp(-ikb \sin \varphi) - 1}{-ik \sin \varphi}$$

sau:

$$E_\varphi = \frac{E_0 \exp\left(\frac{-ikb \sin \varphi}{2}\right) - \exp\left(\frac{ikb \sin \varphi}{2}\right)}{-i(kb \sin \varphi)} \exp\left[i\left(\omega t - \frac{kb \sin \varphi}{2}\right)\right]$$

$$E_\varphi = E_0 \frac{-2i \sin\left(\frac{kb \sin \varphi}{2}\right)}{-2i\left(\frac{kb \sin \varphi}{2}\right)} \exp\left[i\left(\omega t - \frac{kb \sin \varphi}{2}\right)\right]$$

$$E_\varphi = E_0 \frac{\sin\left(\frac{kb \sin \varphi}{2}\right)}{\left(\frac{kb \sin \varphi}{2}\right)} \exp\left[i\left(\omega t - \frac{kb \sin \varphi}{2}\right)\right] \quad (1.342)$$

Notând cu:

$$u = \frac{1}{2} kb \sin \varphi = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi \quad (1.343)$$

atunci amplitudinea unei unde care se propagă în lungul unei direcții ce formează un unghi φ cu axa Oz este egală cu:

$$E_{0\varphi} = E_0 \frac{\sin u}{u} \quad (1.344)$$

iar intensitatea este:

$$I_\varphi = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \quad (1.345)$$

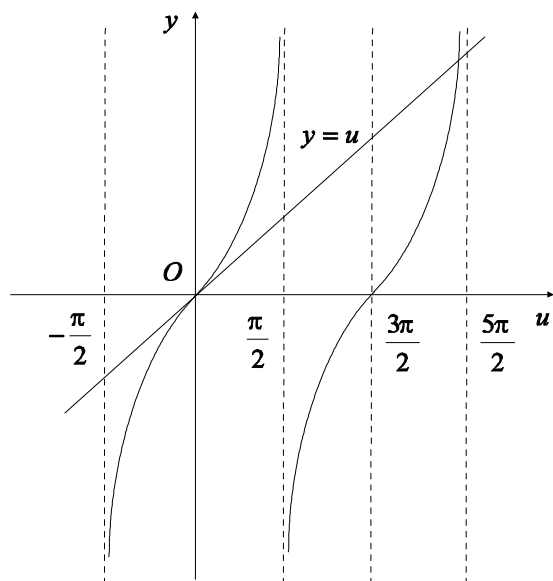


Figura 1.46: Rezolvarea grafică a ecuației $\tan u = u$

Se observă că intensitatea este maximă când $\varphi \rightarrow 0$ și $u = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi \rightarrow 0$. Atunci:

$$\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1$$

Minimele intensității se obțin din condiția $I = 0$ adică:

$$\begin{aligned} \sin u &= 0 \\ u &= p\pi, \quad (p = \pm 1, \pm 2, \pm \dots) \end{aligned}$$

Atunci:

$$\frac{kb \sin \varphi}{2} = p\pi$$

Cum $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ rezultă:

$$\sin \varphi = p \frac{\lambda}{b}$$

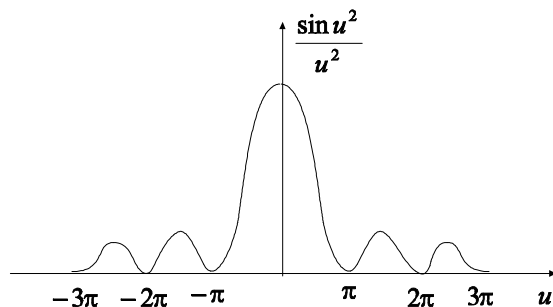


Figura 1.47: Intensitatea luminii difractate pe o fantă

Între minime se găsesc maxime secundare. Ele se obțin punând condiția:

$$\frac{dI}{du} = 0 \quad (1.346)$$

$$I_0 \frac{2u^2 \sin u \cos u - 2u \sin^2 u}{u^4} = 0 \quad (1.347)$$

Rezultă:

$$\operatorname{tg} u = u \quad (1.348)$$

Aceasta este o ecuație transcendentă. Rezolvarea acesteia se face grafic, prin intersecția funcției $y = \operatorname{tg} u$ cu dreapta $y = u$. Se observă din Fig.1.46 că maximele secundare se obțin aproximativ pentru:

$$u = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots) \quad (1.349)$$

Trebuie remarcat că valorile extreme ale funcției $\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$ se micșorează rapid. Dacă se consideră $I_0 = 1000$ și notăm cu I_1 intensitatea primului maxim secundar, cu I_2 intensitatea celui de-al doilea maxim secundar găsim:

$$I_0 : I_1 : I_2 = 1000 : 47 : 17$$

Astfel majoritatea fluxului luminos este concentrat în intervalul definit de:

$$\sin \varphi = \pm \frac{\lambda}{b} \quad (1.350)$$

Doar 5% din fluxul incident va fi concentrat pe maximul de ordinul întâi iar 2% pe maximul de ordinul al doilea.

Fig.1.47 reprezintă iluminarea rezultată prin difracția unei plane pe o fantă.

1.4.5 Rețeaua de difracție

Vom studia fenomenul care are loc când un fascicol cade pe un mare număr de fante de același tip practicate într-un ecran opac. Efectul interferențial suplimentar nu se poate manifesta dacă aceste fante nu sunt repartizate de o manieră regulată.

Să considerăm o structură regulată compusă din N fante paralele; considerăm că toate fantele au o lărgime b și sunt plasate una față de alta la distanța d . O astfel de structură se numește rețea de difracție. În acest caz putem trata unidimensional problema, considerând axa Ox de-a lungul lățimii fantelor.

Presupunem o undă monocromatică plană care cade sub incidență normală pe această structură. Vom calcula intensitatea luminii I_φ ce se propagă în lungul unei direcții ce formează un unghi φ cu normala la planul în care sunt practicate cele N fante (Fig.1.48).

Fiecare element dx a fantei n trimite în direcția fixată de unghiul φ o undă descrisă de ecuația:

$$\frac{E_0}{b} dx \exp i\{\omega t - k[(n-1)d + x] \sin \varphi\} \quad (1.351)$$

unde: $\Delta\theta = k[(n-1)d + x] \sin \varphi$ este defazaajul.

Toată fanta emite unda:

$$\frac{E_0}{b} \exp i[\omega t - k(n-1)d \sin \varphi] \int_0^b \exp(-ikx \sin \varphi) dx \quad (1.352)$$

Pentru a calcula contribuția celor N fante trebuie să sumăm undele pe care ele le produc. Deoarece undele sunt coerente vom aduna intensitățile câmpului electric. Se obține:

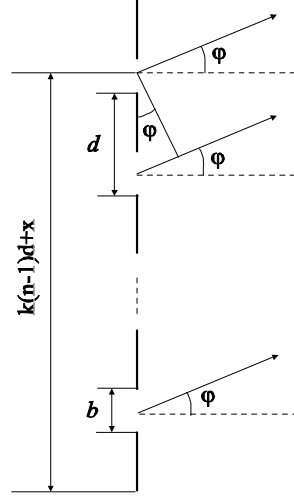


Figura 1.48: Rețea de difracție

$$\frac{E_0}{b} \exp(i\omega t) \sum_{n=1}^N \exp[-ik(n-1)d \sin \varphi] \int_0^b \exp(-ikx \sin \varphi) dx \quad (1.353)$$

Dar:

$$\frac{E_0}{b} \int_0^b \exp(-ikx \sin \varphi) dx = E_0 \frac{\sin u}{u} \quad (1.354)$$

unde:

$$u = \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \quad (1.355)$$

Acest factor nu depinde de n . Rămâne să calculăm suma:

$$S = \sum_{n=1}^N \exp[-ik(n-1)d \sin \varphi] = \sum_{n=1}^N \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d \sin \varphi\right] \quad (1.356)$$

Introducând notația:

$$\frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda} = \delta$$

atunci:

$$S = \sum_{n=1}^N \exp[-2\delta(n-1)i] = 1 + \exp(-2\delta i) + \dots + \exp[-2\delta(N-1)i]$$

Această sumă este o progresie geometrică cu rația $q = \exp(-2\delta i)$.

$$S = \frac{1 - q^N}{1 - q} = \frac{1 - \exp(-2N\delta i)}{1 - \exp(-2\delta i)} \quad (1.357)$$

Amplitudinea undei este:

$$E = E_0 \frac{1 - \exp(-2N\delta i)}{1 - \exp(-2\delta i)} \frac{\sin u}{u} \quad (1.358)$$

Intensitatea undei rezultate este:

$$I = EE^* = E_0^2 \frac{[1 - \exp(-2N\delta i)][1 - \exp(2N\delta i)]}{[1 - \exp(-2\delta i)][1 - \exp(2\delta i)]} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \quad (1.359)$$

Observăm că:

$$\begin{aligned} [1 - \exp(-2N\delta i)][1 - \exp(2N\delta i)] &= 2 \left[1 - \frac{\exp(-2N\delta i) + \exp(2N\delta i)}{2} \right] \\ &= 2 \left[1 - \frac{2 \cos(2N\delta)}{2} \right] = 4 \sin^2 N\delta \end{aligned}$$

În mod analog:

$$[1 - \exp(-2\delta i)][1 - \exp(2\delta i)] = 4 \sin^2 \delta$$

Rezultă că intensitatea luminii ce este difractată după un unghi φ făcut cu normala este:

$$I_\varphi = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta}\right)^2 \quad (1.360)$$

unde:

$$u = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi \quad (1.361)$$

$$\delta = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi \quad (1.362)$$

Factorul $\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$ caracterizează variația intensităților luminoase difractate de fiecare fantă. Factorul $\left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta}\right)^2$ ține cont de interferența fasciculelor determinate de toate fantele. Factorul I_0 caracterizează intensitatea luminii în direcția $\varphi = 0$, valoarea sa depinzând de fluxul de energie luminoasă ce cade pe rețea.

Pentru a analiza rezultatele obținute se determină variația mărimii $\left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta}\right)^2$ în funcție de unghiul de difracție φ . În Fig. 1.48 se arată că $d \sin \varphi$ este egală cu diferența de drum Δ dintre undele emise de două puncte echivalente din două fante vecine. Dacă Δ este egal cu un număr întreg de lungimi de undă are loc o interferență constructivă. Considerăm:

$$d \sin \varphi = m\lambda \quad (1.363)$$

unde m este un număr întreg: 0,1,2,3,... și vedem ce devine factorul considerat.

$$\delta = \frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda} = m\pi \text{ implică } \sin N\delta = 0 \text{ și } \sin \delta = 0$$

Din acest motiv vom considera cazul la limită pentru care $\delta \rightarrow m\pi$

$$\lim_{\delta \rightarrow m\pi} \left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta}\right) = N$$

Atunci:

$$(I_\varphi)_{\max} = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 N^2 \quad (1.364)$$

Se observă că atunci când avem de-a face cu lumina difractată prin N fante, intensitatea luminoasă crește nu de N ori ci de N^2 ori.

Maximele care apar în acest caz poartă numele de maxime principale și sunt date de condiția 1.363. Ele apar atunci când avem simultan

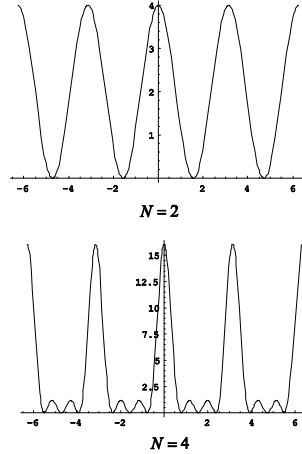


Figura 1.49: Reprezentarea curbelor $\left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta}\right)^2$ în funcție de δ pentru $N = 2$ și $N = 4$

$N\delta = 0$ și $m\delta = 0$. Între două maxime principale apar $N - 1$ minime nule corespunzătoare valorilor $\sin N\delta = 0$ și $\sin \delta \neq 0$. Între aceste minime trebuie să existe $N - 2$ maxime secundare a căror intensitate luminoasă este neglijabilă în raport cu cea a maximelor principale. Pentru a pune în evidență mai ușor condițiile de formare a acestora vom scrie în ordine crescătoare valorile $N\delta$.

$\delta N : 0, \pi, 2\pi, \dots, (N - 1)\pi, \underline{N\pi}, (N + 1)\pi, \dots, (2N - 1)\pi, \underline{2N\pi}, \dots$

Valorile subliniate sunt cele pentru care $\sin \delta N = 0$ și $\sin \delta = 0$. Pentru celelalte valori $\sin \delta \neq 0$.

În Fig. 1.49 sunt reprezentate curbele $\left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta}\right)^2$ pentru $N = 2$ și pentru $N = 4$.

Cu cât N crește mai mult cu atât maximele principale devin mai punctuale și sunt separate unul de altul de distanțe mai mari.

Să calculăm în continuare contribuția fiecărei fante la repartiția intensității; pentru aceasta trebuie să studiem variația funcției $\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$ ținând cont de condiția:

$$d \sin \varphi = m\lambda \quad (1.365)$$

Atunci din (1.361) rezultă:

$$u = \frac{\pi b m \lambda}{\lambda d} = \pi m \frac{b}{d} \quad (1.366)$$

și

$$\left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 = d^2 \frac{\sin^2 (\pi m b / d)}{\pi^2 b^2 m^2} \quad (1.367)$$

Remarcând că pentru maximele principale:

$$\left| \lim_{\delta \rightarrow m\pi} \frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \right| = N$$

intensitatea maximului principal de ordin m este:

$$I_m = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \frac{\sin^2 N\delta}{\sin^2 \delta} = I_0 N^2 d^2 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi m b}{d} \right)}{b^2 \pi^2 m^2} \quad (1.368)$$

Considerând această formulă putem să tragem următoarele concluzii:

1. $I_m \sim 1/m^2$. Aceasta semnifică că pe măsură ce crește ordinul de difracție, intensitatea maximelor principale descrește rapid.
2. Intensitatea luminoasă a maximului de ordin m depinde de raportul $\frac{b}{d}$. Dacă $\left(\frac{b}{d} \right) m = m'$, unde m' este un număr întreg, $I_m = 0$ deoarece $\sin \pi m' = 0$. Rezultă că intensitatea luminoasă este nulă.

Condiția de a se obține un minim de difracție pentru o singură fantă se exprimă prin $b \sin \varphi = m \lambda$. Se observă că acest caz corespunde unei coincidențe pentru apariția unui maxim principal pentru difracția pe N fante și condiția de minim pentru fiecare fantă. Aceasta face ca maximul principal să dispară. De exemplu, dacă $b/d = 1/4$, atunci maximele de ordin 4, 8, 12, 16, ..dispar.

Rezultă deci că în cazul difracției unei unde plane pe o rețea regulată de N fante, intensitatea relativă a maximelor principale este determinată atât de raportul $1/m^2$, cât și de raportul b/d .

În Fig. 1.50 este reprezentat modul în care se obține repartiția intensității I ce rezultă din difracția pe o structură regulată de $N = 4$ fante.

Una din cele mai importante proprietăți a unei rețele de difracție este dispersia unghiulară.

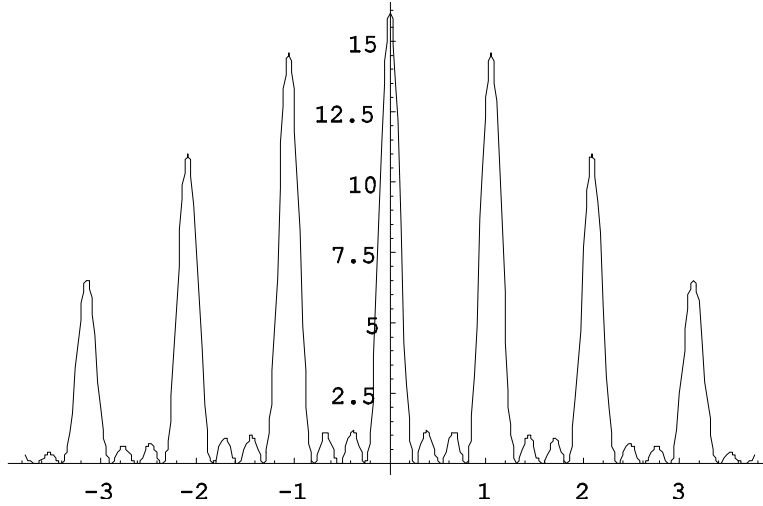


Figura 1.50: Repartiția intensității pentru o rețea de 4 fante în funcție de δ .

Să considerăm două unde plane cu lungimile de undă apropiate λ și $\lambda + d\lambda$ care cad pe o rețea sub incidență normală. Diferența $d\varphi$ dintre unghiurile sub care undele sunt difractate se obține pornind de la relația:

$$d \sin \varphi = m\lambda \quad (1.369)$$

Diferențiind găsim:

$$d \cos \varphi d\varphi = m d\lambda \quad (1.370)$$

Definim dispersia unghiulară D_α a rețelei în vecinătatea maximului de ordin m ca fiind cantitatea:

$$D_a = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi_m} \quad (1.371)$$

Constatăm că dispersia este cu atât mai mare cu cât ordinul de difracție este mai mare (m -mai mare) și rețeaua este mai fină (d este mai mic). În relația 1.371 $d\varphi$ reprezintă variația unghiului φ pentru care se obține din nou un maxim de difracție de ordin m atunci când lungimea de undă variază cu $d\lambda$.

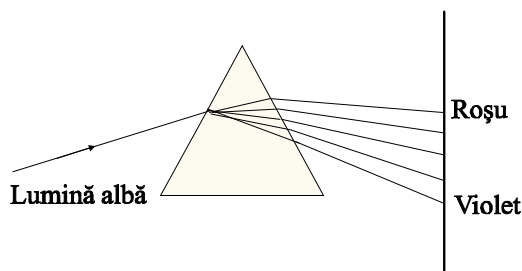


Figura 1.51: Descompunerea luminii albe în radiațiile componente cu ajutorul prisme

1.5 Dispersia luminii

Fenomenul de dispersie constă în variația indicelui de refracție cu lungimea de undă. Lumina albă poate fi descompusă în radiațiile componente. Fenomenul de dispersie cel mai cunoscut și ușor de urmărit este curcubeul. Acesta constă în descompunerea luminii albe de către minusculele picături de apă rămase în atmosferă după ploaie, în cele șapte culori ale spectrului vizibil. Primul studiu al dispersiei a fost efectuat de de Isaac Newton.

Astfel, dacă un fascicol ce provine de la un corp incandescent cade pe suprafața unei prisme acesta se descompune într-o succesiune continuă sau discretă de culori (Fig. 1.51). Lumina albă se descompune într-o succesiune continuă de culori care formează spectrul continuu din vizibil.

Au fost făcute numeroase tentative de a se obține dependența $n(\lambda)$. Una din aceste formule este aceea obținută de Cauchy:

$$n = a + \frac{b}{\lambda_0^2} + \frac{c}{\lambda_0^4} + \dots \quad (1.372)$$

unde λ_0 este lungimea de undă în vid, iar $a, b, c, \dots$, sunt constante. Se observă că $\frac{dn}{d\lambda} < 0$. În acest caz spunem că avem de-a face cu dispersie normală.

Le Roux a descoperit în 1862 că în cazul unei prisme umplute cu vapori de iod apar porțiuni unde avem de-a face cu o creștere a indicelui de refracție cu lungimea de undă, adică $\frac{dn}{d\lambda} > 0$. Spunem în acest caz, că substanța prezintă o dispersie anomală. Mai trebuie menționat că în

regiunea din spectru în care există dispersie anomală există o absorbție puternică.

1.5.1 Ecuația de dispersie

Problema complexă a interacției unui câmp electromagnetic cu substanța se poate rezolva prin metode clasice sau cuantice.

Metoda clasică este simplă: pentru a stabili dependența indicelui de refracție a unei substanțe în funcție de frecvența luminii incidente este suficient să calculăm vectorul densitate de polarizare $\vec{P}$ creat în substanță de câmpul electric $\vec{E}$ al unde. Calculăm apoi vectorul inducție câmp electric $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ și apoi $\epsilon = \frac{D}{\epsilon_0 E}$. În sfârșit, ținând cont că $n = \sqrt{\epsilon}$ găsim relația $n = n(\omega) = n(\lambda)$.

Fie N numărul de atomi egal repartizați în unitatea de volum a substanței considerate. Admitem că fiecare atom conține un electron optic (a cărui deplasare determină polarizarea atomului) cu sarcina e . Câmpul electric exercită asupra electronului o forță $\vec{F} = e\vec{E}$. Neglijăm influența asupra electronului a câmpului electric creat de ceilalți electroni ai sistemului. Această aproximație este valabilă în cazul în care densitatea substanței este mică. Presupunem în continuare că electronul este menținut în atom de o forță elastică $-k\vec{r}$ care este proporțională cu deplasarea electronului față de poziția de echilibru $\vec{r}$ datorată unde incidente. Masa electronului și constanta elastică determină pulsația ω_0 a oscilațiilor proprii $\omega_0^2 = \frac{k}{m_e}$. Faptul că electronul pierde energie datorită radiației emise, a ciocnirilor și agitației termice, necesită introducerea unei forțe de amortizare de forma $-\alpha \frac{d\vec{r}}{dt}$ unde $\alpha = 2m\gamma$, iar γ este numit coeficient de amortizare. Atunci ecuația de mișcare a electronului are forma:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r} - \alpha \frac{d\vec{r}}{dt} + e\vec{E} \quad (1.373)$$

Presupunând un câmp sinusoidal ecuația (1.373) devine:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i\omega t) \quad (1.374)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{k}{m_e} \vec{r} + 2\gamma \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{e\vec{E}_0}{m_e} \exp(i\omega t) \quad (1.375)$$

Pentru ecuația 1.375, diferențială de ordinul I și neomogenă se poate alege o soluție particulară de forma membrului drept.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \exp(i\omega t) \quad (1.376)$$

Introducând (1.374) și (1.376) în (1.375) se obține:

$$\vec{r}(\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma) = \frac{e\vec{E}_0}{m_e} \quad (1.377)$$

de unde:

$$\vec{r} = \frac{e/m_e}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i2\gamma} \vec{E} \quad (1.378)$$

Deoarece densitatea de polarizare este:

$$\vec{P} = Ne\vec{r} \quad (1.379)$$

atunci:

$$\varepsilon - 1 = n^2 - 1 = \frac{P}{\varepsilon_0 E} = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i2\gamma} \quad (1.380)$$

Rezultă din ecuația de mai sus că permitivitatea este o mărime complexă. Trecerea de la permitivitatea complexă la permitivitatea reală este echivalentă cu a neglija absorbția undelor electromagnetice, adică $\gamma = 0$. Se obține:

$$n^2 - 1 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (1.381)$$

În Fig. 1.52 este reprezentată variația cantității $n^2 - 1$ în funcție de pulsația radiației.

Cu excepția punctului $\omega = \omega_0$ unde funcția prezintă o discontinuitate, indicele de refracție crește cu frecvența (scade cu lungimea de undă), adică avem o dispersie normală.

Vom defini condițiile fizice în care $\gamma = 0$. Trebuie remarcat faptul că în vizibil corpurile transparente incolore nu au nici o bandă de absorbție însă ele absorb puternic undele electromagnetice în ultraviolet. În regiunea vizibilă a spectrului se verifică inegalitatea $\omega < \omega_0$ (acolo unde

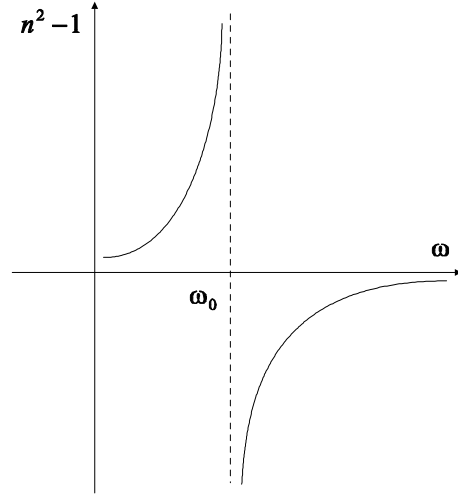


Figura 1.52: Variația lui $n^2 - 1$ în funcție de ω

nu avem absorbție). Este suficient să considerăm ramura din stânga a curbei anterioare. Aceasta înseamnă că frecvența proprie de oscilație a electronilor se află în regiunea ultravioletă a spectrului. În consecință corpurile transparente prezintă o dispersie normală. Presupunând că $\omega \ll \omega_0$ relația (1.381) se mai scrie:

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega_0^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \simeq 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega_0^2} \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right] \quad (1.382)$$

Cum $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ se obține o formulă simplă cu care pot fi verificate rezultatele experimentale:

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega_0^2} + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega_0^4} \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2} \quad (1.383)$$

$$n^2 = 1 + A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2}\right) \quad (1.384)$$

unde

$$A = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega_0^2} \quad (1.385)$$

$$B = \frac{4\pi^2 c^2}{\omega_0^2} \quad (1.386)$$

Calculând raportul acestor două constante se obține:

$$\frac{B}{A} = \frac{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 m}{Ne^2} \quad (1.387)$$

Acest raport nu depinde de ω_0 pulsația proprie a electronilor. Se observă că formula (1.372) coincide cu (1.384) iar constantele A și B pot fi determinate experimental din curba $n(\lambda)$ sau teoretic din formulele (1.385) și (1.386). Dacă se realizează estimările respective se constată o concordanță a valorilor parametrilor A și B obținuți teoretic și experimental de aproximativ 20%.

Se constată că relația este valabilă pentru gaze la presiuni mici și pentru substanțe a căror centri emisivi sunt rari. Acest caz corespunde absenței interacției între electronii oscilanți.

Dacă densitatea substanței este mare, asupra unui electron oscilant acționează în locul câmpului extern un câmp electric local care ia în considerație și acțiunea celorlalți electroni:

$$E_{loc} = E + \frac{P}{3\varepsilon_0} \quad (1.388)$$

Calcululele se pot reface ca în cazul precedent și se obține:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Ne^2}{3m_e \varepsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\gamma\omega} \quad (1.389)$$

În cazul când absorbția este neglijabilă:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Ne^2}{3m_e \varepsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (1.390)$$

Dacă spectrul studiat conține mai multe benzi de absorbție este necesar ca membrul drept al formulei (1.384) să fie înlocuit cu o sumă, adică:

$$n^2 = 1 + \frac{e^2}{m_e \varepsilon_0} \sum_j \frac{N_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2} \quad (1.391)$$

unde N_j reprezintă numărul de atomi din unitatea de volum ai căror electroni au pulsațiile proprii de oscilați ω_{0j} .

1.5.2 Dispersia anomală

Admitem că frecvența ω a oscilațiilor forțate este puțin diferită de frecvența proprie a electronilor optici ω_0 . Aceasta înseamnă că ipotezele făcute anterior nu mai sunt valabile. Remarcăm că în acest caz permitivitatea va fi o cantitate complexă. Indicele de refracție va putea fi pus sub forma unei cantități complexe:

$$n' = n - in\chi = n(1 - i\chi) \quad (1.392)$$

Atunci permitivitatea complexă este:

$$\varepsilon'^2 = n^2 (1 - 2i\chi - \chi^2) \quad (1.393)$$

Putem separa partea reală de partea imaginară al lui n'^2 și vom obține o ecuație ce leagă indicele de refracție real de factorul de absorbție.

Atunci relația (1.380) se poate rescrie ca:

$$n^2 (1 - 2i\chi - \chi^2) = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \quad (1.394)$$

De aici obținem prin separarea părții reale și imaginare:

$$n^2 (1 - \chi^2) = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \quad (1.395)$$

$$2n^2\chi = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \quad (1.396)$$

Remarcăm că variația funcției $2n^2\chi$ cu pulsația este asemănătoare factorului de absorbție $n\chi$. Când $\omega \rightarrow \infty$ atunci $2n^2\chi \rightarrow 0$ în timp ce pentru $\omega = \omega_0$ această funcție prezintă un maxim, care se estompează pe măsură ce $\omega_0^2 - \omega^2$ scade. Valoarea maximului:

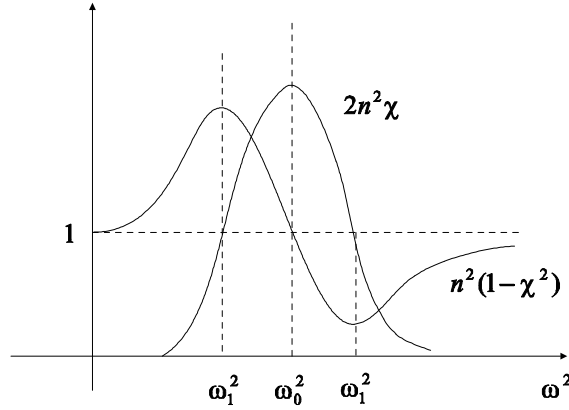


Figura 1.53: Forma funcțiilor $2n^2\chi$ și $n^2(1-\chi^2)$ în funcție de ω^2

$$n^2\chi = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{2\gamma\omega} \quad (1.397)$$

este cu atât mai mare cu cât constanta de amortizare este mai mică.

Forma lui $n^2(1-\chi^2)$ reproduce în mare dependența lui $n(\lambda)$. Când $\omega \rightarrow \infty$ funcția tinde la unitate. Funcția $y = n^2(1-\chi^2)$ prezintă valori maxime și minime în apropierea frecvenței la care absorbția este maximă. Valorile extreme ω_1 și ω_2 pot fi calculate egalând cu zero prima derivată $\frac{dy}{d\omega}$. Calculul arată că distanța ce separă extremele funcției $y(\omega)$ este egală cu lărgimea la jumătate a maximului lui $2n^2\chi$. Figurile celor două funcții $2n^2\chi$ și $n^2(1-\chi^2)$ care reflectă în mod esențial alura factorului de absorbție și indicele de refracție în vecinătatea absorbției sunt reprezentate în Fig. 1.53.

Se observă că în regiunea de absorbție unde $2n^2\chi$ are un maxim, indicele de refracție scade cu creșterea frecvenței, deci regiunea de absorbție este una de dispersie anomală.

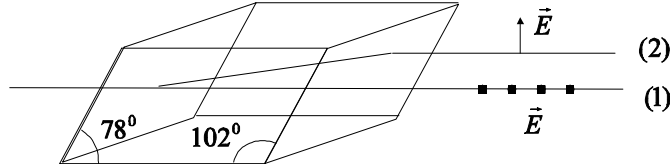


Figura 1.54: Efectul de birefrință în cristalul de spat de Islanda: 1. raza ordinară; 2. raza extraordinară

1.6 Optica mediilor anizotrope

1.6.1 Introducere

Dacă un cristal de spat de Islanda este traversat de o rază de lumină nepolarizată, la ieșirea din acesta se observă două raze pe care Huygens le-a numit: raza ordinară și raza extraordinară. Se constată că indicele de refracție n_e al razei extraordinare depinde de direcția razei în cristal în timp ce indicele de refracție al razei ordinare n_o nu depinde de unghiul de incidență (Fig. 1.54)

Pentru cristalul de spat de Islanda $n_o = 1,658$ și $n_e \in (1,486; 1,658)$ în cazul luminii cu lungimea de undă $\lambda = 589,3$ nm. Dacă $n_e < n_o$ cristalul face parte din clasa cristalelor optice negative iar dacă $n_e > n_o$ cristalul face parte din clasa cristalelor optice pozitive. În toate cristalele există o direcție în lungul căreia nu există birefrință ($n_e = n_o$). Această direcție poartă numele de axă optică a cristalului. Planele ce conțin axa optică poartă numele de plane principale. Dacă planul principal este perpendicular pe o pereche de suprafețe opuse poartă numele de secțiune principală. Există cristale care au o singură axă principală (spatul de Islanda, cuarțul). Ele poartă denumirea de cristale uniace. Există și cristale care au două axe optice și care poartă numele de cristale biace.

În cazul spatului de Islanda axa optică principală unește două unghiuri obtuze ale cristalului. Razele care apar prin fenomenul de birefrință sunt total polarizate pe direcții perpendiculare. Astfel vectorul electric $\vec{E}$ al razei ordinare vibrează perpendicular pe secțiunea principală iar vectorul $\vec{E}$ al razei extraordinare vibrează în planul secțiunii principale.

Un caz extrem de interesant este acela în care propagarea luminii are

loc de-a lungul unei direcții perpendiculare pe axa optică. Deși cele două raze nu se observă separat ele există, iar diferența indicilor de refracție $|n_e - n_o|$ este maximă. Dacă se trimite pe o astfel de direcție o rază de lumină liniar polarizată al cărei vector $\vec{E}$ să nu vibreze în planul principal și nici într-un plan perpendicular pe acesta se obțin două unde care se propagă de-a lungul acestei direcții cu viteze diferite: $v_1 = c/n_o$ și $v_2 = c/n_e$. Undele sunt polarizate pe direcții perpendiculare. În funcție de grosimea lamei, la ieșirea din aceasta între cele două raze există o diferență de fază $\Delta\varphi$. Dacă $\Delta\varphi = m\pi$, unde m este un număr întreg unda rezultată prin compunerea celor două unde polarizate pe direcții perpendiculare este liniar polarizată. Dacă $\Delta\varphi \neq m\pi$ unda care rezultă este eliptic polarizată. Pe acest principiu funcționează lama sfert de undă care este utilizată pentru a transforma lumina liniar polarizată în lumină circular polarizată. Grosimea unei astfel de lame se calculează ținând cont că defazajul este legat de diferența de drum a celor două raze prin relația:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} \quad (1.398)$$

unde $\delta = (\Delta n)d$. Dacă se pune condiția ca diferența de fază să fie $\Delta\varphi = (2m + 1)\pi/2$ cu m întreg rezultă:

$$d(n_o - n_e) = (2m + 1) \frac{\lambda}{4} \quad (1.399)$$

de unde și numele de lamă sfert de undă.

1.6.2 Teoria electromagnetică a mediilor anizotrope

Punctul de plecare în cazul acestei teorii sunt cele patru ecuații ale lui Maxwell scrise în medii fără sarcini libere ($\rho = 0$), fără curenți ($\vec{j} = 0$) și nemagnetice ($\vec{B} = \mu_0\vec{H}$):

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1.400)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (1.401)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (1.402)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.403)$$

În cazul mediilor anizotrope și liniare legătura dintre vectorii $\vec{E}$ și $\vec{D}$ este dată de relația:

$$\vec{D} = \bar{\bar{\epsilon}} \vec{E} \quad (1.404)$$

unde $\bar{\bar{\epsilon}}$ este tensorul permitivitate electrică reprezentat de o matrice pătrată de ordin trei. Relația (1.404) se scrie desfășurat astfel:

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (1.405)$$

Se demonstrează că matricea care exprimă tensorul permitivităților este simetrică $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$, $\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx}$, $\epsilon_{yz} = \epsilon_{zy}$. Atunci există un sistem de coordonate în care matricea tensorului permitivitate este diagonală.

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \quad (1.406)$$

Aceste axe particulare poartă numele de axe principale sau axe de simetrie ale mediului iar ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 reprezintă constantele dielectrice principale. Vom considera ca soluție a ecuațiilor Maxwell o undă plană. Vectorii caracteristici ai acestei unde sunt de forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k} \vec{r} \right) \right] \quad (1.407)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k} \vec{r} \right) \right] \quad (1.408)$$

$$\vec{D} = \vec{D}_0 \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k} \vec{r} \right) \right] \quad (1.409)$$

Introduși pe rând în relațiile (1.400), (1.401), (1.402) și (1.403) rezultă:

$$\vec{k} \times \vec{E} = \mu_0 \omega \vec{H} \quad (1.410)$$

$$\vec{k} \vec{H} = 0 \quad (1.411)$$

$$\vec{k} \vec{D} = 0 \quad (1.412)$$

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D} \quad (1.413)$$

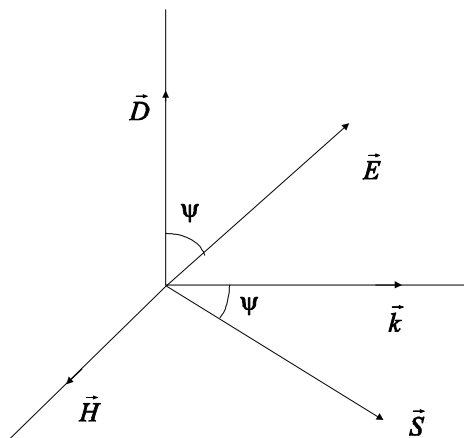


Figura 1.55: Structura unei plane într-un mediu anizotrop. Vectorii $\vec{k}$, $\vec{D}$, $\vec{E}$ și $\vec{S}$ sunt coplanari.

Din relațiile (1.411) și (1.412) rezultă că $\vec{H} \perp \vec{k}$, $\vec{D} \perp \vec{k}$ iar din (1.413) că $\vec{D}$ este perpendicular pe planul format de vectorii $\vec{k}$ și $\vec{H}$. Rezultă că vectorii $\vec{k}$, $\vec{D}$ și $\vec{H}$ formează un triedru drept.

Deoarece $\vec{H}$ este perpendicular pe planul format de vectorii $\vec{k}$ și $\vec{D}$ rezultă că vectorii $\vec{k}$, $\vec{D}$ și $\vec{E}$ sunt coplanari. Planul format de vectorii $\vec{D}$ și $\vec{k}$ poartă numele de plan de polarizare, iar planul definit de vectorii $\vec{D}$ și $\vec{H}$ și care este perpendicular pe $\vec{k}$ poartă numele de planul unde. Mediul fiind liniar direcția de propagare a energiei este dată de direcția vectorului Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$. Deoarece $\vec{S} \perp \vec{E}$ și $\vec{S} \perp \vec{H}$, vectorul $\vec{S}$ se află în planul determinat de vectorii $\vec{k}$ și $\vec{D}$. Astfel vectorii $\vec{k}$, $\vec{D}$, $\vec{E}$ și $\vec{S}$ sunt coplanari. Structura unei care se propagă în mediul anizotrop este arătată în Fig. 1.55.

Astfel, unda plană se propagă în mediul anizotrop de-a lungul direcției vectorului $\vec{k}$ cu viteza $v = \omega/c$. Această direcție poartă numele de direcția unde. Direcția de propagare a energiei este dată de direcția vectorului $\vec{S}$ și poartă numele de direcția razei. Se observă că vectorul $\vec{E}$ este perpendicular pe $\vec{H}$ dar nu mai este perpendicular pe $\vec{k}$, adică pe direcția de propagare a unde. Din acest punct de vedere unda nu mai este riguros transversală deoarece există o componentă nenulă a lui $\vec{E}$ pe direcția lui $\vec{k}$.

1.6.3 Suprafața vectorului de undă și ecuațiile lui Fresnel

Se numește suprafață a vectorilor de undă suprafața descrisă de extremitățile vectorilor $\vec{OK} = \vec{k}$ unde O este o origine arbitrară. Înmulțim vectorial ecuația (1.410) cu $\vec{k}$ și se ține cont de (1.413):

$$\begin{aligned}\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) &= \mu_0 \omega (\vec{k} \times \vec{H}) \\ \vec{k} (\vec{k} \vec{E}) - k^2 \vec{E} &= -\mu_0 \omega^2 \vec{D} = -\mu_0 \omega^2 \vec{\epsilon} \vec{E}\end{aligned}\quad (1.414)$$

Vom considera această ecuație în sistemul axelor principale și o vom scrie pe componente:

$$\begin{aligned}k_x (\vec{k} \vec{E}) - k^2 E_x &= -\mu_0 \omega^2 \epsilon_1 E_x \\ k_y (\vec{k} \vec{E}) - k^2 E_y &= -\mu_0 \omega^2 \epsilon_2 E_y \\ k_z (\vec{k} \vec{E}) - k^2 E_z &= -\mu_0 \omega^2 \epsilon_3 E_z\end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned}E_x (k^2 - \mu_0 \omega^2 \epsilon_1) &= k_x (\vec{k} \vec{E}) \\ E_y (k^2 - \mu_0 \omega^2 \epsilon_2) &= k_y (\vec{k} \vec{E}) \\ E_z (k^2 - \mu_0 \omega^2 \epsilon_3) &= k_z (\vec{k} \vec{E})\end{aligned}\quad (1.415)$$

Se ține cont că $E_x = D_x/\epsilon_1$, $E_y = D_y/\epsilon_2$, $E_z = D_z/\epsilon_3$ și se notează cu $k_1^2 = \mu_0 \omega^2 \epsilon_1$, $k_2^2 = \mu_0 \omega^2 \epsilon_2$, $k_3^2 = \mu_0 \omega^2 \epsilon_3$. Atunci se obține:

$$D_x = \frac{\epsilon_1 k_x (\vec{k} \vec{E})}{k^2 - k_1^2}\quad (1.416)$$

$$D_y = \frac{\epsilon_2 k_y (\vec{k} \vec{E})}{k^2 - k_2^2}\quad (1.417)$$

$$D_z = \frac{\epsilon_3 k_z (\vec{k} \vec{E})}{k^2 - k_3^2}\quad (1.418)$$

Deoarece $\vec{k}\vec{D} = 0$ atunci:

$$k_x D_x + k_y D_y + k_z D_z = 0 \quad (1.419)$$

Înlocuim în (1.419) relațiile (1.416), (1.417) și (1.418) și se obține:

$$\varepsilon_1 \frac{k_x^2}{k^2 - k_1^2} + \varepsilon_2 \frac{k_y^2}{k^2 - k_2^2} + \varepsilon_3 \frac{k_z^2}{k^2 - k_3^2} = 0 \quad (1.420)$$

Aceasta este ecuația vectorilor de undă.

Definim viteza de propagare a undei de-a lungul direcției dată de vectorul $\vec{k}$, $v = \omega/k$, precum și vitezele de propagare a undei $v_1^2 = 1/\mu_0\varepsilon_1 = \omega^2/k_1^2$, $v_2^2 = 1/\mu_0\varepsilon_2 = \omega^2/k_2^2$, $v_3^2 = 1/\mu_0\varepsilon_3 = \omega^2/k_3^2$ de-a lungul celor trei axe principale. Definim cosinuși directori ai direcției de propagare $\alpha = k_x/k$, $\beta = k_y/k$, $\gamma = k_z/k$. Nu trebuie confundate mărimile k_x , k_y , k_z care sunt componentele vectorului de undă cu mărimile k_1 , k_2 , k_3 care sunt vectorii de undă în cazul undelor ce se propagă de-a lungul axelor principale. Prelucrăm primul termen din (1.420):

$$\varepsilon_1 \frac{k_x^2}{k^2 - k_1^2} = \varepsilon_1 \frac{k_x^2/k^2}{1 - k_1^2/k^2} = \varepsilon_1 \frac{\alpha^2}{1 - v^2/v_1^2} = -\mu_0^{-1} \frac{\alpha^2}{v^2 - v_1^2} \quad (1.421)$$

În mod analog se pot exprima și ceilalți doi termeni. Ecuația (1.420) se transformă în:

$$\frac{\alpha^2}{v^2 - v_1^2} + \frac{\beta^2}{v^2 - v_2^2} + \frac{\gamma^2}{v^2 - v_3^2} = 0 \quad (1.422)$$

Această ecuație poartă numele de ecuația lui Fresnel și permite calcularea vitezei de fază în funcție de direcția lui $\vec{k}$ determinată de cei trei cosinuși directori α , β , γ și de vitezele principale v_1 , v_2 , v_3 care sunt mărimi caracteristice ale mediului. Trebuie remarcat că $v^2 \neq v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$.

Ecuația (1.422) este o ecuație de gradul doi în v^2 . Astfel, pentru fiecare direcție de propagare $\vec{k}$ există două viteze distincte v' și v'' . Dacă direcția lui $\vec{k}$ coincide cu una din axele principale, doi dintre cosinușii directori sunt nuli. Atunci viteza de fază va coincide cu viteza principală corespunzătoare.

Ecuația (1.422) poate fi scrisă în funcție de indicele de refracție $n = c/v$ și indicii de refracție principali $n_1 = c/v_1$, $n_2 = c/v_2$, $n_3 = c/v_3$. Rezultă ecuația:

$$\frac{n_1^2 \alpha^2}{n^2 - n_1^2} + \frac{n_2^2 \beta^2}{n^2 - n_2^2} + \frac{n_3^2 \gamma^2}{n^2 - n_3^2} = 0 \quad (1.423)$$

Ecuția permite calculul indicelui de refracție în funcție de direcția de propagare și mărimile caracteristice ale mediului care sunt indicii de refracție principali. Putem defini un vector $\vec{n}$ cu componentele $n_x^2 = k_x^2/k^2 = \alpha^2$, $n_y^2 = k_y^2/k^2 = \beta^2$, $n_z^2 = k_z^2/k^2 = \gamma^2$. Rezultă ecuația:

$$n_1^2 \frac{n_x^2}{n^2 - n_1^2} + n_2^2 \frac{n_y^2}{n^2 - n_2^2} + n_3^2 \frac{n_z^2}{n^2 - n_3^2} = 0 \quad (1.424)$$

Ecuția (1.420) are două soluții. Există două direcții de propagare a undeii astfel că există două orientări pentru vectorul inducție câmp electric $\vec{D}'$ și $\vec{D}''$. Se demonstrează că cei doi vectori sunt perpendiculari. Pentru a demonstra acest lucru se efectuează produsul scalar $\vec{D}' \vec{D}''$. Pentru aceasta se ține cont de relațiile (1.416), (1.417) și (1.418):

$$D'_x D''_x = \frac{\varepsilon_1^2 k'_x k''_x (\vec{k}' \vec{E}) (\vec{k}'' \vec{E})}{(k'^2 - k_1^2)(k''^2 - k_1^2)}$$

$$D'_x D''_x = \varepsilon_1^2 (\vec{k}' \vec{E}) (\vec{k}'' \vec{E}) \frac{k'_x k''_x}{k_1^2} \frac{k_1^2}{(k'^2 - k_1^2)(k''^2 - k_1^2)} \quad (1.425)$$

dar

$$\frac{k_1^2}{(k'^2 - k_1^2)(k''^2 - k_1^2)} = \frac{1}{(k''^2 - k'^2)} \left(\frac{k'^2}{k'^2 - k_1^2} - \frac{k''^2}{k''^2 - k_1^2} \right)$$

și

$$k_1^2 = k_0^2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}$$

Atunci dacă notăm cu:

$$A = (\vec{k}' \vec{E}) (\vec{k}'' \vec{E}) \frac{\varepsilon_0}{k_0^2} \frac{1}{(k''^2 - k'^2)}$$

$$D'_x D''_x = A \left[k'^2 \frac{k''_x}{k'_x} \left(\varepsilon_1 \frac{k'^2}{k'^2 - k_1^2} \right) - k''^2 \frac{k'_x}{k''_x} \left(\varepsilon_1 \frac{k''^2}{k''^2 - k_1^2} \right) \right] \quad (1.426)$$

Deoarece:

$$\frac{k''_x}{k'_x} = \frac{k''_y}{k'_y} = \frac{k''_z}{k'_z} = a$$

$$\left(\frac{k''}{k'} \right)^2 = \frac{k''^2 + k''^2 + k''^2}{k'^2 + k'^2 + k'^2} = a^2$$

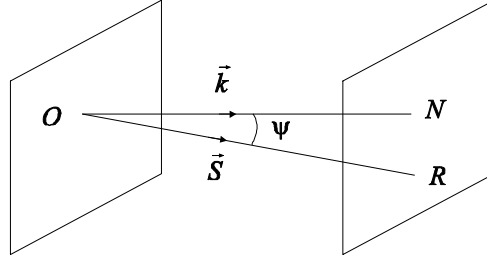


Figura 1.56: Propagarea unei unde plane într-un mediu anizotrop

$$k'^2 \frac{k''^2}{k_x'^2} = k''^2 \frac{k_2'}{k_x''^2} = ak'^2$$

relația (1.426) devine:

$$D'_x D''_x = Aak'^2 \left[\varepsilon_1 \frac{k_x'^2}{k'^2 - k_1^2} - \varepsilon_1 \frac{k_x''^2}{k''^2 - k_1^2} \right] \quad (1.427)$$

Produsele $D'_y D''_y$ și $D'_z D''_z$ au expresii analoage. Atunci:

$$\begin{aligned} \vec{D}' \vec{D}'' &= Aak'^2 \left[\varepsilon_1 \frac{k_x'^2}{k'^2 - k_1^2} + \varepsilon_2 \frac{k_y'^2}{k'^2 - k_1^2} + \varepsilon_3 \frac{k_z'^2}{k'^2 - k_3^2} \right] - \\ &Aak'^2 \left[\varepsilon_1 \frac{k_x''^2}{k''^2 - k_1^2} + \varepsilon_2 \frac{k_y''^2}{k''^2 - k_1^2} + \varepsilon_3 \frac{k_z''^2}{k''^2 - k_3^2} \right] \end{aligned}$$

Se ține cont de ecuația vectorilor de unda. Rezultă că cele două paranteze sunt nule. Astfel $\vec{D}' \vec{D}'' = 0$

1.6.4 Suprafața de undă

Fie o undă care se propagă într-un mediu anizotrop. Fie planul de fază constantă la momentele t_1 și t_2 .

De-a lungul direcției lui $\vec{k}$ se definește viteza de fază v , iar după direcția lui $\vec{S}$ se definește viteza v_r , viteza radială de propagare a energiei. Atunci:

$$\begin{aligned} ON &= v\Delta t \\ OR &= v_r\Delta t \end{aligned}$$

Rezultă:

$$\frac{ON}{OR} = \frac{v}{v_r} = \cos \psi \quad (1.428)$$

Definim în continuare vectorul unitate al direcției lui $\vec{k}$, $\vec{u} = \vec{k}/k$ și vectorul unitate al direcției de propagare a energiei $\vec{s} = \vec{S}/S$. Definim suprafața de undă ca fiind locul geometric al vârfului vectorului $\vec{S}$ considerat cu originea într-un punct arbitrar. Pentru determinarea ecuației acestuia vom porni de la relația (1.414) scrisă astfel:

$$\vec{k} \left(\vec{k} \vec{E} \right) - k^2 \vec{E} = -\mu_0 \omega^2 \vec{D} \quad (1.429)$$

Punând $\vec{k} = k\vec{u}$ și $\omega = kv$ din relația (1.429) se obține:

$$\mu_0 \vec{D} = \frac{1}{v^2} \left[\vec{E} - \vec{u} \left(\vec{u} \vec{E} \right) \right] \quad (1.430)$$

Se înmulțește (1.430) cu vectorul $\vec{s}$ și se obține:

$$\mu_0 \vec{D} \vec{s} = \frac{1}{v^2} \left[\vec{E} \vec{s} - \vec{u} \vec{s} \left(\vec{u} \vec{E} \right) \right]$$

Deoarece $\vec{E} \perp \vec{s}$ rezultă:

$$\mu_0 \vec{D} \vec{s} = -\frac{1}{v^2} \vec{u} \vec{s} \left(\vec{u} \vec{E} \right) = -\frac{1}{v^2} \left(\vec{u} \vec{E} \right) \cos \psi \quad (1.431)$$

Vectorii $\vec{E}$, $\vec{D}$ și $\vec{s}$ sunt coplanari. Atunci vectorul $\vec{s}$ se poate exprima în funcție de vectorii $\vec{E}$ și $\vec{D}$:

$$\vec{s} = a\vec{D} + b\vec{E} \quad (1.432)$$

în care a și b sunt constante. Pentru determinarea lor, relația (1.432) se înmulțește cu $\vec{s}$ și se obține:

$$\vec{s}^2 = a\vec{D} \vec{s} + b\vec{E} \vec{s} \quad (1.433)$$

Deoarece $\vec{s}^2 = 1$, și $\vec{E} \vec{s} = 0$ atunci:

$$a = \frac{1}{\vec{D} \vec{s}} \quad (1.434)$$

Înmulțim (1.432) cu vectorul $\vec{u}$:

$$\vec{s}\vec{u} = a\vec{D}\vec{u} + b\vec{E}\vec{u} \quad (1.435)$$

Deoarece $\vec{D}\vec{u} = 0$, vectorul $\vec{D}$ fiind normal pe direcția de propagare, rezultă:

$$b = \frac{\cos \psi}{\vec{E}\vec{u}} \quad (1.436)$$

Din (1.432):

$$\vec{E} = \frac{\vec{s}}{b} - \frac{a}{b}\vec{D}$$

și ținând cont de expresia constantelor a și b rezultă:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}\vec{u}}{\cos \psi} \left(\vec{s} - \frac{\vec{D}}{\vec{s}\vec{D}} \right) \quad (1.437)$$

Dar din (1.431) se obține:

$$\vec{E}\vec{u} = -\frac{\mu_0 \vec{D}\vec{s}v^2}{\cos \psi}$$

Atunci relația (1.437) devine:

$$\vec{E} = -\mu_0 \vec{D}\vec{s} \frac{v^2}{\cos^2 \psi} \left(\vec{s} - \frac{\vec{D}}{\vec{s}\vec{D}} \right) \quad (1.438)$$

Dar cum $v_r^2 = v^2 / \cos^2 \psi$ rezultă:

$$\vec{E} = \mu_0 v_r^2 \left[\vec{E} - \vec{s} \left(\vec{s}\vec{D} \right) \right] \quad (1.439)$$

Se compară această relație cu relația (1.430). Cele două relații sunt echivalente dacă se fac corespondențele $\mu_0 \vec{D} \rightarrow \vec{E}$, $\vec{u} \rightarrow \vec{s}$, $v \rightarrow 1/v_r$. Atunci putem scrie direct relația lui Fresnel pentru viteza radială:

$$\frac{\alpha_r^2}{\frac{1}{v_r^2} - \frac{1}{v_1^2}} + \frac{\beta_r^2}{\frac{1}{v_r^2} - \frac{1}{v_2^2}} + \frac{\gamma_r^2}{\frac{1}{v_r^2} - \frac{1}{v_3^2}} = 0 \quad (1.440)$$

unde $\alpha_r, \beta_r, \gamma_r$ sunt cosinuși directori ai vectorului $\vec{S}$. Dacă se ține cont că $v_{rx} = v_r \alpha_r, v_{ry} = v_r \beta_r, v_{rz} = v_r \gamma_r$ relația (1.440) devine:

$$\frac{v_1^2 v_{rx}^2}{v_r^2 - v_1^2} + \frac{v_2^2 v_{ry}^2}{v_r^2 - v_2^2} + \frac{v_3^2 v_{rz}^2}{v_r^2 - v_3^2} = 0 \quad (1.441)$$

Se înmulțește relația (1.441) cu t^2 și se ține cont că $x = v_{rx}t; y = v_{ry}t; z = v_{rz}t$. Se obține:

$$\frac{v_1^2 x^2}{v_r^2 - v_1^2} + \frac{v_2^2 y^2}{v_r^2 - v_2^2} + \frac{v_3^2 z^2}{v_r^2 - v_3^2} = 0 \quad (1.442)$$

Relația se mai scrie ca:

$$\begin{aligned} & x^2 v_1^2 (v_r^2 - v_2^2) (v_r^2 - v_3^2) + \\ & v_2^2 y^2 (v_r^2 - v_1^2) (v_r^2 - v_3^2) + \\ & v_3^2 z^2 (v_r^2 - v_1^2) (v_r^2 - v_2^2) = 0 \end{aligned} \quad (1.443)$$

Aceasta este ecuația suprafeței de undă.

1.6.5 Elipsoidul indicilor de refracție

Se pune problema de a determina indicele de refracție funcție de direcția vectorului $\vec{D}$. Pentru aceasta se consideră relația (1.416) scrisă sub forma:

$$\frac{D_x}{\varepsilon_1} (k^2 - k_1^2) = k_x (\vec{k} \vec{E}) \quad (1.444)$$

pe care o vom înmulți cu D_x . Relația devine:

$$\frac{D_x^2}{\varepsilon_1} (k^2 - k_1^2) = D_x k_x (\vec{k} \vec{E}) \quad (1.445)$$

Rezultă:

$$k_x D_x = \frac{D_x^2 (k^2 - k_1^2)}{\varepsilon_1 (\vec{k} \vec{E})} = \frac{D_x^2 (k^2 - k_1^2)}{\varepsilon_0 n_1^2 (\vec{k} \vec{E})} \quad (1.446)$$

$$k_y D_y = \frac{D_y^2 (k^2 - k_2^2)}{\varepsilon_0 n_2^2 (\vec{k} \vec{E})} \quad (1.447)$$

$$k_z D_z = \frac{D_z^2 (k^2 - k_3^2)}{\varepsilon_0 n_3^2 (\vec{k} \vec{E})} \quad (1.448)$$

Deoarece:

$$\vec{k} \vec{D} = k_x D_x + k_y D_y + k_z D_z = 0$$

ținând cont de relațiile (1.446), (1.447), (1.448) rezultă:

$$\frac{D_x^2 (k^2 - k_1^2)}{n_1^2} + \frac{D_y^2 (k^2 - k_2^2)}{n_2^2} + \frac{D_z^2 (k^2 - k_3^2)}{n_3^2} = 0 \quad (1.449)$$

sau:

$$\left(\frac{D_x^2}{n_1^2} + \frac{D_y^2}{n_2^2} + \frac{D_z^2}{n_3^2} \right) k^2 = \frac{D_x^2 k_1^2}{n_1^2} + \frac{D_y^2 k_2^2}{n_2^2} + \frac{D_z^2 k_3^2}{n_3^2} \quad (1.450)$$

Dar:

$$\frac{k_1^2}{n_1^2} = \frac{k_2^2}{n_2^2} = \frac{k_3^2}{n_3^2} = \frac{k^2}{n^2} \quad (1.451)$$

Rezultă:

$$\frac{D_x^2}{n_1^2} + \frac{D_y^2}{n_2^2} + \frac{D_z^2}{n_3^2} = \frac{D^2}{n^2} \quad (1.452)$$

Relația (1.452) se înmulțește cu n^2/D^2 ; rezultă:

$$n^2 \left[\frac{D_x^2}{D^2 n_1^2} + \frac{D_y^2}{D^2 n_2^2} + \frac{D_z^2}{D^2 n_3^2} \right] = 1 \quad (1.453)$$

Vom introduce un nou vector $\vec{m}$ astfel încât modulul lui să fie egal cu n ($|\vec{m}| = n$) dar a cărei direcție să coincidă cu direcția vectorului $\vec{D}$ (Fig. 1.57):

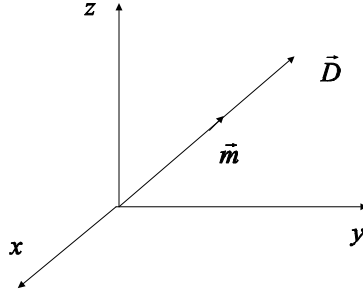
$$\vec{m} = n \frac{\vec{D}}{D} \quad (1.454)$$

Relația (1.454) se scrie pe componente astfel:

$$m_x = n \frac{D_x}{D}; \quad m_y = n \frac{D_y}{D}; \quad m_z = n \frac{D_z}{D}; \quad (1.455)$$

Atunci, relația (1.453) devine:

$$\frac{m_x^2}{n_1^2} + \frac{m_y^2}{n_2^2} + \frac{m_z^2}{n_3^2} = 1 \quad (1.456)$$

Figura 1.57: Definirea vectorului $\vec{m}$

Acesta este elipsoidul indicilor de refracție. Pornind de la acesta putem determina direcția câmpului electric. Diferențiem relația (1.456):

$$2 \frac{m_x}{n_1^2} dm_x + 2 \frac{m_y}{n_2^2} dm_y + 2 \frac{m_z}{n_3^2} dm_z = 0 \quad (1.457)$$

Înlocuim componentele vectorului $\vec{m}$ în relația (1.457) și se obține:

$$\frac{D_x}{n_1^2} dm_x + \frac{D_y}{n_2^2} dm_y + \frac{D_z}{n_3^2} dm_z = 0 \quad (1.458)$$

$$\frac{D_x}{\varepsilon_1} = \frac{D_x}{\varepsilon_0 n_1^2} = E_x \quad (1.459)$$

$$\frac{D_y}{\varepsilon_2} = \frac{D_y}{\varepsilon_0 n_2^2} = E_y \quad (1.460)$$

$$\frac{D_z}{\varepsilon_3} = \frac{D_z}{\varepsilon_0 n_3^2} = E_z \quad (1.461)$$

Atunci din relația (1.458) rezultă:

$$E_x dm_x + E_y dm_y + E_z dm_z = 0 \quad (1.462)$$

Deoarece $\vec{E} d\vec{m} = 0$ rezultă că $\vec{E}$ este perpendicular pe elipsoidul indicilor.

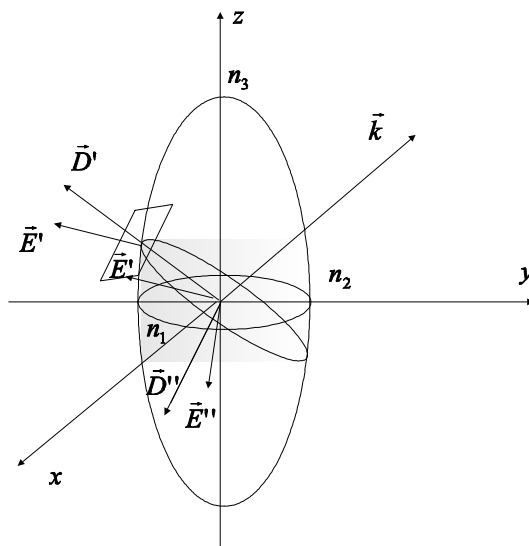


Figura 1.58: Structura undeii

1.6.6 Structura undeii

Cunoașterea elipsoidului indicilor permite determinarea structurii undeii monocromatice cu vectorul de undă $\vec{k}$ (Fig. 1.58).

Planul undeii este perpendicular pe vectorul $\vec{k}$ și conține vectorii $\vec{D}$, $\vec{H}$, $\vec{B}$. Vectorul $\vec{E}$ este perpendicular pe suprafața elipsoidului indicilor.

Numim axe optice drepte pentru care cele două viteze v' și v'' sunt egale. În general există două axe pentru care această condiție este îndeplinită. Un astfel de mediu poartă numele de mediu biax. În cazul particular în care două constante dielectrice principale sunt egale $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ cele două axe se confundă și formează axa optică principală. Un astfel de mediu poartă numele de mediu uniax.

1.6.7 Medii uniaxe

Suprafața de undă

Dacă $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ rezultă $v_1 = v_2$. Ecuația (1.443) devine:

$$v_1^2 x^2 (v_r^2 - v_1^2) (v_r^2 - v_3^2) +$$

$$v_2^2 y^2 (v_r^2 - v_1^2) (v_r^2 - v_3^2) + v_3^2 z^2 (v_r^2 - v_1^2)^2 = 0 \quad (1.463)$$

$$(v_r^2 - v_1^2) [x^2 v_1^2 (v_r^2 - v_3^2) + v_2^2 y^2 (v_r^2 - v_3^2) + v_3^2 z^2 (v_r^2 - v_1^2)] = 0 \quad (1.464)$$

Rezultă că:

$$v_r^2 - v_1^2 = 0 \quad (1.465)$$

și:

$$x^2 v_1^2 (v_r^2 - v_3^2) + v_2^2 y^2 (v_r^2 - v_3^2) + v_3^2 z^2 (v_r^2 - v_1^2) = 0 \quad (1.466)$$

de unde rezultă:

$$(x^2 v_1^2 + y^2 v_1^2 + z^2 v_3^2) v_r^2 - v_1^2 v_3^2 (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \quad (1.467)$$

Dar $x^2 + y^2 + z^2 = v_r^2 t^2$ și facem $t = 1$. Rezultă:

$$\frac{x^2 + y^2}{v_3^2} + \frac{z^2}{v_1^2} = 1 \quad (1.468)$$

Ecuația (1.465) este ecuația unei sfere de rază v_1 . Ecuația (1.468) este ecuația unui elipsoid de rotație. Astfel

$$x = 0; \quad \frac{y^2}{v_3^2} + \frac{z^2}{v_1^2} = 1 \quad (1.469)$$

$$y = 0; \quad \frac{x^2}{v_3^2} + \frac{z^2}{v_1^2} = 1 \quad (1.470)$$

$$z = 0; \quad x^2 + y^2 = 0 \quad (1.471)$$

De-a lungul axei Oz cele două viteze radiale se confundă. Axa Oz este axa optică a sistemului (Fig. 1.59). Suprafața sferică este cea a undei ordinare iar suprafața elipsoidală este cea a undei extraordinare. Notăm cu $v_0 = v_1$ viteza ordinară și cu $v_E = v_3$ viteza extraordinară. Putem denumi indicii de refracție: $n_o = c/v_1 = c/v_o$ indicele de refracție ordinar, $n_E = c/v_E$ indicele de refracție extraordinar. Dacă $v_o < v_E$ mediul este negativ iar dacă $v_o > v_E$ mediul este pozitiv. În Fig. 1.60 sunt reprezentate intersecțiile suprafețelor de undă cu planul yOz.

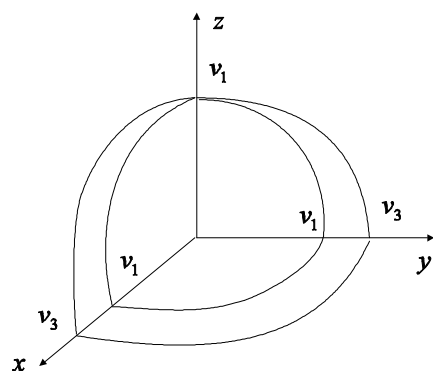


Figura 1.59: Suprafețele de undă în cazul unor medii uniaxe.

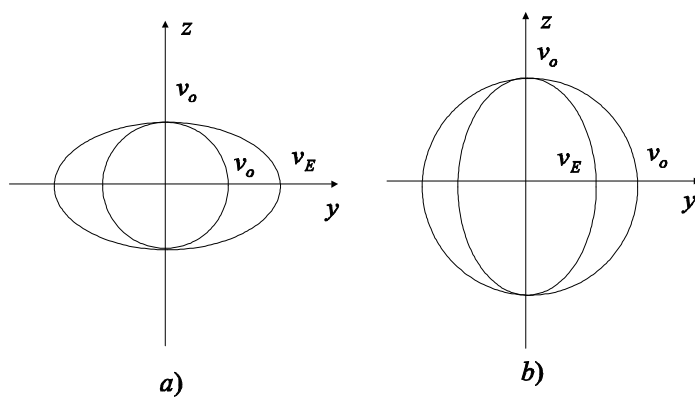


Figura 1.60: Intersecția suprafețelor de unda cu planul yOx pentru a) un mediu negativ $v_0 < v_E$; b) un mediu pozitiv $v_0 > v_E$

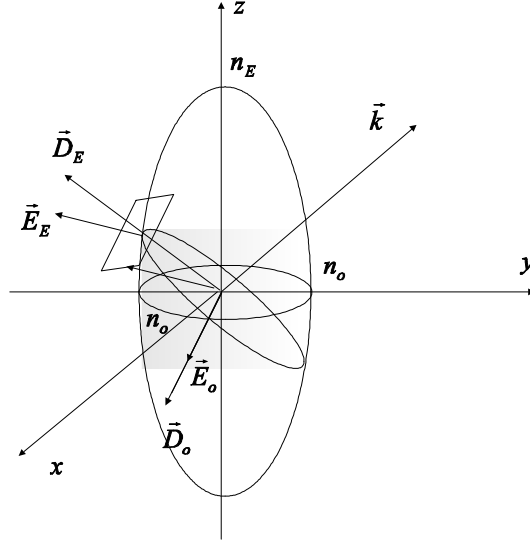


Figura 1.61: Elipsoidul indicilor de refracție pentru mediile uniaxe

Elipsoidul indicilor de refracție

Pentru aceasta în formula (1.456) se pune $n_1 = n_2 = n_o$ și $n_3 = n_E$. Ecuația elipsoidului indicilor de refracție devine:

$$\frac{m_x^2 + m_y^2}{n_o^2} + \frac{m_z^2}{n_E^2} = 1 \quad (1.472)$$

Acesta este un elipsoid de revoluție în jurul axei Oz care este axa optică a cristalului.

În Fig. 1.61 este reprezentat și vectorul de undă $\vec{k}$. Direcțiile vectorilor $\vec{D}$ ai celor două unde monocromatice sunt obținute prin intersecția planului unde cu elipsoidul indicilor de refracție:

a) prima undă este caracterizată de vectorul inducție $\vec{D}_o$ perpendicular pe axa optică a cristalului. Câmpul $\vec{E}_o$ este paralel cu $\vec{D}_o$ și vectorul Poynting $\vec{S}$ are aceeași orientare cu vectorul $\vec{k}$. Unda asociată poartă numele de undă ordinară. Indicele de refracție n_o este independent de direcția lui $\vec{k}$.

b) a doua undă este caracterizată de vectorul $\vec{D}_E$ paralel cu planul format de vectorul de undă și axa optică a cristalului. $\vec{E}_E$ și $\vec{D}_E$ nu mai

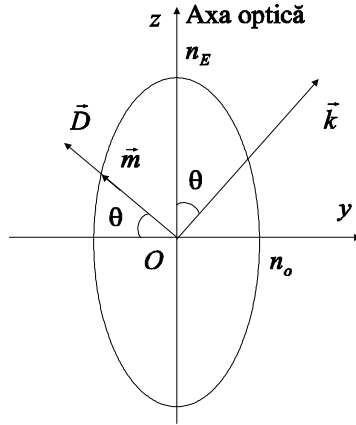


Figura 1.62: Intersecția elipsoidului indicilor cu planul yOz

sunt paraleli ca $\vec{S}$ și $\vec{k}$. Indicele corespunzător este indicele de refracție extraordinar n_e și el variază cu direcția lui $\vec{k}$. Trebuie remarcat că n_E este valoarea maximă pe care o poate lua indicele de refracție extraordinar. În Fig. 1.62 este arătată intersecția suprafeței elipsoidului indicilor cu planul yOz care este o elipsă de ecuație:

$$\frac{m_y^2}{n_o^2} + \frac{m_z^2}{n_E^2} = 1 \quad (1.473)$$

Vom discuta legătura dintre indicele de refracție extraordinar în funcție de direcția vectorului $\vec{k}$. Din Fig. 1.62 rezultă că:

$$\begin{aligned} m_y &= -n \cos \theta \\ m_z &= +n \cos \theta \end{aligned}$$

Atunci (1.473) devine:

$$\frac{n^2 \cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{n^2 \sin^2 \theta}{n_E^2} = 1$$

sau:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_E^2} \quad (1.474)$$

Astfel indice n de refracție extraordinar variază cu orientarea vectorului de undă între valorile n_o când $\vec{k}$ este paralel cu axa optică și n_E când $\vec{k}$ este perpendicular pe axa optică.

Ca exemplu de mediu uniax pozitiv este cuarțul (SiO_2) care pentru lungimea de undă $\lambda = 589,3 \text{ nm}$ are indicii de refracție $n_o = 1,5442$ și $n_E = 1,5533$. Ca exemplu de mediu uniax negativ este calcitul (CaCO_3) sau spatul de Islanda care pentru $\lambda = 589,3 \text{ nm}$ are indicii de refracție $n_o = 1,6584$ și $n_E = 1,4864$.

Suprafața indicilor

Dacă punem condițiile ca $n_1 = n_2 = n_o$ și $n_3 = n_E$ ecuația (1.424) devine:

$$n_o^2 \frac{n_x^2}{n^2 - n_o^2} + n_o^2 \frac{n_y^2}{n^2 - n_o^2} + n_E^2 \frac{n_z^2}{n^2 - n_E^2} = 0 \quad (1.475)$$

Rezultă ecuația unui elipsoid de rotație:

$$\frac{n_x^2 + n_y^2}{n_E^2} + \frac{n_z^2}{n_o^2} = 1 \quad (1.476)$$

a cărui intersecție cu planul zOy este o elipsă (Fig.1.63):

$$\frac{n_y^2}{n_E^2} + \frac{n_z^2}{n_o^2} = 1 \quad (1.477)$$

Cercul corespunde indicilor unei ordinare. Se observă că indicele unei extraordinare este același indiferent de direcția de propagare a acesteia. Elipsa corespunde unei extraordinare. Se observă că în acest caz indicele de refracție este dependent de direcția vectorului $\vec{k}$.

1.6.8 Birefrința

Vom considera un mediu uniax negativ în care ne propunem să determinăm direcțiile în care se propagă unda ordinară și cea extraordinară. Presupunem că unda incidentă cade sub un unghi de 45° pe suprafața de separație dintre aer și un mediu anizotrop. În plus considerăm că raza incidentă este construită în planul secțiunii principale (definit de normala la suprafața de separație și axa optică). Cazul este reprezentat în Fig.

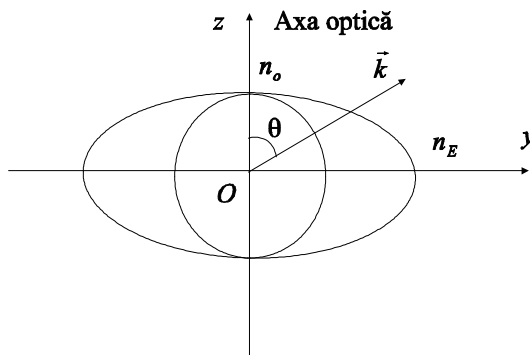


Figura 1.63: Intersecția suprafeței indicilor de refracție cu planul zOy

1.64 unde vom face construcția razelor refractate cu ajutorul suprafeței indicilor de refracție.

Se trasează cercul de rază n_1 , apoi elipsa cu axele n_o și n_E . Fie N_i intersecția acestui cerc cu direcția razei incidente. Se duce apoi o perpendiculară din N pe suprafața de separație. Aceasta intersectează cercul de rază n_o în punctul N_o și elipsa indicilor în N_e . Astfel, unghiul făcut de ON_o cu normala este i_o unghiul de refracție al razei ordinare. Direcția vectorului Poynting al razei ordinare coincide cu direcția acestei raze. Unghiul făcut de ON_e cu normala este unghiul făcut de unda extraordinară cu normala și este i_e . Trebuie remarcat că în acest caz direcția razei extrordinare nu coincide cu direcția vectorului $\vec{S}$, adică "unda extraordinară" și "raza extraordinară" nu coincid.

Acest fapt este prezentat în Fig 1.65 unde raza incidentă cade normal la suprafața de separație. Pentru a fi îndeplinită condiția de concordanță a fronturilor de undă este necesar ca $k_i \sin i_1 = k \sin i$. Deoarece $i_1 = 0$, pentru ambele unde $i = 0$ și vectorii $\vec{k}$ ai undei ordinare și extraordinare sunt pe aceeași direcție. Pentru raza ordinară direcția vectorului $\vec{k}$ coincide cu direcția vectorului $\vec{S}$ ("raza ordinară" este paralelă cu "unda ordinară"). În schimb pentru unda extraordinară vectorul de undă $\vec{k}$ formează unghiul θ_s cu vectorul Poynting $\vec{S}$ adică cu "raza extraordinară". Polarizarea celor două raze este prezentată în Fig. 1.65.

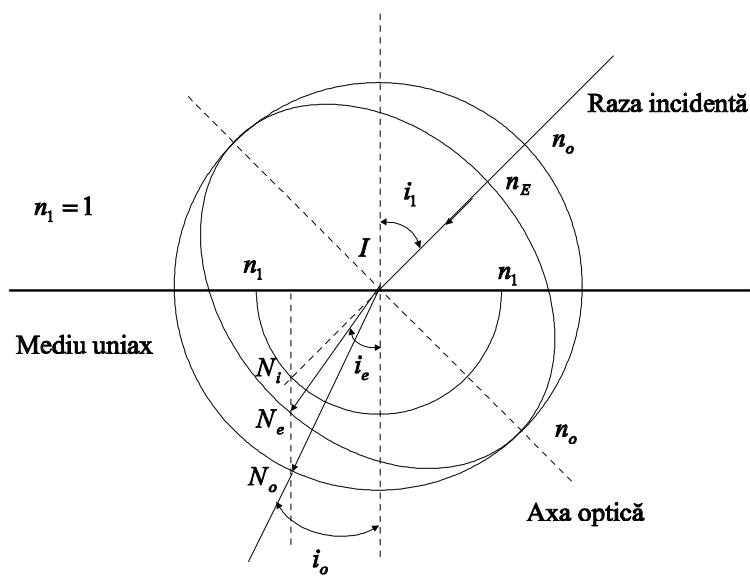


Figura 1.64: Raza incidentă pe un mediu uniax

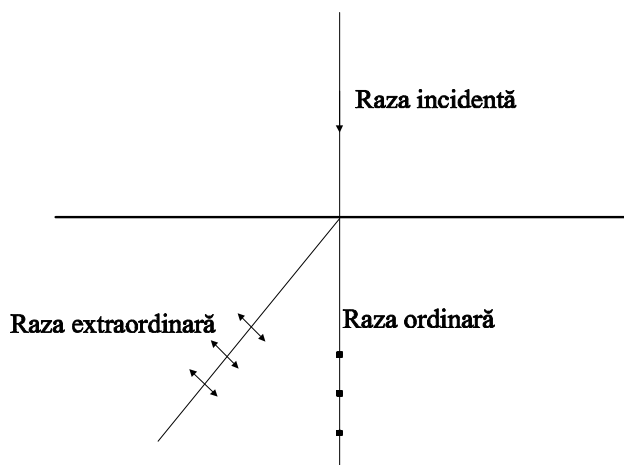


Figura 1.65: Raza ordinară și extraordinară în cazul incidenței normale

1.6.9 Lame cristaline

Lamele cristaline sunt lame cu fețe plan paralele care se utilizează pentru a produce lumină cu o polarizare bine determinată.

Cu ajutorul elipsoidului indicelui construit în punctul O cele două vibrații polarizate rectiliniu în lamă sunt caracterizate prin vectorii $\vec{D}_o$ și $\vec{D}_e$ orientați de-a lungul axelor elipsei $\mathcal{E}$ determinată de intersecția planului perpendicular pe $\vec{k}$ cu elipsoidul indicilor. Aceste direcții poartă numele de linii neutre, deoarece toate undele polarizate rectiliniu după aceste direcții traversează lama fără să sufere vreo modificare. Dacă vibrația incidentă polarizată după axa ordinară care este axa elipsei $\mathcal{E}$ perpendiculară pe axa optică traversează lama, apare o variație a fazei:

$$\varphi_o = \frac{2\pi\delta_o}{\lambda_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0}n_o e = \frac{2\pi\nu e}{v_o} \quad (1.478)$$

La fel, dacă vibrația unei incidente este polarizată după axa extraordinară (care este cealaltă axă a elipsei), suferă o variație a fazei egală cu:

$$\varphi_e = \frac{2\pi}{\lambda_0}n_e e = \frac{2\pi\nu e}{v_e} \quad (1.479)$$

Dacă $n_e > n_o$ (mediu uniax pozitiv), $v_e < v_o$ axa ordinară este numită axă rapidă iar axa extraordinară axă lentă. Punerea în evidență a liniilor neutre se face introducând lama între doi polarizori încrucișați. Se rotește lama în jurul fascicolului incident până ce apare extincția fascicolului. Cele două direcții sunt axele neutre.

Lamă tăiată paralel cu axa optică

Pentru o undă care cade perpendicular pe lamă undele ordinară și extraordinară se propagă pe aceeași direcție.

Vibrațiile unei ordinare sunt perpendiculare pe axa optică (adică perpendiculare pe planul secțiunii din Fig. 1.66), în timp ce vibrațiile unei extraordinare sunt paralele cu axa optică. La ieșirea din lama de grosime e cele două raze prezintă un defazaj:

$$\Delta\varphi = \varphi_o - \varphi_e = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_o - n_e)e \quad (1.480)$$

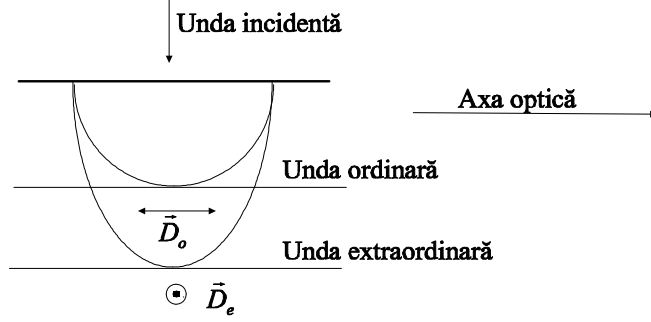


Figura 1.66: Unda ordinară și unda extraordinară în cazul unei lame tăiată paralel cu axa optică

Dacă se consideră α_0 unghiul făcut de direcția vibrațiilor liniare cu axa optică atunci vom considera componentele vibrației incidente după direcția axei optice:

$$D_{0e} = D_m (\cos \alpha_0) \cos \omega t \quad (1.481)$$

și perpendicular cu axa optică:

$$D_{0o} = D_m (\sin \alpha_0) \cos \omega t \quad (1.482)$$

La ieșirea din lamă cele două componente sunt:

$$D_e = (\cos \alpha_0) \cos (\omega t + \varphi_0) \quad (1.483)$$

$$D_o = D_m (\sin \alpha_0) \cos (\omega t + \varphi_0) \quad (1.484)$$

Cele două unde sunt polarizate rectiliniu perpendicular cu diferența de fază $\Delta\varphi = \varphi_o - \varphi_e$, se recompun, iar extremitatea vectorului rezultatant $\vec{D}$ va descrie o elipsă

$$\frac{D_e^2}{D_m^2 \cos^2 \alpha_0} + \frac{D_o^2}{D_m^2 \sin^2 \alpha_0} - \frac{2D_e D_o \cos \Delta\varphi}{D_m^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0} = \sin^2 \Delta\varphi \quad (1.485)$$

Unda emergentă este în general o undă polarizată eliptic. Se poate obține o polarizare circulară dacă:

$$\Delta\varphi = \varphi_o - \varphi_e = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_o - n_e) e = \frac{\pi}{2} \quad (1.486)$$

și $\alpha_0 = \pi/4$. Atunci (1.485) devine:

$$\frac{2D_e^2}{D_m^2} + \frac{2D_o^2}{D_m^2} = 1 \quad (1.487)$$

O astfel de lamă poartă numele de lamă sferă de undă.

1.6.10 Birefrința provocată

Materiale optic izotrope pot deveni optic anizotrope, adică birefringente sub acțiunea unui câmp electric sau magnetic, astfel că proprietățile optice ale unor astfel de materiale sunt modificate.

Efectul Pockels

Efectul Pockels apare sub acțiunea câmpului electric în anumite substanțe care prezintă centre de simetrie (ca de exemplu difosfatul de potasiu $\text{PO}_4\text{H}_2\text{K}$ numit în general cristal KDP). Există două tipuri de efect Pockels: unul longitudinal și altul transversal.

a) Efectul Pockels longitudinal

Acest efect apare atunci când se aplică un câmp electric paralel cu direcția de propagare a luminii. Materialul devine birefringent și:

$$n_e - n_o = \alpha E \quad (1.488)$$

Diferența de fază dintre unda ordinară și unda extraordinară este:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_o - n_e) e = -\frac{2\pi}{\lambda_0} \alpha E e = -\frac{2\pi}{\lambda_0} \alpha U \quad (1.489)$$

unde U este tensiunea aplicată între cei doi electrozi. S-a presupus că mediul optic umple complet spațiul dintre acești electrozi.

b) Efectul Pockels transversal

Acest efect apare atunci când se aplică un câmp electric perpendicular pe direcția de propagare a fascicolului luminos.

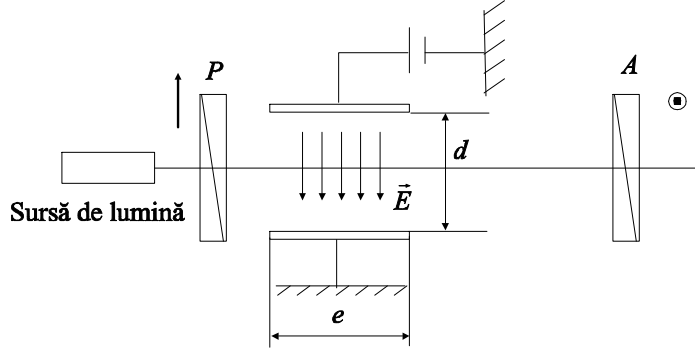


Figura 1.67: Celula Kerr: P — polarizor, A — analizor,

Efectul Kerr

Un câmp electric aplicat pe substanțe lichide sau solide izotrope face ca acestea să devină anizotrope uniace, direcția axei optice fiind paralelă cu direcția câmpului electric aplicat. Efectul Kerr este un efect electrooptic care se explică prin orientarea moleculelor polare în câmp electric. Deoarece agitația termică contrabalansează ordonarea moleculelor, efectul este important la temperaturi joase.

Considerăm între un polarizor și un analizor o celulă Kerr în care câmpul electric $\vec{E}$ este perpendicular pe direcția de propagare a fascicolului luminos. Substanța se va comporta ca un mediu anizotrop cu axa optică corespunzând direcției câmpului electric (Fig. 1.67).

Diferența de fază ce apare între undele ordinare și extraordinară din cauza acestei birefrințe este:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_o - n_E) = -2\pi k e \left(\frac{U}{d} \right)^2 \quad (1.490)$$

unde U este tensiunea aplicată între electrozi, e este distanța străbătută de lumină în material iar d distanța dintre electrozi. Dacă se utilizează ca substanță de lucru nitrobenzenul $C_6H_5NO_2$ pentru care constanta Kerr este $k = 3,84 \times 10^{12} \text{ mV}^{-2}$, $d = 1 \text{ cm}$, $e = 2 \text{ cm}$, tensiunea necesară pentru ca o astfel de celulă să se comporte ca o lamă semiundă se obține din relația:

$$2\pi ke \left(\frac{U}{d} \right)^2 = \pi$$

de unde:

$$U = \frac{d}{\sqrt{2ke}} = 25 \text{ kV} \quad (1.491)$$

Efectul Cotton Mouton

Acest efect este provocat de un câmp magnetic transversal pe direcția de propagare a luminii și este analogul efectului Kerr. Materialele introduse în câmpul magnetic se comportă precum mediile uniaxe, a căror axă optică este dirijată după câmpul $\vec{B}$. Birefringența este proporțională cu pătratul câmpului magnetic B^2 și cu lungimea de undă λ_0 .

$$n_E - n_o = M\lambda_0 B^2 \quad (1.492)$$

unde M este o constantă pozitivă sau negativă numită constanta Cotton-Mouton. Ea depinde de natura substanței și de lungimea de undă. Pentru nitrobenzen constanta $M = 2,5 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}\text{T}^{-2}$. Efectul este cu câteva ordine de mărime mai mic decât efectul Kerr. Birefringența nu-și schimbă semnul odată cu schimbarea sensului inducției câmpului magnetic.

Birefringența mecanică

Anizotropia optică determinată de constângeri mecanice a fost descoperită de Brewster în anul 1815. Pornind de la aceasta, s-a dezvoltat o tehnică numită fotoelasticimetrie, utilă pentru observarea câmpurilor tensiunilor interne.

Dacă se plasează un material plastic între un polarizor și un analizor încrucișate se obține extincție. Dacă plexiglasul este supus unor constrângeri mecanice (Fig. 1.68) se constată că pe ecran se obține din nou lumină. Dacă se rotește analizorul cu 180° nu mai apare extincție. Aceasta înseamnă că lumina care trece prin lamă are o polarizare eliptică. Materialul devine anizotrop cu axa optică dirijată după direcția forțelor ce acționează asupra sa. Dacă p este presiunea ce acționează asupra materialului:

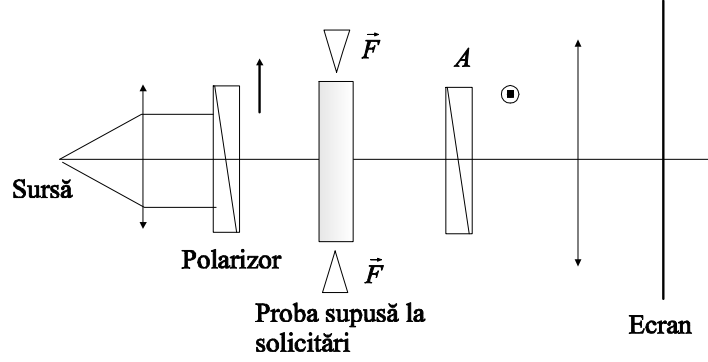


Figura 1.68: Birefringentă provocată mecanic

$$n_e - n_o = C_m p \quad (1.493)$$

atunci:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_o - n_e) e = -\frac{2\pi}{\lambda_0} C_m p e \quad (1.494)$$

C_m este o constantă pozitivă sau negativă. De exemplu pentru plexiglas ea are valoarea $C_m = 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$. Pentru ca lama să se comporte ca lamă sfert de undă:

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} C_m p e = \frac{\pi}{2} \quad (1.495)$$

În cazul unei lame de plexiglas cu grosimea de 1 cm presiunea care trebuie exercitată trebuie să fie $p = 375 \text{ MPa}$.

1.6.11 Polarizarea rotatorie

Polarizarea rotatorie este proprietatea unei anumite substanțe (fluide sau solide) de a induce o rotație a planului de polarizare pentru lumina liniar polarizată ce traversează substanța respectivă.

Pe un ecran (Fig. 1.69) se formează imaginea unei diafragme circulare cu ajutorul unei lentile convergente. Un condensator permite iluminarea convenabilă a diafragmei. Cu ajutorul unui filtru plasat după obiect se transformă lumina într-una cvasimonocromatică. Utilizând polarizorul

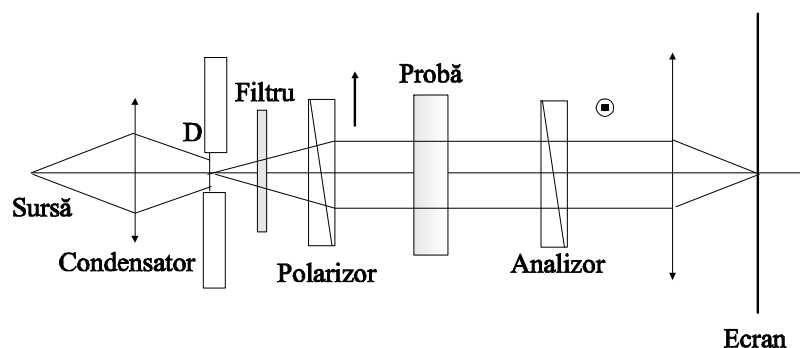


Figura 1.69: Montajul pentru a punerea în evidență a polarizării rotatorii

obținem o lumină polarizată rectiliniu. Un nou polarizor joacă rolul analizorului care permite studierea vibrațiilor luminoase la nivelul ecranului de observație. Dacă polarizorul și analizorul sunt încrucișați atunci există o extincție a fascicolului. Dacă între polarizorul și analizorul încrucișați se pune o cuvă cu o soluție de zahăr în apă, lumina re apare. Pentru a obține extincția, analizorul trebuie rotit cu un unghi α . În consecință, substanța nu modifică starea de polarizare dar rotește planul de polarizare. Facând experiența cu o cuvă a cărei lățime este dublă (lumina străbate o distanță dublă prin substanță) constatăm că unghiul de rotație al planului de polarizare se dublează. Se obține un fenomen asemănător pentru un cristal de cuarț tăiat perpendicular pe axa optică.

Legile polarizării rotatorii

Legea I-a Anumite corpuri izotrope transparente în lumină monocromatică polarizată rectiliniu, rotesc planul de polarizare în jurul direcției de propagare a luminii. Același lucru este produs de anumite medii anizotrope uniaxe, a căror axă optică este paralelă cu direcția fascicolului incident.

Legea a II-a Există două tipuri de substanțe active: substanțe levogire, care rotesc planul de polarizare către stânga unui observator ce primește lumină și substanțe dextrogire care rotesc planul de polarizare spre dreapta.

Legea a III-a Unghiul de rotație al planului de polarizare este proporțional cu grosimea substanței stăbătută de lumină.

Se poate defini pentru un lichid puterea rotatorie ρ :

$$\rho = \frac{\alpha}{l} \quad (1.496)$$

unde l este lungimea străbătută de lumină prin substanță. Pentru o soluție de concentrație c puterea rotatorie este dată de:

$$\rho_c = \frac{\alpha}{lc} \quad (1.497)$$

Unitatea de măsură pentru ρ_c este m^2kg^{-1} .

Legea a IV-a Unghiul de rotație α depinde de lungimea de undă după legea:

$$\alpha = \frac{A}{\lambda^2} \quad (1.498)$$

Legea a V-a Sensul de rotație a planului de polarizare nu depinde de sensul de propagare a luminii în mediul respectiv.

Puterea rotatorie ρ pentru diverse substanțe pentru $\lambda = 589 \text{ nm}$

Substanță	Putere rotatorie
Cuarț	$\pm 2170^\circ/\text{m}$
HgS	$\pm 3250^\circ/\text{m}$
NaClO ₃	$\pm 3140^\circ/\text{m}$
Metanol lichid	$-497^\circ/\text{m}$
Soluție de zahăr	$645 \times 10^{-3} \text{ m}^2\text{kg}^{-1}$

Efectul Faraday

Anumite substanțe inactive optic devin active optic sub acțiunea unui câmp magnetic $\vec{B}$ paralel cu direcția fascicolului luminos.

Efectul se observă când un cristal de sticlă de flint este plasat între polii unui magnet. Un fascicol de lumină provenind de la un laser He-Ne traversează succesiv un polarizor, cristalul plasat între polii unui electromagnet și un analizor. În absența unui câmp magnetic dacă polarizorul și analizorul sunt încrucișați există extincție. Dacă se aplică un câmp magnetic reapare lumina. Regăsim extincție dacă se rotește analizorul cu un unghi care crește cu grosimea stratului de sticlă traversat. Acest fenomen a fost studiat de fizicianul francez M. Verdet care a arătat că unghiul de rotație este proporțional cu câmpul aplicat:

$$\alpha = V_l B l \quad (1.499)$$

unde V_l este o constantă numită constanta Verdet.

Constanta Verdet pentru diverse materiale ($\lambda = 589 \text{ nm}$)

Material	V_l ($^\circ\text{T}^{-1}\text{m}^{-1}$)
ZnS	3750
Flint	528
S ₂ C	705
Apă	218

Efectul prezintă o diferență esențială față de activitatea optică naturală: unghiul de rotație al planului de polarizare se inversează în raport cu sensul de propagare a luminii. Efectul este dublu dacă după prima traversare fascicolul este reflectat de o oglindă. (În cazul unei substanțe natural optice active, o astfel de experiență face să se revină la polarizarea normală după a doua traversare.)

Teoria Fresnel

În cadrul acestei teorii fenomenologice se admite că un mediu activ transmite fără deformării unde polarizate circular dreapta sau circular stânga cu viteze de propagare diferite.

Descompunem unda inițială în două unde, una polarizată circular dreapta și una polarizată circular stânga. Unghiurile de rotație φ_d și φ_s ai vectorilor $\vec{E}_d$ și $\vec{E}_s$ sunt diferite. Pentru a determina direcția vibrației rezultante se adună cele două unde după ce au parcurs același drum prin mediul activ. Planul vibrației vectorului $\vec{E}$ al unde polarizate rezultate este rotit față de vibrațiile unde incidente cu un unghi egal cu (Fig. 1.70):

$$\alpha = \frac{\varphi_d - \varphi_s}{2} \quad (1.500)$$

Dacă o undă plană liniar polarizată este descrisă prin ecuația:

$$E = \text{Re} \left\{ E_0 \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \right\} \quad (1.501)$$

unda polarizată circular va fi descrisă prin ecuația:

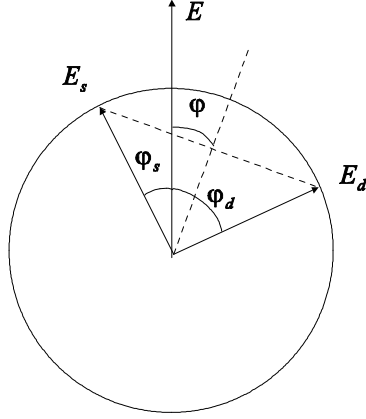


Figura 1.70: Diagramă pentru determinarea unghiului de rotație a planului de polarizare

$$\vec{E} = \text{Re} \left\{ E_0 \vec{u}_x \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \pm i E_0 \vec{u}_y \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \right\} \quad (1.502)$$

deoarece orice undă polarizată circular poate fi reprezentată prin sumarea a două unde polarizate perpendicular de aceeași amplitudine, defazate cu un unghi egal cu $\pi/2$. Defazaajul este luat în considerație prin numărul complex $i = \exp(i\pi/2)$. Semnul $+$ corespunde unei polarizări dreapta, iar semnul $-$ corespunde unei polarizări stânga. Pentru determinarea tipului de polarizare se ține cont că pentru o undă polarizată circular dreapta componenta E_y este defazată înaintea componentei E_x cu $\pi/2$:

$$\frac{(E_y)_d}{(E_x)_d} = \exp \left(\frac{i\pi}{2} \right) = i$$

iar pentru o undă polarizată circular stânga E_y este defazată după componenta E_x cu $\pi/2$:

$$\frac{(E_y)_s}{(E_x)_s} = \exp \left(-\frac{i\pi}{2} \right) = -i$$

Dacă se ține cont că $\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin \alpha$ atunci:

a) pentru unda polarizată circular dreapta:

$$E_x = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{z}{v_d} \right) \quad (1.503)$$

$$E_y = -E_0 \sin \omega \left(t - \frac{z}{v_d} \right) \quad (1.504)$$

b) pentru unda polarizată circular stânga:

$$E_x = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{z}{v_s} \right) \quad (1.505)$$

$$E_y = E_0 \sin \omega \left(t - \frac{z}{v_s} \right) \quad (1.506)$$

Utilizăm ipoteza că într-un mediu activ optic viteza de propagare a unei polarizată circular dreapta este diferită de viteza unei polarizată circular stânga. Componenta după axa Ox a câmpului electric este:

$$E_x = (E_x)_d + (E_x)_s \quad (1.507)$$

și componenta după axa Oy a câmpului electric este:

$$E_y = (E_y)_d + (E_y)_s \quad (1.508)$$

Astfel, într-un mediu activ în care neglijăm absorbția după parcurgerea unei distanțe egale cu z componenta după axa Ox este:

$$E_x = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{z}{v_d} \right) + E_0 \cos \omega \left(t - \frac{z}{v_s} \right)$$

$$E_x = \left[2E_0 \cos \frac{\omega}{2c} (n_s - n_d) z \right] \left[\cos \omega \left(t - \frac{n_d + n_s}{2c} z \right) \right] \quad (1.509)$$

Componenta după axa Oz este:

$$E_y = E_0 \sin \omega \left(t - \frac{z}{v_d} \right) - E_0 \sin \omega \left(t - \frac{z}{v_s} \right)$$

$$E_y = \left[2E_0 \sin \frac{\omega}{2c} (n_s - n_d) z \right] \left[\cos \omega \left(t - \frac{n_d + n_s}{2c} z \right) \right] \quad (1.510)$$

În relațiile de mai sus am ținut cont că $v_s = c/n_s$ și $v_d = c/n_d$, prin n_s și n_d înțelegând indici de refracție diferiți pentru unda polarizată circular stânga și unda polarizată circular dreapta.

Formulele (1.509) și (1.510) arată că E_x și E_y sunt în fază. Rezultă o undă polarizată liniar. Când unda parcurge în mediul activ un drum $d = z$ planul de polarizare se rotește cu unghiul:

$$\varphi = \frac{\omega}{2c} (n_s - n_d) d = \frac{\pi}{\lambda_0} (n_s - n_d) z \quad (1.511)$$

deoarece inițial unda care intră în mediul optic activ este polarizată de-a lungul axei Ox. Măsurarea unghiului de rotație φ permite determinarea cu precizie a mărimii $\Delta n = n_s - n_d$. Rotația planului de polarizare a fost făcută în cadrul unei teorii electromagnetice fenomenologice. Teoria nu explică însă de ce vitezele celor două unde polarizate circular sunt diferite.