

Fizică I ISB
(versiunea 2016)

Cîrtoaje Cristina și Petrescu Emil

29 martie 2016

Cuprins

1	Elemente de mecanică Newtoniană	9
1.1	Cinemática punctului material	9
1.1.1	Mărimi fundamentale	9
1.1.2	Mișcarea rectiline uniform variată	12
1.1.3	Mișcarea circulară uniformă	13
1.2	Legile mecanicii	14
1.2.1	Legea I (Principiul inerției)	14
1.2.2	Legea a II-a (Legea fundamentală a mecanicii)	15
1.2.3	Legea a III-a (Principiul acțiunii și reacțiunii)	16
1.3	Dinamica	16
1.3.1	Impulsul	16
1.3.2	Lucru mecanic	18
1.3.3	Puterea	22
1.3.4	Energia cinetică	23
1.3.5	Energia potențială	24
1.3.6	Teorema variației energiei mecanice	27
1.3.7	Momentul forței și momentul cinetic.	28
1.3.8	Cinemática mișcării de rotație	29
1.4	Probleme	34
2	Oscilații și unde	37
2.1	Mișcarea oscilatorie armonică	37
2.2	Reprezentările mișcării oscilatorii	39
2.2.1	Reprezentarea fazorială	39
2.2.2	Reprezentarea complexă	40
2.3	Energia oscilatorului armonic	40
2.4	Pendulul matematic	40
2.5	Oscilații amortizate	42

2.6	Oscilații forțate	46
2.6.1	Rezonanța	48
2.7	Tipuri de unde	49
2.8	Unde armonice	50
2.8.1	Unda armonică unidimensională	51
2.8.2	Viteza de propagare a undei într-o coardă	52
2.9	Ecuția undelor	53
2.10	Unde tridimensionale	54
2.10.1	Unde plane	55
2.10.2	Unde sferice	56
2.11	Energia asociată unei unde	56
2.12	Probleme	59
3	Termodinamică	61
3.1	Noțiuni fundamentale	61
3.2	Energia internă	62
3.2.1	Forme ale schimbului de energie	62
3.2.2	Căldura	64
3.3	Temperatura	64
3.3.1	Scări de temperatură	65
3.4	Principiul zero. Ecuția de stare	66
3.5	Principiul I al termodinamicii	67
3.6	Aplicații ale Principiului I	69
3.6.1	Coeficienții calorigici	69
3.6.2	Transformările gazului ideal	70
3.6.3	Relația Robert-Mayer pentru un fluid oarecare	74
3.6.4	Definirea coeficienților termici	76
3.7	Principiul al II-lea al termodinamicii	77
3.7.1	Formulări ale Principiului al II-lea	77
3.7.2	Mașină termică bitermă	78
3.7.3	Ciclul Carnot reversibil	79
3.7.4	Variația entropiei în procese ireversibile	81
3.7.5	Legătura dintre ecuația calorică de stare și ecuația termică de stare	83
3.8	Funcții caracteristice	85
3.8.1	Energia internă	85
3.8.2	Energia liberă	86

3.8.3	Condiția de echilibru pentru un sistem cu volum constant aflat în contact cu un termostat.	88
3.8.4	Entalpia	89
3.8.5	Entalpia liberă (potențialul Gibbs)	89
3.8.6	Entropia	90
3.9	Sisteme deschise	90
3.10	Echilibrul de fază	92
3.11	Tranziții de fază	94
3.11.1	Izotermele lui Andrews	94
3.11.2	Vaporizarea	96
3.11.3	Diagrame de echilibru	98
3.11.4	Ecuația Clausius-Clapeyron	101
3.12	Principiul al III-lea al termodinamicii	103
3.13	Probleme	106
4	Elemente de fizică statistică	109
4.1	Presiunea gazului ideal	109
4.2	Interpretarea moleculară a temperaturii și gradele de libertate	111
4.3	Căldura specifică a solidelor	114
4.4	Distribuția Maxwell după viteze într-un gaz	116
4.4.1	Deducerea formei funcției de distribuție	116
4.4.2	Distribuția Boltzmann într-un câmp de forțe omogen	119
4.5	Distribuția Maxwell-Boltzmann	121
4.6	Entropia din punct de vedere microscopic	122
4.7	Probleme	124
5	Electricitate	125
5.1	Electrostatică	125
5.1.1	Sarcina electrică	125
5.1.2	Legea lui Coulomb	125
5.1.3	Câmp electric	126
5.1.4	Distribuții continue de sarcini	127
5.1.5	Legea lui Gauss	128
5.1.6	Potențialul electric	131
5.1.7	Suprafețe echipotențiale	134
5.1.8	Legătură dintre câmpul electric și diferența de potențial	134
5.1.9	Conductori în echilibru electrostatic	136
5.1.10	Densitatea de energie a câmpului electric	138

5.2	Dielectrics	141
5.2.1	Dipol electric	141
5.2.2	Dipoli electrici la nivel atomic și molecular	144
5.2.3	Densitate de polarizare	148
5.2.4	Modalități de polarizare a unui dielectric	150
5.2.5	Permeabilitatea și susceptibilitatea	152
5.2.6	Inducția câmpului electric	154
5.2.7	Densitatea de polarizare în cazul materialelor neomogene	154
5.3	Curentul electric	160
5.3.1	Mărimi ce caracterizează curentul electric	160
5.3.2	Ecuația de continuitate	162
5.3.3	Teoria clasică a conducției în metale	163
5.3.4	Tensiunea electromotoare	166
5.4	Magnetism	168
5.4.1	Forța Lorentz. Inducția câmpului magnetic.	170
5.4.2	Forța electromagnetice	174
5.4.3	Bucă de curent în câmp magnetic uniform	176
5.4.4	Legătura dintre momentul de dipol magnetic și momentul cinetic al unui electron	178
5.4.5	Sursele câmpului magnetic. Legea Biot Savart.	179
5.4.6	Forța de interacție dintre doi conductori paraleli	181
5.4.7	Legea lui Ampère pentru cureți staționari	182
5.4.8	Fluxul câmpului magnetic	184
5.4.9	Legea lui Gauss pentru câmpul magnetic	186
5.4.10	Curent de deplasare și forma generală a legii lui Ampère	186
5.5	Magnetism în medii materiale	188
5.5.1	Momentul magnetic al atomilor	188
5.5.2	Vectorul densitate de magnetizare și vectorul intensitate câmp magnetic	189
5.5.3	Clasificarea substanțelor magnetice	190
5.5.4	Feromagnetism	192
5.5.5	Paramagnetism	194
5.5.6	Diamagnetism	194
5.6	Inducția electromagnetică	195
5.6.1	Introducere	195
5.6.2	Legea lui Lenz	197
5.6.3	Legea inducției electromagnetice	198

5.6.4	T.e.m. indusă într-un conductor deplasat în câmp magnetic	199
5.6.5	Autoinducția	200
5.6.6	Inductanța unui solenoid	201
5.6.7	Energia câmpului magnetic	202
5.7	Ecuatiile Maxwell	205
5.7.1	Legea fluxului electric	205
5.7.2	Legea lui Gauss pentru magnetism	206
5.7.3	Legea inducției electromagnetice	207
5.7.4	Legea lui Ampère	208
5.7.5	Legile de material	208
5.7.6	Legătura dintre $\vec{j}$ și $\vec{E}$	210
5.8	Probleme	211

Capitolul 1

Elemente de mecanică Newtoniană

1.1 Cinematica punctului material

Studiul mișcării unui corp se face relativ la un sistem de referință (SR). Un sistem de referință constă din:

1. un sistem de coordonate (de obicei se alege un sistem de coordonate ortogonal deoarece ecuațiile de mișcare se scriu cel mai ușor în acesta)
2. un ceasornic pentru măsurarea timpului.

În principiu se poate alege orice sistem de referință, dar practic se alege sistemul în care fenomenul poate fi studiat în cel mai simplu mod.

Un corp este un sistem complex. O primă simplificare este aceea în care nu se ia în considerare deformarea corpului. În acest caz spunem că avem de-a face cu un *solid rigid*. A doua simplificare se face atunci când dimensiunile corpului nu contează în problema dată. Atunci se poate lucra cu noțiunea de *punct material*. Punctul material este caracterizat doar de masa sa.

1.1.1 Mărimi fundamentale

Traietoria Se numește traiectorie curba descrisă de un mobil în timpul mișcării sale. Poziția unui punct pe traiectorie este descrisă cu ajutorul *vectorului de poziție* $\vec{r}$ (Fig. 1.1a).

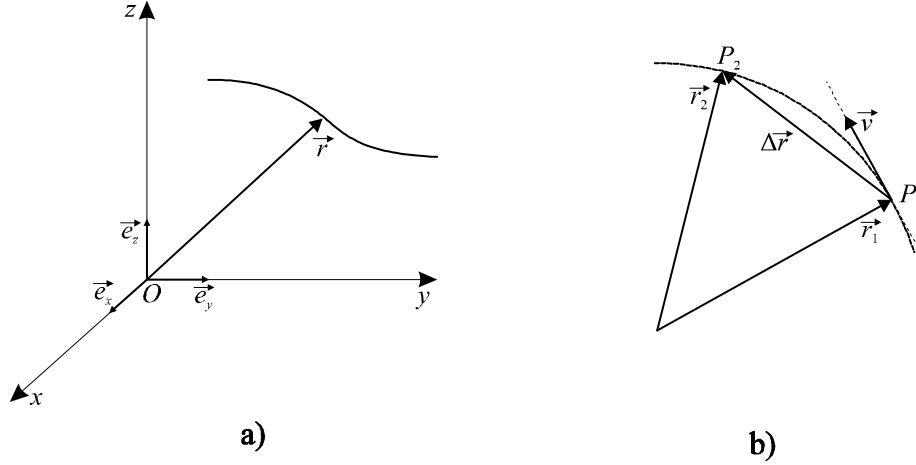


Figura 1.1: a) Vectorul de poziție b) Vectorul deplasare și vectorul viteză.

$$\vec{r} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z \quad (1.1)$$

Fie vectorul de poziție $\vec{r}_1$ a corpului la momentul de timp t_1 și $\vec{r}_2$ vectorul de poziție al aceluiași corp la momentul de timp t_2 . Diferența vectorială $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ poartă numele de *deplasare* (Fig. 1.1b).

Viteza Fie $\vec{r}_1$ vectorul de poziție al particulei la momentul t_1 și $\vec{r}_2$ vectorul de poziție la momentul $t_2 = t_1 + \Delta t_2$ (Fig. 1.1b). Definim viteza medie ca:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad (1.2)$$

Pentru a caracteriza mai bine comportarea particulei este necesar să se lucreze cu viteza instantanee obținută atunci când $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z \quad (1.3)$$

Când $\Delta t \rightarrow 0$, P_2 se apropie de P_1 . Din acest motiv vectorul $\Delta\vec{r}$ se apropie de tangenta la traiectorie în punctul P_1 . Rezultă că viteza instantanee este tangentă la traiectorie. Dacă exprimăm viteza în funcție de componentele sale pe cele trei axe de coordonate se obține:

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z \quad (1.4)$$

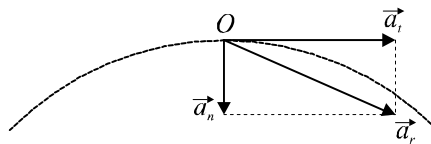


Figura 1.2: Accelerația normală și accelerația tangențială.

Din relațiile (1.3) și (1.4) se obțin pentru componentele vitezei următoarele expresii:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (1.5)$$

Accelerația În cursul mișcării viteza variază atât în mărime (modul) cât și în direcție. Pentru a caracteriza această variație este necesar să definim o nouă mărime. Această mărime poartă numele de accelerație. Se poate defini o accelerație medie:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1.6)$$

și o accelerație instantanee când $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{e}_x + \frac{dv_y}{dt}\vec{e}_y + \frac{dv_z}{dt}\vec{e}_z \quad (1.7)$$

Exprimând accelerația în funcție de proiecțiile sale pe cele trei axe de coordonate:

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z \quad (1.8)$$

se obține:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Accelerația nu este un vector tangent la traiectorie. În general ea se poate descompune în două componente $\vec{a}_t$ și $\vec{a}_n$ (Fig. 1.2). Componenta $\vec{a}_t$ poartă numele de accelerație tangențială și măsoară variația în direcție a vectorului viteză, iar componenta $\vec{a}_n$ poartă numele de accelerație normală și caracterizează variația în direcție a vectorului viteză. Este posibil ca accelerația să aibă doar una din cele două componente.

1.1.2 Mișcarea rectiline uniform variată

Deoarece mișcarea este rectilinie, accelerația are doar componenta tangențială ($\vec{a} = \vec{a}_t$). Aceasta este îndreptată în aceeași direcție (nu neapărat și în același sens) ca vectorul viteză. Mișcarea se studiază într-un sistem de coordonate unidimensional, motiv pentru care vom renunța la lucrul cu vectori, considerând mărimea respectivă pozitivă atunci când vectorul corespunzător este orientat în sensul pozitiv al axei și negativă dacă vectorul este orientat în sens opus axei. Atunci:

$$a = \frac{dv}{dt} = \text{const.} \quad (1.9)$$

Integrând:

$$\int dv = \int a dt \quad (1.10)$$

rezultă:

$$v = at + c_1 \quad (1.11)$$

Constanta c_1 se determină din condițiile inițiale. Dacă la $t_0 = 0$, $v = v_0$ atunci $c_1 = v_0$ și:

$$v = v_0 + at \quad (1.12)$$

Pentru a determina legea de mișcare pornim de la definiția vitezei instantanee:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (1.13)$$

de unde:

$$dx = v dt = (v_0 + at) dt \quad (1.14)$$

Rezultă:

$$x = \int (v_0 + at) dt = v_0 t + \frac{at^2}{2} + c_2 \quad (1.15)$$

Constanta c_2 se determină luând în considerare poziția mobilului la momentul inițial x_0 . Astfel dacă la $t = 0$, $x = x_0$ se obține $c_2 = x_0$ și:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (1.16)$$

Eliminând timpul între relațiile (1.12) și (1.16) se obține o relație independentă de timp între viteză, accelerație și coordonată numită relația lui Galilei:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (1.17)$$

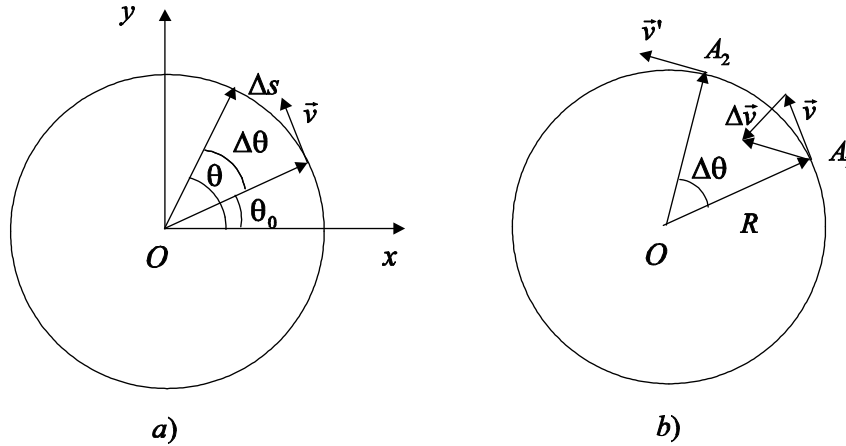


Figura 1.3: a) Mișcarea circulară uniformă. b) Deducerea accelerației centripete.

1.1.3 Mișcarea circulară uniformă

Este mișcarea care se efectuează pe o traiectorie circulară și în care modulul vectorului viteză este constant în timp. În acest caz accelerația nu are decât componenta normală.

Putem defini T *perioada mișcării* care reprezintă timpul în care are loc o rotație completă și *frecvența* ν care reprezintă numărul de rotații efectuate în unitatea de timp. Relația dintre cele două mărimi este:

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (1.18)$$

Deoarece mișcarea are loc pe un cerc (Fig. 1.3a), ea poate fi caracterizată prin variația unghiului θ făcut de vectorul de poziție cu axa Ox , $\Delta\theta = \theta - \theta_0$. Variația în unitatea de timp a unghiului θ , poartă numele de viteză unghiulară:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (1.19)$$

care în cazul mișcării circulare uniforme este constantă.

Spațiul parcurs poate fi exprimat în două moduri:

$$\Delta s = v\Delta t \quad ; \quad \Delta s = R\Delta\theta = R\omega\Delta t \quad (1.20)$$

Rezultă astfel relația dintre viteza liniară și viteza unghiulară:

$$v = \omega R \quad (1.21)$$

Deoarece modulul vitezei este constantă accelerația are numai componenta normală. În acest caz ea poartă denumirea de accelerație centripetă (Fig. 1.3b). Astfel:

$$\vec{a} \equiv \vec{a}_n = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad ; \quad |\vec{a}_n| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}$$

Când $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta s \simeq \overline{A_1 A_2}$. Se observă că triunghiul $OA_1 A_2$ este asemenea cu triunghiul vitezelor. Rezultă:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{A_1 A_2}{R} \quad (1.22)$$

Cum $A_1 A_2 = \Delta s = v \Delta t$:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v \Delta t}{R} \quad (1.23)$$

și:

$$a_n = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \quad (1.24)$$

1.2 Legile mecanicii

1.2.1 Legea I (Principiul inerției)

Experimental s-a constatat că dacă asupra unui corp aflat în stare de repaus nu se exercită acțiunea altor corpuri, această stare se menține un timp nedefinit. Dacă se lansează pe un plan șlefuit o bilă se constată că traiectoria acesteia este o dreaptă iar în intervale de timp scurte mișcarea este aproape o mișcare uniformă, în sensul că viteza se micșorează foarte puțin. Repetând experiența pe alte plane se constă că cu cât suprafața planului este mai bine șlefuită, micșorarea vitezei în același interval de timp este mai mică. Aceste fapte duc la concluziile următoare:

- în punctul de contact dintre bilă și plan apar interacții care se opun mișcării;
- dacă interacțiile care se opun mișcării ar fi eliminate atunci mișcarea bilei ar fi o mișcare rectilinie uniformă.

Generalizând, se poate formula principiul inerției:

Un corp își menține starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă atâta timp cât asupra lui nu acționează alte corpuri care să-i modifice această stare.

Principiul nu a putut fi verificat în mod absolut în practică, deoarece nici un corp nu poate fi izolat complet de acțiunea celorlalte corpuri care-l înconjoară. Experiențele care au dus la această concluzie, au minimizat cât s-a putut de mult sau au anulat într-un fel acțiunile exterioare corpului.

Proprietatea unui corp de a-și menține starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă poartă numele de *inerție*.

Sistemele de referință în care este valabil principiul inerției poartă numele de *sisteme inerțiale*. Ca o observație trebuie remarcat că sistemele de referință legate de Pământ nu sunt riguros inerțiale, datorită mișcării acestuia. Abaterile sunt însă mici, astfel încât aceste sisteme pot fi considerate ca inerțiale.

1.2.2 Legea a II-a (Legea fundamentală a mecanicii)

În mecanică se consideră două feluri de interacțiuni dintre două corpuri:

a) interacțiuni în urma cărora viteza unuia din corpuri se modifică (în mărime și direcție), adică corpul este accelerat.

b) interacțiuni în urma cărora corpurile se deformează.

Interacțiunile se măsoară cu ajutorul unei mărimi numită forță. În continuare ne vom limita la primul caz.

Experimental s-a constatat că accelerația căpătată de un corp este proporțională cu forța care acționează asupra lui.

$$\vec{a} \sim \vec{F}$$

Atunci legea a doua se formulează astfel:

O forță care acționează asupra unui corp îi va imprima acestuia o accelerație direct proporțională cu forța, având direcția și sensul forței..

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

În relația de mai sus m este un parametru ce caracterizează corpul respectiv și poartă numele de masă. Newton a interpretat acest parametru ca fiind cantitatea de substanță conținută într-un corp. Deoarece cu cât masa

este mai mare accelerația imprimată este mai mică, se poate spune că masa unui corp este o măsură a inerției sale. Din acest motiv masa m poartă numele de masă inerțială.

Legea a doua poate fi exprimată și în alt mod. Pentru aceasta se definește impulsul ca fiind produsul dintre masă și viteză:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (1.25)$$

Dacă se consideră masa ca fiind o constantă:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (1.26)$$

Relația (1.26) reprezintă o altă formă a legii a II-a a dinamicii. Ea este valabilă și în cadrul mecanicii relativiste unde masa este o mărime variabilă.

1.2.3 Legea a III-a (Principiul acțiunii și reacțiunii)

Experimental se constată că forțele cu care un corp acționează asupra altuia determină instantaneu din partea celui de-al doilea o reacțiune asupra primului. Se găsește că cele două forțe sunt egale dar de sens contrar. Prin generalizarea acestor fapte s-a obținut principiul acțiunii și reacțiunii:

Dacă un corp acționează asupra altui corp cu o forță numită acțiune ($\vec{F}_{12}$), cel de-al doilea corp va acționa asupra primului cu o forță egală și de sens contrar numită reacțiune ($\vec{F}_{21}$).

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

1.3 Dinamica

1.3.1 Impulsul

Teorema impulsului pentru un punct material.

Din legea a II-a a mecanicii:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}; \quad \vec{F}dt = d\vec{p} \quad (1.27)$$

se obține:

$$\Delta\vec{p} = \int_1^2 d\vec{p} = \int_1^2 \vec{F}dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \quad (1.28)$$

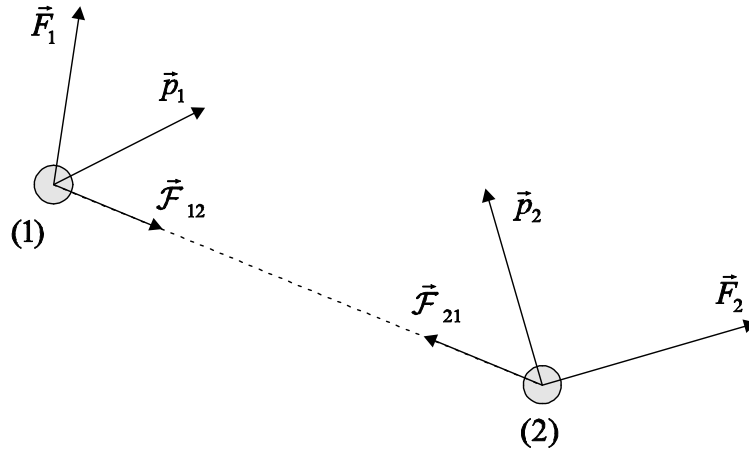


Figura 1.4: Teorema impulsului pentru un sistem de două puncte materiale.

unde cu 1 am indexat starea inițială de la momentul t_1 iar cu 2 am notat starea finală de la momentul t_2 .

Dacă rezultanta forțelor care acționează asupra punctului material este nulă:

$$\Delta \vec{p} = 0 \quad \text{și} \quad \vec{p} = \text{const.} \quad (1.29)$$

Aceasta este legea conservării impulsului:

Dacă rezultanta forțelor care acționează asupra unui punct material este nulă, impulsul acestuia rămâne constant.

Teorema impulsului pentru un sistem de puncte materiale

Pentru simplificare vom considera un sistem format doar din două puncte materiale, rezultatele obținute fiind valabile și pentru un sistem format din N puncte materiale.

În Fig. 1.4 sunt reprezentate cele două corpuri. Cu $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ am notat forțele externe care acționează asupra celor două corpuri. Cu $\vec{F}_{21}$ s-a notat forța cu care corpul 1 acționează asupra corpului 2 iar cu $\vec{F}_{12}$ s-a notat forța cu care corpul 2 acționează asupra corpului 1. Conform legii acțiunii și reacțiunii cele două forțe sunt egale și acționează în sensuri opuse, adică:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (1.30)$$

Dacă $\vec{p}_1$ și $\vec{p}_2$ sunt impulsurile celor două corpuri, se definește impulsul total al sistemului ca sumă a impulsurilor particulelor individuale:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (1.31)$$

Legea a doua pentru fiecare corp în parte se scrie astfel:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \quad (1.32)$$

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad (1.33)$$

Se adună relațiile (1.32) și (1.33), și se ține cont că $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$. Atunci:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (1.34)$$

Notând cu $\vec{F}_e = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ rezultanta forțelor externe ce acționează asupra sistemului rezultă:

$$\vec{F}_e = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (1.35)$$

Aceasta este legea impulsului pentru un sistem de puncte materiale:

Derivata în raport cu timpul a impulsului total al unui sistem de particule este egal cu rezultanta forțelor ce acționează asupra sistemului.

Dacă rezultanta forțelor externe este nulă, $\vec{F}_e = 0$, atunci:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0; \quad \vec{P} = \text{const.} \quad (1.36)$$

Se obține astfel legea conservării impulsului:

Impulsul unui sistem de puncte materiale se conservă când rezultanta forțelor externe este nulă.

1.3.2 Lucru mecanic

Fie o forță $\vec{F}$ constantă, care acționează asupra unui corp și produce o deplasare a acestuia pe distanța $\Delta\vec{r}$. Se consideră că $\vec{F}$ face cu vectorul deplasare un unghi α . Prin definiție *lucrul mecanic* este egal cu produsul scalar dintre forță și deplasare:

$$L = \vec{F} \Delta\vec{r} = F \Delta r \cos \alpha \quad (1.37)$$

Se observă că dacă $\alpha = 0$ forța și deplasarea au aceeași direcție și:

$$L = F \Delta r \quad (1.38)$$

iar dacă $\alpha = \pi/2$ forța este perpendiculară pe direcția deplasării, astfel că:

$$L = F \Delta r \cos \pi/2 = 0 \quad (1.39)$$

Considerăm o particulă ce se deplasează de-a lungul axei Ox sub acțiunea unei forțe care nu mai este constantă și care variază în funcție de poziția particulei. În acest caz se definește un lucru mecanic elementar, adică lucrul mecanic efectuat de forță când particula suferă o deplasare infinitesimală dx :

$$\delta L = F dx \quad (1.40)$$

Lucrul mecanic total se obține prin sumarea lucrurilor mecanice elementare:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} F dx \quad (1.41)$$

unde x_1 este poziția inițială, iar x_2 este poziția finală.

Lucrul mecanic al forței de greutate.

Forța de greutate este forța care acționează asupra oricărui corp aflat în apropiere de suprafața pământului și este egală cu produsul dintre masă și accelerație gravitațională $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

$$\vec{G} = m\vec{g} \quad (1.42)$$

Considerăm că deplasarea corpului are loc între punctele A și B . Pe traiectoria (1) (Fig. 1.5a)

$$L_1 = mg(h_1 - h_2) = -mg(h_2 - h_1) \quad (1.43)$$

Pe acest drum particula se deplasează liber, deoarece asupra ei acționează doar forța de greutate. Pe traiectoria (2) particula nu se poate deplasa liber. Ea este constrânsă să urmeze această traiectorie și acest lucru nu se poate realiza decât dacă se acționează din exterior cu alte forțe decât forța de greutate. Totuși aici interesează doar lucrul mecanic al forței de greutate.

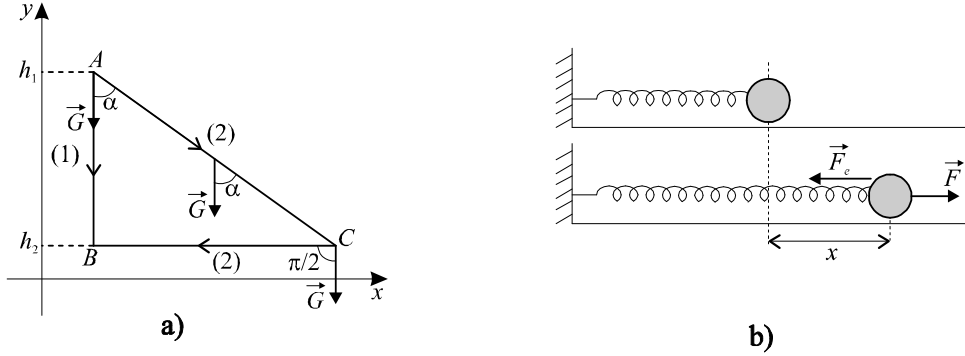


Figura 1.5: a) Lucrul mecanic al forței de greutate. b) Lucrul mecanic al forței elastice.

El este egal în acest caz cu suma lucrurilor mecanice efectuate pe porțiunile AC și CB .

$$\begin{aligned} L_2 &= L_{AC} + L_{CB} = mg(AC) \cos \alpha + mg(CB) \cos \frac{\pi}{2} \\ &= mg[AC \cos \alpha] = mg(h_2 - h_1) = -mg(h_2 - h_1) \end{aligned} \quad (1.44)$$

Se observă că valoarea lucrului mecanic efectuat de forța de greutate nu depinde de drumul parcurs, ci doar de poziția inițială și finală. *O forță al cărei lucru mecanic depinde doar de pozițiile inițială și finală se numește forță conservativă, iar regiunea din spațiu în care acționează astfel de forțe poartă numele de câmp conservativ.*

Lucrul mecanic al forței elastice

O astfel de forță apare când un resort este comprimat sau alungit sub acțiunea unei forțe externe (Fig. 1.5b)

Experimental se constată că dacă asupra unui resort, se acționează cu forța $\vec{F}$, alungirea maximă a resortului este proporțională cu deformarea acestuia. Constanta de proporționalitate se notează cu k și poartă numele de constantă elastică. Astfel:

$$F = kx \quad (1.45)$$

Deoarece resortul nu se mai poate deforma, înseamnă că în interiorul resortului acționează o forță egală cu externă și de sens contrar cu aceasta. Această forță poartă numele de forță elastică:

$$F_e = -F = -kx \quad (1.46)$$

Lucrul mecanic efectuat de forța elastică când deferomația resortului variază de la valoarea x_1 la valoarea x_2 :

$$L = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = -\frac{k}{2} (x_2^2 - x_1^2) = -\left(\frac{k}{2}x_2^2 - \frac{k}{2}x_1^2\right) \quad (1.47)$$

Ca și în cazul forței de greutate, lucrul mecanic depinde doar de poziția inițială și finală. Rezultă că forța elastică este o forță conservativă.

Lucrul forței de frecare

Când un corp este deplasat pe o suprafață plană, în sens invers deplasării acționează forțe de frecare $F_f = \mu mg$, unde cu μ s-a notat coeficientul de frecare la alunecare. Lucrul mecanic este:

$$L = -\mu mgd \quad (1.48)$$

unde d este deplasarea. Semnul minus apare deoarece deplasarea se face în sens invers forței. Forțele de frecare nu sunt conservative deoarece între două puncte există o infinitate de drumuri pe care *lucrul mecanic este diferit*.

Aplicație

O moleculă diatomică constă din doi atomi între care se exercită forța:

$$F = F_0 \left[2 \left(\frac{\sigma}{r} \right)^{13} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^7 \right]$$

unde r este distanța dintre atomi, iar F_0 și σ sunt doi parametri. Pentru molecula de oxigen $F_0 = 9,6 \times 10^{-11}$ N și $\sigma = 3,5 \times 10^{-10}$ m. Să se determine lucrul mecanic efectuat de această forță, atunci când atomii se depărtează de la distanța $r_1 = 4 \times 10^{-10}$ m la $r_2 = 9 \times 10^{-10}$ m.

Soluție:

$$L = \int_{r_1}^{r_2} F_0 \left[2 \left(\frac{\sigma}{r} \right)^{13} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^7 \right] dr$$

$$L = F_0 \sigma \left[\frac{1}{6} \left(\frac{\sigma}{r_1} \right)^{12} - \frac{1}{6} \left(\frac{\sigma}{r_2} \right)^{12} + \frac{1}{7} \left(\frac{\sigma}{r_2} \right)^6 - \frac{1}{7} \left(\frac{\sigma}{r_1} \right)^6 \right] = 3,2 \times 10^{-21} \text{ J}$$

1.3.3 Puterea

Puterea reprezintă lucrul mecanic efectuat de sistem în unitatea de timp. Putere și instantanee

$$P = \frac{\delta L}{dt} \quad (1.49)$$

este raportul dintre lucrul mecanic efectuat de sistem δL în timpul dt . În cazul în care forța și deplasarea sunt pe direcția axei Ox , $\delta L = Fdx$ și

$$P = \frac{\delta L}{dt} = F \frac{dx}{dt} = Fv \quad (1.50)$$

Puterea automobilelor

Automobilele sunt mașini destul de ineficiente. Chiar în condiții ideale mai puțin de 15% din energia chimică a combustibilului se transformă în energie mecanică, situație care este și mai proastă în cazul circulației prin marile orașe. Mai multe mecanisme contribuie la pierderea de energie în automobile:

În jur de 67% din energie este pierdută în motor, în sistemul de răcire al automobilului și în sistemul de evacuare. Aproximativ 16% din energie se pierde prin frecările dintre mecanismele de transmisie interne ale automobilului, 4% din energie este utilizată pentru punerea în funcțiune a diverselor accesorii, ca pompa de benzină, sistemul de aer condiționat, sistemul audio. Așadar numai în jur de 13% din energie este utilizată pentru propulsia efectivă a automobilului, adică pentru a compensa pierderea de energie datorită frecării pneurilor și frecării cu aerul.

Să examinăm puterea care furnizează forța necesară deplasării unui automobilul. Considerăm pentru coeficientul de frecare dintre pneuri și șosea valoarea $\mu = 0,016$. Pentru o mașină cu greutatea de 1450 kg forța de frecare este aproximativ:

$$F_f = \mu N \approx \mu mg = 227 \text{ N}$$

Pe măsură ce viteza mașinii crește, apare o micșorare a forței de apăsare normală N , ca rezultat al descreșterii presiunii aerului ce curge deasupra mașinii.

Forța de rezistență la înaintarea prin aer a automobilului este proporțională cu pătratul vitezei:

$$F_a = \frac{1}{2} D \rho A v^2$$

unde D este coeficientul de rezistență la înaintare, A este aria secțiunii mașinii, ρ este densitatea aerului. Pentru a realiza o estimare utilizăm valorile $D \simeq 0,5$, $\rho = 1,20 \text{ kg/m}^3$ și $A \approx 2 \text{ m}^2$. Mărimea forței totale de rezistență este suma celor două forțe:

$$F_t = F_f + F_a$$

Puterea necesară pentru a menține automobilul la viteză constantă v este:

$$P = F_t v$$

În Tabelul 1.1 sunt prezentate forța de apăsare normală, forța de frecare, forța de rezistență la înaintare prin aer, forța totală e rezistență și puterea în funcție de viteză.

Tabelul 1.1

Forțele de rezistență și puterea unui automobil în funcție de viteză.

$v \text{ (m/s)}$	$N \text{ (N)}$	$F_f \text{ (N)}$	$F_a \text{ (N)}$	$F_t \text{ (N)}$	$P \text{ (kW)}$
0	14200	0	0	0	0
8,9	14100	226	48	274	2,4
17,9	13900	222	192	414	7,4
26,8	13600	218	431	649	17,4
35,8	13200	211	767	978	35
44,7	12600	202	1199	1400	62,6

1.3.4 Energia cinetică

Să considerăm un corp asupra căruia acționează mai multe forțe a căror rezultantă este F este orientată de-a lungul axei Ox . Lucrul mecanic efectuat când corpul este deplasat din poziția x_1 în poziția x_2 este:

$$L = \int_1^2 F dx \quad (1.51)$$

Dar:

$$F = ma = m \frac{dv}{dt}$$

Atunci:

$$L = \int_1^2 m \frac{dv}{dt} dx = \int_1^2 m \frac{dv}{dt} v dt = \int_1^2 m v dv = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (1.52)$$

Mărimea:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad (1.53)$$

este numită *energia cinetică*. Relația 1.52 reprezintă teorema variației energiei cinetice pentru un punct material:

Lucrul mecanic efectuat de rezultanta forțelor ce acționează asupra unui punct material este egal cu variația energiei cinetice a acestuia.

În cazul în care sistemul este format din mai multe puncte materiale energia cinetică totală este suma energiilor cinetice ale fiecărui punct material:

$$E_c = \sum_{i=1}^n E_{c_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (1.54)$$

Și în acest caz variația energiei cinetice este egală cu lucrul mecanic efectuat de toate forțele ce acționează asupra sistemului.

1.3.5 Energia potențială

Pentru a înțelege acest concept vom porni de la exprimarea lucrului mecanic pentru diverse tipuri de forțe conservative. Astfel pentru forța de greutate:

$$L = mg(h_1 - h_2) = -(mgh_2 - mgh_1) \quad (1.55)$$

Pentru forța elastică:

$$L = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} = -\left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}\right) \quad (1.56)$$

Se observă că în ambele cazuri lucrul mecanic se poate exprima ca minus variația unei mărimi ce depinde doar de poziție. Această mărime poartă numele de energie potențială. Astfel putem spune că lucrul mecanic al unei forțe conservative este egal cu minus variația energiei potențiale:

$$L = -\Delta E_p = -(E_{p_2} - E_{p_1}) \quad (1.57)$$

Relația de mai sus poate fi privită ca o relație de definiție pentru energia potențială. Ca o primă observație putem spune că energia potențială este definită până la o constantă arbitrară C :

$$E'_p = E_p + C \quad (1.58)$$

Deoarece:

$$\Delta E'_p = E'_{p2} - E'_{p1} = E_{p2} + C - E_{p1} - C = E_{p2} - E_{p1} = -L \quad (1.59)$$

aceasta înseamnă că se poate alege orice valoare pentru constanta aditivă. În general, se alege o anumită poziție, în care energia potențială se consideră nulă. Această alegere determină constanta aditivă. Alegerea se face astfel încât forma energiei potențiale să fie cât mai simplă.

Astfel pentru forța de greutate

$$E_{pg} = mgh + C \quad (1.60)$$

se consideră că la suprafața pământului ($h = 0$) energia potențială este nulă $E_p = 0$. Rezultă $C = 0$ și energia potențială gravitațională ia forma:

$$E_{pg} = mgh \quad (1.61)$$

Pentru forța elastică

$$E_{pe} = \frac{kx^2}{2} + C \quad (a.86)$$

se consideră că energia potențială este nulă atunci când resortul nu este deformat. Astfel pentru $x = 0$, $E_{pe} = 0$. Rezultă $C = 0$ și:

$$E_{pe} = \frac{kx^2}{2} \quad (1.62)$$

Relația (1.57) considerată ca relație de definiție a energiei potențiale, se scrie sub formă diferențială ca:

$$\delta L = -dE_p \quad (1.63)$$

Pentru simplificare vom considera că mișcarea este unidimensională și se face de-a lungul axei Ox :

$$\delta L = Fdx = -dE_p \quad (1.64)$$

Rezultă:

$$F = -\frac{dE_p}{dx} \quad (1.65)$$

În cazul general:

$$\delta L = \vec{F} d\vec{r}$$

Cum

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z \quad \text{și} \quad d\vec{r} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$$

rezultă:

$$\delta L = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Deoarece energia potențială este o mărime care depinde de poziția în care se află corpul $E_p = E_p(x, y, z)$:

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz \quad (1.66)$$

Astfel relația (1.64) se scrie:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial E_p}{\partial x} dx - \frac{\partial E_p}{\partial y} dy - \frac{\partial E_p}{\partial z} dz$$

și

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

Atunci:

$$\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{e}_z = -\nabla E_p \quad (1.67)$$

În relația (1.67) sus simbolul ∇ reprezintă operatorul nabra:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \quad (1.68)$$

Aplicație

Energia potențială a unui sistem format din două particule este:

$$E_p = \frac{A}{r}$$

unde r este distanța dintre ele. Să se calculeze forța de interacțiune.

Soluție:

Pentru determinarea forței trebuie calculate derivatele parțiale ale energiei potențiale

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A}{r^2} \right) = -A \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x}$$

Cum $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

rezultă:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A}{r^2} \right) = -A \frac{x}{r^3}$$

În același mod se calculează și celelalte două derivate parțiale

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A}{r^2} \right) = -A \frac{y}{r^3} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{A}{r^2} \right) = -A \frac{z}{r^3}$$

Astfel conform relației (1.67):

$$F = A \frac{x}{r^3} \vec{e}_x + A \frac{y}{r^3} \vec{e}_y + A \frac{z}{r^3} \vec{e}_z = A \frac{\vec{r}}{r^3}$$

1.3.6 Teorema variației energiei mecanice

Se consideră un punct material asupra căruia acționează alături de forțele conservative a căror rezultantă este F_C și forțe neconservative a căror rezultantă este F_{NC} . Utilizând teorema variației energiei cinetice:

$$\Delta E_c = L = L_{F_C} + L_{F_{NC}} \quad (1.69)$$

unde s-a exprimat separat lucrul mecanic al forțelor conservative L_{F_C} și lucrul mecanic al forțelor neconservative $L_{F_{NC}}$. Lucrul mecanic al forțelor conservative se exprimă ca minus variația energiei potențiale:

$$L_{F_C} = -\Delta E_p \quad (1.70)$$

Rezultă că:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p + L_{F_{NC}}$$

și

$$\Delta E_c + \Delta E_p = \Delta(E_c + E_p) = L_{FNC} \quad (1.71)$$

Definim energia mecanică ca suma dintre energia cinetică și potențială

$$E_M = E_c + E_p \quad (1.72)$$

Atunci:

$$\Delta E_M = E_{M2} - E_{M1} = L_{FNC} \quad (1.73)$$

Relația de mai sus reprezintă teorema variației energiei mecanice:

Lucrul mecanic al forțelor neconservative care acționează asupra unui punct material este egal cu variația energiei mecanice a punctului material respectiv.

Dacă asupra punctului material acționează numai forțe nconservative, $L_{FNC} = 0$ și:

$$E_{M2} = E_{M1}$$

Aceasta este legea conservării energiei mecanice.

Într-un câmp de forțe conservative energia mecanică a punctului material rămâne constantă în timpul mișcării, având loc o transformare a energiei cinetice în energie potențială și invers.

Teoremele variației energiei cinetice și conservării energiei mecanice sunt valabile și în cazul sistemelor formate din mai multe puncte materiale în care forțele interne (dintre particule) sunt conservative.

1.3.7 Momentul forței și momentul cinetic.

Considerăm o forță care acționează asupra unui punct material. Definim momentul forței în raport cu un punct (Fig. 1.6a):

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1.74)$$

Aceeași definiție se poate aplica și în cazul unei forțe F aplicate într-un punct al unui corp care se poate roti în jurul unei axe (Fig.1.6b). Vectorul $\vec{r}$ este perpendicular pe axa considerată, și pentru simplificare forța $\vec{F}$ este situată într-un plan perpendicular pe axa considerată

Mărimea momentului este:

$$M = rF \sin \theta = rd \quad (1.75)$$

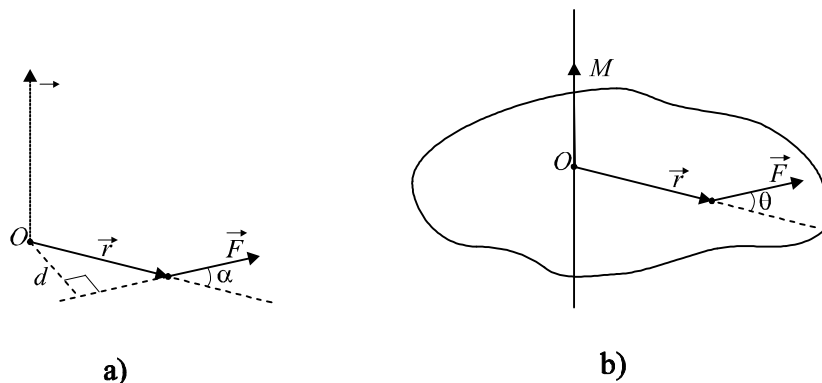


Figura 1.6: a) Momentul unei forțe față de un punct. b) Momentul forței față de o axă

unde d poartă numele de brațul forței.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{p} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Termenul $\vec{p} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$ este nul deoarece $\vec{p}$ și $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ sunt vectori paraleli. Atunci

$$\vec{M} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (1.76)$$

unde $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ este momentul cinetic

Relația 1.76 reprezintă teorema de variație a momentului cinetic:

Momentul forței este egal cu derivata momentului cinetic în raport cu timpul.

În cazul că momentul forței este nul:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0; \quad \vec{L} = ct \quad (1.77)$$

Dacă momentul resultant al forțelor care acționează asupra unui corp este nul, momentul cinetic se conservă.

1.3.8 Cinematica mișcării de rotație

Energia cinetică de rotație

Să considerăm un corp rigid (Fig. 1.7) care se rotește în jurul unei axe cu viteza unghiulară ω . Fiecare porțiune din corpul rigid considerat are o

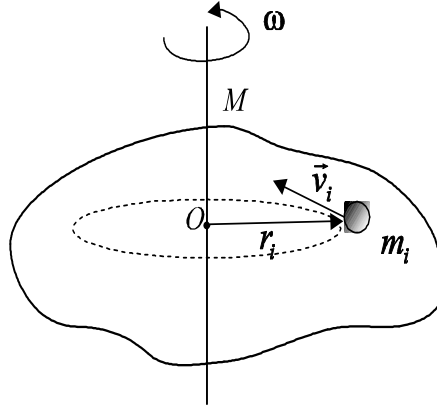


Figura 1.7: Mișcarea de rotație a unui corp solid rigid în jurul unei axe.

anumită energie cinetică O mică porțiune din corp cu masa m_i , aflată la distanța r_i de axă de rotație se mișcă pe un cerc de rază r_i și are viteza liniară $v_i = \omega r_i$.

Energia ei cinetică este:

$$E_{c_i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 \quad (1.78)$$

Energia cinetică totală este suma energiilor cinetice ale porțiunilor din care este constituit corpul.

$$E_R = \sum_i E_{c_i} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 \quad (1.79)$$

Mărimea din paranteză poartă numele de moment de inerție:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (1.80)$$

Cu această notație rezultă:

$$E_R = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (1.81)$$

Se observă că această relație este analoagă cu expresia energiei cinetice a unui corp $E_c = \frac{mv^2}{2}$. Spre deosebire de masa unui corp, care nu depinde

de poziția sa, momentul de inerție depinde de axa în jurul căreia corpul se rotește.

Deoarece un corp nu este compus din mase punctiforme discrete, ci prezintă o distribuție continuă a masei, sumarea din relația (1.80) devine o integrală

$$I = \int r^2 dm \quad (1.82)$$

unde integrarea se face pe întregul corp.

Aplicație

Să se calculeze momentul de inerție a unui cilindru cu rază R și masă M și lungimea L față de axa sa.

Soluție:

Elementul de masă cel mai convenabil este o pătură cilindrică subțire infinitezimală de rază r , grosime dr și lungime L . Masa acesteia este $dm = \rho dV = \rho L 2\pi r dr$

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 (\rho L 2\pi r) dr = 2\pi \rho L \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi \rho L R^4$$

Cum densitatea este:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 L}$$

rezultă:

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

Aplicație

Să se determine momentul de inerție al unei sfere omogene de masă M și rază R în raport cu o axă ce trece prin centrul său.

Soluție

Considerăm că axa considerată este una din axele de coordonate, iar centrul sistemului de coordonate se află în centrul sferei. Momentele de inerție în jurul celor trei axe sunt:

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dM \quad ; \quad I_z = \int (x^2 + y^2) dM \quad ; \quad I_y = \int (x^2 + z^2) dM$$

Deoarece toate cele trei axe sunt echivalente rezultă $I_x = I_y = I_z$ astfel că momentul cinetic în jurul unei este:

$$I = \frac{1}{3} (I_x + I_y + I_z) = \frac{2}{3} \int (x^2 + y^2 + z^2) dM = \frac{2}{3} \int r^2 dM$$

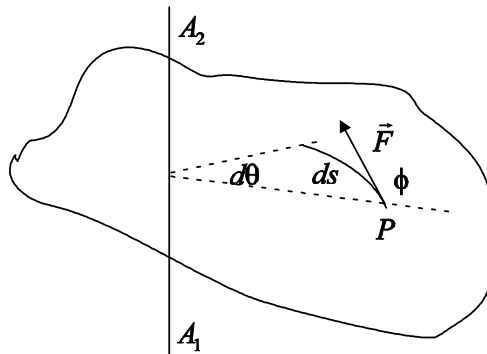


Figura 1.8: Forță care acționează asupra unui corp ce se poate roti în jurul unei axe.

În relația de mai sus masa $dM = 4\pi r^2 \rho dr$ este masa unei pături sferice de rază r și grosime dr . Atunci

$$I = \frac{2}{3} \int_0^R 4\pi \rho r^4 dr = \frac{8}{15} \pi R^5 \rho$$

Folosind definiția densității:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

rezultă:

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

Dinamica rotației unui corp solid

Considerăm o forță care acționează asupra unui corp rigid care se poate roti în jurul unei axe. Pentru simplificare forța este aleasă într-un plan perpendicular pe axa de rotație, astfel ca momentul forței să fie după direcția acestei axe A_1A_2 . În timpul dt punctul P în care forța este aplicată se va deplasa cu o distanță infinitesimală ds de-a lungul unei traiectorii circulare în timp ce corpul se rotește cu unghiul $d\theta$. Lucrul mecanic efectuat, notat aici cu δW pentru al deosebi de momentul cinetic notat cu L , de forța F este

$$\delta W = \vec{F} d\vec{s} = (F \sin \phi) r d\theta \quad (1.83)$$

Deoarece $M = Fr \sin \phi$ rezultă:

$$\delta W = M d\theta \quad (1.84)$$

Puterea implicată în acest proces este:

$$P = \frac{\delta W}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M\omega \quad (1.85)$$

Expresia (1.85) este analoagă formulei $P = Fv$ de la mișcarea de translație.

Aplicăm teorema variație energiei cinetice sub forma diferențială (variația energiei cinetice a unui corp este egală cu lucrul mecanic efectuat de forțele externe):

$$\frac{dE_c}{dt} = dW \quad (1.86)$$

Ținând cont de relațiile (1.81) și (1.84), relația (1.86) devine:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I \omega^2 \right) = M\omega \quad (1.87)$$

Dar cum momentul cinetic este constant, deoarece corpul este rigid și axa de rotație fixă:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I \omega^2 \right) = \frac{1}{2} I \frac{d\omega^2}{dt} = I\omega \frac{d\omega}{dt} = I\omega\varepsilon \quad (1.88)$$

unde ε poartă numele de accelerație unghiulară. Atunci din relația 1.87 se obține:

$$M = I\varepsilon \quad (1.89)$$

Trebuie remarcat că și mărimile unghiulare ω și ε , pot fi tratate ca vectori. Ele au direcția axei de rotație iar sensul lor este dat de regula burghiului. În cazul general ele au o direcția perpendiculară pe planul de rotație.

Momentul cinetic și viteza unghiulară

Considerăm situația prezentată în Fig. 1.7 în care corpul se mișcă în jurul unei axe. O mică porțiune din corp cu masa m_i , aflată la distanța r_i de axă de rotație se mișcă pe un cerc de rază r_i și are impulsul $p_i = m_i v_i = m_i \omega r_i$. Momentul ei cinetic este:

$$l_i = r_i p_i = m_i r_i v_i = \omega m_i r_i^2 \quad (1.90)$$

doarece impulsul este perpendicular pe raza r_i . Momenul cinetic este orientat după axa de rotație, iar sensul său este dat de regula burghiului. Momentul cinetic total este suma momentelor cinetice ale fiecărei porțiuni:

$$L = \sum_i l_i = \omega \sum_i m_i r_i^2 \quad (1.91)$$

Deoarece $\sum_i m_i r_i^2 = I$, momentul cinetic față de o axă se exprimă ca:

$$L = I\omega \quad (1.92)$$

Mărimile momentul forței, momentul cinetic, viteza unghiulară, accelerația unghiulară în cazul rotației unui corp în jurul unei axe sunt dirijate de-a lungul acestia și nu pot avea decât două sensuri. Luând unul din aceste sensuri pozitiv, celălalt sens negativ, toți cei patru vectori pot fi tratați algebric și se poate lucra doar cu mărimile lor considerate pozitive sau negative în funcție de orientarea lor.

1.4 Probleme

1.1 Unui puc i se imprimă o viteză $v = 2$ m/s. Coeficientul de frecare la alunecare a pucului cu gheața este $\mu = 0,01$. Să se calculeze distanța pe care pucul se deplasează ($g = 10$ m/s²).

1.2 Un corp interplanetar este atras de Soare cu forță:

$$F = \frac{2 \times 10^{22}}{r^2} \text{ N}$$

Să se determine lucrul mecanic efectuat de Soare când corpul se apropie de Soare de la distanța $r_1 = 3 \times 10^{11}$ m la distanța $r_2 = 2,5 \times 10^{11}$ m.

1.3 Un corp cu masa $m = 5$ kg este în repaus pe o suprafață orizontală pe care poate mișca fără frecare. Asupra corpului acționează o forță constantă $F = 5$ N. Să se determine viteza corpului ce parcurge distanța de 3 m.

1.4 Un corp cu masa $m = 5$ kg se află în repaus pe o suprafață orizontală pe care se poate deplasa sub acțiunea unei forțe $F = 12$ N pe distanța $d = 10$ m. Să se determine viteza corpului după parcurgerea acestei distanțe, dacă

coeficientul de frecare la alunecare este $\mu = 0,14$ și accelerația gravitațională este $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

1.5 Un corp de masă $m = 2 \text{ kg}$ este atașat la un resort cu o constantă elastică $k = 10^3 \text{ N/m}$. Resortul este comprimat cu $x = 2 \text{ cm}$. Apoi resortul este eliberat. Să se calculeze viteza corpului când resortul trece prin poziția de echilibru (mișcarea are loc în plan orizontal, fără frecare).

1.6 Să se determine lucrul mecanic efectuat de o forță care modifică viteza unui corp de masă $m = 5 \text{ kg}$ de la valoarea $\vec{v}_1 = 6\vec{e}_x - 2\vec{e}_y$ la $\vec{v}_2 = 8\vec{e}_x + 4\vec{e}_y$. Componentele vitezelor sunt exprimate în m/s.

1.7 Un corp cu masa $m = 3 \text{ kg}$ are viteza

$$v = (6\vec{e}_x - 2\vec{e}_y) \text{ m/s}$$

Să se calculeze energia cinetică a corpului.

1.8 O forță conservativă care acționează asupra unei particule are expresia

$$\vec{F} = (-Ax + Bx^2) \vec{e}_x$$

unde A și B sunt constante.

a) Să se calculeze energia potențială.

b) Să se calculeze variația energiei potențiale când poziția particulei se modifică de la x_1 la x_2 .

1.9 Energia potențială a unei particule este:

$$U(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$$

Să se determine forța care acționează asupra particulei.

1.10 Motorul electric al unui trenuleț de jucărie îl accelerează din repaus la $0,5 \text{ m/s}$ în 50 milisecunde. Masa totală a trenulețului este 800 g . Să se determine viteza medie a acestuia.

1.11 O particulă cu masa $m = 4 \text{ kg}$ se deplasează de-a lungul axei Ox în concordanță cu legea $x = t + 2t^3$ (x este exprimat în metri iar t în secunde).

a) Să se determine energia cinetică la momentul $t = 5 \text{ s}$.

- b) Să se determine accelerația la momentul $t = 5$ s.
- c) Să se determine puterea furnizată corpului la $t = 5$ s.
- d) Să se determine lucrul mecanic efectuat asupra corpului între momentele $t = 0$ și $t = 2$ s.

1.12 O mașină cu masă $m = 1500$ kg se ciocnește cu un perete. Viteza inițială a mașinii este $\vec{v}_i = -20\vec{e}_x$ iar în final $\vec{v}_f = 2\vec{e}_x$. Dacă coliziunea are loc în 0,2 s să se determine forța medie exercitată asupra mașinii.

1.13 Un pendul balistic este un aparat pentru măsurarea vitezei unui proiectil (de exemplu un glonț). Acesta constă dintr-un corp de lemn de masa m_2 suspendat de un fir. Un glonț de masa m_1 intră în acest bloc și-l ridică la înălțimea h . Să se determine viteza glonțului în funcție de h .

1.14 Într-un reactor nuclear, neutronii sunt produși când un atom suferă un proces de fisune. Acești neutroni se deplasează cu 10^7 m/s și trebuie încetiniți până la 10^3 m/s înainte de a produce un alt act de fisiune. Ei sunt încetiniți cu ajutorul unui material (lichid sau solid) numit moderator. Să se arate că neutronii pot să-și piardă energia prin ciocniri elastice cu atomii moderatorului. Să se calculeze fracția din energia cinetică inițială a neutronului pierdută de acesta prin ciocnire. Considerăm ciocnirile elastice și centrale.

1.15 Să se determine mărimea momentului cinetic propriu al unei bile de bowling ($M = 6$ kg și $R = 12$ cm) care se rotește cu frecvența de $\nu = 10$ rot/s.

Capitolul 2

Oscilații și unde

2.1 Mișcarea oscilatorie armonică

O mișcare care se repetă în mod regulat la intervale egale de timp se numește *mișcare periodică*. Ca exemplu de mișcări periodice se pot da mișcarea Pământului în jurul Soarelui, mișcarea Lunii în jurul Pământului, mișcarea moleculelor într-un corp solid în jurul pozițiilor de echilibru, mișcarea unui pendul. Alte exemple de mărimi care variază periodic sunt: câmpurile electrice și magnetice ale undelor electromagnetice, curentul alternativ.

Dacă o particulă suferă o mișcare periodică astfel încât se mișcă înainte și înapoi mișcare se numește *mișcare oscilatorie*. Cea mai simplă mișcare oscilatorie se petrece în cazul în care forța care acționează asupra unui corp este proporțională cu distanța față de un punct fix, numit poziție de echilibru, și este orientată către acel punct. O astfel de forță este forță elastică, iar mișcarea determinată de aceasta poartă numele de *mișcare oscilatorie armonică*.

Un model pentru o astfel de mișcare este mișcarea unui corp legat de un resort care se poate deplasa pe o suprafață orizontală fără frecare. Originea axei pe care are loc mișcarea se alege în poziția în care resortul este nedeformat. Pentru un corp asupra căruia acționează o forță elastică de-a lungul axei Ox legea a II -a mecanicii se exprimă astfel:

$$ma = -kx \quad (2.1)$$

sau:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (2.2)$$

Notând cu:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (2.3)$$

rezultă:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.4)$$

Relația (2.4) reprezintă o ecuație diferențială de ordin doi. Soluția acestei ecuații este:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta_0) \quad (2.5)$$

unde A și θ_0 reprezintă două constante. Mărimea $x(t)$ este elongația și reprezintă depărtarea corpului de poziția de echilibru la un moment dat, A este amplitudinea și reprezintă elongația maximă, ω_0 este pulsația mișcării și ea descrie caracterul periodic al mișcării, $\omega_0 t + \theta_0$ este faza mișcării, iar θ_0 reprezintă faza inițială.

Din relația (2.5) rezultă viteza și accelerația particulei care oscilează:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0) \quad (2.6a)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \theta_0) \quad (2.7)$$

Ținând cont de (2.5) și (2.7) rezultă relația dintre accelerație și elongație:

$$a = -\omega_0^2 x \quad (2.8)$$

Determinarea constantelor A și θ_0 se face cunoscând poziția și viteza la momentul inițial ($t = 0$):

$$x(0) = x_0; \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0$$

Astfel

$$x_0 = A \cos \theta_0 \quad ; \quad v_0 = -\omega_0 A \sin \theta_0 \quad (2.9)$$

Astfel rezultă amplitudinea:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

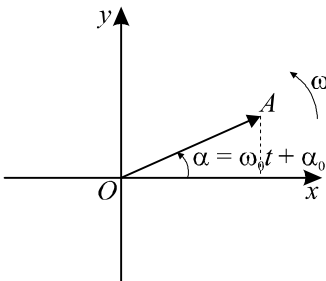


Figura 2.1: Reprezentarea fazorială a mișcării oscilatorii.

Determinarea fazei inițiale se face din cunoașterea funcțiilor trigonometrice sinus și cosinus din al căror semn se determină cadranul în care este situat θ_0 . Nu este indicat să se calculeze tangenta acestui unghi, deoarece funcția tangentă este o funcție periodică cu perioada egală cu π . Astfel θ_0 se determină considerând cele două relații de mai jos:

$$\sin \theta_0 = -\frac{v_0}{\omega_0 A} \quad ; \quad \cos \theta_0 = \frac{x_0}{A}$$

Pentru determinarea perioadei T se ține cont că funcția cosinus este o funcție periodică cu perioada principală egală cu 2π .

$$A \cos[\omega_0(t + T) + \theta_0] = A \cos[\omega_0 t + \theta_0 + 2\pi] \quad (2.10)$$

Rezultă:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (2.11)$$

Se poate defini frecvența ν care reprezintă numărul de oscilații în unitatea de timp și care este inversa perioadei;

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (2.12)$$

2.2 Reprezentările mișcării oscilatorii

2.2.1 Reprezentarea fazorială

Mișcarea este reprezentată printr-un vector rotator numit fazor. Elongația mișcării reprezintă proiecția vârfului vectorului pe axa Ox (Fig. 2.1).

2.2.2 Reprezentarea complexă

Mișcarea poate fi reprezentată cu ajutorul unui număr complex

$$\tilde{x} = A_0 \exp i(\omega_0 t + \theta_0) = A_0 \exp i\theta_0 \exp i\omega_0 t = A \exp i\omega_0 t \quad (2.13)$$

unde $A = A_0 \exp i\theta_0$ poartă numele de amplitudine complexă. Trecerea la reprezentarea sinusoidală (reală) se face foarte simplu: elongație este partea reală a lui $\tilde{x}$, adică:

$$x = \operatorname{Re} \tilde{x} \quad (2.14)$$

2.3 Energia oscilatorului armonic

Energia oscilatorului armonic este formată din suma energiei cinetice și potențiale:

$$E = E_c + E_p \quad (2.15)$$

Energia cinetică este:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \theta_0) \quad (2.16)$$

Energia potențială este:

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \theta_0) \quad (2.17)$$

Rezultă:

$$E = E_p + E_c = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \quad (2.18)$$

Energia totală a oscilatorului este constantă în timp. Acest lucru este de așteptat deoarece forța elastică este una conservativă.

2.4 Pendulul matematic

Pendul matematic constă dintr-un fir inextensibil la capătul căruia se află un punct material de masă m (Fig. 2.2).

Forțele care acționează asupra punctului material sunt greutatea și tensiunea din fir $\vec{T}$. Componenta tangențială a greutății determină mișcarea

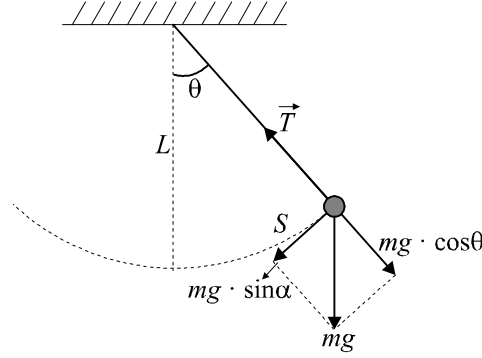


Figura 2.2: Pendulul matematic

corpului către poziția în care $\theta = 0$. Aplicăm legea a II-a a mecanicii pentru componenta tangențială a greutateii:

$$F_t = -mg \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (2.19)$$

Cum $s = l\theta$ rezultă:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (2.20)$$

Pentru cazul în care θ este foarte mic $\sin \theta \simeq \theta$, astfel că (2.20) devine:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (2.21)$$

Rezultă că ecuația de mișcare este similară cu ecuația (2.10). Soluția ecuației este (2.21):

$$\theta = \theta_m \cos(\omega_0 t + \theta_0) \quad (2.22)$$

unde:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (2.23)$$

Astfel perioada mișcării este:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.24)$$

și depinde doar de lungimea l a pendulului și de accelerația gravitațională.

2.5 Oscilații amortizate

Mișcarea oscilatorie armonică este o mișcare ideală, în care asupra corpului acționează doar o forță elastică. O astfel de mișcare poate avea loc un timp nedefinit. În realitate, însă, alături de forța elastică acționează și forțe neconservative, cum ar fi forțele de rezistență la înaintare (frecare) care încetinesc mișcarea. În consecință, energia sistemului scade și mișcarea este una amortizată. În continuare considerăm că forța de rezistență este proporțională cu mărimea vitezei:

$$R = -\lambda v$$

Semnul minus arată că forța are sens invers vitezei. În acest caz legea a doua se scrie astfel:

$$ma = -kx - \lambda v \quad (2.25)$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{\lambda}{m} \frac{dx}{dt} \quad (2.26)$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.27)$$

unde $\gamma = \frac{\lambda}{2m}$ poartă numele de coeficient de amortizare iar $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ este pulsația mișcării neamortizate.

Pentru rezolvarea ecuației diferențiale de ordinul doi omogene (2.27) se consideră ecuația caracteristică:

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0 \quad (2.28)$$

care are soluțiile:

$$r_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (2.29)$$

a) $\gamma > \omega_0$ și r_1 și r_2 sunt reale. Soluția ecuației în acest caz este:

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (2.30)$$

unde C_1 și C_2 sunt constante. Ele pot fi determinate din condițiile inițiale.

Deoarece $r_1 < 0$ și $r_2 < 0$ rezultă că atunci când $t \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 0$

O astfel de mișcare poartă numele de mișcare anarmonică (Fig. 2.3a).

b) $\gamma = \omega_0$. Atunci:

$$r_1 = r_2 = -\gamma \quad (2.31)$$

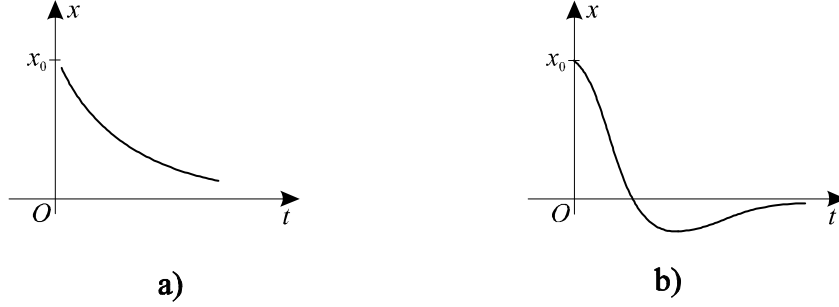


Figura 2.3: a) Mișcare anarmonică. b) Amortizare critică.

Soluția ecuației diferențiale este:

$$x = (C_1 t + C_2) e^{-\gamma t} \quad (2.32)$$

unde C_1 și C_2 sunt constante care pot fi determinate din condițiile inițiale. O astfel de amortizare poartă numele de amortizare critică (Fig. 2.3b).

c) $\gamma < \omega_0$. Ecuația caracteristică are soluții imaginare:

$$r_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (2.33)$$

Soluția ecuației se scrie:

$$x = e^{-\gamma t} [(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t})] \quad (2.34)$$

unde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

Ținând cont de faptul că $e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$

$$x = e^{-\gamma t} [(C_1 + C_2) \cos \omega t + i(C_1 - C_2) \sin \omega t] \quad (2.35)$$

Deoarece x elongația este o mărime reală alegem:

$$C_1 = a + ib \quad ; \quad C_2 = a - ib \quad (2.36)$$

unde a și b sunt mărimi reale. Se obține:

$$x = e^{-\gamma t} (2a \cos \omega t - 2b \sin \omega t) = e^{-\gamma t} 2a \left(\cos \omega t - \frac{b}{a} \sin \omega t \right) \quad (2.37)$$

Se notează:

$$\frac{b}{a} = \tan \theta_0 \quad (2.38)$$

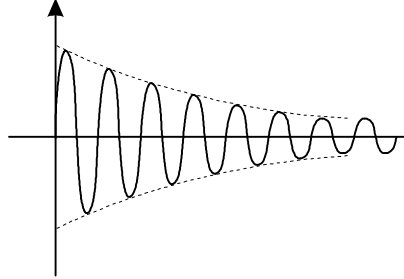


Figura 2.4: Mișcare oscilatorie amortizată.

și

$$x = \frac{2a}{\cos \theta_0} e^{-\gamma t} [\cos \omega t \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \sin \omega t] \quad (2.39)$$

Utilizând notația $A_0 = \frac{2a}{\cos \theta_0}$ relația (2.39) devine:

$$x = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \theta_0) \quad (2.40)$$

Dacă coeficientul de atenuare γ este mic, caracterul oscilatoriu al mișcării se păstrează. Mișcarea poartă numele de mișcare oscilatorie amortizată (Fig. 2.4). Amplitudinea acestei mișcări scade exponențial în timp:

$$A = A_0 e^{-\gamma t} \quad (2.41)$$

Mișcarea are loc cu pulsația:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0 \quad (2.42)$$

unde ω_0 poartă numele de pulsație naturală a mișcării oscilatorii.

Mișcarea este caracterizată de așa numitul decrement logarithmic

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\gamma T} = \gamma T \quad (2.43)$$

Decrementul logarithmic este o mărime adimensională și caracterizează de asemenea gradul de amortizare a oscilațiilor. Cu ajutorul se poate compara gradul de amortizare a oscilațiilor.

Deoarece mișcarea este amortizată sistemul pierde energie. Pierdere de energie este egală cu lucrul mecanic al forței de rezistență.

$$dE = -\delta L = -\lambda v dx \quad (2.44)$$

Puterea disipată este:

$$P = \frac{dE}{dt} = -\lambda v \frac{dx}{dt} = -\lambda v^2 = -2\gamma m v^2 \quad (2.45)$$

Aplicație

Un corp se mișcă într-un câmp potențial în care acesta are energia potențială $V(x)$ care are valoarea minimă la coordonata $x = 0$. Să se arate că mișcarea particulei în jurul poziției de echilibru este una oscilatorie

Soluție:

Deoarece mișcarea are loc în jurul poziției de echilibru, expresia energiei potențiale se dezvoltă în serie Taylor în jurul punctului $x = 0$ și se rețin doar primii doi termeni:

$$V = V(0) + \left(\frac{dV}{dx} \right) \Big|_{x=0} x + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2V}{dx^2} \right) \Big|_{x=0} x^2 + \dots$$

Cum în $x = 0$ energia potențială a corpului este minimă $dV/dx = 0$:

$$V = V(0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2V}{dx^2} \right) \Big|_{x=0} x^2$$

Forța care acționează asupra corpului este:

$$F = -\frac{dV}{dx} = - \left(\frac{d^2V}{dx^2} \right) \Big|_{x=0} x$$

Se observă că forța care acționează asupra corpului este una de tip elastic, iar constanta elastică este:

$$k = \left(\frac{d^2V}{dx^2} \right) \Big|_{x=0}$$

Aplicație

O masă m legată de un resort efectuează o oscilație cu frecvența de $\nu_1 = 1$ Hz. Când se atașează în plus o masă $\Delta m = 0,6$ kg frecvența devine $\nu_2 = 0,6$ Hz. Să se determine masa m .

Soluție:

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \nu_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m + \Delta m}}$$

Prin împărțire și ridicare la pătrat:

$$\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 = \frac{m + \Delta m}{m}$$

Rezultă:

$$m = \frac{\Delta m}{\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 - 1} = 0,337 \text{ kg}$$

2.6 Oscilații forțate

În cazul mișcării oscilatorii amortizate, energia sistemului descrește în timp. Este posibilă compensarea pierderii de energie prin aplicarea unei forțe externe care efectuează un lucru mecanic pozitiv. Astfel la orice moment de timp energia poate fi transferată sistemului prin aplicarea unei forțe în sensul mișcării. Amplitudinea, rămâne constantă dacă energia furnizată într-o perioadă de timp este egală cu energia mecanică pierdută în aceeași perioadă datorită forțelor de rezistențe sau frecare. Un exemplu este acela în care forța exterioară variază periodic $F = F_0 \cos \omega t$ unde ω este pulsația forței iar F_0 este o constantă.

Ecuția de mișcare pentru un corp asupra cărui acționează o forță elastică, o forță de rezistență și o forță exterioară F este:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F - kx - \lambda \frac{dx}{dt} \quad (2.46)$$

Ecuția se scrie astfel:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0 \cos \omega t}{m} \quad (2.47)$$

unde $2\gamma = \lambda/m$ și $\omega_0^2 = k/m$. O astfel de ecuație este o ecuație de ordinul doi neomogenă și are soluții de forma:

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) \quad (2.48)$$

unde $x_0(t)$ este soluția ecuației omogene dată de relația (2.40), care atunci când t este foarte mare tinde către 0 și $x_1(t)$ este o soluție particulară a

ecuației omogene. Pentru a obține o soluție particulară vom considera o reprezentare complexă. Astfel;

$$F_0 \cos \omega t \rightarrow F_0 e^{i\omega t} \quad (2.49)$$

Alegând $x_i(t)$ de forma:

$$x_1(t) = A \cos(\omega t - \theta) \quad (2.50)$$

el va fi reprezentat sub formă complexă astfel:

$$x_1(t) = A \cos(\omega t - \theta) \rightarrow A e^{i(\omega t - \theta)} \quad (2.51)$$

Ecuația (2.47) se scrie:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \quad (2.52)$$

Deoarece:

$$\frac{dx_1}{dt} = iA\omega e^{i(\omega t - \theta)} \quad \text{și} \quad \frac{dx_1^2}{dt^2} = -A\omega^2 e^{i(\omega t - \theta)} \quad (2.53)$$

din ecuația (2.52) rezultă:

$$[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\gamma\omega i]A = \frac{F_0}{m} e^{i\theta} = \frac{F_0}{m} [\cos \theta + i \sin \theta] \quad (2.54)$$

Pentru ca cele două numere complexe să fie egale este necesar ca:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A = \frac{F_0}{m} \cos \theta \quad (2.55a)$$

$$2\gamma\omega A = \frac{F_0}{m} \sin \theta \quad (2.56)$$

Se ridică la pătrat relațiile (2.55a) și (2.56) și se adună. Se obține:

$$A^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2] = (F_0/m)^2 \quad (2.57)$$

Atstfel amplitudinea mișcării este:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad (2.58)$$

Tangenta unghiului de defazaj dintre forța perturbatoare și elongație este:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (2.59)$$

Dacă

$\omega \rightarrow 0$ $\operatorname{tg} \theta \rightarrow 0$ $\theta \rightarrow 0$. Aceasta înseamnă că la pulsații (frecvențe) mici elongația este fază cu forța.

$\omega \rightarrow \omega_0$ $\operatorname{tg} \theta \rightarrow \infty$ $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Aceasta înseamnă că elongația este defazată în urma forței cu $\pi/2$.

$\omega \rightarrow \infty$ $\operatorname{tg} \theta < 0$ $\theta \rightarrow \pi$. Aceasta înseamnă că elongația și forța sunt în opoziție de fază.

2.6.1 Rezonanța

Rezonanța reprezintă fenomenul de creștere a amplitudinii pentru anumite valori ale lui ω . Pentru determinarea frecvenței la care amplitudinea este maximă se pune condiția:

$$\frac{dA}{d\omega} = 0 \quad (2.60)$$

de unde rezultă valoarea pulsației de rezonanță:

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} < \omega_0 \quad (2.61)$$

La această valoare a pulsației, amplitudinea mișcării la rezonanță devine egală cu:

$$A(\omega_R) = \frac{F_0/m}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \quad (2.62)$$

În Fig. 2.5 este reprezentată amplitudinea mișcării în funcție de pulsația forței externe pentru diverse valori ale coeficientului de atenuare. Se observă că pe măsură ce valoarea coeficientului de atenuare amplitudinea la rezonanță crește, iar pulsația de rezonanță se apropie de pulsația oscilației în cazul că nu ar fi atenuare.

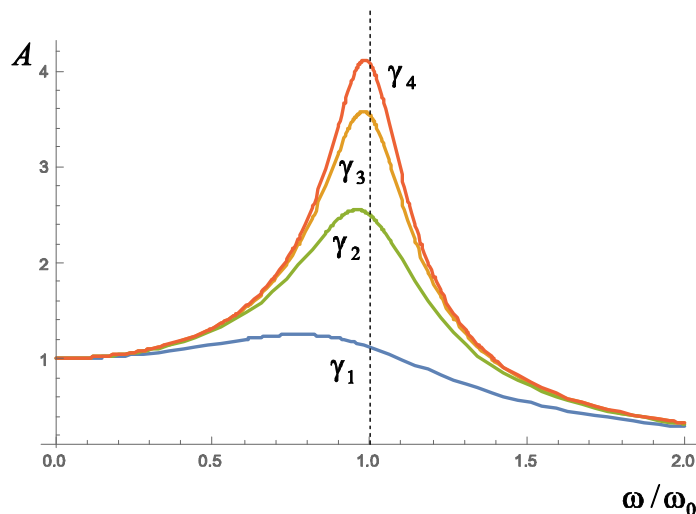


Figura 2.5: a) Amplitudinea unei oscilații forțate funcție de pulsația forței pentru diverse valori ale coeficientului de atenuare: $\gamma_4 < \gamma_3 < \gamma_2 < \gamma_1$.

2.7 Tipuri de unde

Se numesc unde, perturbațiile care se propagă din aproape în aproape printr-un mediu. De exemplu scoaterea din poziția de echilibru a unei particule care este situată într-un mediu elastic determină ieșirea din poziția de echilibru și a particulelor vecine datorită forțelor elastice ce se exercită între particulele mediului. În acest mod mișcarea se propagă din aproape în aproape prin intermediul unui câmp de forțe elastice.

Prezența unei unde presupune existența unei surse care produce perturbația inițială și a unui mediu în care aceasta să se propage.

După natura perturbației, putem avea diferite feluri de unde:

- unde elastice (undele acustice), care sunt produse de oscilații de natură mecanică de mică amplitudine care se propagă în medii elastice;
- unde termice, care apar datorită diferențelor de temperatură și caracterizează fenomenul de propagare a căldurii;
- unde electromagnetice, care sunt produse de perturbații de natură electromagnetică.

Pentru primele două tipuri de unde este necesar un mediu material, în timp ce undele electromagnetice se pot propaga și în vid.,

După caracterul perturbației, undele pot fi:

- scalare, pentru care perturbația este caracterizată de o mărime scalară;
- vectoriale, pentru care perturbația este caracterizată de o mărime vectorială.

După modul în care apar perturbațiile în raport cu direcția de propagare, undele pot fi:

- transversale, când oscilațiile sau deplasările se efectuează în plane perpendiculare pe direcția de propagare;
- longitudinale, când oscilațiile sau deplasările se efectuează în direcția de propagare a undelor. (undele acustice).

Un exemplu de unde sunt undele seismice care sunt tridimensionale și se propagă din punctul de producere de sub suprafața pământului de-a lungul unei fisuri. În acest caz întâlnim ambele tipuri de unde: undele transversale notate cu P (unde primare) care au viteza de propagare în intervalul 7 km/s și undele longitudinale notate cu S (unde secundare) care se propagă cu 4 km/s. Prin înregistrarea intervalului de timp între momentele de sosire a celor două tipuri de unde la un seismograf, se poate calcula distanța de la seismograf la punctul de origine al cutremurului. Practic, acest punct se află pe o sferă cu centrul în locul unde se află seismograful. Pentru a determina punctul de origine se utilizează mai multe seismografe. Punctul de origine al cutremurului se află în punctul de intersecție al sferelor imaginare cu centrele în locurile unde se află seismografele.

2.8 Unde armonice

Undele armonice sunt produse de un sistem antrenat într-o mișcare de oscilație armonică. Starea de oscilație se transmite și în celelalte puncte ale mediului pe care le pune într-o mișcare oscilatorie armonică simplă.

Trebuie remarcat că perturbațiile armonice cu o frecvență fixă reprezintă un caz ideal. Studiul acestor cazuri ideale permite o extrapolare în cazurile reale, când pot să apară fenomene periodice nearmonice; acestea pot fi abordate prin aplicarea unor metode matematice cunoscute (serii sau integrale Fourier).

Să considerăm o undă tridimensională. Se poate duce o suprafață prin punctele la care oscilația a ajuns la un moment dat. Această suprafață se mișcă arătând cum se propagă perturbația. Această suprafață poartă numele de front de undă. Dacă mediul este omogen și izotrop, direcția de propagare este întodeauna perpendiculară pe frontul de undă.

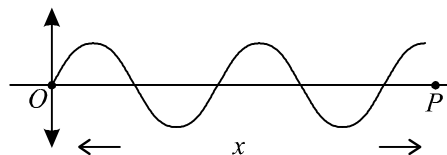


Figura 2.6: Unda armonică unidimensională.

Fronturile de undă pot avea diverse forme:

- plan în cazul undelor plane, care se propagă pe o singură direcție perpendiculară pe frontul de undă;
- sferică în cazul undelor sferice care se propagă în toate direcțiile și care provin de la o sursă punctiformă.

Depart de sursă, fronturile de undă sferică au o curbă foarte mică și pe o regiune limitată aceste unde pot fi privite ca unde plane.

2.8.1 Unda armonică unidimensională

Ecuția unde armonice unidimensionale este valabilă și în cazul unde armonice plane, deoarece aceasta se propagă într-o singură direcție.

Considerăm (Fig. 2.6) că punctul O care este sursa unde oscilează după legea:

$$u = A \cos(\omega t + \theta) \quad (2.63)$$

Considerând că v este viteza de propagare a unde, un punct P aflat la distanța x începe să oscileze după intervalul de timp:

$$t_0 = \frac{x}{v} \quad (2.64)$$

Atunci punctul P oscilează după legea:

$$u(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \theta \right] \quad (2.65)$$

Deoarece $\omega = 2\pi/T$

$$u(x, t) = A \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \theta \right] = A [\omega t - kx + \theta] \quad (2.66)$$

unde $\lambda = vT$ poartă numele de lungime de undă iar $k = \frac{\omega}{v}$ poartă numele de număr de undă sau modulul vectorului de undă. Lungimea de undă

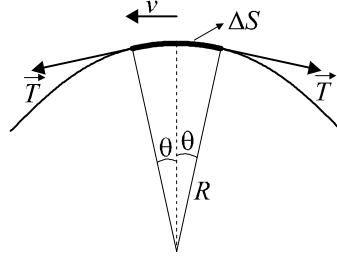


Figura 2.7: Calcularea vitezei de propagare în coardă

reprezintă spațiul străbătut de undă într-o perioadă, sau distanța minimă dintre două puncte care oscilează în fază.

Unda armonică este un fenomen periodic în timp cu perioada T :

$$u(x, t) = u(x, t + T) \quad (2.67)$$

și în spațiu cu perioada λ :

$$u(x, t) = u(x + \lambda, t) \quad (2.68)$$

2.8.2 Viteza de propagare a undei într-o coardă

Pentru aceasta vom considera un element din coardă (Fig. 2.7) întinsă cu tensiunea T . Elementul de lungime Δs formează un arc de cerc cu raza R . Într-un sistem de referință care se mișcă cu viteza v a pulsului elementul de coardă considerat are accelerația:

$$a = \frac{v^2}{R} \quad (2.69)$$

care este determinată de forța rezultantă dintre tensiunile care acționează la capetele elementului considerat din coardă. Aceasta este egală cu:

$$F = 2T \sin \theta \simeq 2T\theta \quad (2.70)$$

deoarece am considerat elementul Δs foarte mic, fapt ce face ca și unghiul θ să fie foarte mic. Elementul Δs are masa:

$$\Delta m = \mu ds = 2\mu R\theta \quad (2.71)$$

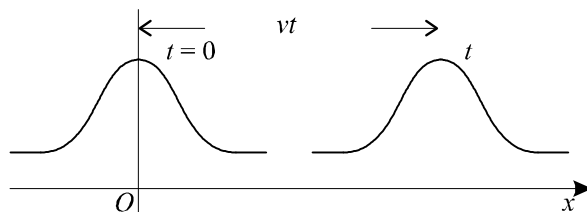


Figura 2.8: Puls care se propagă în lungul axei Ox .

unde μ este densitatea liniară a corzii. Ținând cont de relațiile (2.69) și (2.71)

$$F = \Delta m a = 2\mu R \theta \frac{v^2}{R} \quad (2.72)$$

Comparând relațiile (2.70) și (2.72), rezultă:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (2.73)$$

2.9 Ecuația undelor

Considerăm $\theta = 0$ și ținând cont de relația (2.66) se calculează derivatele elongației $u(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k^2 A \cos(\omega t - kx) \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - kx) \quad (2.75)$$

Rezultă prin combinarea relațiilor (2.74) și (2.75):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.76)$$

Aceasta este ecuația generală a unei unidimensionale pe care o considerăm adevărată nu numai în cazul undelor armonice. Soluția generală a ecuației (2.76) este de forma:

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

unde $f(x - vt)$ este unda progresivă adică unda care se propagă în sensul axei Ox și $g(x + vt)$ este unda regresivă, adică unda care se propagă în sens invers axei Ox . Pentru a arăta că $f(x - vt)$ este undă progresivă vom considera un puls care se propagă de-a lungul unei coarde (Fig. 2.8).

El are forma $y = f(x)$ la momentul $t = 0$. La momentul t vârful pulsului a ajuns la coordonata vt . Dacă punem condiția ca forma pulsului să rămână neschimbată atunci $y(x, t) = f(x - vt)$. În acest mod am arătat că $f(x - vt)$ reprezintă o perturbație care se propagă în sensul pozitiv al axei Ox .

Aplicație

O undă sinusoidală este descrisă de

$$y = 0,25 \sin(0,3t - 40x)$$

unde x și y sunt exprimate în metri iar timpul t în secunde. Să se determine amplitudinea, pulsația, numărul de undă, lungimea de undă și viteza de propagare a undei.

Soluție:

$$A = 0,25 \text{ m}; \quad \omega = 0,30 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0,3} = 20,944 \text{ s}; \quad k = 40 \text{ m}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{40} = 0,157 \text{ m}; \quad v = \frac{\lambda}{T} = 7,49 \times 10^{-3} \text{ m}$$

2.10 Unde tridimensionale

Ecuția undelor tridimensionale se obține prin generalizarea ecuației (2.76). În acest caz vom nota elongația mișcării oscilațiilor executate de particule în mediu u (din cazul undelor unidimensionale) cu ψ (în cazul unei unde tridimensionale)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.77)$$

2.10.1 Unde plane

Considerând o undă armonică $\psi(x, y, z, t) = \psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z)e^{i\omega t}$, relația 2.77 devine:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} \psi_2 \psi_3 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \psi_1 \psi_3 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \psi_1 \psi_2 = -\frac{\omega^2}{v^2} \psi_1 \psi_2 \psi_3 \quad (2.78)$$

Se împarte cu $\psi_1 \psi_2 \psi_3$ și ținem cont că:

$$\frac{\omega^2}{v^2} = k^2 \quad (2.79)$$

Se obține:

$$\frac{1}{\psi_1} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{1}{\psi_2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + \frac{1}{\psi_3} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} = -k^2 \quad (2.80)$$

Pentru ca această egalitate să fie adevărată este necesar ca:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi_1} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} &= -k_1^2 & \frac{1}{\psi_1} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + k_1^2 &= 0 \\ \frac{1}{\psi_2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} &= -k_2^2 & \frac{1}{\psi_2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + k_2^2 &= 0 \\ \frac{1}{\psi_3} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} &= -k_3^2 & \frac{1}{\psi_3} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} + k_3^2 &= 0 \end{aligned}$$

Soluții particulare ale ecuațiilor anterioare sunt:

$$\psi_1 = A_1 e^{\pm i k_1 x}; \quad \psi_2 = A_2 e^{\pm i k_2 x}; \quad \psi_3 = A_3 e^{\pm i k_3 x}$$

Alegem numai cazul în care apare semnul minus ($-$), astfel că:

$$\psi = A e^{i[\omega t - (k_1 x + k_2 y + k_3 z)]} \quad (2.81)$$

Am ales cazul cu minus pentru a obține o undă progresivă. Frontul de undă la un moment dat de timp este definit astfel:

$$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const.} \quad \text{sau} \quad \vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const.} \quad (2.82)$$

$$k_1 x + k_2 y + k_3 z = \text{const.}$$

Aceasta este ecuația unui plan pe care este perpendicular vectorul de propagare $\vec{k}$. Astfel în acest caz unda este una plană. Frontul de undă se deplasează perpendicular pe $\vec{k}$. Se poate defini pentru unda plană armonică vectorul de propagare:

$$\vec{u} = \frac{\vec{k}}{k} \quad (2.83)$$

2.10.2 Unde sferice

Undele sferice sunt determinate de surse punctiforme de perturbație aflate în medii omogene și izotrope. În acest caz elongația ψ a unui punct aflat la distanța A de sursă depinde doar de r , adică $\psi = \psi(r, t)$. În acest caz este util să se scrie ecuația (2.77) în coordonate sferice.

$$\nabla = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.84)$$

Deoarece $\psi = \psi(r, t)$ relația 2.84 devine:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.85)$$

Se face substituția:

$$\psi(r, t) = \frac{f(r, t)}{r} \quad (2.86)$$

și rezultă $f(r, t)$ satisface ecuația:

$$\frac{\partial^2 f(r, t)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(r, t)}{\partial t^2} \quad (2.87)$$

O soluție este unda armonică progresivă:

$$f(r, t) = C e^{i\omega(t - \frac{r}{v})} \quad (2.88)$$

astfel că:

$$\psi(r, t) = \frac{C}{r} e^{i\omega(t - \frac{r}{v})} \quad (2.89)$$

Se observă că pentru undele sferice amplitudinea $A = \frac{C}{r}$ scade cu r , deoarece energia emisă se distribuie pe suprafețe din ce în ce mai mari.

2.11 Energia asociată unei unde

Ne vom limita la energia undei care se propagă printr-o coardă. Undele transportă energie când se propagă printr-un mediu. Să considerăm o undă sinusoidală care se propagă printr-o coardă. Considerăm un element de masă

dm și lungime dx . Deoarece fiecare element execută o mișcare oscilatorie armonică, energia acestui element este:

$$dE = \frac{\omega^2 A^2}{2} dm \quad (2.90)$$

unde $dm = \mu dx$, μ fiind densitatea liniară de masă. Astfel:

$$dE = \frac{\mu \omega^2 A^2}{2} dx \quad (2.91)$$

Energia unei porțiuni de lungime λ din coardă este:

$$E = \int_0^\lambda \frac{\mu \omega^2 A^2}{2} dx = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \lambda \quad (2.92)$$

Când are loc propagarea undei, într-o perioadă, printr-o secțiune a corzii se trece energia E exprimată prin relația (2.92). Atunci rata medie a transferului de energie este:

$$\mathcal{P} = \frac{E}{T} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v \quad (2.93)$$

Expresia ratei transferului de energie poate fi folosită și în cazul undelor sonore. Expresia 2.93 trebuie exprimată în alt mod. Pentru aceasta se ține cont că densitatea liniară de masă se exprimă ca;

$$\mu = \rho S$$

unde ρ este densitatea, iar S este secțiunea porțiunii considerate. Amplitudinea undei sonore o vom nota cu $s_{\max}$. Ea reprezintă în acest caz depărtarea maximă la care poate ajunge un mic element din aer față de poziția sa de echilibru. Astfel:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \rho S v (\omega s_{\max})^2 \quad (2.94)$$

Definim intensitatea I a undei ca energia care trece prin unitatea de arie în unitatea de timp:

$$I = \frac{\mathcal{P}}{S} = \frac{1}{2} \rho v (\omega s_{\max})^2 \quad (2.95)$$

Să considerăm o sursă punctiformă care emite unde în toate direcțiile și o sferă cu raza r centrată pe sursă. Puterea medie $\mathcal{P}$ emisă de sursă trebuie

să fie uniform distribuită pe această sferă. Atunci intensitatea undei la distanța r față de sursă va fi:

$$I = \frac{\mathcal{P}}{S} = \frac{\mathcal{P}}{4\pi r^2} \quad (2.96)$$

Astfel pentru undele sferice intensitatea descrește proporțional cu pătratul distanței de la sursă.

În cazul sunetelor, este convenabil să se utilizeze o scală logaritmică, astfel că în locul intensității undei, se definește nivelul sonor:

$$\beta = 10 \lg \frac{I}{I_0} \quad (2.97)$$

unde I_0 este intensitatea de referință și este considerată ca pragul de audibilitate $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$, iar I este intensitatea undei sonore care se măsoară. Nivelul sonor β se măsoară în dB (decibeli). În Tabelul 2.1 de mai jos sunt prezentate câteva exemple pentru diverse sunete.

Tabel 2.1
Nivelul sonor pentru diverse surse de sunete

Sursa de sunet	$\beta(\text{dB})$
Avion cu reacție	150
Sirenă; concerte rock	120
Motoare puternice	100
Trafic intens	80
Aspirator	70
Conversație normală	50
Șoapte	30
Frunze	10
Pragul de audibilitate	0

Există și un prag dureros cu intensitatea $I = 1 \text{ W/m}^2$. Acest prag sonor corespunde unui nivel sonor $\beta = 120 \text{ dB}$. Expunerea prelungită la astfel de sunete determină apariția unei leziuni la nivelul urechii. Este recomandat să nu se realizeze expuneri la sunete al căror nivel sonor este mai mare decât 90 dB

2.12 Probleme

2.1 Un resort orizontal este deformat sub acțiunea unei forțe $F = 8 \text{ N}$ cu $0,04 \text{ m}$. De capătul resortului este legată o masă $m = 0,2 \text{ kg}$ și apoi resortul este lăsat liber. Neglijând frecările să se determine:

- a) constanta elastică a resortului;
- b) frecvența de oscilație;
- c) perioada de oscilație.

2.2 Un autoturism are masa de $M = 1300 \text{ kg}$ și este susținut de 4 resorturi. Fiecare resort are constanta elastică $k = 20000 \text{ N/m}$. Dacă în autoturism sunt trei persoane cu masa de $m = 200 \text{ kg}$ să se determine frecvența vibrațiilor când autoturismul trece peste o denivelare.

2.3 Un corp oscilează după legea:

$$x = 4 \cos \left(\pi t + \frac{\pi}{4} \right) \text{ cm}$$

- a) Să se determine amplitudinea, pulsația, perioada și frecvența.
- b) Să se determine viteza în funcție de timp.

2.4 Un resort este atașat de tavan. Când un corp este atașat de capătul liber acesta se alungește cu 2 cm . Apoi corpul este scos din poziția de echilibru și este lăsat liber. Care este frecvența oscilațiilor ?

2.5 Un obiect legat de un resort oscilează cu perioada $T = 0,8 \text{ s}$ și amplitudinea de 10 cm . La momentul $t = 0$ corpul se află la $x = 5 \text{ cm}$ la dreapta poziției de echilibru. Care este poziția corpului la $t = 2 \text{ s}$?

2.6 Să se determine frecvența și perioada de oscilație a unui pendul cu lungimea $l = 1 \text{ m}$. Se cunoaște accelerația gravitațională $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

2.7 Ecuația de mișcare a unui particule este:

$$x = 25 \cos 10t \text{ cm}$$

unde x este considerat în cm iar timpul în secunde. La ce moment de timp energia cinetică este de două ori mai mare decât energia potențială.

2.8 Un corp legat de un resort orizontal este deplasat cu $x = 20$ cm din poziția de echilibru și apoi lăsat liber. Oscilațiile au o perioadă egală cu $T = 0,8$ s. În ce poziție viteza corpului este 1 m/s ?

2.9 O undă armonică care se propagă de-a lungul axei Ox , are amplitudinea de $A = 10$ cm, lungimea de undă $\lambda = 30$ cm și frecvența $\nu = 15$ Hz. Mișcarea oscilatorie are loc de-a lungul axei Oy . La $x = 0$ și $t = 0$, $y = 5$ cm.

a) Să se determine numărul de undă, perioada, pulsația și viteza de propagare a undei.

b) Să se scrie expresia undei.

2.10 Să se arate că funcția

$$y(x, t) = A \sin kx \cos \omega t$$

satisface ecuațiilor undelor.

2.11 O undă transversală care este produsă într-o coardă întinsă are viteza de propagare $v = 5$ m/s. Coarda are lungimea de 6 m și masa de 0,06 kg. Care este tensiunea din coardă pentru a se produce această undă?

2.12 O sirenă aflată în vârful unui stâlp emite sunete uniform în toate direcțiile. La distanța $d_1 = 15$ m de sirenă intensitatea sunetelor este de $0,25$ W/m². La ce distanță de sirenă intensitate acestor devine $0,01$ W/m²?

2.13 O coardă de chitară este făcută din oțel a cărui densitate este $\rho = 7800$ kg/m³, are lungimea de 60 cm și diametrul de 0,5 mm. Frecvența fundamentală a corzii este $\nu = 250$ Hz.

a) Să se determine tensiunea în coardă T .

b) Dacă se schimbă tensiunea în coardă cu ΔT , să se calculeze $\Delta \nu / \nu$.

2.14 Două puncte A și B de pe suprafața Pământului sunt la aceeași longitudine și distanțate cu 45 grade în latitudine. Presupunând că în punctul A aflat în apropiere de suprafața Pământului are loc un cutremur care crează unde P și unde S. Undele P se propagă în linie dreaptă cu viteza de 7,8 km/s. Undele S se propagă la suprafața Pământului în mod analog cu valurile și au viteza de 4,5 km/s. Cunoșcând că raza Pământului de 6370 km, care dintre unde atinge prima punctul B și care este diferența dintre momentele în care cele două unde ating punctul B?

Capitolul 3

Termodinamică

3.1 Noțiuni fundamentale

1. *Sistemul termodinamic* reprezintă o porțiune din univers care cuprinde corpuri și câmpuri și care este delimitată de restul universului printr-o barieră fizică sau imaginară. Restul universului poartă numele de mediu extern.

Interacțiunea dintre sistemul termodinamic și mediul extern se realizează prin schimb de energie și schimb de masă.

Pornind de la aceasta, sistemele se pot clasifica în *sisteme deschise* care pot schimba masă și energie cu mediul extern și *sisteme închise* care nu schimbă masă cu mediul extern. Sistemele închise se împart în *sisteme izolate*, care nu schimbă nici energie cu mediul extern și *sisteme neizolate*, care pot schimba energie cu mediul extern.

2. *Parametrii de stare* sunt mărimi ce caracterizează starea sistemului. Relațiile dintre parametrii poartă numele de ecuații de stare.

Din acest motiv o parte din parametri sunt independenți iar ceilalți sunt dependenți. Altă clasificare a parametrilor de stare îi împarte în parametri intensivi și extensivi.

Parametrii intensivi sunt parametri care nu depind de extinderea spațială a sistemului. Ei caracterizează proprietățile locale ale sistemului. Ca exemplu putem da presiunea și temperatura.

Parametrii extensivi sunt parametri care depind de extinderea spațială a sistemului. Ca exemple putem da volumul și masa.

Referitor la stările sistemului putem defini *stări staționare* în care para-

metri sistemului sunt constanți în timp și *stări nestaționare* în care parametri sistemului se modifică în timp. *Stările de echilibru* sunt stările staționare, în care nu există schimb de masă sau energie cu mediul extern.

Principiul fundamental al termodinamicii

Un sistem izolat ajunge întotdeauna după un timp într-o stare de echilibru termodinamic și nu poate ieși de la sine din această stare.

3. Transformări de stare

După natura stărilor intermediare transformările sunt *cvasistatice* (stările intermediare sunt stări de echilibru iar procesele sunt lente) și transformări *necvasistatice* (stările intermediare nu sunt stări de echilibru).

După posibilitatea de a se realiza procesul invers prin aceleași stări de echilibru prin care s-a realizat procesul direct, transformările pot fi *reversibile* și *irreversibile*.

3.2 Energia internă

Energia internă a unui sistem termodinamic este formată din suma energiilor cinetice ale particulelor constitutive ale sistemului, suma energiilor potențiale de interacție dintre particulele sistemului și suma energiilor potențiale ale particulelor în câmpuri externe.

Energia internă este o mărime de stare. Din punct de vedere matematic ea este o diferențială totală exactă.

3.2.1 Forme ale schimbului de energie

Lucrul mecanic

Există două convenții cu privire la lucrul mecanic. Într-una, se consideră pozitiv lucrul mecanic efectuat de mediul extern iar forțele considerate sunt cele cu care mediul extern acționează asupra sistemului. În cealaltă convenție, lucrul mecanic considerat pozitiv este cel efectuat de sistem asupra mediului extern, iar forțele sunt cele cu care sistemul acționează asupra mediului extern. În continuare vom folosi a doua convenție.

Lucrul mecanic efectuat de forțele de presiune

Se consideră un gaz închis într-un recipient cu ajutorul unui piston mobil. Asupra pistonului mobil acționează din interior o forță de presiune egală cu $F_p = pS$, unde S este secțiunea pistonului. Considerând că transformarea

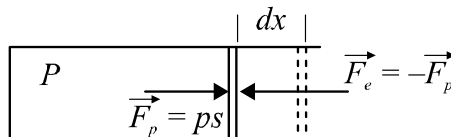


Figura 3.1: Lucrul mecanic al presiunii.

este una cvasistatică, atunci din exterior trebuie să acționeze o forță egală și de sens contrar cu forța de presiune

Lucrul elementar efectuat de un sistem se scrie ca:

$$\delta L = F_p dx = pS dx = p dV \quad (3.1)$$

Faptul că se utilizează notația δL arată că lucrul mecanic elementar este o formă diferențială, dar nu o diferențială totală exactă. Cu alte cuvinte lucrul mecanic nu depinde doar de starea inițială și finală, ci și de stările intermediare prin care trece sistemul. Lucrul mecanic este o mărime care depinde de transformare. Când volumul variază de la valoarea V_1 la valoarea V_2 lucrul mecanic se exprimă ca:

$$L = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (3.2)$$

Lucrul mecanic efectuat la modificarea suprafeței libere a unui lichid

$$\delta L = -\sigma dA \quad (3.3)$$

unde σ este coeficientul de tensiune superficială a lichidului, iar dA este variația suprafeței libere a lichidului.

Generalizând putem spune că:

$$\delta L = \sum_i A_i da_i \quad (e.5)$$

unde A_i sunt parametrii de forță, iar a_i sunt parametrii de poziție (coordonate generalizate).

Aplicație

Să se determine lucrul mecanic efectuat într-o transformare a unui gaz ideal de forma $p = aV$, unde a este o constantă, când volumul crește de la volumul V_1 la V_2 .

Soluție:

Lucrul mecanic elementar este:

$$\delta L = p dV = a V dV$$

Rezultă

$$L = \int_{V_1}^{V_2} a V dV = a \frac{V^2}{2} \Big|_{V_1}^{V_2} = \frac{a}{2} (V_2^2 - V_1^2)$$

3.2.2 Căldura

Sistem izolat adiabatic. *Este sistemul care schimbă energie cu mediul extern doar prin efectuarea de lucru mecanic. În acest caz variația de energie este egală cu $-L$.*

$$\Delta U = -L \quad (3.4)$$

Astfel, dacă sistemul efectuează lucru mecanic asupra mediului ($L > 0$) energia internă a sistemului scade, iar dacă mediul extern efectuează un lucru mecanic asupra sistemului ($L < 0$) energia sistemului crește.

În cazul unor transformări oarecare, relația $\Delta U = -L$ nu mai este satisfăcută. Pentru ca legea conservării energiei să fie satisfăcută, este necesar să se introducă o nouă mărime, care să caracterizeze schimbul de căldură cu mediul, numită căldură. Atunci când se efectuează lucrul mecanic are loc o modificare a parametrilor de poziție ai sistemului (coordonate generalizate). În cazul schimbului de căldură variația energiei sistemului se poate face fără modificări ale parametrilor de poziție ai sistemului. Cantitatea de căldură se notează cu Q .

3.3 Temperatura

În mod practic asociem temperatura cu senzațiile de cald sau rece. Totuși, pentru a înțelege conceptul de temperatură trebuie introduse conceptele de contact termic și echilibru termic.

Modul în care este privit contactul termic este acela în care cele două sisteme sunt plasate într-un container care le izolează de mediul extern. Între sisteme există un perete fix care permite doar schimbul de căldură între ele (perete diaterm). Se spune că cele două sisteme sunt în contact termic. Conform principiului fundamental al termodinamicii, sistemul compus, fiind

izolat tinde către o stare de echilibru. Deoarece parametrii de poziție rămân constanți, peretele dintre cele două sisteme fiind fix, sistemele pot schimba între ele doar căldură. Când schimbul de căldură încetează sistemele ajung la echilibru termic.

Proprietatea cea mai importantă a echilibrului termic este aceea de tranzitivitate. Astfel dacă sistemele S_1 și S_2 puse separat în contact termic cu un sistem S , sunt în echilibru termic cu acesta, atunci S_1 și S_2 sunt în echilibru termic unul cu celălalt.

Această proprietate permite împărțirea sistemelor termodinamice în clase de echivalență. Sistemele dintr-o clasă de echivalență pot fi în echilibru unele cu altele, dar nu pot fi în echilibru cu sistemele din altă clasă de echivalență.

Rezultă că alături de parametrii de poziție (coordonate generalizate), este nevoie de o altă mărime pentru a caracteriza starea sistemului. Această mărime este temperatura (empirică), și ea caracterizează sistemele din punct de vedere al echilibrului termic. Astfel două sisteme aflate la aceeași temperatură sunt în echilibru termic.

3.3.1 Scări de temperatură

Termometrele sunt instrumente utilizate pentru a măsura temperatura unui sistem. Ele sunt bazate pe faptul că anumite proprietăți fizice se schimbă cu modificarea temperaturii. Astfel, când temperatura se modifică, se schimbă volumul unui lichid, dimensiunile unui solid, volumul unui gaz la presiune constantă, presiunea unui gaz la volum constant, rezistența electrică, culoarea unui obiect, etc.

O scară de temperatură comună este scara Celsius în care $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ corespunde punctului de topire al gheții la presiune normală și $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ corespunde temperaturii de fierbere a apei la presiune normală (1 atm). Cele mai utilizate termometre în domeniile obișnuite de temperatură sunt: termometrul cu mercur, care nu poate fi utilizat sub $-30\text{ }^{\circ}\text{C}$ deoarece la această temperatură mercurul îngheață și termometrul cu alcool, care nu poate fi utilizat peste $85\text{ }^{\circ}\text{C}$ deoarece la $85\text{ }^{\circ}\text{C}$ alcoolul începe să fiarbă.

O scară de temperatură utilizată curent în SUA este scara Fahrenheit. În această scară punctul de topire al gheții corespunde la $32\text{ }^{\circ}\text{F}$, iar punctul de fierbere al apei la $212\text{ }^{\circ}\text{F}$. Atunci relația care leagă cele două scări de temperatură este:

$$t\text{ }^{\circ}\text{C} = \frac{5}{9}(\theta - 32)\text{ }^{\circ}\text{F} \quad (3.5)$$

Unul din termometrele cele mai exacte este *termometrul cu gaz la volum constant*. În cazul acestui termometru, mărimea care variază cu temperatura este presiunea gazului. Studiul acestui tip de termometru duce la concluzia că nu pot exista temperaturi mai joase de $-273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$. Acest punct este utilizat ca punct de zero pentru scala temperaturilor absolute și poartă numele de zero absolut. Unitatea de măsură în scara temperaturilor absolute este gradul Kelvin (K) care a fost ales să fie egal în mărime cu un grad Celsius. Notând cu $T_0 = 273,15\text{ K}$, temperatura în grade Celsius se exprimă în funcție de temperatura absolută astfel:

$$t\text{ }^{\circ}\text{C} = (T - T_0)\text{ K} \quad (3.6)$$

Deoarece punctele de topire și fierbere ale apei sunt greu de reprodus ca puncte de referință, pentru noua scară s-a ales punctul triplu al apei (punct în care cele trei faze, lichidă, solidă și gazoasă, sunt în echilibru) care se află la $T = 273,16\text{ K}$. Astfel, 1 K este definit ca $1/273,16$ din diferența dintre temperatura punctului triplu al apei și temperatura de zero absolut.

3.4 Principiul zero. Ecuația de stare

Acesta se poate enunța astfel:

Temperatura este funcție de starea de echilibru a sistemului. O formulare echivalentă este: Parametrii de forță ai sistemului sunt funcții de parametrii de poziție (coordonate generalizate) și temperatură.

Matematic principiu zero se scrie astfel:

$$A_i = A_i(a_1, a_2, \dots, a_n, T) \quad i = 1, \dots, n \quad (3.7)$$

Acestea sunt ecuațiile termice de stare. Deoarece starea sistemului este determinată de parametrii de poziție și temperatură, atunci și energia internă poate fi definită în funcție de aceștia.

$$U = U(a_1, a_2, \dots, a_n, T) \quad (3.8)$$

Această ecuație poartă numele de ecuație calorică de stare.

Ca exemplu vom considera cazul unui fluid:

$$A = p \text{ și } a = V \quad (3.9)$$

Atunci:

$$p = p(V, T) \text{ este ecuația termică de stare} \quad (3.10)$$

$$U = U(V, T) \text{ este ecuația calorică de stare} \quad (3.11)$$

Ecuațiile termice și calorice de stare se obțin fie experimental fie cu ajutorul fizicii statistice. Astfel pentru gazul ideal ecuația termică de stare este:

$$pV = \nu RT \quad (3.12)$$

în care ν este numărul de moli, $R = 8314 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$ este constanta universală a gazelor. Numărul de moli se poate exprima funcție de masa gazului M sau N numărul de molecule sau atomi:

$$\nu = \frac{M}{\mu} = \frac{N}{N_A} \quad (3.13)$$

unde μ este masa molară, iar $N_A = 6,023 \times 10^{23}$ molecule/mol este numărul lui Avogadro.

Ecuația calorică de stare a gazului ideal este:

$$U = \nu C_{\mu V} T \quad (3.14)$$

unde $C_{\mu V}$ reprezintă căldura molară la volum constant.

Pentru gazul real ecuația termică de stare poartă numele de ecuația van der Waals:

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2} \right) (V - \nu b) = \nu RT \quad (3.15)$$

în care a și b sunt constante pozitive și care depind de gazul considerat.

Ecuația ia în considerare forțele de atracție dintre moleculele gazului, astfel că presiunea gazului ideal este mai mare decât cea a gazului real.

Acest lucru se realizează prin intermediul termenului $\frac{\nu^2 a}{V^2}$. În plus volumul în care se mișcă gazul real este mai mic, datorită volumului propriu al moleculelor νb .

3.5 Principiul I al termodinamicii

Principiu I al termodinamicii reprezintă legea de conservare a energiei pentru sistemele termodinamice închise. Ea leagă variația energiei interne

a sistemului de lucrul mecanic și căldura schimbată de acesta cu mediul extern. Formularea matematică a principiului I este;

$$\Delta U = Q - L \quad (3.16)$$

În cazul unei transformări infinitezimale:

$$dU = \delta Q - \delta L \quad (3.17)$$

Notățiile δQ și δL arată că δQ și δL sunt forme diferențiale, dar nu sunt diferențiale totale exacte, precum variația energiei interne dU . Din punct de vedere fizic energia internă este o funcție de stare, în timp ce căldura și lucrul mecanic sunt mărimi de transformare sau proces, adică variația lor depinde de stările intermediare prin care trece sistemul.

În cazul unui sistem izolat $Q = L = 0$. Atunci $\Delta U = 0$ și $U_i = U_f$. Energia internă a unui sistem izolat rămâne constantă.

În cazul unui proces ciclic $\Delta U = 0$ și $Q = L$.

Căldura δQ poate fi exprimată în diverse moduri, care sunt legate de modul în care variază temperatura sistemului. Exprimarea lui δQ se face cu ajutorul coeficienților calorigici. Astfel:

$$\delta Q = C dT \quad (3.18)$$

unde C poartă numele de capacitate calorică a corpului. În general capacitatea calorică a corpului depinde de modul în care este variată temperatura corpului. Se definesc capacități calorice la volum constant, la presiune constantă și în alte condiții. Dacă se consideră un mol din substanța respectivă, capacitatea calorică C poartă numele de căldură molară și o vom nota C_μ , astfel că:

$$\delta Q = \nu C_\mu dT \quad (3.19)$$

În același mod, se definește și căldura specifică c , care reprezintă căldura necesară pentru a schimba temperatura cu 1°C a unității de masă.

$$\delta Q = mcdT \quad (3.20)$$

Relația $\Delta U = Q - L$ este adevărată cu următoarea convenție: Q este pozitivă, dacă este primită de la mediul extern, iar L este pozitiv, dacă este efectuat de sistem asupra mediului extern.

Aplicație

La temperaturi foarte mici căldura molară a sării variază cu temperatura în concordanță cu legea lui Debye este:

$$C = k \frac{T^3}{\theta^3}$$

unde $k = 1940 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$ și $\theta = 281 \text{ K}$. Care este căldura necesară pentru ca unui mol de sare să-i crească temperatura de la $T_1 = 10 \text{ K}$ la $T_2 = 30 \text{ K}$.

Soluție:

$$\delta Q = C dT$$

$$\begin{aligned} Q &= \int_{T_1}^{T_2} C dT = \int_{T_1}^{T_2} k \frac{T^3}{\theta^3} dT = \frac{k}{4\theta^3} (T_2^4 - T_1^4) \\ Q &= \frac{1940}{4 \times 281^3} (30^4 - 10^4) = 17,487 \text{ J} \end{aligned}$$

3.6 Aplicații ale Principiului I

3.6.1 Coeficienții calorici

În continuare vom considera procese reversibile. Din expresia Principiului I:

$$dU = \delta Q - \delta L$$

căldura schimbată de sistem cu mediul extern se exprimă ca:

$$\delta Q = dU + \delta L = dU + p dV \quad (3.21)$$

În cazul fluidelor sistemul poate fi descris de parametrul de poziție V și de temperatura T . Atunci U energia internă este funcție de V și T .

$$U = U(V, T)$$

Rezultă prin diferențiere:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV \quad (3.22)$$

Indicii V și T arată că derivatele respective se fac ținând constant volumul și respectiv temperatura. Rezultă:

$$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] dV \quad (3.23)$$

Considerând $V = \text{const.}$ putem defini capacitatea calorică la volum constant:

$$C_V = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad (3.24)$$

Considerând $T = \text{const.}$ putem defini căldura latentă:

$$\lambda = \left(\frac{\delta Q}{dV} \right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \quad (3.25)$$

Trebuie remarcat că este mai ușor de studiat sistemele în condiții de presiune constantă. Din acest motiv se definește o nouă funcție de stare numită entalpie:

$$H = U + pV \quad (3.26)$$

Se diferențiază și se obține:

$$dH = \delta Q - pdV + pdV + Vdp = \delta Q + Vdp \quad (3.27)$$

Se observă că la $p = \text{const.}$

$$\delta Q = dH \quad (3.28)$$

adică variația entalpiei la presiune constantă, este egală cu căldura schimbată cu mediul extern.

3.6.2 Transformările gazului ideal

Transformarea izocoră

Transformarea izocoră este transformarea în care volumul sistemului rămâne constant. Lucrul mecanic este nul, deoarece variația de volum este nulă:

$$L = p\Delta V = 0 \quad (3.29)$$

Căldura schimbată de sistem cu mediul extern este:

$$Q = \nu C_{\mu V} \Delta T \quad (3.30)$$

Atunci din Principiul I rezultă:

$$\Delta U = \nu C_{\mu V} \Delta T \quad (3.31a)$$

Deoarece U este o mărime de stare, expresia dată de relația 3.31a este valabilă pentru orice fel de transformare suferită de gazul ideal între două stări. Astfel energia internă a gazului ideal se poate exprima ca:

$$U = \nu C_{\mu V} T + \text{const.} \quad (3.32)$$

Rezultă că energia internă este definită până la o constantă arbitrară. În continuare însă, constanta o vom considera zero și vom utiliza pentru energia internă a gazului ideal formula:

$$U = \nu C_{\mu V} T \quad (3.33)$$

Observație: Formula (3.33) exprimă variația energiei interne pentru un sistem închis. În cazul unui sistem deschis, atunci când numărul de moli și temperatura variază de la valorile ν_1, T_1 la valorile ν_2, T_2 , variația energiei interne se scrie ca:

$$\Delta U = \nu_2 C_{\mu V} T_2 - \nu_1 C_{\mu V} T_1 \quad (3.34)$$

Aplicație

Să se determine variația energiei interne a aerului dintr-o cameră când temperatura crește de la valoarea $t_1 = 23^\circ\text{C}$ la $t_2 = 30^\circ\text{C}$. Volumul camerei este $V_1 = 30 \text{ m}^3$, iar presiunea aerului este $p_0 = 10^5 \text{ N/m}^2$.

Soluție

Camera este un sistem deschis și atunci pentru variația energiei interne a aerului din aceasta, se va utiliza formula (3.34), unde indicele 1 se referă la mărimile din starea inițială iar indicele 2 se referă la mărimile din starea finală.

Ecuția de stare în starea inițială este:

$$p_0 V = \nu_1 R T_1 \quad (3.35)$$

Ecuția de stare în starea finală este:

$$p_0 V = \nu_2 R T_2 \quad (3.36)$$

deoarece presiunea atmosferică nu se schimbă. Ținând cont de relațiile (3.35) și (3.36) rezultă:

$$\nu_1 T_1 = \nu_2 T_2$$

și atunci:

$$\Delta U = 0$$

Transformarea izobară

Transformarea izobară este transformarea care are loc la presiune constantă. Deoarece presiunea este constantă, expresia lucrului mecanic este:

$$L = p\Delta V \quad (3.37)$$

Cantitatea de căldură schimbată de sistem cu mediul extern este:

$$Q = \nu C_{\mu p} \Delta T \quad (3.38)$$

unde $C_{\mu p}$ este căldura molară la volum constant. Variația energiei interne este:

$$\Delta U = \nu C_{\mu V} \Delta T \quad (3.39)$$

Înlocuind aceste relații în relația Principiului I (3.16) se obține:

$$\nu C_{\mu V} \Delta T = \nu C_{\mu p} \Delta T - p\Delta V \quad (3.40)$$

Ținând cont de ecuațiile de stare din starea inițială și finală:

$$pV_1 = \nu RT \quad ; \quad pV_2 = \nu RT_2$$

se obține:

$$p(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1) = \nu R\Delta T$$

și din relația (3.40) se obține relația Robert-Mayer pentru gazul ideal:

$$C_{\mu V} = C_{\mu p} - R \quad (3.41)$$

Transformarea izotermă

Transformarea izotermă este transformarea care are loc la temperatură constantă. În cazul acestei transformări $\Delta T = 0$. Atunci $\Delta U = 0$ și $Q = L$. Deoarece în cursul transformării presiunea variază în funcție de volum, pentru calculul lucrului mecanic se va folosi formula

$$L = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (3.42)$$

Din ecuația de stare se exprimă presiunea ca fiind $p = \nu RT/V$. Atunci lucrul mecanic efectuat de gaz este:

$$L = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (3.43)$$

Trasformarea adibatică

Transformarea adiabatică este transformarea în care sistemul nu primește și nu cedează căldură. Din primul principiu rezultă că:

$$L = -\Delta U \quad (3.44)$$

Deși sistemul nu schimbă căldură cu exteriorul, temperatura sa se modifică astfel: la destindere sistemul efectuează lucru mecanic, energia sa internă scade și gazul se răcește; la comprimare sistemul primește lucru mecanic, energia sa internă crește și gazul se încălzește. Deoarece:

$$\Delta U = \nu C_{\mu V} \Delta T \quad (3.45)$$

$$L = -\nu C_{\mu V} \Delta T = -C_{\mu V} (\nu T_2 - \nu T_1) \quad (3.46)$$

Ținând cont de ecuațiile de stare în starea inițială $p_1 V_1 = \nu R T_1$ și în starea finală $p_2 V_2 = \nu R T_2$ din relația (3.46) rezultă:

$$L = -\frac{C_{\mu V}}{R} (p_2 V_2 - p_1 V_1) \quad (3.47)$$

Considerând o transformare infinitezimală:

$$dL = p dV = -dU = -\nu C_{\mu V} dT$$

și ținând cont de ecuația termică de stare a gazului ideal se obține:

$$\begin{aligned} \frac{\nu R T}{V} dV &= -\nu C_{\mu V} dT \\ \frac{dT}{T} &= -\frac{R}{C_{\mu V}} \frac{dV}{V} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Notând cu $\gamma = C_{\mu p}/C_{\mu V}$ exponentul adiabatic și utilizând relația lui Robert-Mayer $R = C_{\mu p} - C_{\mu V}$ ecuația (3.48) devine:

$$\frac{dT}{T} = -\frac{C_{\mu p} - C_{\mu V}}{C_{\mu V}} \frac{dV}{V} = -(\gamma - 1) \frac{dV}{V} \quad (3.49)$$

Atunci:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

și:

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = -(\gamma - 1) \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (3.50)$$

sau: $\times$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \quad (3.51)$$

Rezultă:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \quad (3.52)$$

Deoarece stările considerate sunt alese arbitrar, înseamnă că în orice transformare adiabatică se poate scrie:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const.} \quad (3.53)$$

Utilizând ecuația termică de stare se poate scrie ecuația transformării în variabile (T, p) și (p, V) . Deoarece $T = pV/\nu R$ din ecuația 3.53 se obține:

$$pV^\gamma = \text{const.} \quad (3.54)$$

În coordonate T și p ecuația transformării adiabate este:

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const.}$$

3.6.3 Relația Robert-Mayer pentru un fluid oarecare

Din expresia Principiului I, pentru care lucrul mecanic este determinat doar de forțele de presiune rezultă:

$$\delta Q = dU + p dV$$

Cum energia internă este funcție de volum și temperatură:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV \quad (3.55)$$

Se obține:

$$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] dV \quad (3.56)$$

De aici:

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (3.57)$$

și cum capacitatea calorică a sistemului la volum constant este:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

rezultă relația Robert-Mayer pentru un fluid oarecare:

$$C_p - C_V = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (3.58)$$

Aplicație

Un mol de gaz urmează legea van der Waals:

$$\left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT$$

iar energia sa internă este:

$$U = CT - \frac{a}{V}$$

unde V este volumul molar, iar C și a sunt constante, să se calculeze căldurile molare la volum și presiune constantă $C_{\mu V}$ și $C_{\mu p}$.

Soluție:

$$C_{\mu V} = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = C$$

Pentru calculul căldurii molare la presiune constantă se utilizează relația Rober-Mayer:

$$C_{\mu p} = C_{\mu V} + \left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = C_V + \frac{\left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right]}{\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T &= \frac{a}{V^2} \\
p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T &= \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} + \frac{a}{V^2} = \frac{RT}{V-b} \\
T &= \frac{1}{R} \left(p + \frac{a}{V^2}\right) (V-b) \\
\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p &= -\frac{1}{R} \frac{2a}{V^3} (V-b) + \frac{1}{R} \left(p + \frac{a}{V^2}\right)
\end{aligned}$$

Rezultă:

$$C_{\mu p} = C_{\mu V} + \frac{R}{1 - \frac{2a}{RTV} \left(1 - \frac{b}{V}\right)^2}$$

3.6.4 Definirea coeficienților termici

Coeficientul de dilatare izobară permite determinarea variației volumului sistemului când temperatura variază și presiunea este constantă:

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad (3.59)$$

$$dV = \alpha V dT$$

Coeficientul de compresibilitate izotermă permite determinarea variației volumului gazului când este supus acțiunii unei presiuni din exterior la temperatură constantă:

$$K_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \quad (3.60)$$

$$dV = -K_T V dp$$

Semnul minus apare deoarece o creștere a presiunii duce la micșorarea volumului, și invers ($dp > 0$ implică $dV < 0$).

Coeficientul termic al presiunii permite determinarea variației presiunii sistemului aflat la volum constant când variază temperatura:

$$\beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \quad (3.61)$$

$$dp = \beta p dT$$

Între cei trei coeficienți există relația:

$$\alpha = pK_T\beta$$

Relația este importantă pentru determinarea coeficientului termic al presiunii al corpurilor solide sau lichide, pentru care este practic imposibil să le fie menținut volumul constant la încălzire.

Considerând presiunea funcție de volum și temperatură $p = p(V, T)$:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T dV$$

Dar

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V &= \beta p \\ \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T &= \frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T} = -\frac{1}{VK_T}\end{aligned}$$

Atunci:

$$dp = \beta p dT - \frac{1}{VK_T} dV$$

Dacă $p = \text{const.}$

$$\beta p dT - \frac{1}{VK_T} dV = 0$$

rezultă:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \beta p V K_T$$

Atunci:

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = p\beta K_T \quad (3.62)$$

3.7 Principiul al II-al termodinamicii

3.7.1 Formulări ale Principiului al II-lea

Primul principiu al termodinamicii introduce o funcție de stare numită energie internă. Principiul I nu face o deosebire calitativă între formele schimbului de energie căldură și lucru mecanic.

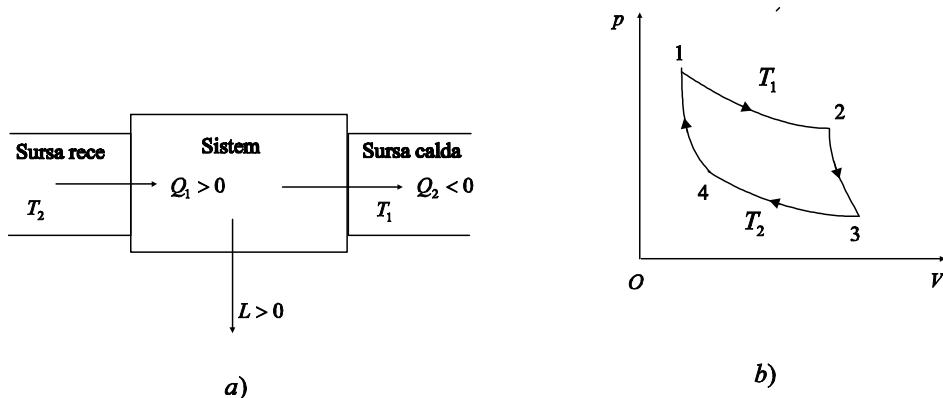


Figura 3.2: a) Mașină termică bitermă. b) Ciclul Carnot

Dacă considerăm un proces ciclic $\Delta U = 0$ rezultă că $Q = L$. Din punct de vedere practic ne interesează ca sistemul să efectueze lucru mecanic, sau mai precis să transforme o cantitate de căldură în lucru mecanic util. Problema care s-a pus a fost aceea să se transforme întreaga cantitate de căldură în lucru mecanic. Pentru aceasta procesul ciclic ar trebui să fie unul monoterm, adică sistemul să fie în contact cu o singură sursă de căldură de la care să preia căldura și să o transforme în lucru mecanic. Carnot a ajuns la concluzia că un astfel de proces nu poate avea loc. O formulare care descrie într-un mod general acest rezultat este aceea dată de Thomson care spune că:

Într-o transformare ciclică monotermă sistemul nu poate ceda lucru mecanic în exterior. Dacă transformarea este și reversibilă sistemul primește lucru mecanic din exterior.

O formulare echivalentă este cea a lui Clausius:

Este imposibil de realizat o transformare al cărui unic rezultat să fie transferul căldurii de la o sursă cu temperatură dată la o sursă cu temperatură mai mare.

3.7.2 Mașină termică bitermă

Având în vedere faptul că nu se poate crea o mașină termică monotermă, vom considera o mașină termică bitermă (Fig. 3.2a)

Considerând o transformare ciclică

$$Q - L = 0 \quad (3.63)$$

$$Q_1 + Q_2 - L = 0 \quad (3.64)$$

$$L = Q_1 + Q_2 = Q_1 - |Q_2| \quad (3.65)$$

Numim Q_1 căldura primită de la sursa caldă iar $|Q_2|$ căldura cedată sursei reci. Definim randamentul mașinii termice ca:

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} \quad (3.66)$$

3.7.3 Ciclu Carnot reversibil

Ciclu Carnot este ciclu format din două izoterme și două adiabate. În Fig. 3.2b, este prezentat ciclu Carnot efectuat de un gaz ideal.

Căldurile schimbate cu mediul extern pe cele patru transformări sunt:

$$Q_{12} = L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu R T_1}{V} dV = \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} > 0 \quad (3.67)$$

Deoarece Q_{12} este pozitivă, ea este o căldură primită. Pe transformarea 2 - 3:

$$Q_{23} = 0 \quad (3.68)$$

deoarece transformarea este una adiabatică.

$$Q_{34} = \nu R T_2 \ln \frac{V_4}{V_3} < 0 \quad (3.69)$$

Deoarece Q_{34} este negativă ea este căldura cedată.

$$Q_{41} = 0 \quad (3.70)$$

deoarece transformarea 4-1 este o transformare adiabatică. Rezultă:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{34}|}{Q_{12}} = 1 - \frac{\nu R T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\nu R T_1 \ln \frac{V_1}{V_2}} \quad (3.71)$$

Ținând cont de ecuațiile transformărilor adiabatice 2-3 și 4-1

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \quad (3.72)$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1} \quad (3.73)$$

rezultă:

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2}$$

Notând $Q_1 \equiv Q_{12}$ căldura schimbată de sistem cu sursa caldă, și $Q_2 \equiv Q_{34}$ căldura schimbată de sistem cu sursa rece, randamentul Ciclului Carnot se scrie:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (3.74)$$

Trebuie remarcat că randamentul ciclului Carnot depinde doar de temperaturile izvorului cald și a celui rece. Afirmatia rămâne adevărată și în cazul că se modifică substanța de lucru. Astfel randamentul ciclului Carnot depinde numai de temperaturile surselor rece și caldă.

Din relația (3.74) se obține că:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad (3.75)$$

Fie un sistem care suferă o transformare ciclică reversibilă în cursul căruia sistemul schimbă cu cele n termostate de temperaturi $T_i (i = 1, \dots, n)$, cantitățile de căldură $Q_i (i = 1, \dots, n)$. Se poate demonstra, ca și în cazul ciclului Carnot, că:

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} = 0 \quad (3.76)$$

Dacă se consideră acum că sistemul suferă o transformare ciclică reversibilă în cursul căreia sistemul schimbă căldură cu o infinitate de termostate a căror temperaturi variază continuu, atunci egalitatea (3.76) se scrie:

$$\oint \frac{\delta Q_{rev}}{T} = 0 \quad (3.77)$$

Semnul $\oint$ arată că avem de-a face cu o integrală pe o curbă închisă; indicele rev arată că parcursul este unul reversibil. Egalitatea (3.77) arată că din punct de vedere matematic mărimea $\frac{\delta Q}{T}$ este o diferențială totală exactă. Astfel putem da o formă cantitativă Principiului al II-lea al termodinamicii.

Există o funcție de stare S numită entropie, a cărei variație dS , într-un proces reversibil în care sistemul schimbă căldura δQ cu un termostat aflat la temperatura T , este:

$$dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T} \quad (3.78)$$

Spunem că $\frac{1}{T}$ este factor integrant pentru forma diferențială δQ . Formele diferențiale care admit factori integranți poartă numele de *forme diferențiale olonome*.

De aici rezultă diferența matematică între lucrul mecanic și căldură. Forma diferențială δL care exprimă lucrul mecanic elementar nu este o formă diferențială olonomă.

Egalitatea (3.77) poartă numele de egalitatea lui Clausius.

Ținând cont că $\delta Q = TdS$ și $\delta L = \sum A_i da_i$, relația (3.17) care reprezintă forma diferențială a Principiului I se scrie:

$$dU = TdS - \sum A_i da_i \quad (3.79)$$

Această relație este ecuația fundamentală pentru procesele reversibile.

În cazul proceselor adiabatic reversibile $\delta Q = 0$. Atunci $dS = 0$ și $S = \text{const.}$

O altă caracteristică a entropiei este aceea că este o mărime extensivă. Entropia a două sisteme este egală cu suma entropiilor sistemelor luate separat.

3.7.4 Variația entropiei în procese ireversibile

Pentru a vedea modul în care această mărime variază, vom considera cazul unui proces ireversibil în care schimbul de căldură cu mediul exterior este nul.

Pentru aceasta vom considera destinderea adiabatică în vid (Fig. 3.3).

Gazul ideal se află în volumul V_1 la temperatura T . Volumul V_2 este vidat, iar învelișul izolează adiabatic cele două compartimente. Se deschide robinetul și gazul pătrunde în compartimentul de volum V_2 . În acest proces ireversibil $Q = 0$. În plus, $L = 0$, deoarece trecerea gazului în cel de-al doilea compartiment se face datorită agitației termice. Atunci $\Delta U = 0$. Cum $U = \nu C_{\mu V} T$, este energia internă a gazului ideal, rezultă $\Delta T = 0$.

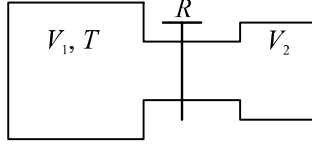


Figura 3.3: Destinderea adiabatică în vid

Deoarece entropia este funcție de stare, nu are importanță modul în care se ajunge la starea finală. Din acest motiv considerăm o transformare izotermă de la volumul V_1 la volumul $V_1 + V_2$. Căldura schimbată de sistem cu mediul este:

$$Q = L = \nu RT \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} \quad (3.80)$$

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \nu R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} > 0 \quad (3.81)$$

Rezultă că variația entropiei este pozitivă. Astfel într-o transformare ireversibilă *entropia sistemului crește* (în lipsa schimbului de căldură).

Din exemplul anterior, putem lega entropia de dezordinea în sistem. Astfel în starea inițială când volumul ocupat de gaz este mic, dezordinea în sistem este mai mică decât în starea finală, când volumul ocupat de gaz este mai mare.

Astfel, pentru un proces infinitezimal ireversibil în care sistemul nu schimbă căldură cu mediul extern:

$$dS = d_i S > 0 \quad (3.82)$$

unde cu indicele i am pus în evidență caracterul ireversibil al procesului.

Deoarece pentru un sistem izolat variația entropiei nu poate fi decât pozitivă, atunci starea de echilibru a unui astfel de sistem se obține când entropia are valoare maximă.

Dacă sistemul nu este izolat variația de entropie este datorată și schimbului de căldură cu mediul extern:

$$d_e S = \frac{\delta Q}{T} \quad (3.83)$$

unde T este temperatura mediului sau a termostatului cu care sistemul este în contact. Astfel, variație totală de entropie este:

$$dS = d_i S + d_e S = d_i S + \frac{\delta Q}{T} \quad (3.84)$$

Cum $d_i S > 0$

$$dS > \frac{dQ}{T} \quad (3.85)$$

Considerând un proces ciclic ireversibil:

$$\oint dS > \oint \frac{dQ}{T} \quad (3.86)$$

Deoarece $\oint dS = 0$, rezultă că pentru procese ireversibile:

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0 \quad (3.87)$$

Relația (3.87) poartă numele de inegalitatea lui Clausius.

Aplicație

Presupunem că $m_1 = 1$ kg de apă la $t_1 = 0$ °C este amestecat cu o masă de $m_2 = 3$ kg de apă cu $t_2 = 100$ °C. Să se calculeze variația de entropie a sistemului. Căldura specifică a apei este $c = 4185$ J/kg·K.

Soluție:

Din ecuația calorimetrică (cantitatea de căldură cedată de un corp este egală cu cantitatea de căldură primită de celălalt corp)

$$m_1 c (t_e - t_1) = m_2 c (t_2 - t_e)$$

rezultă temperatura de echilibru:

$$t_e = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2} = \frac{3 \times 100}{4} = 75 \text{ °C}$$

Deoarece entropia este o mărime de stare presupunem că cele două mase de apă suferă transformări reversibile astfel că:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_e} \frac{m_1 c dT}{T} + \int_{T_2}^{T_e} \frac{m_2 c dT}{T} = m_1 c \ln \frac{T_e}{T_1} + m_2 c \ln \frac{T_e}{T_2} = 144,68 \text{ J/K}$$

3.7.5 Legătura dintre ecuația calorică de stare și ecuația termică de stare

Considerând un proces reversibil, variația energiei interne a sistemului este:

$$dU = \delta Q - p dV = T dS - p dV \quad (3.88)$$

rezultă:

$$dS = \frac{dU + pdV}{T} \quad (3.89)$$

Deoarece:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV$$

rezultă:

$$dS = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + \frac{p}{T} \right] dV \quad (3.90)$$

Atunci:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad (3.91)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + \frac{p}{T} \quad (3.92)$$

Deoarece pentru funcții continue și de două ori derivabile, derivatele de ordin doi comută (teorema Schwartz-Clairaut), se poate scrie:

$$\frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \right]_T = \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + \frac{p}{T} \right]_V \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} &= -\frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + \frac{1}{T} \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - \frac{p}{T^2} \\ \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T &= T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p \end{aligned} \quad (3.94)$$

O astfel de relație permite calculul energiei interne a unui sistem dacă se cunoaște ecuația termică de stare. Ca exemplu vom considera cazul gazului real a cărui ecuație de stare este cea dată de relația van der Waals:

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2} \right) (V - \nu b) = \nu RT \quad (3.95)$$

Din ecuația (3.95) presiunea este:

$$p = \frac{\nu RT}{V + \nu b} - \frac{\nu^2 a}{V^2} \quad (3.96)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_T = \frac{\nu R}{V + \nu b} \quad (3.97)$$

Astfel ținând cont de relațiile (3.94), (3.96) și (3.97) se obține:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p = \frac{\nu^2 a}{V^2} \quad (3.98)$$

Atunci

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = \nu C_{\mu V} dT + \frac{\nu^2 a}{V^2} dV \quad (3.99)$$

Considerînd căldura molară la volum constantă independentă de temperatură prin integrarea relației (3.99) se obține:

$$U = U_0 + \nu C_{\mu V} T - \frac{\nu^2 a}{V} \quad (3.100)$$

Relația (3.100) arată că energia internă a gazului real este definită doar până la o constantă aditivă.

3.8 Funcții caracteristice

O modalitate de a studia un sistem termodinamic este aceea prin care se introduc anumite funcții de stare, numite funcții caracteristice sau potențiale termodinamice. O funcție caracteristică este o funcție de stare din cunoașterea căreia se pot determina toate proprietățile sistemului.

3.8.1 Energia internă

Ecuția fundamentală a termodinamicii:

$$dU = TdS - pdV \quad (3.101)$$

leagă cinci mărimi: p , V , T , U , S . Starea sistemului pentru un fluid este determinată de doi parametri, V și T . Rezultă că ecuația fundamentală conține încă trei mărimi necunoscute. Pentru determinarea acestora mai este nevoie de încă două ecuații, și anume:

- ecuația termică de stare $p = p(V, T)$;
- ecuația calorică de stare $U = U(V, T)$.

Trebuie să remarcăm că dacă alegem pentru energia internă variabilele independente S și V este nevoie doar de o singură ecuație $U = U(S, V)$ pentru a descrie sistemul. Astfel:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S dV \quad (3.102)$$

Din relațiile (3.101) și (3.102) rezultă:.

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V \text{ și } p = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S \quad (3.103)$$

În plus dacă se calculează derivata a doua se obține capacitatea calorică și coeficientul de compresibilitate adiabatică:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} \right)_V = \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_V = \frac{1}{\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V} = \frac{T}{T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V} = \frac{T}{C_V} \quad (3.104)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial V^2} \right)_S = - \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S = - \frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S} = - \frac{1}{V} \frac{T}{\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S} = \frac{1}{V k_S} \quad (3.105)$$

unde $K_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S$ este coeficientul de compresibilitate adiabatică.

Astfel, din cunoașterea energiei interne a sistemului în funcție de entropie și volum se pot determina ceilalți parametri, precum și diverși coeficienți calorici și termici. Totuși, o astfel de dependență este una greu de obținut. Din acest motiv nu se lucrează cu energia internă ca funcție caracteristică.

3.8.2 Energia liberă

Energia liberă se definește ca:

$$F = U - TS \quad (3.106)$$

$$dF = dU - TdS - SdT = TdS - pdV - TdS - SdT \quad (3.107)$$

$$dF = -pdV - SdT \quad (3.108)$$

Această relație sugerează faptul că energia liberă este o funcție caracteristică în V și T :

$$F = F(V, T) \quad (3.109)$$

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T dT + \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V dV \quad (3.110)$$

Rezultă că din cunoașterea energiei libere se obține presiunea și entropia:

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \text{ și } S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V \quad (3.111)$$

Ca și în cazul energiei interne, efectuând derivatele de ordin doi se pot calcula capacitatea calorică la volum constant și coeficientul de compresibilitate izotermă:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_V = - \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V$$

Astfel putem exprima capacitatea calorică la volum constant:

$$C_V = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_V$$

O altă derivată este:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial V^2} \right)_T = - \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T$$

Atunci coeficientul de compresibilitate izoterm se exprimă ca:

$$k_T = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = - \frac{1}{V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T} = \frac{1}{V} \frac{1}{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial V^2} \right)_T}$$

În cazul că $T = \text{const.}$ (proces izoterm ireversibil) lucrul mecanic efectuat de sistem este egal cu minus variația energiei libere.

$$dF = -pdV = -\delta L \quad (3.112)$$

Aceasta înseamnă că atunci când sistemul efectuează un lucru mecanic energia liberă scade. Să considerăm un proces ireversibil izoterm:

$$\frac{\delta Q}{T} \leq dS \quad (3.113)$$

$$\frac{Q}{T} \leq S_f - S_i \quad (3.114)$$

$$Q \leq TS_f - TS_i \quad (3.115)$$

$$\Delta U + L \leq TS_f - TS_i \quad (3.116)$$

$$L \leq -\Delta U + T\Delta S = -\Delta U + \Delta(TS) = -\Delta(U + TS) \quad (3.117)$$

$$L \leq -\Delta F \quad (3.118)$$

Lucrul mecanic maxim pe care îl efectuează un sistem termodinamic aflat în contact cu un termostat este egal cu minus variația energiei libere. Acesta este motivul pentru care funcția poartă denumirea de energie liberă. Variația ei este legată de lucrul mecanic care poate fi efectuat, sau mai precis de cantitatea de energie termică din sistem care poate fi transformată în energie mecanică (cât din energia dezordonată se poate transforma în energie ordonată).

3.8.3 Condiția de echilibru pentru un sistem cu volum constant aflat în contact cu un termostat.

În cazul unui sistem izolat $dS \geq 0$. Aceasta înseamnă că entropia unui sistem izolat când în interiorul lui au loc procese ireversibile crește. Rezultă că atunci când se atinge echilibrul entropia va avea valoarea maximă. Să considerăm cazul unui sistem aflat la $T = ct.$ și $V = ct.$

$$F = U - TS \quad (3.119)$$

$$U = F + TS \quad (3.120)$$

$$dU = dF + TdS + SdT \quad (3.121)$$

$$dQ = dF + TdS + SdT - pdV \quad (3.122)$$

Dar:

$$dQ \leq TdS \quad (3.123)$$

$$TdS \geq dF + TdS + SdT - pdV \quad (3.124)$$

$$dF \leq -SdT - pdV \quad (3.125)$$

Se observă că atunci când $T = const.$ și $V = const.$

$$dF \leq 0 \quad (3.126)$$

Aceasta înseamnă, că un sistem aflat la temperatură constantă și volum constant ajunge la echilibru termodinamic când valoarea energiei sale libere devine minimă.

3.8.4 Entalpia

Entalpia se definește ca:

$$H = U + pV \quad (3.127)$$

$$dH = TdS - pdV + Vdp + pdV == TdS + Vdp \quad (3.128)$$

Cum $H = H(S, p)$ atunci:

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_p dS + \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_S dp \quad (3.129)$$

Rezultă:

$$T = - \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_p \text{ și } V = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_S \quad (3.130)$$

3.8.5 Entalpia liberă (potențialul Gibbs)

În multe transformări termodinamice presiunea și temperatura sistemului nu variază și rămân egale cu presiunea și temperatura mediului ambiant. Să considerăm o transformare la temperatură constantă și presiunea constantă. Atunci:

$$L = p[V_f - V_i]$$

Deoarece transformarea se efectuează la temperatură constantă:

$$L \leq F_i - F_f$$

Astfel:

$$pV_f - pV_i \leq F_i - F_f$$

$$F_f + pV_f \leq F_i + pV_i$$

Definim o nouă funcție de stare pe care o notăm cu:

$$G = F + pV = U - pV - TS \quad (3.131)$$

și care poartă numele de *entalpie liberă* sau *potențialul Gibbs*. Atunci:

$$G_f \leq G_i$$

a

Rezultă că într-o transformare efectuată la temperatură constantă și presiune constantă potențialul Gibbs nu poate să crească. Prin urmare, dacă presiunea și temperatura unui sistem termodinamic sunt menținute constante, starea sistemului în care entalpia liberă este minimă, este o stare de echilibru.

Diferențiem relația (3.131) și se obține:

$$dG = TdS - pdV + pdV + Vdp - TdS - SdT \quad (3.132)$$

$$dG = Vdp - SdT \quad (3.133)$$

Deoarece $G = G(p, T)$:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p dT \quad (3.134)$$

rezultă:

$$V = - \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_T \text{ și } S = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p \quad (3.135)$$

3.8.6 Entropia

Din egalitatea fundamentală a termodinamicii:

$$dU = TdS - pdV \quad (3.136)$$

$$dS = \frac{dU + pdV}{T} \quad (3.137)$$

Rezultă că entropie S poate fi considerată o funcție caracteristică în U și V adică $S = S(U, V)$. Astfel:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_V \text{ și } \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_U = \frac{p}{T} \quad (3.138)$$

3.9 Sisteme deschise

Considerăm că sistemul este deschis. În acest caz, entropia se va exprima ca fiind funcție de energia internă, volumul și masa sistemului:

$$S = S(U, V, M) \quad (3.139)$$

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right) dU + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right) dV + \left(\frac{\partial S}{\partial M} \right) dM \quad (3.140)$$

Semnificația primelor două derivate este dată de relațiile (3.138):

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}; \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{p}{T} \quad (3.141)$$

iar:

$$\frac{\partial S}{\partial M} = -\frac{\mu}{T} \quad (3.142)$$

unde μ poartă numele de *potențial chimic*. Astfel:

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV - \frac{\mu}{T}dM \quad (3.143)$$

$$dU = TdS - pdV + \mu dM \quad (3.144)$$

În cazul când $S = \text{const.}$ și $V = \text{const.}$

$$dU = \mu dM \quad (3.145)$$

Rezultă că în cazul sistemelor deschise când sistemul schimbă masă cu mediul extern, μ reprezintă energia raportată la unitatea de masă pe care sistemul o schimbă cu sistemul extern în condiții de entropie și volum constante.

Trebuie remarcat faptul că relația $S = S(U, V, M)$ conține numai mărimi extensive. Împărțim sistemul în n părți egale:

$$U \rightarrow U/n, V \rightarrow V/n, M \rightarrow M/n, S \rightarrow S/n$$

și apoi le unim într-un sistem ce conține m părți. Atunci:

$$U \rightarrow mU/n, V \rightarrow mV/n, M \rightarrow mM/n, S \rightarrow mS/n.$$

Astfel:

$$\frac{m}{n}S = S\left(\frac{m}{n}U, \frac{m}{n}V, \frac{m}{n}M\right)$$

Notând cu $k = m/n$ se obține:

$$S(kU, kV, kM) = kS(U, V, M)$$

p_1	p_2
T_1	T_2
μ_1	μ_2

Figura 3.4: Două sisteme termodinamice izolate de exterior care pot schimba între ele masă.

Derivăm această relație în raport cu k :

$$\frac{\partial S}{\partial(kU)}U + \frac{\partial S}{\partial(kV)}V + \frac{\partial S}{\partial(kM)}M = S(U, V, M) \quad (3.146)$$

Facem $k \rightarrow 1$. Rezultă:

$$S = \frac{\partial S}{\partial U}U + \frac{\partial S}{\partial V}V + \frac{\partial S}{\partial M}M \quad (3.147)$$

$$S = \frac{1}{T}U + \frac{p}{T}V - \frac{\mu}{T}M \quad (3.148)$$

Atunci:

$$\mu = \frac{U + pV - ST}{M} = \frac{G}{M} = g(p, T) \quad (3.149)$$

Rezultă că pentru o substanță pură, potențialul chimic este egal cu entalpia liberă a unității de masă.

3.10 Echilibrul de fază

Până în momentul de față discuția s-a axat asupra unor sisteme omogene, adică asupra unor sisteme în care proprietățile sunt aceleași în diverse puncte ale sistemului. În continuare ne vom referi la sisteme eterogene. Aceste sisteme sunt formate din două sau mai multe sisteme omogene sau faze. Prin *fază* înțelegem orice parte fizic distinctă, separată de celelalte părți ale sistemului de o suprafață bine definită pe care diverse mărimi suferă discontinuități. Un sistem format din două faze poartă numele de sistem bifazic. Ca exemplu de sisteme bifazice se pot menționa: sistemul apă - vapori de apă: Să considerăm două faze care pot schimba masă între ele (Fig. 3.4). Pentru întregul sistem izolat de exterior:

$$U = U_1 + U_2; \quad V = V_1 + V_2; \quad M = M_1 + M_2 \quad (3.150)$$

Deoarece sistemul total este izolat de exterior, energia internă U , volumul V și masa M sunt constante. Rezultă:

$$dU_1 = -dU_2, \quad dV_1 = -dV_2, \quad dM_1 = -dM_2 \quad (3.151)$$

Entropia sistemului este suma entropiilor celor două subsisteme:

$$S = S_1 + S_2 \quad ; \quad dS = dS_1 + dS_2 \quad (3.152)$$

$$dS = \left(\frac{dU_1}{T_1} + \frac{p_1}{T_1} dV_1 - \frac{\mu_1}{T_1} dM_1 \right) + \left(\frac{dU_2}{T_2} + \frac{p_2}{T_2} dV_2 - \frac{\mu_2}{T_2} dM_2 \right) \quad (3.153)$$

Când sistemul este în echilibru, entropia atinge un maxim și $dS = 0$. Ținând cont de (3.151) se obține:

$$dS = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) dU_1 + \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right) dV_1 - \left(\frac{\mu_1}{T_1} - \frac{\mu_2}{T_2} \right) dM_1 = 0 \quad (3.154)$$

De aici:

$$\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = 0; \quad T_1 = T_2 \quad (3.155)$$

Aceasta este condiția de echilibru termic.

$$\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} = 0; \quad p_1 = p_2 \quad (3.156)$$

Aceasta este condiția de echilibru mecanic.

$$\frac{\mu_1}{T_1} - \frac{\mu_2}{T_2} = 0; \quad \mu_1 = \mu_2 \quad (3.157)$$

Relația (3.157) reprezintă condiția de echilibru chimic.

Deoarece pentru o substanță pură potențialul chimic este egal cu entalpia unității de masă rezultă:

$$g_1(p, T) = g_2(p, T) \quad (3.158)$$

Egalitatea (3.158) este o curbă a cărei proiecție în planul (p, T) reprezintă curba de echilibru a fazelor.

3.11 Tranziții de fază

Trecerea dintr-o fază în alta poartă numele de *tranziție de fază*. De exemplu, în cazul substanțelor pure prin tranziții de fază putem menționa topirea, vaporizarea și sublimarea.

Noțiunea de stare de agregare nu coincide întotdeauna cu cea de fază. Astfel numeroase corpuri se găsesc sub diverse forme cristaline care corespund aceluiași stări de agregare. Fenomenul este cunoscut sub numele de *polimorfism*. Un exemplu extrem de cunoscut este fierul care la temperatura $T_1 = 1183$ K trece din structura cristalină cubică cu volum centrat în structura cubică cu fețe centrate, iar la $T_2 = 1663$ K trece din nou în structura cubică cu volum centrat.

Trecerea de la o fază la alta se caracterizează printr-o discontinuitate a entropiei. Aceasta determină existența unei călduri latente. Aceste transformări poartă numele de *tranziții de fază de speța I*.

În afara acestui tip de tranziție există și un alt tip de tranziție de fază care are loc fără căldură latentă. Ea poartă numele de *tranziție de fază de speța a II-a*.

Ca exemplu de tranziții de speța I, amintim schimbările stărilor de agregare (topire-solidificare, vaporizare-condensare, sublimare-desublimare). Astfel de tranziții au loc la temperatură constantă iar căldura schimbată cu mediul este de forma:

$$Q = \lambda m \quad (3.159)$$

unde λ este căldura latentă specifică. În cazul topirii, sublimării și vaporizării sistemul primește căldură, în timp ce în cazul desublimării, solidificării și lichefierii sistemul cedează căldură.

3.11.1 Izotermele lui Andrews

Izotermele Andrews reprezintă izotermele gazului real. Pentru obținerea lor se consideră un gaz real care se comprimă la temperatură constantă. Vom considera ca substanță de lucru bioxidul de carbon. La temperaturi scăzute (mai mici de $31,1$ °C), presiuni scăzute și volume mari comprimare izotermă urmează aproximativ legea Boyle-Mariote. Creșterea presiunii prin micșorarea volumului se face până la o anumită valoare, de la care micșorarea volumului în continuare nu mai duce la creșterea presiunii în sistem. Se constată începerea lichefierii gazului. Presiunea rămâne constantă până

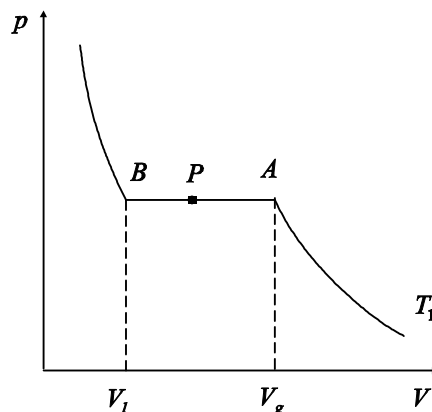


Figura 3.5: Izotermă Andrews

se lichefiază tot gazul. Când aceasta s-a petrecut, pentru micșorarea în continuare a volumului sistemului sunt necesare presiuni foarte mari. Într-un punct P de pe palierul AB al izotermei I (Fig.3.5) starea sistemului constă în existența a două faze, una gazoasă și una lichidă aflate în echilibru.

Aceasta deoarece fixând volumul sistemului la valoarea V_l la temperatura T_1 masa în stare de lichid și gaz nu mai variază în timp. Echilibrul care se realizează este un echilibru dinamic, în sensul că numărul de molecule de lichid ce trec din lichid în stare de gaz în unitatea de timp este egal cu numărul de molecule ce trec din stare de gaz în stare de lichid în unitatea de timp. Gazul aflat în echilibru cu lichidul din care provine reprezintă *vaporii saturați* iar presiunea sa este presiunea vaporilor saturați. Presiunea vaporilor saturați este presiunea maximă a vaporilor care pot exista la o anumită temperatură. Porțiunea orizontală AB descrie o transformare de fază.

Prin creșterea temperaturii, lungimea palierelor izotermelor se reduce până când ajunge la un punct. Acest punct se numește *punct critic*. În acest punct are loc lichefierea întregii cantități de substanță. Parametrii sistemului în punctul critic se numesc *parametrii critici* (temperatură critică, presiune critică și volum critic). Temperatura critică și presiunea critică sunt parametri ce depind doar de substanța considerată. Volumul critic depinde și de masa sistemului. Pentru CO_2 temperatura critică este de $t_c = 31,1^\circ\text{C}$ și presiunea critică este $7,38\text{ MPa}$. În punctul critic dispare orice deosebire dintre lichid și vaporii. Pe izotermele cu temperaturi mari $t > 31,1^\circ\text{C}$ nu mai apare fenomenul de lichefiere al lichidului.

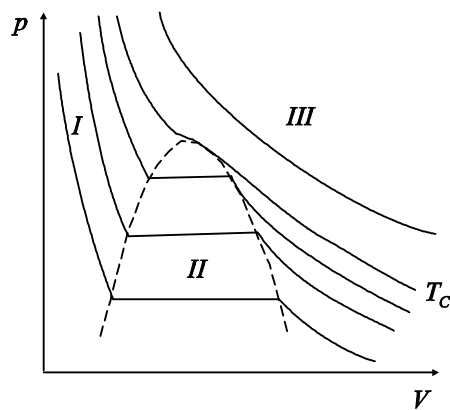


Figura 3.6: Familie de izoterme Andrews

Trasând o mulțime de izoterme în coordonate $p - V$ se pot distinge trei regiuni (Fig3.6):

- I - în care substanța este sub formă de lichid;
- II - în care starea lichidă este în echilibru cu vapori saturați;
- III - în care substanța este în stare de gaz.

În a treia regiune când $T < T_C$ gazul poate fi lichefiat și el poartă denumirea de vapori. Când $T > T_C$, gazul nu mai poate fi lichefiat. Atunci prin gaz vom înțelege acea stare a substanței care nu se poate lichefia, temperatura ei fiind peste temperatura critică.

În timpul lichefierii gazului sistemul cedează în exterior o cantitate de căldură numită căldură latentă de vaporizare. Această căldură raportată la unitatea de masă, reprezintă căldura latentă specifică.

3.11.2 Vaporizarea

Este procesul de trecere a unei substanțe din starea lichidă în starea gazoasă. Ea depinde de condițiile în care se află lichidul.

Vaporizarea în vid (în volum limitat)

Experimental, s-a constatat că vaporizarea în vid prezintă următoarele caracteristici:

- este instantanee

- ea încetează când presiunea vaporilor atinge o valoare maximă care este egală cu presiunea vaporilor saturați la temperatura la care are loc vaporizarea. Când la o anumită temperatură presiunea vaporilor este mai mică decât presiunea maximă (a vaporilor saturați) se spune că acești vapori sunt nesaturați. Referitor la vaporii saturați presiunea acestora are următoarele proprietăți:

- nu depinde nici de masa fazei lichide nici de masa fazei gazoase;
- la o temperatură dată depinde doar de substanța din care au provenit;
- este presiunea maximă a vaporilor unui lichid la o temperatură dată;
- crește cu creșterea temperaturii (presiunea la care se obțin palierele de pe izotermele lui Andrews crește cu creșterea temperaturii).

Vaporizarea în atmosfera gazoasă (în volum limitat)

- este lentă și are loc până ce presiunea parțială a vaporilor ajunge la presiunea parțială a vaporilor saturați;

-presiunea vaporilor saturați nu depinde de presiunea atmosferei în care are loc vaporizarea.

Evaporarea

Este vaporizarea unui lichid prin suprafața sa liberă într-o atmosferă nelimitată. Vaporizarea lichidului prin suprafața sa face ca imediat deasupra lichidului să se găsească vapori amestecați cu aer. Aceasta nu înseamnă că presiunea totală crește în spațiul de deasupra lichidului, ci se micșorează presiunea parțială a aerului. Vaporii migrează în sus astfel că nu se va ajunge la o valoare a presiunii parțiale a vaporilor deasupra lichidului egală cu presiunea vaporilor saturați. Astfel procesul de evaporare va continua până când tot lichidul se va transforma în vapori. Pentru a avea loc evaporarea este necesar ca presiunea atmosferică să depășească valoarea presiunii vaporilor saturați. În caz contrar, va avea loc o fierbere forțată. În plus este necesar ca atmosfera să nu fie saturată cu vaporii substanței respective. Viteza de evaporare reprezintă masa de lichid care se evaporă în unitatea de timp:

$$v = k \frac{(p_m - p)}{p_0} S$$

unde p_m este presiunea vaporilor saturați la temperatura la care are loc evaporarea, p este presiunea atmosferică, S suprafața lichidului iar k un

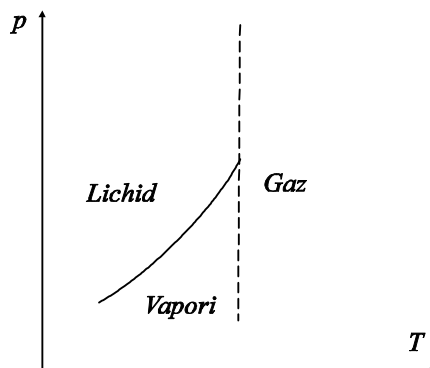


Figura 3.7: Echilibru lichid-gaz

factorul de proporționalitate de ce depinde de viteză relativă a aerului de deasupra lichidului.

Fierberea

Fierberea reprezintă vaporizarea în toată masa lichidului. Legile fierberii sunt:

1. La o presiune dată deasupra lichidului, fierberea are loc la o temperatură mereu aceeași, pentru fiecare lichid, numită temperatură de fierbere.
2. La temperatura de fierbere presiunea vaporilor saturați este egală cu presiunea ce se exercită deasupra lichidului.

3.11.3 Diagrame de echilibru

Diagrama de echilibru lichid-vapori (vaporizare și condensare)

Graficul presiunii corespunzătoare echilibrului lichid-vapori în funcție de temperatură este prezentat în Fig.3.7. El se obține reprezentând presiunea palierelelor izotermelor lui Andrews în funcție de temperatură.

Acest grafic poate fi interpretat ca dependența presiunii vaporilor în funcție de temperatură. Mai mult, o astfel de dependență o putem privi ținând cont de legea a doua a fierberii, ca fiind dependența temperaturii de fierbere de presiune (fierberea are loc când presiunea vaporilor saturați este egală cu presiunea vaporilor de deasupra lichidului).

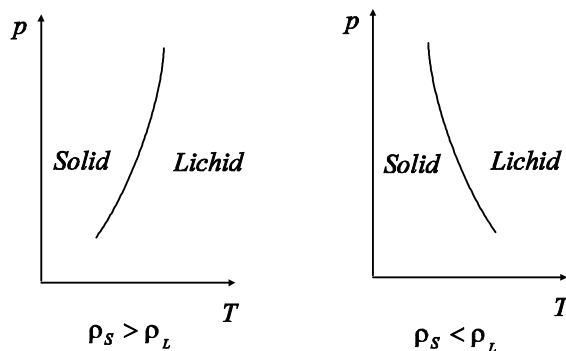


Figura 3.8: Curbe de echilibru solid -lichid

Echilibrul solid lichid (topirea și solidificarea)

Topirea reprezintă trecerea unui corp din faza solidă în cea lichidă, iar solidificarea procesul invers.

În cazul topirii corpurilor amorfe (care nu au o structură cristalină), nu se poate preciza o temperatură de topire ci numai un anumit interval de temperatură pe care are loc trecerea treptată a corpului din starea lichidă în cea solidă.

Topirea corpurilor solide cu structură cristalină se deosebește de topirea corpurilor amorfe. În acest caz:

1 - La o presiune dată topirea are loc întotdeauna la aceeași temperatură pentru un corp în stare pură.

2 - Temperatura rămâne constantă în tot timpul topirii. Odată cu topirea are loc și o variație a volumului corpului. În general prin topire volumul corpului crește, astfel încât pentru o astfel de substanță creșterea presiunii externe duce la o întârziere a topirii și duce la creșterea temperaturii de topire. Pentru substanțele al căror volum se micșorează la topire, mărirea presiunii este favorabilă procesului de topire și temperatura de topire scade (Fig.3.8).

În timpul topirii unui corp trebuie să i se furnizeze căldură din exterior, numită căldură latentă de topire. Procesele de topire și solidificare fiind reversibile temperatura de solidificare este aceeași cu temperatura de topire, iar căldurile latente specifice sunt egale.

Variația energiei interne a unui corp prin topire este:

$$\Delta U = Q - L = m\lambda_t - p(V_{lichid} - V_{solid}) \quad (3.160)$$

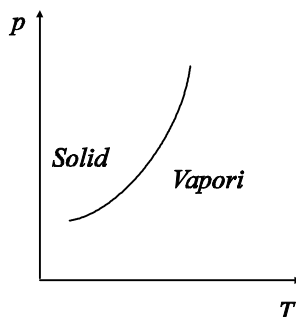


Figura 3.9: Echilibrul solid- gaz.

unde λ_t este căldura latentă specifică.

Echilibrul solig - gaz (sublimarea și desublimarea)

Trecerea unei substanțe direct din faza solidă în cea gazoasă se numește *sublimare* iar procesul invers *desublimare*. Exemplu de substanțe care sublimază sunt iodul, naftalina, apa.

Vaporii aflați în echilibru cu faza solidă se numesc tot vaporii saturați iar presiunea lor se numește presiune de vaporii saturați. Ca și în cazul celorlalte transformări de fază, se poate trasa o curbă de echilibru solid-vapori. Ea poate fi interpretată ca fiind modul în care variază presiunea vaporilor saturați proveniți direct din stare solidă cu temperatura (Fig.3.9).

Punctul triplu

Punctul triplu este punctul de intersecție al curbelor de echilibru vaporii-solid, solid-lichid, lichid-vapori al unei substanțe. În acest punct cele trei faze: solidă, lichidă și gazoasă, sunt în echilibru. Punctul triplu al unei substanțe e caracterizat de o anumită temperatură și presiune. Astfel în cazul apei temperatura punctului triplu este de $t_t = 0,01^\circ\text{C}$ și $p_t = 4,6$ torr. 1 torr este presiunea care este creată de o coloană de mercur cu înălțimea de 1 mm și este egală cu 133,3 Pa. 1 atm (atmosfera) este presiunea creată de o coloană de mercur cu înălțimea de 760 mm, adică o atmosferă este egală cu 760 torr sau $1,013 \times 10^5$ Pa. Deoarece abaterile mici de la valorile presiunii și temperaturii punctul triplu conduc la dispariția uneia din faze, punctul triplu al apei este ales ca reper fix al scării temperaturii absolute. Pentru apă curbele de echilibru și punctul triplu sunt arătate în Fig.3.10.

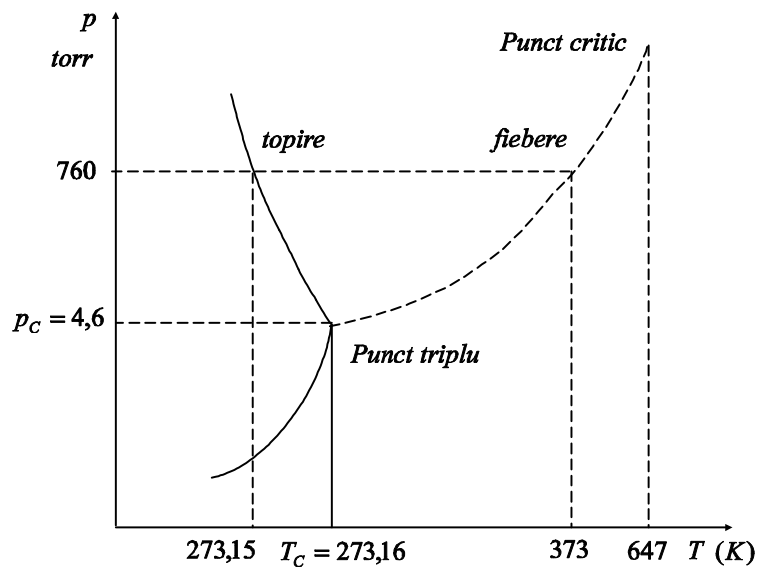


Figura 3.10: Punctul triplu pentru apă.

3.11.4 Ecuția Clausius-Clapeyron

Să considerăm două faze și să exprimăm condiția de echilibru chimic dintre acestea:

$$g_1(p, T) = g_2(p, T) \quad (3.161)$$

Se derivează egalitatea în raport cu temperatura și se ține cont că presiunea nu este o variabilă independentă ci depinde și ea de temperatură. Atunci:

$$\left(\frac{\partial g_1}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial g_1}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dT} = \left(\frac{\partial g_2}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial g_2}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dT} \quad (3.162)$$

Notând cu

$$\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_p = -s \quad (3.163)$$

entropia unității de masă și

$$\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)_T = v \quad (3.164)$$

volumul unității de masă, rezultă:

$$-s_1 + v_1 \frac{dp}{dT} = -s_2 + v_2 \frac{dp}{dT} \quad (3.165)$$

Atunci:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1} \quad (3.166)$$

Variația de entropie se calculează considerând egalitatea fundamentală a termodinamicii și faptul că transformarea de fază are loc la temperatură constantă:

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{\delta q}{T} = \frac{\lambda_{1 \rightarrow 2}}{T} \quad (3.167)$$

unde $\lambda_{1 \rightarrow 2}$ este căldura latentă specifică necesară ca substanța să treacă din starea 1 în starea 2. Rezultă;

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T} \frac{\lambda_{12}}{v_2 - v_1} \quad (3.168)$$

Aplicație: Variația presiunii vaporilor saturați cu temperatura.

Considerăm că faza 1 reprezintă apa în stare lichidă iar faza 2 corespunde stării de vapori. Se ține cont că $v_2 \gg v_1$ (volumul specific al apei în stare de vapori este mai mare decât cel în stare lichidă). Atunci:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T} \frac{\lambda_{12}}{v_2} \quad (3.169)$$

unde λ_{12} este căldura latentă de vaporizare.

Din ecuația de stare a gazelor:

$$pV_2 = \frac{M}{\mu} RT \quad (3.170)$$

prin împărțirea cu M rezultă și ținând cont că $v_2 = V_2/M$:

$$pv_2 = \frac{1}{\mu} RT \quad (3.171)$$

rezultă:

$$v_2 = \frac{RT}{\mu p} \quad (3.172)$$

Atunci:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda_{12}\mu}{R} \frac{p}{T^2} \quad (3.173)$$

Notând cu $A = \frac{\lambda_{12}\mu}{R}$ relația (3.170) devine:

$$\frac{dp}{dT} = A \frac{dT}{T^2} \quad (3.174)$$

Integrând rezultă:

$$\ln p = -\frac{A}{T} + \text{const.} \quad (3.175)$$

$$p = \text{const.} \exp\left(-\frac{A}{T}\right) \quad (3.176)$$

3.12 Principiul al III-lea al termodinamicii

Principiul al II-lea introduce funcția de stare numită entropie astfel:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad (3.177)$$

Din această definiție entropia este determinată până la o constantă aditivă. Această constantă trebuie determinată exact deoarece ea intervine în numeroase măsurători experimentale cum ar fi cele în care se determină căldurile de reacție.

W. Nernst a studiat o serie de proese chimice și a constatat că pe măsură ce temperatura scade, variațiile entropiei sunt din ce în ce mai mici. Acest fapt a condus la următoarea constatare:

La temperatura de zero absolut entropia unui corp chimic pur are o valoare constantă independentă de variația altor parametri:.

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = S_0 \quad (3.178)$$

Ulterior, Planck a pornit de la considerente de mecanică statistică și a arătat că la temperatura de zero absolut S_0 are valoarea zero. Astfel, Planck a enunțat Principiul al III-lea în modul următor:

Când temperatura tinde către zero absolut, entropia unui corp chimic pur tinde către zero:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0 \quad (3.179)$$

Consecințe ale Principiului al III-lea:

a) *Capacităților calorice tind la zero când temperatura tinde la zero absolut*

Vom discuta acest lucru pentru o capacitate calorică la volum constant:

$$\delta Q = C_V dT \quad (3.180)$$

Atunci:

$$dS = \frac{C_V dT}{T} \quad \text{și} \quad S = \int_0^T \frac{C_V T}{T} \quad (3.181)$$

Astfel problema calculării entropiei se reduce la determinarea dependenței căldurilor specifice. Din relațiile (3.181), se observă că pentru $T \rightarrow 0$, capacitatea calorică tinde la zero, deoarece în caz contrar integralele ar diverge.

b) *Coeficienților calorici tind la zero când temperatura tinde la zero absolut*

Pentru aceasta vom alege ca exemplu coeficientul de dilatare izobar:

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

Deoarece:

$$dG = -SdT + Vdp = \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_T dp \quad (3.182)$$

$$S = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p \quad \text{și} \quad V = \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_T$$

Deoarece:

$$\left[\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p \right]_T = \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_T \right]_p$$

rezultă:

$$- \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

Astfel coeficientul coeficientul de dilatare izobar se poate exprima:

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T \quad (3.183)$$

Când $T \rightarrow 0$ coeficientul de compresie izobar tinde la zero, deoarece variația entropiei în apropiere de zero absolut tinde la zero conform Principiului al III-lea.

Și coeficientul termic al presiunii

$$\gamma = +\frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad (3.184)$$

tinde la zero când $T \rightarrow 0$. Pentru aceasta se ține cont că

$$dF = -SdT - pdV \quad (3.185)$$

și:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \quad (3.186)$$

Atunci:

$$\gamma = +\frac{1}{p} \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_V \rightarrow 0 \quad (3.187)$$

c) Atingerea temperaturii de zero absolut este imposibilă.

Considerăm un Ciclu Carnot reversibil cu sursa caldă la temperatura $T_1 = T$ și cu sursa rece $T_1 = 0$. Conform egalității lui Clausius:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad (3.188)$$

și:

$$\Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41} = 0$$

unde procesele 1 - 2 și 4 - 1 sunt izoterme iar procesele 2 - 3 și 3 - 4 sunt adiabate.

$\Delta S_{23} = \Delta S_{34} = 0$, deoarece procesele sunt adiabate, $\Delta S_{34} = 0$ deoarece entropia este nulă la $T = 0$ K. Rezultă:

$$\Delta S_{12} = \frac{Q_{12}}{T} = 0 \quad (3.189)$$

Se ajunge la o contradicție deoarece $Q_{12} \neq 0$. Această contradicție arată că este imposibil de construit un ciclu Carnot cu o izotermă la temperatură nulă.

3.13 Probleme

3.1 O bucată de metal cu masa $m_1 = 0,05$ kg cu temperatura egală cu $t_1 = 200$ °C este introdusă într-un calorimetru care conține $m_2 = 0,4$ kg de apă care se află inițial la temperatura $t_2 = 20$ °C. Temperatura finală devine $t_e = 22,4$ °C. Să se determine căldura specifică a metalului cunoscând căldura specifică a apei $c_a = 4185$ J/kg°C.

3.2 Să se calculeze modificarea entropiei a 250 g de apă încălzită de la 20 °C la 80 °C. Căldura specifică a apei este $c = 4185$ J/kg°C.

3.3 Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de un gaz când se destinde adiabatic din starea inițială (p_1, V_1) în starea finală (p_2, V_2) . Se cunoaște exponentul adiabatic al gazului γ .

3.4 Ecuația Van-der-Waals pentru un gaz este

$$\left(p + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT$$

Să se determine lucrul mecanic într-o transformare izotermă a gazului când gazul se destinde de la V_1 la V_2 . Se consideră cazul a $\nu = 2$ moli de etan care se destind de la $V_1 = 2$ l la $V_2 = 6$ l, la temperatură $T = 300$ K. Se cunosc $a = 0,544$ Jm³/mol² și $b = 6,38 \times 10^{-5}$ m³/mol.

3.5 În apropierea lui 0 K căldura molară la presiunea constantă C_p a unui metal este:

$$C_p = aT^3 + bT$$

În cazul unui mol de substanță, la presiunea $p_0 = 1$ atm constantele a și b sunt: $a = 1,16 \times 10^{-5}$ Jmol⁻¹K⁻⁴ și $b = 7,14 \times 10^{-4}$ Jmol⁻¹K⁻². Să se determine variația entropiei unui mol de de substanță ΔS când temperatura crește de la valoarea $T_1 = 1$ K la valoarea $T_2 = 3$ K.

3.6 În motorul unui automobil amestecul de aer și vapori de benzină este comprimat în raportul 9:1 (raportul de compresie). Presiunea inițială este de 1 atm și 27 °C. Dacă presiunea după comprimare este 21,7 atm să se găsească temperatura amestecului comprimat.

3.7 Un motor preia o cantitate de căldură egală cu $Q_1 = 2 \times 10^3$ J de la rezervorul cald și transferă rezervorului rece căldura $|Q_2| = 1,5 \times 10^3$ J.

- a) Să se calculeze randamentul motorului.
 b) Care este lucrul mecanic efectuat ?

3.8 Temperatura sursei calde a unui motor care execută un ciclu Carnot este 400 K. Care este temperatura sursei reci dacă $\eta = 30\%$.

3.9 Un solid are căldura latentă λ și temperatura de topire T . Să se calculeze variația entropiei când masa m de substanță se topește.

3.10 Un mol de gaz urmează ecuația van der Waals.

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

Dacă energia internă a unui mol este

$$U = CT - \frac{a}{V}$$

unde V este volumul molar iar C și a sunt constante să se calculeze căldurile molare la volum și presiune constantă C_V și C_p .

3.11 Un gram de apă se vaporizează izobar la presiunea atmosferică $p = 1,013 \times 10^5$ Pa. Volumul apei în stare lichidă este $V_l = 1$ cm³ iar volumul apei în starea de vapori este $V_v = 1671$ cm³. Să se găsească lucrul mecanic efectuat în cursul presiunii și variația energiei interne. Se neglijează interacțiunea vaporilor cu aerul înconjurător. Se cunoaște căldura latentă de vaporizare $\lambda = 2,26 \times 10^6$ J/kg.

4.14 Heliul lichid are la presiunea de $p_0 = 1$ atm punctul de fierbere la 4,2 K iar la presiunea de $p = 1$ mm de Hg fierbe la 1,2 K. Să se determine căldura latentă de vaporizare a heliului lichid.

3.15 Viteza unei unde longitudinale în gaz este:

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

Să se calculeze:

- a) viteza în cazul în care compresia și rarefierea gazului sunt izoterme;

b) viteza în cazul în care compresia și rarefierea gazului sunt adiabate.

3.16 Un sistem are entalpia liberă de forma:

$$G(p, T) = RT \ln \left[\frac{ap}{(RT)^{5/2}} \right]$$

unde a și R sunt constante. Să se determine C_p .

Capitolul 4

Elemente de fizică statistică

4.1 Presiunea gazului ideal

Pentru a calcula presiunea pe care un gaz o exercită asupra pereților vasului în care se află, trebuie considerat un model pentru acesta. Cel mai simplu model pentru un gaz este acela al gazului ideal:

- a) moleculele sunt considerate puncte materiale;
- b) moleculele se află într-o mișcare permanentă total dezordonată, mișcare care se supune legilor mecanicii newtoniene;
- c) forțele de interacțiune dintre molecule se neglijează;
- d) moleculele interacționează doar în timpul ciocnirilor dintre ele și cu pereții vasului. Ciocnirile dintre molecule și cu pereții vasului sunt perfect elastice.

Să considerăm un vas cubic de latură L în care se află N molecule de gaz. Ne vom concentra asupra unei molecule " i " de masă m a cărei viteză pe direcția Ox este v_{ix} . Atunci când molecula se ciocnește cu peretele componenta vitezei pe axa Ox se modifică brusc la valoarea $-v_{ix}$ (Fig. 4.1). Variația impulsului moleculei pe direcția Ox este:

$$\Delta p_{xi} = -mv_{ix} - mv_{ix} = -2mv_{ix} \quad (4.1)$$

Timpul între două ciocniri cu același perete este:

$$\Delta t = \frac{2L}{v_{ix}} \quad (4.2)$$

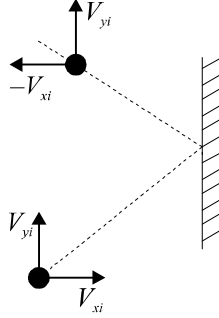


Figura 4.1: Ciocnirea unei molecule de gaz cu peretele

Forța medie cu care peretele acționează asupra moleculei "i" este:

$$F_i = \frac{\Delta p_{ix}}{\Delta t} = -\frac{mv_{ix}^2}{L} \quad (4.3)$$

Conform legii a III-a mecanicii, forța cu care molecula acționează asupra peretelui este:

$$F_{pi} = -F_i = \frac{mv_{ix}^2}{L} \quad (4.4)$$

Forța totală cu care moleculele acționează asupra peretelui este suma forțelor cu care fiecare moleculă acționează asupra peretelui este:

$$F = \sum_{i=1}^N \frac{mv_{ix}^2}{L} = \frac{m}{L} \sum_{i=1}^N v_{ix}^2 \quad (4.5)$$

Definim media pătratului componentei pe axa Ox a vitezei:

$$\overline{v_x^2} = \frac{\sum_{i=1}^N v_{xi}^2}{N} \quad (4.6)$$

Atunci:

$$F = \frac{m}{L} N \overline{v_x^2} \quad (4.7)$$

Dar

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad (4.8)$$

și mediind relația (4.8) se obține.

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \quad (4.9)$$

Mărimea $\overline{v^2}$ poartă numele de viteză pătratică medie. Deoarece nici una din axele de coordonate nu este privilegiată, mediile componentelor vitezelor pe cele trei axe sunt egale:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} \quad (4.10)$$

Atunci:

$$\overline{v_x^2} = \frac{\overline{v^2}}{3} \quad (4.11)$$

și forța care acționează asupra peretelui este:

$$F = \frac{m}{3L} N \overline{v^2} \quad (4.12)$$

Presiunea care acționează asupra peretelui extern este:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{m}{3L^3} N \overline{v^2} = \frac{2}{3} n \left(\frac{1}{2} m \overline{v^2} \right) = \frac{2}{3} \bar{\varepsilon}_c \quad (4.13)$$

Mărimea $\bar{\varepsilon}_c = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$ reprezintă energia cinetică a moleculelor. Raportul N/L^3 reprezintă concentrația de molecule n din volumul considerat. Rezultă că presiunea gazului este proporțională cu numărul de molecule din unitatea de volum și cu energia cinetică medie a moleculelor.

Astfel am legat o mărime macroscopică care este presiunea, de o mărime microscopică care este viteza pătratică medie sau energia cinetică medie.

4.2 Interpretarea moleculară a temperaturii și gradele de libertate

Considerând ecuația de stare a gazelor ideale

$$pV = \nu RT = \frac{N}{N_A} RT \quad (4.14)$$

Se împarte relația (4.14) prin V și se ținem cont că $n = N/V$ și că $R/N_A = k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/kmol}\cdot\text{K}$. Se obține:

$$p = nk_B T \quad (4.15)$$

Prin compararea relațiilor (4.13) și (4.15) rezultă:

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = 3\frac{k_B T}{2}$$

Rezultatul arată că temperatura este o măsură a gradului de agitație termică, deoarece măsura gradului de agitație termică este măsurată prin energia cinetică medie.

Energia unei molecule de gaz monoatomic se poate exprima ca o sumă de trei termeni:

$$\varepsilon = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} + \frac{mv_z^2}{2}$$

Se observă că fiecare termen reprezintă un mod în care o moleculă de gaz monoatomic poate stoca energia. Aceste moduri distincte în care se poate stoca energia poartă numele de grade de libertate. Astfel o moleculă monoatomică are trei grade de libertate. În cazul general numărul de grade de libertate a unui sistem reprezintă numărul minim de parametri necesari pentru a caracteriza sistemul respectiv. Deoarece nici o direcție nu este privilegiată rezultă că:

$$\frac{m\overline{v_x^2}}{2} = \frac{m\overline{v_y^2}}{2} = \frac{m\overline{v_z^2}}{2} = \frac{1}{2}k_B T \quad (4.16)$$

Aceasta arată că fiecare grad de libertate de translație este caracterizat de aceeași cantitate de energie $\frac{kT}{2}$. Acest rezultat poate fi generalizat. Se obține astfel **teorema echipartiției energiei**:

Fiecărui grad de libertate îi corespunde o energie medie $k_B T / 2$.

Cu ajutorul acestei teoreme putem calcula căldura molară la volum constant a unui gaz.

Vom considera pentru început un gaz ideal monoatomic. Energia internă a gazului ideal monoatomic este suma energiilor fiecărei molecule. Deoarece fiecare moleculă are $i = 3$ grade de libertate energia internă a unui mol de gaz ideal este:

$$U = N_A 3 \frac{k_B T}{2} = \frac{3RT}{2} \quad (4.17)$$

Deoarece:

$$U = C_{\mu V} T \quad (4.18)$$

Rezultă căldura molară la volum constant:

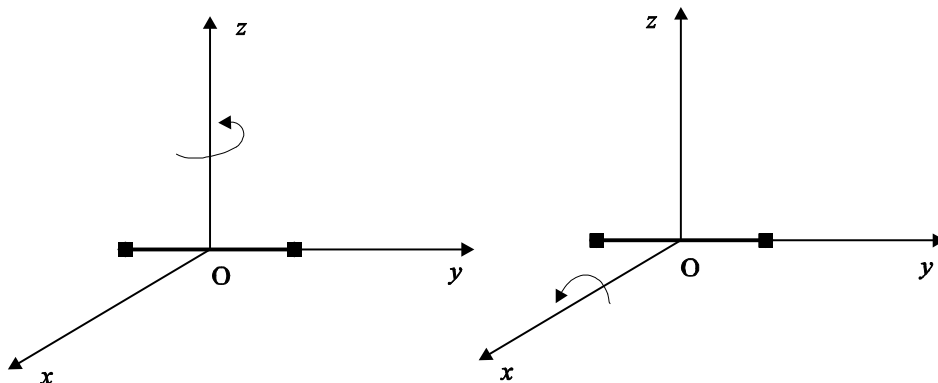


Figura 4.2: Mișcările de rotație a unei molecule biatomice.

$$C_{\mu V} = \frac{3R}{2} \quad (4.19)$$

În cazul gazelor biatomice este necesar să se țină cont și de mișcările proprii ale molecule, cum ar fi mișcarea de rotație și vibrație. Dacă considerăm molecula sub forma unei haltere (cu distanța dintre atomii mult mai mare decât dimensiunea atomilor) mișcarea de rotație poate avea loc doar în jurul a două axe de rotație (energia de rotație în jurul axei care leagă cei doi atomi este nulă) ca în Fig. ???. Astfel energia datorată rotației este de forma

$$\varepsilon_r = \frac{L_x^2}{2I_x} + \frac{L_z^2}{2I_z} \quad (4.20)$$

unde cu L_x și L_z sunt componentele momentului cinetic pe axele Ox și Oz , iar I_x și I_z sunt momentele de inerție corespunzătoare. Rotația în jurul axei Oy se neglijează deoarece atomii moleculei se consideră puncte materiale. Rezultă că alături de gradele de libertate de translație mai apar două grade de libertate de rotație în jurul axelor Ox și Oz astfel că pentru acest tip de gaz $i = 5$ și

$$U = N_A 5 \frac{kT}{2} = \frac{5RT}{2} \quad (4.21)$$

Atunci

$$C_{\mu V} = \frac{5R}{2} \quad (4.22)$$

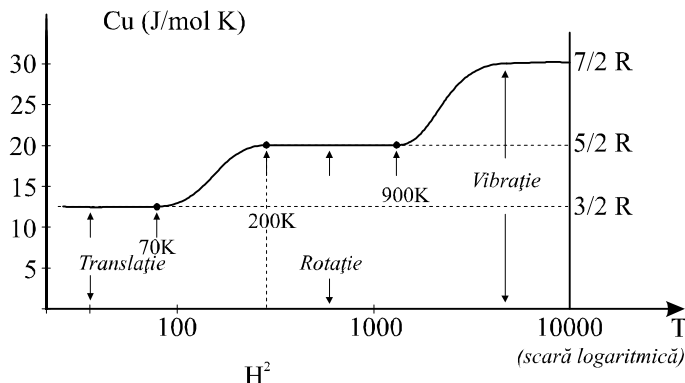


Figura 4.3: Dependența de temperatură a căldurii molare la volum constant pentru hidrogen

În plus este posibil ca cei doi atomi ce formează moleculele să se apropie unul de altul, adică să vibreze. Energia de vibrație are doi termeni:

$$\varepsilon_v = \frac{1}{2\mu} p_{rel}^2 + \frac{k}{2} x_{rel}^2 \quad (4.23)$$

unde $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ este masa redusă și $p_{rel} = \mu v_{rel}$. Mărimile care au indicele "rel" se referă la mărimi relative. Pentru acest tip de molecule $i = 7$ și

$$C_{\mu V} = \frac{7R}{2} \quad (4.24)$$

Trebuie remarcat că dacă se trasează o curbă care prezintă căldura molară la volum constant în funcție de temperatură se obține graficul din Fig. 4.3.

Graficul arată că la temperaturi joase hidrogenul se comportă ca un gaz monoatomic astfel încât spunem că gradele de libertate de rotație sunt înghețate. La temperaturi foarte mari și gradele de libertate de vibrație trebuie luate în considerare.

4.3 Căldura specifică a solidelor

Căldura specifică a solidelor descrește rapid când temperatura se apropie de zero absolut. La temperaturi înalte (peste 300 K) valoarea căldurii molare este $3R \approx 25$ J/mol·K rezultat care poartă numele de legea Dulong-Petit.

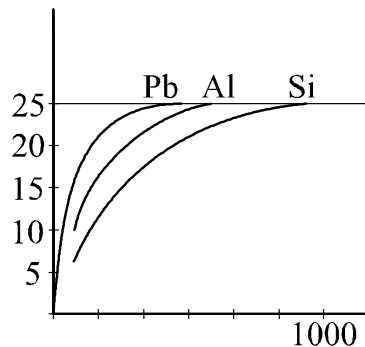


Figura 4.4: Dependența de temperatură a căldurii molare la volum constant

Putem exprima căldura molară a solidelor utilizând teorema echipartiției energiei. Pentru deplasări mici ale unui atom față de poziția de echilibru, acesta execută o mișcare simplă armonică. Energia asociată cu mișcarea pe axa Ox este:

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (4.25)$$

Expresiile energie asociate mișcărilor pe direcțiile Oy și Oz se scriu în același fel. Deoarece orice atom are $i = 6$ grade de libertate conform teoremei echipartiției energiei, energia medie a atomilor corpului solid este:

$$6 \times \frac{1}{2}k_B T = 3k_B T \quad (4.26)$$

Atunci energia internă a unui mol este:

$$U = N_A 3k_B T = 3RT \quad (4.27)$$

Rezultă căldura molară $C_{\mu V} = 3R$. Acest rezultat poartă numele de legea Dulong-Petit. Cunosând căldura molară se poate determina căldura specifică:

$$c_V = \frac{C_{\mu V}}{\mu}$$

În Tabelul 4.1 este prezentată o comparație dintre rezultatele obținute cu ajutorul legii Dulong-Petit și cele experimentale. Se observă o foarte bună concordanță între acestea ținând cont de simplitatea modului folosit.

Tabelul 4.1
Căldura specifică a solidelor

Material	c_{exp} (J/kg·K)	μ (kg/kmol)	$c_t = \frac{3R}{\mu}$ (J/kg·K)
Al	895	26,9	927
Ag	235	107	233
Cu	395	53,54	465
Ni	400	59,71	417
Pt	120	195	127
Pb	125	207	120
Zn	340	65	381

4.4 Distribuția Maxwell după viteze într-un gaz

Presupunem că într-un gaz s-a stabilit o stare de echilibru. În conformitate cu datele experimentale, presupunem că moleculele gazului se distribuie în întreg volumul recipientului cu o densitate constantă. Moleculele așa cum am mai spus prezintă viteze uniform distribuite în spațiu. Stabilirea mișcării haotice este condiționată de existența interacțiilor dintre molecule. Atunci când moleculele se ciocnesc se produce o continuă schimbare a direcțiilor de mișcare. Rolul ciocnirilor nu se reduce însă la stabilirea unei distribuții uniforme a vitezelor după direcții. Pe lângă modificările direcției de mișcare moleculele suferă variații ale vitezelor în valoare absolută. Atunci când gazul este închis într-un recipient apare o distribuție a vitezelor moleculelor. În gaz apar molecule cu viteze mai mari, un număr de molecule cu viteze medii și un număr de molecule cu viteze mici. Această distribuție este staționară atât timp cât nu apare o acțiune exterioară. Problema care se pune este aceea a determinării numărului de molecule care au o viteză dată. Deoarece vitezele variază în mod continuu atunci problema care se pune este aceea a determinării numărului de molecule care au o viteză apropiată de o valoare dată.

4.4.1 Deducerea formei funcției de distribuție

Notăm cu dN numărul de molecule care au componentele vitezei situate între v_x și $v_x + dv_x$, $v_y + dv_y$, $v_z + dv_z$. Probabilitatea ca o moleculă să aibă

componentele vitezelor în intervalul de mai sus este:

$$d\mathcal{P} = \frac{dN}{N} = f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \quad (4.28)$$

$f(v_x, v_y, v_z)$ poartă numele de funcția de distribuție după viteze. Observăm că funcția de distribuție trebuie să se îndeplinească condiția de normare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = 1 \quad (4.29)$$

Deoarece vitezele sunt distribuite uniform în toate direcțiile atunci funcția de distribuție depinde doar de modulul vitezei.

$$f(v_x, v_y, v_z) = f(v) \quad (4.30)$$

Elementul de volum din spațiul vitezelor este în coordonate sferice:

$$dv_x dv_y dv_z = v^2 \sin \theta dv d\theta d\varphi \quad (4.31)$$

Dacă nu interesează distribuția după direcți a moleculelor putem integra după θ și φ și obținem astfel o nouă funcție de distribuție $F(v)$ după modulul vitezei.

$$F(v) = \left(\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \right) f(v) v^2 = 4\pi f(v) v^2$$

În demonstrație (care nu este riguroasă) apare în mod clar rolul ciocnirilor și al ipotezei caracterului haotic al mișcării moleculare. Să considerăm procesul de ciocnire a două particule care se mișcă cu vitezele $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$. În urma ciocnirii vitezele moleculelor variază și iau valorile $\vec{v}_3$ și $\vec{v}_4$. Numărul de ciocniri de acest fel în unitatea de timp trebuie să fie proporțional cu numărul perechilor de molecule cu vitezele $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$, adică proporțional cu produsul $f(\vec{v}_1) f(\vec{v}_2)$. Să considerăm apoi procesul invers adică ciocnirile în care vitezele moleculelor variază de la $\vec{v}_3$ și $\vec{v}_4$ la $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$. Numărul de ciocniri în acest timp este proporțional cu produsul $f(\vec{v}_3) f(\vec{v}_4)$.

Ținem cont de presupunerea că într-un gaz care se află într-o stare staționară că numărul de molecule cu valori date ale vitezei nu variază datorită proceselor de ciocnire se consideră că numărul de molecule ale căror

viteze variază de la $\vec{v}_3$ și $\vec{v}_4$ la $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ este egal cu numărul de molecule ale căror viteze variază de la $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ la $\vec{v}_3$ și $\vec{v}_4$. Atunci:

$$f(\vec{v}_1) f(\vec{v}_2) = f(\vec{v}_3) f(\vec{v}_4) \quad (4.32)$$

Deoarece în procesul de ciocnire are loc conservarea energiei. Probabilitatea ca molecula să aibă:

$$v_1^2 + v_2^2 = v_3^2 + v_4^2 \quad (4.33)$$

Deoarece funcția de distribuție nu depinde de direcția vitezei relația (4.32) poate fi transcrisă sub forma:

$$f(v_1^2) f(v_2^2) = f(v_3^2) f(v_4^2) \quad (4.34)$$

Din relațiile (4.33) și (4.34) rezultă forma funcției $f(v)$:

$$f(v) = A e^{-\beta v^2} \quad (4.35)$$

și

$$F(v) = 4\pi A v^2 e^{-\beta v^2} \quad (4.36)$$

Determinarea constantelor A și β se face pornind de la condiția de normare:

$$\int_0^\infty F(v) dv = 1 \quad (4.37)$$

și de faptul că viteza pătratică medie este legată de temperatură prin relația:

$$\overline{v^2} = \int_0^{+\infty} v^2 F(v) dv = \frac{3k_B T}{m} \quad (4.38)$$

Rezultă:

$$\beta = \frac{m}{2k_B T} \quad ; \quad A = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \quad (4.39)$$

Astfel:

$$F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \quad (4.40)$$

Rezultă că forma funcției de distribuție $f(v)$ este:

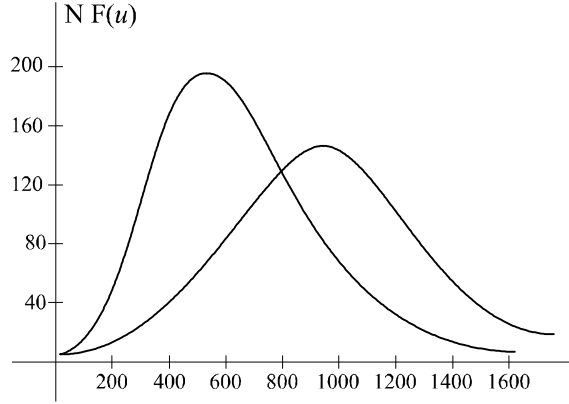


Figura 4.5: Distribuția Maxwell după viteze

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 \quad (4.41)$$

În Fig. 4.5 este reprezentată distribuția după viteze unde $N = 10^5$

Pornind de la expresia funcției de distribuție se va putea calcula viteza medie

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad (4.42)$$

și viteza cea mai probabilă:

$$v_p = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (4.43)$$

4.4.2 Distribuția Boltzmann într-un câmp de forțe omogen

Problema care se pune este aceea de a determina modul în care sunt distribuite moleculele în câmpuri de forțe conservative. Ca un exemplu vom studia distribuția moleculelor unui gaz în câmp gravitațional (Fig. 4.6.)

Să considerăm o coloană de gaz cu suprafața S aflată între coordonatele z și $z + dz$. Punem condiția ca această coloană să fie în repaus. Pentru aceasta:

$$Sp(z) = Sp(z + dz) + Spgdz \quad (4.44)$$

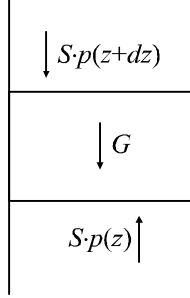


Figura 4.6: Porțiune dintr-un gaz aflat în câmp gravitațional.

unde $\rho = mn$ este densitatea, m este masa unei molecule și n este concentrația moleculelor. Rezultă:

$$p(z + dz) - p(z) = dp = -\rho g dz = -mng dz \quad (4.45)$$

Din ecuația de stare:

$$p = nkT \quad (4.46)$$

considerând temperatura constantă

$$dp = kT dn \quad (4.47)$$

Astfel din relațiile 4.45 și 4.47 se obține:

$$kT dn = -mng dz \quad (4.48)$$

$$\frac{dn}{n} = -\frac{mg}{k_B T} dz \quad (4.49)$$

Integrăm de la $z = 0$ unde concentrația moleculelor este $n = n_0$. Atunci:

$$\int_0^n \frac{dn}{n} = +\frac{mg}{k_B T} \int_0^y dz \implies \ln \frac{n}{n_0} = -\frac{mgz}{k_B T}$$

$$n = n_0 e^{-\frac{mgz}{k_B T}} \quad (4.50)$$

Astfel numărul de molecule aflate între z și $z + dz$:

$$dn \sim e^{-\frac{mgz}{k_B T}} dz \quad (4.51)$$

Atunci probabilitatea ca o moleculă să se găsească între z și $z + dz$ este:

$$d\mathcal{P} \sim e^{-\frac{mgz}{k_B T}} dz \quad (4.52)$$

Putem rescrie formula de mai sus ținând cont că $mgz = E_p$ este energia potențială și că $dz \sim dE_p$. Astfel probabilitatea ca o moleculă să aibă energia cuprinsă în intervalul dE , $E_p + dE_p$ este:

$$d\mathcal{P} \sim e^{-\frac{E_p}{k_B T}} dE_p \quad (4.53)$$

4.5 Distribuția Maxwell-Boltzmann

Probabilitatea ca molecula să se găsească la o înălțime cuprinsă între z și $z + dz$ și să aibă viteza cuprinsă între $\vec{v}$ și $\vec{v} + d\vec{v}$ se obține combinând rezultatele obținute la studiul distribuției Maxwell și distribuției Boltzmann:

$$d\mathcal{P} = A e^{-\frac{mv^2}{2} + mgz}{k_B T} dv_x dv_y dv_z dz \quad (4.54)$$

unde A este o constantă.

În continuare vom generaliza concluziile din discuția anterioară în cazul că energia staționară în care se poate afla sistemul formează un șir discret $E_1, E_2, E_3, \dots$. Probabilitatea ca sistemul să se afle în starea de energie E_k este:

$$P_k = C \exp\left(-\frac{E_k}{k_B T}\right) \quad (4.55)$$

Constanta C se determină din condiția de normare:

$$\sum_{k=1}^n P_k = C \sum_{k=1}^n \exp\left(-\frac{E_k}{k_B T}\right) \quad (4.56)$$

Aplicație

Atomii pot ocupa două nivele discrete a energiei. Să considerăm un gaz la 2500 °C care are două nivele energetice separate prin 1,5 eV. Să se determine raportul dintre numărul de atomi care ocupă nivelul de energie mai mare și numărul de atomi care ocupă nivelul de energie mai mic.

Soluție:

Conform statisticii Boltzmann

$$\frac{n(E_2)}{n(E_1)} = \frac{\exp[-E_2/k_B T]}{\exp[-E_1/k_B T]} = \exp\left[\frac{(E_1 - E_2)}{k_B T}\right] = 1,9 \times 10^{-3}$$

4.6 Entropia din punct de vedere microscopic

Putem trata entropia din punct de vedere microscopic pornind de la analiza statistică a mișcării moleculare.

În teoria cinetică moleculară, moleculele sunt reprezentate ca particule care se mișcă haotic. Să presupunem că inițial gazul este în volumul V_i . Pentru o distribuție a gazului în volum există un mare număr de microstări echivalente compatibile cu starea macroscopică dată.

Vom calcula numărul de microstări considerând că fiecare moleculă ocupă un volum microscopic V_m . Numărul total al locațiilor pe care molecula le poate ocupa în starea inițială este $w_i = V_i/V_m$.

Numărul w_i poate fi interpretat ca numărul de moduri în care molecula poate fi plasată în volumul V_i . Presupunem că probabilitățile ca molecula să ocupe orice locație sunt egale. Dacă se adaugă molecule în sistem numărul de posibilități în care moleculele se pot aranja în sistem crește. Astfel dacă w_1 reprezintă numărul de locații posibile pentru prima moleculă și w_2 numărul de locații pentru a doua moleculă numărul total de moduri în care se pot plasa cele două molecule este $w_1 w_2$.

Neglijând probabilitatea (extrem de mică) ca două molecule să ocupe același volum, numărul de locații pe care-l poate ocupa fiecare moleculă este același, numărul de moduri în care N molecule pot ocupa volumul inițial V_i este:

$$\Omega_i = (w_i)^N = (V_i/V_m)^N \quad (4.57)$$

Considerând că gazul suferă o destindere adiabatică în vid până la volumul final V_f . În același mod, numărul de moduri în care cele N molecule pot ocupa volumul V_f este:

$$\Omega_f = (w_f)^N = (V_f/V_m)^N \quad (4.58)$$

$$\frac{\Omega_f}{\Omega_i} = \left(\frac{V_f}{V_i} \right)^N \quad (4.59)$$

Numărul total de moduri în care molecule pot ocupa volumul V reprezintă numărul de microstări ale sistemului care sunt compatibile cu macrostarea considerată. Din relația (4.59) se obține:

Logaritmând și multiplicând cu constanta Boltzmann se obține:

$$k_B \ln \frac{\Omega_f}{\Omega_i} = N k_B \ln \frac{V_f}{V_i} = \nu N_A k_B \ln \frac{V_f}{V_i} = \nu R \ln \frac{V_f}{V_i} \quad (4.60)$$

de unde

$$k_B \ln \Omega_f - k_B \ln \Omega_i = \nu R \ln \frac{V_f}{V_i} \quad (4.61)$$

Dar în cazul că are loc o expansiune a gazului în vid am dedus că:

$$\Delta S = S_f - S_i = \nu R \ln \frac{V_f}{V_i} \quad (4.62)$$

Rezultă că:

$$S = k_B \ln \Omega \quad (4.63)$$

În concluzie cu cât sunt mai multe microstări, cu atât crește entropia sistemului. Ecuația (4.63) arată că entropia este o măsură a dezordinii unui sistem. Așa cum am spus stările microscopice sunt egal probabile. Deoarece numărul de microstări compatibile cu o stare dezordonată este mult mai mare decât numărul de microstări compatibile cu o stare mai ordonată rezultă că starea dezordonată este mult mai probabilă.

Aplicație

Apa fierbe la 100 °C la nivelul mării. La ce temperatură fierbe apa pe un munte la o înălțime de 5 km de nivelul mării. Considerăm masa molară a aerului $\mu = 28,9$ g/mol și că temperatura mediului ambiant este $t = 20$ °C. Căldura latentă de vaporizare este $2,26 \times 10^6$ J/kg

Soluție:

Presiunea vaporilor saturanți funcție de temperatură variază după legea

$$p_v = k_1 \exp \left[-\frac{\lambda \mu}{RT_f} \right]$$

unde T_f este temperatura de fierbere iar k_1 este o constantă. La nivelul mării $p_v = p_0 = 1$ atm și temperatura de fierbere $T_f = T_{f0} = 373,15$ K. Atunci:

$$p_0 = k_1 \exp \left[-\frac{\lambda \mu}{RT_{f0}} \right]$$

Presiunea atmosferică funcție de înălțime este:

$$p = p_0 \exp \left[-\frac{mgz}{k_B T} \right] = p_0 \exp \left[-\frac{\mu gz}{RT} \right]$$

Fenomenul de fierbere are loc atunci când presiunea vaporilor saturanți la temperatura de fierbere este egală cu presiunea atmosferică:

$$k_1 \exp \left[-\frac{\lambda \mu}{RT_f} \right] = p_0 \exp \left[-\frac{\mu gz}{RT} \right]$$

Rezultă:

$$T = \frac{1}{\frac{1}{T_f} + \frac{gz}{\lambda T}} = \frac{1}{\frac{1}{373,15} + \frac{9,8 \times 5000}{2,26 \times 10^6 \times 293,15}} = 363,13 \text{ K}$$

Aceasta corespunde la 90 °C.

4.7 Probleme

4.1 O centrifugă este un dispozitiv care este utilizat pentru a separa particule prin rotirea acestora cu viteza unghiulară ω . Ea este formată dintr-un tub de lungime R care se rotește în plan orizontal în jurul unui capăt al acestuia. Să se determine densitatea particulelor în interiorul centrifugii.

4.2 Frecvența de rotație a unei molecule. Molecula de N_2 are lungimea de 0,12 nm. Să se estimeze frecvența de rotație a N_2 a rotație la 20 °C.

4.3 Să se determine viteza medie a moleculelor unui gaz ideal aflat la temperatura T .

4.4 Să se determine viteza ce mai probabilă a moleculelor unui gaz ideal aflat la temperatura T .

Capitolul 5

Electricitate

5.1 Electrostatică

5.1.1 Sarcina electrică

Sarcina electrică este o mărime scalară care măsoară starea de electrizare a unui corp. Există două tipuri de sarcină: una pozitivă (a protonilor) și una negativă (a electronilor). Unitatea sarcinii electrice este Coulombul (C). Cea mai mică cantitate de sarcină este sarcina $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C. Sarcina $+e$ este sarcina protonilor iar sarcina $-e$ este sarcina electronilor.

5.1.2 Legea lui Coulomb

Legea lui Coulomb este o lege experimentală care afirmă că: forța de interacție dintre două sarcini punctiforme este de atracție dacă sarcinile sunt de semne contrare și de respingere dacă sarcinile sunt de același fel; forța acționează de-a lungul dreptei ce unește cele două sarcini; mărimea forței este invers proporțională cu pătratul distanței dintre sarcini și este direct proporțională cu produsul sarcinilor. Forma matematică a legii lui Coulomb în sistemul de unități internațional SI este:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \quad (5.1)$$

unde $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$ C²/N·m² este o constantă numită permitivitatea vidului. $\vec{r}_{12}$. Forța $\vec{F}_{12}$ reprezintă forța cu care sarcina q_1 acționează asupra

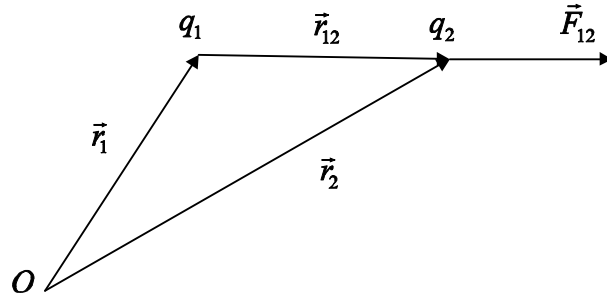


Figura 5.1: Forța dintre două sarcini electrice punctiforme de același semn.

sarcinii q_2 . În Fig. 5.1 este reprezentat cazul când cele două sarcini au același semn. Se observă că relația (5.1) pune în evidență caracterul atractiv sau repulsiv al forței. Considerând că semnele sarcinilor sunt incluse în q_1 și q_2 , când $q_1 q_2 > 0$ (adică ambele sarcini au același semn) $\vec{F}_{12}$ are sensul vectorului $\vec{r}_{12}$ și forța este repulsivă, iar când $q_1 q_2 < 0$ (sarcinile au semne contrare) $\vec{F}_{12}$ are sens contrar lui $\vec{r}_{12}$ și forța este atractivă.

Aplicație

Electronul și protonul atomului de hidrogen se află la o distanță medie de $5,3 \times 10^{-11}$ m. Să se determine forța care acționează între ei.

Soluție:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{(1,6 \times 10^{-19})^2}{(5,3 \times 10^{-11})^2} = 8,2 \times 10^{-8} \text{ N}$$

unde am ținut cont că:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$$

5.1.3 Câmp electric

Noțiunea de câmp se referă la cazul interacției când două corpuri nu sunt în contact. Astfel asupra unui corp lăsat liber deasupra pământului acționează o forță. Spunem că acel corp se află în câmpul gravitațional al pământului. Dacă un corp cu o sarcină foarte mică și de dimensiuni foarte mici, numit corp de probă, este adus în apropierea unor corpuri încărcate electric și considerate fixe asupra lui acționează o forță. Spunem că în regiunea în care asupra corpului de probă acționează o forță există un câmp

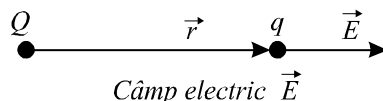


Figura 5.2: Vectorul intensitatea câmpului electric

electric. Pentru a caracteriza câmpul electric se definește intensitatea câmpului electric într-un punct ca fiind:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (5.2)$$

unde $\vec{F}$ este forța ce acționează în punctul respectiv asupra corpului de probă încărcat cu sarcina q .

Un corp punctiform cu sarcina Q , crează un câmp electric a cărui intensitate este (Fig. 5.2):

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (5.3)$$

și

$$|\vec{E}| = \frac{|Q|}{4\pi\epsilon r^2} \quad (5.4)$$

Pentru a obține o reprezentare a câmpului electric, se pot defini liniile de câmp, ca fiind curbele la care în fiecare punct vectorul intensitate câmp electric este tangent. Sensul unei linii de câmp este sensul în care începe să se deplaseze o sarcină pozitivă pe linia de câmp când este lăsată liberă. Liniile de câmp electric pornesc de pe sarcinile încărcate pozitiv și se termină pe sarcinile încărcate negativ (Fig. 5.3). Ele nu se intersectează deoarece câmpul este definit în mod univoc într-un punct dat.

5.1.4 Distribuții continue de sarcini

Adesea distanțele dintre sarcinile unui grup de sarcini sunt mult mai mici decât distanța de la grupul de sarcini la punctul în care trebuie calculată intensitatea câmpului electric. În acest caz sistemul poate fi modelat ca un sistem continuu de sarcină. Pentru a evalua câmpul electric creat de o distribuție continuă de sarcină se utilizează următorul procedeu: se divizează distribuția de sarcină în elemente mici fiecare conținând sarcina

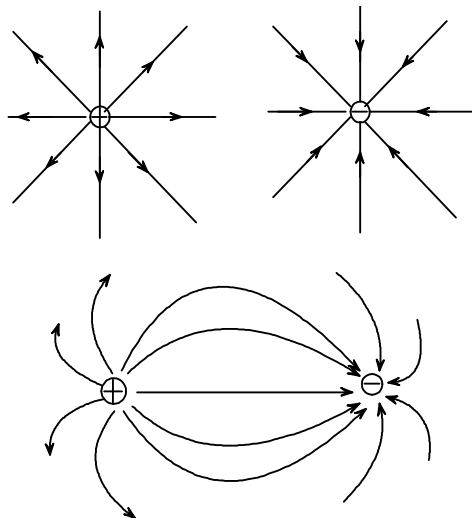


Figura 5.3: Linii de câmp electric.

dq . Câmpul produs în P de sarcina dintr-un element va fi:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (5.5)$$

Pentru a obține intensitatea totală se însumează contribuțiile aduse de fiecare element. Pentru aceasta se integrează relația (5.5) pe tot volumul în care se află sarcinile electrice:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (5.6)$$

Dacă notăm cu ρ densitatea de sarcină și se ține cont că $q = \rho dv$ se obține:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r})}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} dv \quad (5.7)$$

5.1.5 Legea lui Gauss

Fluxul câmpului electric

Fie o suprafață S străbătută de un câmp electric uniform $\vec{E}$ (Fig 5.4a). Fluxul câmpului electric prin suprafața S se definește ca:

$$\phi = (\vec{E}\vec{n}) S = ES \cos \alpha \quad (5.8)$$

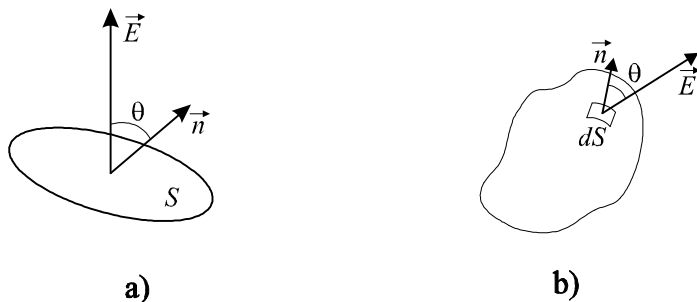


Figura 5.4: a) Fluxul câmpului electric b) Fluxul câmpului electric printr-o suprafață elementară dS

unde $\vec{n}$ este normala pe suprafața S .

În cazul unui câmp neuniform se împarte această suprafață în elemente mici dS . Considerând unul din aceste elemente, normala pe acest element de $\vec{n}$, (Fig. 5.6b) și $\vec{E}$ valoarea intensității câmpului electric pe acesta, fluxul electric elementar este:

$$d\phi = \vec{E} \vec{n} dS = (E dS) \cos \alpha \quad (5.9)$$

Fluxul total prin suprafața S se obține prin adunarea fluxurilor prin toate elementele dS . Atunci:

$$\phi = \iint_S \vec{E} \vec{n} dS = \iint_S \vec{E} d\vec{S} \quad (5.10)$$

unde vectorul $d\vec{S}$ se definește ca $d\vec{S} = \vec{n} dS$.

Să considerăm un caz particular și anume o sarcină în centrul unei sfere. În orice punct al sferei modulul intensității câmpului electric este:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Fluxul electric elementar printr-o suprafață dS este:

$$d\phi = E dS \quad (5.11)$$

și:

$$\phi = \iint E dS = E \iint dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

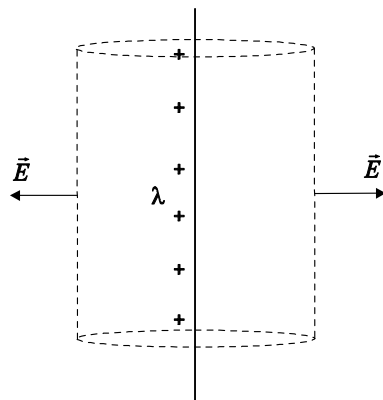


Figura 5.5: Câmpul electric creat de o distribuție liniară de sarcină

Rezultă că fluxul printr-o suprafață sferică produs de sarcina din centru este proporțional cu sarcina. Această proprietate se poate generaliza și pentru o suprafață închisă oarecare anume:

$$\phi = \iint_S \vec{E} \vec{n} dS = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \quad (5.12)$$

unde q_{int} este sarcina din interiorul volumului închis de suprafața S .

Aplicație

Se dă o distribuție liniară de sarcină, a cărei densitate este λ (sarcina pe unitatea de lungime). Să se găsească expresia intensității câmpului electric la distanța r dacă distribuția de sarcină se găsește în vid.

Soluție:

Din considerente de simetrie, $\vec{E}$ are o direcție radială ca în Fig. 5.5. Pentru determinarea câmpului electric se utilizează legea lui Gauss. Pentru aceasta se alege o suprafață cilindrică a cărei axă de simetrie o constituie distribuția liniară de sarcină. Se observă că fluxul câmpului electric este diferit de zero doar pe suprafață laterală a suprafeței cilindrice de rază r . Pe baze fluxul câmpului electric este nul deoarece unghiul dintre normală și direcția câmpului electric este $\pi/2$. Atunci:

$$\Phi = 2\pi r l E = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

Rezultă:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

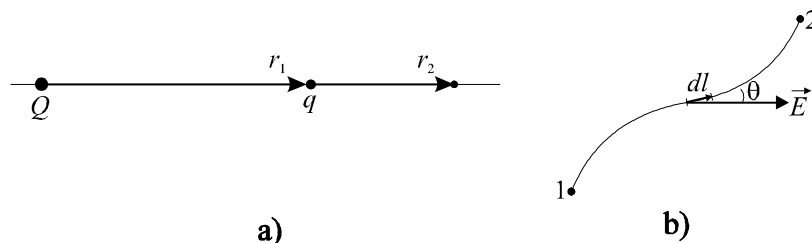


Figura 5.6: a) Lucrul mecanic efectuat de câmpul produs o sarcină Q asupra unei sarcini de probă q . b) Deplasarea unei sarcini de-a lungul unei curbe.

Aplicație

Să se determine câmpul electric determinat de o sferă conductoare de rază R încărcată cu sarcina Q în exteriorul acesteia.

Soluție

Pentru un punct situat la distanța $r > R$ considerăm o sferă concentrică cu sfera încărcată. Din motive de simetrie câmpul electric este perpendicular pe suprafața sferei de rază r deoarece toate punctele de pe această sferă sunt echivalente. Atunci conform legii lui Gauss:

$$\Phi = E (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Rezultă:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (5.13)$$

Astfel câmpul electric creat de o sferă încărcată cu sarcina Q , în exteriorul ei, este identic cu cel care ar fi determinat dacă sarcina Q s-ar afla concentrată în centru. Câmpul în interiorul sferei este nul. Vom arăta că în interiorul conductoarelor aflate în echilibru electrostatic (în care nu există deplasări ordonate de sarcini electrice) câmpul electric este nul.

5.1.6 Potențialul electric

Lucrul mecanic efectuat de câmpul electric.

Pentru simplificare vom considera câmpul creat de o sarcină electrică Q în care se deplasează o sarcină q de-a lungul unei linii de câmp de la distanța r_1 la distanța $r_2 > r_1$. Presupunem în plus că cele două sarcini au același

semn (Fig 5.6a). Lucrul mecanic elementar efectuat de câmp când sarcina este deplasată de la r la $r + dr$ este:

$$\delta L = F dr = F dr = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \quad (5.14)$$

Atunci

$$L = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (5.15)$$

Relația (5.15) este valabilă și în cazul în care deplasarea sarcinii se face pe un drum oarecare între două puncte aflate la distanțele r_1 și r_2 față de sarcina Q . Deoarece lucrul mecanic nu depinde de drum, forțele electrostatice sunt forțe conservative.

Să considerăm deplasarea sarcinii q într-un câmp electric de-a lungul unei curbe între două puncte (Fig 5.6b). Deplasarea infinitezimală de-a lungul curbei o vom nota cu $d\vec{l}$. Lucrul mecanic elementar efectuat de câmpul electric este:

$$\delta L = q\vec{E}d\vec{l} = qE \cos \theta dl \quad (5.16)$$

Lucrul mecanic total este:

$$L_{12} = q \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} \quad (5.17)$$

Această integrală este o integrală curbilinie și cum forțele electrostatice sunt conservative, valoarea ei nu depinde de drum. Din acest motiv se poate defini energia potențială a sarcinii q în câmpul electric $\vec{E}$.

$$\Delta E_p = E_{p_2} - E_{p_1} = -L_{12} = -q \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} \quad (5.18)$$

Energia potențială este definită până la o constantă aditivă astfel că semnificație fizică are doar diferența ei. Din acest motiv se poate alege o poziție de referință în care energia potențială este nulă. Dacă se consideră punctul 2 ca punct de referință (R) $E_{p_2} = 0$. Atunci:

$$E_{p_1} = L_{1R} = q \int_1^R \vec{E}d\vec{l} \quad (5.19)$$

Se observă că mărimea

$$\frac{E_{p1}}{q} = -\frac{L_{1R}}{q} = \int_1^R \vec{E} d\vec{l}$$

este independentă de sarcina q . Această mărime poartă numele de potențial. Mai general:

$$V = \frac{E_p}{q} = \frac{L_R}{q} \quad (5.20)$$

unde $L_R = L_{1R}$ este lucrul mecanic efectuat de câmpul electric când sarcina q este deplasată din punctul considerat în punctul de referință. Relația de mai sus poate fi privită ca o relație de definiție pentru potențial. *Potențialul unui punct al corpului este egal cu lucrul mecanic efectuat de forțele câmpului pentru deplasarea unității de sarcină pozitivă din punctul considerat în punctul de referință al cărui potențial se consideră egal cu zero.*

Ca observație trebuie să remarcăm că potențialul este o mărime cu care putem caracteriza câmpului electrostatic. Diferența de potențial între două puncte 1 și 2 se definește ca:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{\Delta E_p}{q} = -\frac{L_{12}}{q} = -\int_1^2 \vec{E} d\vec{l} \quad (5.21)$$

Atunci putem exprima lucrul mecanic efectuat de un câmp electric între două puncte în funcție de diferența de potențial

$$L_{12} = -q\Delta V = q(V_1 - V_2)$$

Ca și în cazul energiei potențiale, doar diferența de potențial are semnificație fizică. Unitatea de măsură a potențialului și a diferenței de potențial este voltul:

$$1\text{V} \equiv \frac{1\text{J}}{1\text{C}}$$

În multe aplicații practice potențialul Pământului se consideră egal cu zero.

Diferența de potențial într-un câmp determinat de o sarcină punctiformă

Ținând cont de expresia lucrului mecanic efectuat de câmpul electric al unei sarcini punctiforme asupra altei sarcini (5.15) rezultă că diferența de potențial dintre două puncte este:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\frac{L}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (5.22)$$

Alegând poziția de referință la infinit se pune $r_1 \rightarrow \infty$ și $V_1 = 0$. Atunci expresia potențialului determinat de sarcina Q este (renunțând la indicele 2):

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (5.23)$$

5.1.7 Suprafețe echipotențiale

Numim suprafață echipotențială locul geometric al punctelor cu potențial constant. Rezultă că lucrul mecanic la deplasarea unei sarcini pe o suprafață echipotențială este egal cu zero. Liniile de câmp sunt perpendiculare pe suprafețele echipotențiale.

Pentru a demonstra acest lucru se consideră o suprafață echipotențială pe suprafața căreia se deplasează o sarcină q pe o distanță egală cu dl . Dacă $\vec{E}$ este intensitatea câmpului electric pe această suprafață, forța care acționează asupra sarcinii q este $\vec{F} = q\vec{E}$ și lucrul mecanic se exprimă ca:

$$\delta L = F dl \cos \alpha = q E dl \cos \alpha \quad (5.24)$$

unde α — este unghiul dintre direcția lui $\vec{E}$ și deplasarea dl . Pe de altă parte lucrul este egal cu zero, deoarece diferența de potențial a celor două puncte de pe suprafața echipotențială este nulă. Atunci

$$q E dl \cos \alpha = 0$$

Cum q , E , dl sunt diferite de zero, rezultă $\cos \alpha = 0$ adică $\alpha = \pi/2$. Astfel intensitatea câmpului electric este perpendiculară pe suprafața echipotențială. Deoarece intensitatea câmpului electric este tangentă la liniile de câmp rezultă că și liniile de câmp sunt perpendiculare pe suprafața echipotențială.

5.1.8 Legătură dintre câmpul electric și diferența de potențial

Pentru a determina relația dintre intensitatea câmpului electric $\vec{E}$ și diferența de potențial se consideră un corp de probă cu sarcina q care

se deplasează în câmpul electric pe distanța $d\vec{l}$. Atunci variația energiei potențiale a sarcinii q este:

$$dE_p = -\delta L = -q\vec{E}d\vec{l} \quad (5.25)$$

Diferența de potențial este:

$$dV = \frac{dE_p}{q} = -\vec{E}d\vec{l} \quad (5.26)$$

Vom considera cazul unui câmp electrostatic care are numai componenta după axa Ox : $dE = E_x\vec{e}_x$. Deoarece $d\vec{l} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$ rezultă:

$$dV = -E_x dx$$

și

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

Dacă câmpul este uniform $E_x = \text{const.}$ și atunci

$$\Delta V = -E_x \Delta x \quad (5.27)$$

Relația (5.27) ia în considerare faptul că intensitatea câmpului electric este îndreptată de valori mari ale potențialului la valori mici ale acestuia. Dacă nu se ține cont de acest lucru și se consideră diferența de potențial ΔV o cantitate pozitivă, iar $\Delta x = d$, rezultă că

$$\Delta V = Ed \quad (5.28)$$

unde E_x a fost notat cu E . În relația (5.28) d este considerat de-a lungul unei linii de câmp.

În cazul general vom considera că intensitatea câmpului electric are componente după toate cele trei axe de coordonate:

$$\vec{E} = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z$$

Se exprimă lucrul mecanic efectuat de câmpul electric în două moduri:

$$\delta L = \vec{F}d\vec{l} = q\vec{E}d\vec{l} = qE_x dx + qE_y dy + qE_z dz \quad (5.29)$$

și

$$\begin{aligned}
 \delta L &= -q dV = -q [V(x + dx, y + dy, z + dz) - V(x, y, z)] \\
 \delta L &= -q \left[V(x, y, z) + \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz - V(x, y, z) \right] \\
 \delta L &= -q \left[\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right] \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

Comparând expresiile 5.29 și 5.31, și ținând cont că dx , dy , dz sunt arbitrare rezultă:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Astfel expresia intensității câmpului electric este:

$$\vec{E} = - \left[\frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z \right] = -\text{grad } V = -\nabla V \quad (5.31)$$

5.1.9 Conductorii în echilibru electrostatic

Un conductor este un corp care posedă sarcini (de regulă electroni) care se pot mișca cvasiliber în interiorul său. El se află în echilibru electrostatic dacă sarcina cvasiliberă din interiorul său nu suferă o mișcare ordonată.

În cazul echilibrului electrostatic câmpul electric este egal cu zero în interiorul conductorului iar potențialul este constant.

Pentru a demonstra prima parte a acestei afirmații se consideră că intensitatea câmpului electric în conductorii este diferită de zero. Atunci electronii liberi vor fi puși într-o mișcare ordonată în sens contrar câmpului, fapt ce ar însemna că nu ne găsim în condiții de echilibru electrostatic așa cum am presupus. Rezultă că în conductorii câmpul este nul. Datorită acestui fapt conform ecuației 5.31 rezultă că potențialul este constant în toate punctele din interiorul conductorului.

Sarcina electrică netă este repartizată în întregime pe suprafața conductorilor și nu în interiorul lor.

Pentru a arăta acest lucru imaginăm o suprafață închisă S în interiorul unui conductor pentru care aplicăm legea lui Gauss. Deoarece în interiorul conductorului și deci și pe suprafața S intensitatea câmpului electric este nulă:

$$\iint_S \vec{E} d\vec{S} = 0 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

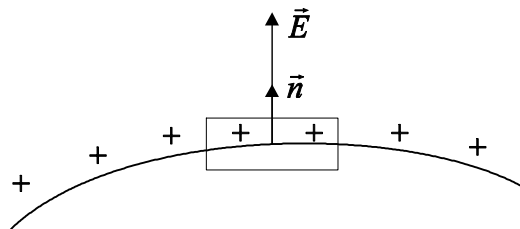


Figura 5.7: Câmpul electric la suprafața unui conductor

De aici rezultă că sarcina Q_{int} din interiorul suprafeței este nulă. Cum suprafața considerată poate lua orice formă, aceasta poate fi făcută să tindă spre suprafața conductorului care închide tot volumul său. Rezultă că sarcina din interiorul unui conductor va fi nulă. Sarcina se distribuie pe suprafața conductorului.

La suprafața unui conductor în echilibru electrostatic câmpul electric este orientat întotdeauna normal la suprafața acestuia, iar suprafața conductorului este o suprafață echipotențială.

Dacă intensitatea câmpului electric nu este normală la suprafața conductorului, atunci ar exista o componentă tangențială a câmpului electric. Cum sarcina este dispusă pe suprafața conductorului rezultă că această sarcină ar fi pusă în mișcare și conductorul nu ar mai fi în echilibru electrostatic.

Se va calcula în continuare valoarea câmpului electric la suprafața conductorilor cunoscând σ densitatea superficială de sarcină (sarcina de unitatea de suprafață). În Fig. 5.7 este reprezentată o porțiune din suprafața unui conductor pe care densitatea superficială de sarcină este $+\sigma$. Se consideră o suprafață foarte mică sub formă de cilindru cu o bază aflată în interiorul conductorului iar o alta în afară. Bazele cilindrului se aleg astfel încât, pe cea exterioară conductorului, intensitatea câmpului electric să fie perpendiculară pe ea. Se aplică legea lui Gauss pentru această suprafață și se observă că numai integrala prin baza situată în vid aduce o contribuție diferită de zero la fluxul câmpului (în interiorul conductorului $\vec{E} = 0$ iar pe fețele laterale $\vec{E} \perp \vec{n}$). Atunci:

$$\iint_S \vec{E} d\vec{S} = E \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0} \quad (5.32)$$

unde $\sigma \Delta S$ este sarcina totală din interiorul suprafeței considerate. Din (5.32) rezultă câmpul la suprafața conductorului:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (5.33)$$

Aplicație

Să se determine potențialul unei sfere conductoare de rază R încărcată cu sarcina Q .

Soluție:

Deoarece în interiorul sferei câmpul electric este nul, potențialul tuturor punctelor sferei este același. Cunoșcând câmpul determinat de sarcina Q (5.23) și considerând că la infinit potențialul creat de sarcina de pe sfera este nul, rezultă:

$$V = \int_R^\infty E(r) dr = \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

5.1.10 Densitatea de energie a câmpului electric

Pentru aceasta vom considera un caz particular și anume energia înmagazinată într-un condensator plan.

Un condensator constă din două conductoare încărcate cu sarcini electrice egale și de sens contrar. Definim capacitatea unui condensator ca raportul dintre sarcina de pe armături și diferența de potențial dintre ele.

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad (5.34)$$

Unitatea de măsură a capacității este faradul

$$1\text{F} = \frac{1\text{C}}{1\text{V}}$$

Condensatorul plan este format din două armături plane egale, paralele aflate la o distanță d una de alta.

Pentru a se calcula diferența de potențial dintre cele două armături este necesar să se calculeze câmpul electric creat de un conductor plan infinit încărcat astfel încât σ densitatea de sarcină are aceiași valoare în orice punct al suprafeței.

Din motive de simetrie, câmpul electric $\vec{E}$ este perpendicular pe suprafață. Alegem o suprafață cilindrică astfel încât cele două baze ale sale să fie simetrice față de suprafața încărcată. Fluxul prin suprafața respectivă este:

$$\Phi = \Phi_{baze} + \Phi_{lateral} = 2ES$$

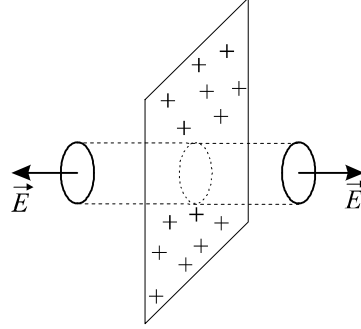


Figura 5.8: Câmpul creat de o distribuție plană de sarcini electrice.

deoarece fluxul pe suprafața laterală $\Phi_{lateral} = 0$, $\vec{E}$ fiind paralel cu aceasta adică perpendicular pe normala la suprafață, iar $\Phi_{base} = 2ES$.

Dar $\Phi = q/\varepsilon_0$ unde $q = \sigma S$ este sarcina din interiorul cilindului. Rezultă:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (5.35)$$

Revenind la cazul condensatorului plan se observă că în interior câmpul este suma câmpurilor create de sarcinile pozitivă și cea negativă de pe cele două armături (se neglijează efectele de margine):

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

deoarece cele două câmpuri sunt orientate în același sens. Cum $\Delta V = Ed$:

$$C = \frac{Q}{Ed} = \varepsilon_0 \frac{\sigma S}{\sigma d} = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \quad (5.36)$$

Presupunem că la un moment dat condensatorul este încărcat cu sarcina q . Pentru a mări sarcina de pe condensator cu cantitatea dq trebuie să se transfere sarcina dq de pe placa încărcată negativ pe cea încărcată pozitiv. Lucrul mecanic efectuat (din exterior) este:

$$\delta L = (\Delta V) dq = \frac{q}{C} dq$$

Dar W energia înmagazinată în condensator este egală cu lucrul mecanic efectuat la încărcarea condensatorului:

$$L = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$

Cum $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$, $\Delta V = Ed$ rezultă:

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 (dS)$$

Cum volumul în care se află câmpul electric este $V = Sd$, densitatea de energie a câmpului electric va fi:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \quad (5.37)$$

Această relație, deși a fost dedusă pentru un caz particular este valabilă pentru orice câmp electric.

Aplicație

Să se determine capacitatea unui condensator sferic care constă din două sfere concentrice de raze R_1 și R_2 .

Soluție:

Presupunem că sfera cu raza mai mică este cea cu raza R_1 pe care se află sarcina negativă $-Q$. Câmpul electric între cele două sfere este:

$$E = E(Q) + E(-Q) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + 0$$

unde $R_1 < r < R_2$. Am ținut cont că în interiorul sferei încărcată cu sarcina $-Q$, câmpul este nul. Diferența de potențial dintre cele două sfere este:

$$V_2 - V_1 = - \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Capacitatea condensatorului este

$$C = \frac{Q}{V_2 - V_1} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_2 R_1}{(R_2 - R_1)}$$

Aplicație

Să se arate că energia asociată cu o sferă conductoare de rază R încărcată cu sarcina Q este

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{R}$$

Soluție

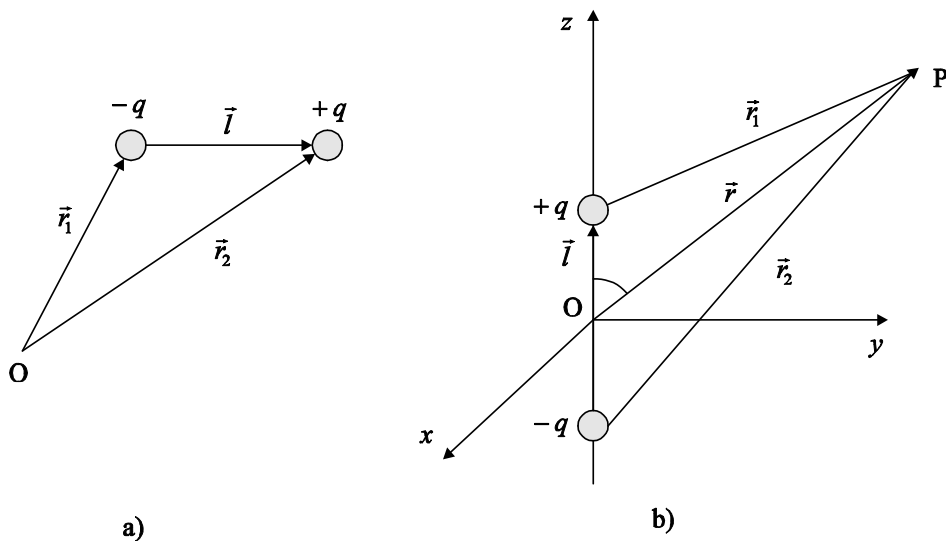


Figura 5.9: a) Dipol electric b) Calculul potențialului creat de un dipol. Originea se află la mijlocul distanței dintre cele două sarcini.

Când pe sferă se află sarcina q potențialul sferei este:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Pentru a se aduce o sarcină dq pe sferă trebuie să se efectueze un lucru mecanic egal cu:

$$\delta L = V dq = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} dq$$

Astfel:

$$W = L = \int_0^Q \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} dq = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}$$

5.2 Dielectrics

5.2.1 Dipol electric

Dipolul electric este un sistem de două sarcini de mărimi egale și de semne contrare aflate la o distanță l una față de cealaltă (Fig 5.9a).

Definim momentul de dipol

$$\vec{p} = q\vec{r}_1 - q\vec{r}_2 = q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = q\vec{l} \quad (5.38)$$

Potențialul creat de un dipolul electric este egal cu suma potențialelor create de fiecare sarcină în parte. Se va considera cazul în care punctul în care se calculează potențialul se află la o distanță mult mai mare decât distanța dintre sarcinile dipolului. Se presupune că sarcinile sunt situate pe axa Oz. Potențialul în punctul P va fi (Fig. Fig 5.9b):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (5.39)$$

unde:

$$r_2^2 = r^2 + \frac{1}{4}l^2 - lr \cos \theta = r^2 \left(1 + \frac{l^2}{4r^2} - \frac{l}{r} \cos \theta \right)$$

$$r_1^2 = r^2 + \frac{1}{4}l^2 + lr \cos \theta = r^2 \left(1 + \frac{l^2}{4r^2} + \frac{l}{r} \cos \theta \right)$$

Deoarece s-a presupus că $r \gg l$ atunci:

$$\frac{1}{r_2} = (r_2^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{l^2}{4r^2} - \frac{l}{r} \cos \theta \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{l}{2r} \cos \theta + \dots \right)$$

$$\frac{1}{r_1} = (r_1^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{l^2}{4r^2} + \frac{l}{r} \cos \theta \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{l}{2r} \cos \theta + \dots \right)$$

Rezultă:

$$V = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (5.40)$$

Se observă că $\vec{p}\vec{r} = pr \cos \theta = qlr \cos \theta$. Relația (5.40) se poate scrie:

$$V = \frac{\vec{p}\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (5.41)$$

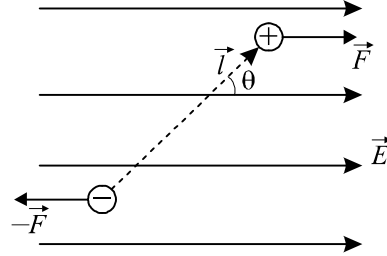


Figura 5.10: Efectul câmpului electric asupra unui dipol electric.

Dipol plasat în câmp electric extern

Presupunem dipolul ca fiind plasat într-un câmp electric extern $\vec{E}$ (Fig. 5.10). Câmpul electric extern este determinat de o altă distribuție de sarcină. Forțele care acționează asupra fiecărei sarcini sunt $\vec{F} = q\vec{E}$ și $-\vec{F} = -q\vec{E}$. Cele două forțe formează un cuplu care are tendința să alinieze dipolul paralel cu direcția câmpului electric în care se află. Momentul cuplului care acționează asupra dipolului este:

$$\vec{M} = \vec{l} \times \vec{F} = \vec{l} \times q\vec{E} = q \left(\vec{l} \times \vec{E} \right) = q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (5.42)$$

Modulul acestui moment este

$$M = pE \sin \theta \quad (5.43)$$

Se poate determina energia potențială a dipolului în câmpul electric. Pentru aceasta se observă că lucrul mecanic efectuat de câmpul electric este egal cu minus variația energiei potențiale a dipolului.

$$dE_p = -\delta L = M d\theta = pE \sin \theta d\theta$$

deoarece momentul cuplului tinde să micșoreze unghiul θ și $d\theta < 0$. Atunci

$$E_{pf} - E_{pi} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} pE \sin \theta d\theta = pE \int_{\theta_i}^{\theta_f} \sin \theta d\theta = pE (\cos \theta_i - \cos \theta_f) \quad (5.44)$$

Termenul care conține pe θ_i este o constantă care depinde de orientarea inițială a dipolului. Este convenabil să utilizăm ca poziție de referință poziția în care $\theta_i = 90^\circ$ în care alegem $E_{pi} = 0$. Energia potențială este:

$$E_p = -pE \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

expresie în care am neglijat indicele f .

5.2.2 Dipoli electrici la nivel atomic și molecular

Dipoli electrici induși în atomi

Atomul este un sistem format dintr-un nucleu în jurul căruia se rotesc electronii cu viteze de 10^6 m/s. Deoarece raza atomică este de aproximativ $10^{-9} - 10^{-10}$ m, la scară macroscopică nu poate fi observată decât media acestor mișcări. Astfel imaginea fizică a unui atom dintr-un dielectric, se apropie de imaginea dată de mecanica cuantică care consideră că nucleul pozitiv este înconjurat de un nor de sarcină negativă. În general norul este uniform distribuit în jurul nucleului și centrul sarcinilor negative (determinate de electroni) coincide cel al sarcinilor pozitive (nucleul), astfel că momentul de dipol al moleculelor este nul.

Dacă atomul este introdus într-un câmp electric atunci nucleul este deplasat în sensul câmpului în timp ce norul electronic este deplasat în sens contrar până se ajunge din nou într-o stare de echilibru stabil. Un astfel de atom prezintă un moment electric de dipol. Spunem că atomul este polarizat iar dipolul astfel format poartă numele de dipol indus. Se demonstrează că momentul de dipol indus este proporțional cu intensitatea câmpului electric:

$$p = \alpha E$$

unde α poartă numele de polarizabilitate.

Aplicație

Un model simplu al atomului de hidrogen este acela în care acesta constă dintr-un nucleu cu sarcina $+e$, înconjurat de un nor electronic cu sarcina $-e$ cu raza $a = 0,529$ Å. Să se calculeze polarizabilitatea acestui atom.

Soluție:

În prezența unui câmp electric, nucleul se va deplasa în sensul câmpului electric iar norul electronic în sens invers. Distanța dintre nucleu și centrul sarcinilor negative devine d , astfel că apare dipolul indus $p = ed$. Asupra nucleului acționează forța datorată câmpului electric eE și, în sens contrar, forța determinată de norul electronic eE_e . La echilibru cele două forțe sunt egale. Atunci:

$$E = E_e$$

Calculul câmpului electric datorat norului electronic E_e se face cu legea lui Gauss. Se consideră o sferă de rază d , cu centrul în centrul sarcinilor negative. Atunci:

$$4\pi d^2 E_e = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{3e}{4\pi a^3} \frac{4\pi d^3}{3} \frac{1}{\varepsilon_0}$$

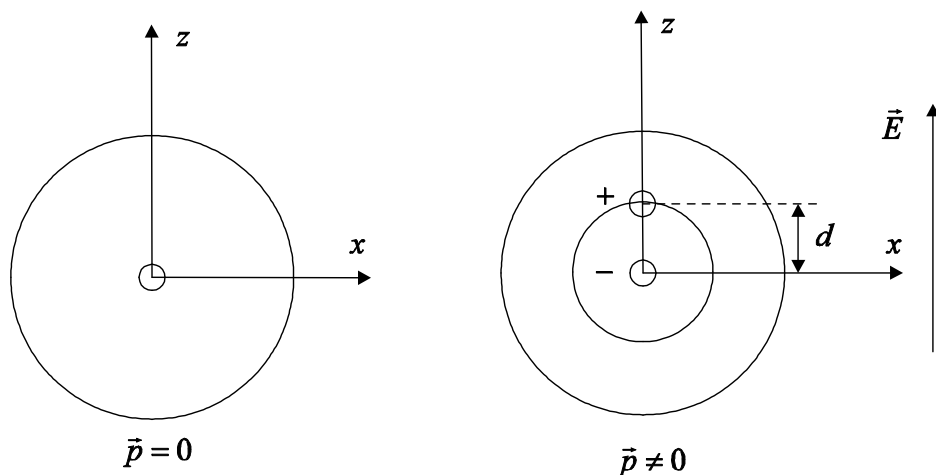


Figura 5.11: Atomul de hidrogen în câmp electric.

$$E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ed}{a^3}$$

Astfel:

$$p = ed = (4\pi\epsilon_0 a^3) E$$

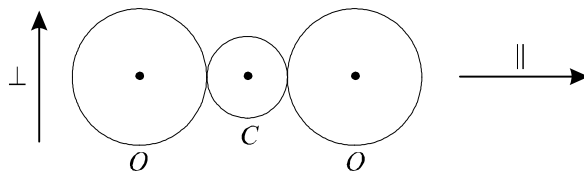
Rezultă polarizabilitatea $\alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3$.

În Tabelul 5.1 sunt date polarizabilitățile câtorva atomi

Tabel 5.1
Polarizabilități

Atom	α [F·m ²]
H	$7,34 \times 10^{-41}$
He	$2,34 \times 10^{-41}$
Ne	$4,45 \times 10^{-41}$
C	$6,68 \times 10^{-41}$
Li	$14,48 \times 10^{-41}$
Na	$304,40 \times 10^{-41}$
K	$378,40 \times 10^{-41}$

Se observă că pentru gazele nobile He, Ne, Ar unde atomii sunt puternic legați de nucleu polarizabilitatea este mică. În cazul elementelor alcaline unde electronii de valență sunt slab legați de nucleu polarizabilitatea este mai mare.

Figura 5.12: Molecula CO_2

Dipoli induși în molecule nepolare

Există molecule unde centrul sarcinilor negative coincide cu centrul sarcinilor pozitive. Astfel de molecule poartă numele de molecule nepolare. Există două tipuri de astfel de molecule unele cu simetrie sferică și altele cu simetrie mai joasă.

Moleculele cu simetrie sferică precum CH_4 sau BCl_3 au un moment de dipol $\vec{p} = \alpha \vec{E}$. Trebuie remarcat că polarizabilitatea lor moleculară nu este suma polarizabilităților atomilor constituenți.

În cazul moleculelor care nu au simetrie sferică precum CO_2 (Fig. 5.12) polarizabilitatea moleculelor depinde de direcția câmpului extern. Pentru această moleculă $\alpha_{||} > \alpha_{\perp}$ unde $||$ și $\perp$ se referă la orientarea câmpului față de axa lungă a moleculei. Astfel când câmpul este aplicat de-a lungul moleculei va induce un moment de dipol mai mare decât atunci când câmpul este aplicat perpendicular pe aceasta. Acest lucru rezultă din faptul că molecula este mai ușor deformabilă în lungul axei proprii decât într-o direcție perpendiculară.

Dipolii moleculelor polare

Există molecule care datorită structurii lor chiar în absența unui câmp electric exterior posedă un moment electric dipolar, deoarece centrul sarcinilor pozitive nu coincide cu centrul sarcinilor negative. Orice moleculă biatomică formată din atomi de natură diferită posedă momente de dipol permanente. Această proprietate se datorează faptului că la formarea unor astfel de molecule, ca de exemplu HCl , HBr sau HI , o parte din norul electronic al atomului de hidrogen se transferă ionilor de clor, brom sau iod. Rămâne astfel un exces de sarcini de sarcină pozitivă la extremitatea moleculei ce conține ionul de hidrogen și un exces de sarcină negativă la cealaltă extremitate. În Tabelul 5.2 sunt prezentate diverse valori pentru dipoli electrici.

Tabelul 5.2

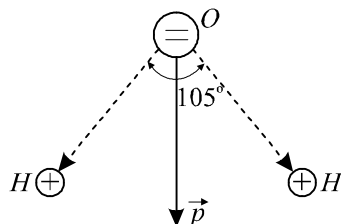


Figura 5.13: Molecula de apă

Valori ale dipolilor pentru diverse molecule

Moleculă	p [Cm]
CO	$7,34 \times 10^{-30}$
HI	$2,34 \times 10^{-30}$
HB ₂	$4,45 \times 10^{-30}$
HCl	$17,8 \times 10^{-30}$
NH ₂	$6,68 \times 10^{-30}$
H ₂ S	$14,48 \times 10^{-30}$

Un alt exemplu de moleculă care posedă moment electric permanent este molecula de apă care are centrul sarcinilor negative în apropierea oxigenului (5.13). Practic momentul de dipol electric este determinat prin compunerea celor două momente de dipol O–H. El are valoarea

$$p = 6,2 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$$

Aplicații

a) Încălzirea apei în cuptoarele cu microunde.

Când funcționează, cuptoarele cu microunde generează câmpuri electrice care variază extrem de rapid și fac ca moleculele de apă să intre într-o puternică mișcare de oscilație datorită interacției câmpului electric și momentul de dipol al moleculei de apă. Datorită ciocnirilor dintre molecule energia absorbită de la câmpul electric se transformă în energie termică și apa se încălzește.

b) Spălatul cu apă și săpun.

Grăsimile și uleiurile sunt formate din molecule nepolare care nu sunt atrase de apă. Apa simplă nu poate îndepărta aceste molecule. Săpunul conține molecule lungi numite surfactanți. Unul din capetele moleculei este

nepolar și celălalt capăt acționează ca o moleculă polară. Capătul polar al surfactantului se leagă de molecula de apă iar capătul nepolar se poate atasa moleculelor de grăsime. Astfel de molecule servesc ca legături între moleculele grăsimilor și moleculele de apă.

Prin introducerea în câmp electric a unui material în care există molecule cu momente dipolare permanente sau în care se pot induce momente dipolare, dipolii vor tinde să se alinieze paralel cu câmpul electric. Alinierea însă nu va fi una perfectă din două motive:

- agitația termică se opune alinierii;
- dipolii însăși vor determina un câmp electric astfel că asupra fiecărui dipol va acționa un câmp electric extern și unul determinat de dipolii vecini.

Totuși pentru dielectricii omogeni și izotropi putem considera că dipolii sunt aliniați paralel cu câmpul electric.

Ca exemple de dielectrici se pot da: sticla, hârtia, ceramica, materialele plastice. Ele sunt materiale care nu posedă sarcini electrice libere adică nu sunt conductoare. Proprietatea fundamentală a unui dielectric este aceea că în câmpuri electrice materialul se polarizează, adică are loc alinierea dipolilor paralel cu direcția intensității câmpul electric aplicat.

5.2.3 Densitate de polarizare

Polarizarea unui material dielectric este caracterizată de mărimea numită densitate de polarizare care reprezintă momentul de dipol al unității de volum:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V} \quad (5.45)$$

unde $\sum \vec{p}_i$ reprezintă suma momentelor de dipol care există în volumul ΔV .

În cazul unui dielectric omogen format dintr-un singur tip de molecule polare cu momentul de dipol $\vec{p}$ care se orientează paralel cu câmpul extern, densitatea de polarizare are expresia:

$$\vec{P} = n\vec{p} \quad (5.46)$$

unde n este concentrația de dipoli din unitatea de volum.

Densitatea de polarizare a unui material omogen

Fie un dielectric omogen aflat în câmp electric în care datorită orientării dipolilor electrici apare o densitate de polarizare P .

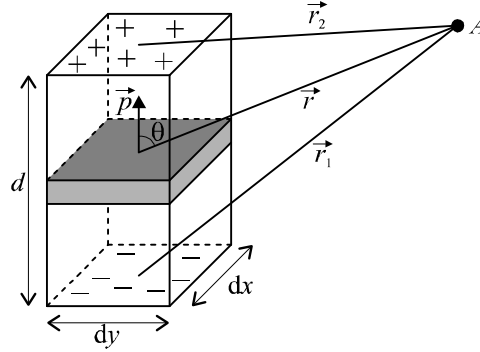


Figura 5.14: Material dielectric uniform polarizat.

Considerăm din acest dielectric o porțiune de grosime d având suprafața $dxdy$ (Fig. 5.14). Deoarece dielectricul este omogen și izotrop direcția vectorului de polarizare coincide cu direcția câmpului electric. Un element de volum a cărui înălțime este dz i se poate asocia un moment de dipol egal cu:

$$Pdv = P dxdydz \quad (5.47)$$

Potențialul creat de acest element de volum

$$dV = \frac{P dxdydz \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Deoarece $dr = -dz \cos \theta$, $dS = dxdy$ rezultă:

$$V = -\frac{PdS}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \quad (5.48)$$

$$V = -\frac{PdS}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{Pd\sigma}{4\pi\epsilon_0 r_2} - \frac{Pd\sigma}{4\pi\epsilon_0 r_1} \quad (5.49)$$

Relația este echivalentă cu expresia potențialului creat de două sarcini punctiforme egale și de sens contrar având valoarea PdS . Rezultă că o placă dielectrică introdusă într-un câmp electric care determină apariția unei polarizări, poate fi înlocuită cu două distribuții de sarcini cu densitățile superficiale $\sigma_1 = +P$ și $\sigma_2 = -P$ pe cele două fețe ale plăcii.

Observație: Dacă vectorul $\vec{P}$ nu este normal pe suprafața dielectricului densitatea de sarcină de pe suprafața dielectricului este egală cu componenta normală a polarizării

5.2.4 Modalități de polarizare a unui dielectric

Polarizare electronică

Se manifestă la dielectrici formați din molecule sau atomi simetrici în care centrul sarcinilor pozitive coincide cu centrul sarcinilor negative. Așa cum am spus în prezența unui câmp electric are loc o deplasare relativă a centrului sarcinilor negative față de nucleu, astfel încât întreg ansamblul atomic se manifestă ca un dipol. Această deplasare nu depinde de agitație termică, deoarece în acest caz avem de-a face cu procese la nivel atomic. Astfel densitatea de polarizare este:

$$P = n\alpha_e E \quad (5.50)$$

unde α_e este polarizabilitatea electronică iar n este concentrația de atomi.

Polarizarea orientatională

Este prezentă în dielectricii constituiți din molecule nesimetrice (molecule polare) în care centrul sarcinilor pozitive nu coincide cu centrul sarcinilor negative. Astfel de molecule prezintă un moment dipolar permanent datorită separării sarcinilor de semn contrar. În prezența unui câmp electric dipolii tind să se orienteze în direcția acestuia. În acest caz energia potențială a unui dipol de moment $\vec{p}$ în câmpul electric $\vec{E}$ este:

$$E_p = -\vec{p}\vec{E} = -pE \cos \theta \quad (5.51)$$

unde α este unghiul făcut de dipol cu câmpul electric.

Pentru a determina densitatea de polarizare a materialului trebuie să se calculeze media proiecției momentului de dipol pe direcția câmpului electric care va fi considerată ca axa Oz. Componentele momentului de dipol pe direcție perpendiculară a câmpului electric au valori arbitrare și sunt orientate aleatoriu. Media acestora este nulă.

Vom considera că distribuția direcțiilor momentelor de dipol este o distribuție Boltzmann. Probabilitatea ca direcția momentului de dipol să fie în interiorul unghiului solid $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ din jurul direcției $\vec{\Omega}$ este:

$$d\mathcal{P} = C e^{\frac{pE \cos \theta}{k_B T}} \sin \theta d\theta d\varphi$$

Constanta C se obține din condiția de normare

$$C \int_0^\pi e^{\frac{pE \cos \theta}{k_B T}} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 1$$

Atunci

$$d\mathcal{P} = \frac{e^{\frac{pE \cos \theta}{k_B T}} \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_0^\pi e^{\frac{pE \cos \theta}{k_B T}} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi}$$

Valoarea medie a proiecției momentului dipolar pe direcția câmpului electric este:

$$\bar{p}_z = \int p \cos \theta d\mathcal{P} = p \langle \cos \theta \rangle = p \frac{\int_0^\pi e^{\frac{pE \cos \theta}{k_B T}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi}{\int_0^\pi e^{\frac{pE \cos \theta}{k_B T}} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi} \quad (5.52)$$

Notând cu

$$x = \cos \theta; \quad a = \frac{pE}{k_B T}$$

se obține:

$$\bar{p}_z = p \frac{\int_{-1}^{+1} x e^{ax} dx}{\int_{-1}^{+1} e^{ax} dx} \quad (5.53)$$

Cele două integrale se calculează astfel:

$$\int_{-1}^{+1} e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{e^a - e^{-a}}{a} = \frac{2}{a} \frac{e^a - e^{-a}}{2} = \frac{2}{a} \text{sha}$$

unde sha este sinusul hiperbolic

$$\int_{-1}^{+1} a e^{ax} dx = \frac{d}{da} \left[\int_{-1}^{+1} e^{ax} dx \right] = \frac{d}{da} \left[\frac{2}{a} \text{sha} \right] = \frac{2 \text{cha}}{a} - \frac{2 \text{sha}}{a^2}$$

Atunci:

$$\bar{p}_z = p \frac{\frac{2 \text{cha}}{a} - \frac{2 \text{sha}}{a^2}}{\frac{2}{a} \text{sha}} = p \left(\coth a - \frac{1}{a} \right) = pL(a)$$

unde cha este cosinus hiperbolic iar $\coth a$ este cotangenta hiperbolică. $L(a)$ – poartă numele de funcție Langevin (Fig. 5.15). Atunci densitatea de polarizare este:

$$P = n \bar{p}_z = npL \left(-\frac{pE}{k_B T} \right)$$

În cazul unor câmpuri slabe când $pE \ll k_B T$ și $a \ll 1$. Atunci relația (5.53), ținând cont că $e^{ax} = 1 + ax$, devine:

$$\bar{p}_z = p \frac{\int_{-1}^{+1} x(1 + ax) dx}{\int_{-1}^{+1} (1 + ax) dx} = p \frac{a}{3}$$

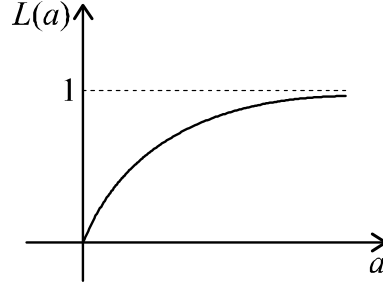


Figura 5.15: Funcția Langevin.

Rezultă:

$$P = np \frac{a}{3} = np \frac{pE}{3k_B T} = n \frac{p^2}{3k_B T} E \quad (5.54)$$

Dacă exprimăm densitatea de polarizare sub forma $P = n\alpha E$ polarizabilitatea (orientațională) este:

$$\alpha = \frac{p^2}{3k_B T} \quad (5.55)$$

5.2.5 Permeabilitatea și susceptibilitatea

Considerăm un condensator plan a cărui capacitate este C_0 (Fig. 5.16). Dacă în interiorul condensatorului se introduce un dielectric capacitatea acestuia se modifică la valoarea C . Raportul dintre C și C_0 poartă numele de permitivitate relativă a dielectricului:

$$\varepsilon_r = C/C_0 \quad (5.56)$$

Permitivitatea relativă este o mărime specifică materialului dielectric respectiv.

Introducerea materialului dielectric în câmpul electric îl polarizează și apare o sarcină superficială la suprafața dielectricului cu densitatea superficială σ_p . Considerăm o suprafață Σ pe care aplicăm legea lui Gauss:

$$ES = \frac{1}{\varepsilon_0} (\sigma - \sigma_p) S \quad (5.57)$$

unde σ este densitatea de sarcină pe armăturile condensatorului. Deoarece densitatea de sarcină care apare pe suprafața dielectricului este egală cu

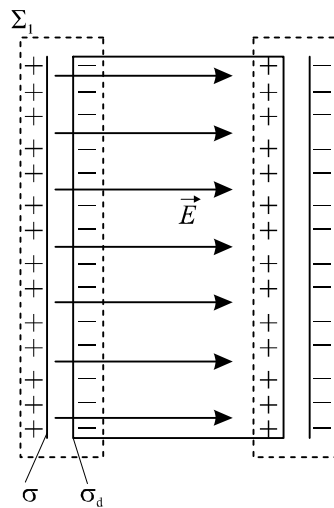


Figura 5.16: Placă de dielectric introdusă în interiorul unui condensator plan

densitatea de polarizare din (5.57) rezultă;

$$\sigma = \varepsilon_0 E + \sigma_p = \varepsilon_0 E + P \quad (5.58)$$

Atunci

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma S}{Ed} = \frac{(\varepsilon_0 E + P) S}{Ed} = \left(1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}\right) \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \left(1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}\right) C_0 \quad (5.59)$$

Rezultă că:

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E} \quad (5.60)$$

De aici:

$$P = (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_0 E \quad (5.61)$$

Definim susceptibilitatea electrică ca:

$$\chi_e = \varepsilon_r - 1 \quad (5.62)$$

Astfel densitatea de polarizare se poate scrie ca:

$$P = \chi_e \varepsilon_0 E \quad (5.63)$$

5.2.6 Inducția câmpului electric

Sarcina de pe armăturile condensatorului este:

$$Q = \sigma S = (\varepsilon_0 E + P) S \quad (5.64)$$

Atunci:

$$\frac{Q}{S} = \varepsilon_0 E + P \quad (5.65)$$

Mărimea din partea dreaptă poartă numele de inducție a câmpului electric:

$$D = \varepsilon_0 E + P \quad (5.66)$$

Deoarece $\vec{E}$ și $\vec{P}$ sunt vectori și $\vec{D}$ este un vector:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (5.67)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \quad (5.68)$$

5.2.7 Densitatea de polarizare în cazul materialelor neomogene

Alături de considerațiile făcute până acum asupra polarizării uniforme este important să se considere și cazul în care polarizarea nu este uniformă. Acest lucru se datorează neuniformității dielectricului sau a variației intensității câmpului electric în funcție de poziția din interiorul dielectricului. Pentru a putea determina polarizarea trebuie să ținem cont că în afara sarcinilor induse la suprafața dielectricului apar sarcini induse în interiorul acestuia.

Fie un cub în interiorul unui dielectric neutru cu volumul $\delta x \delta y \delta z$ (Fig. 5.17). Cubul este mic la scară macroscopică dar suficient de mare la scară microscopică pentru a conține suficient de mulți atomi. Dacă aplicăm un câmp electric acesta se polarizează.

Presupunem pentru simplificare că polarizarea în interiorul cubului este diferită de zero pe direcția Ox , că este dependentă de x și independentă de y și z . O consecință a polarizării este deplasarea sarcinilor câmpul electric. Atunci sarcinile de pe fețele cubului perpendiculare pe axa Ox sunt $\sigma(x) \delta y \delta z = P(x) \delta z \delta y$ și $-\sigma(x + \delta x) \delta z \delta y = -P(x + \delta x) \delta z \delta y$, deoarece

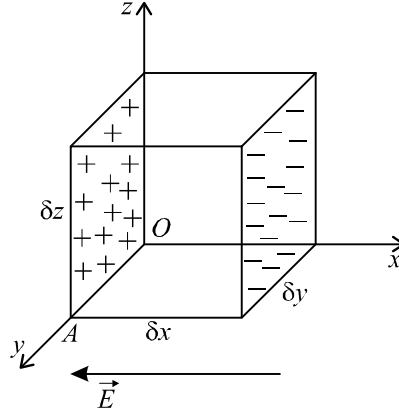


Figura 5.17: Porțiune dintr-un dielectric neomogen aflată în câmp electric

densitățile superficiale de sarcină sunt egale cu densitățile de polarizare. Aceste sarcini determină o sarcină netă:

$$\delta q_p = -[P(x + \delta x) - P_x(x)] \delta y \delta z = -\frac{\partial P_x}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$$

Generalizând în cazul că direcția câmpului $\vec{E}$ este arbitrară, putem afirma că există contribuții similare pentru toate componentele lui $\vec{P}$ pe direcțiile Oy și Oz astfel că sarcina totală δq a cubului este:

$$\delta q_p = -\left[\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right] \delta x \delta y \delta z$$

Atunci densitatea sarcinilor de polarizare este:

$$\rho_p = \frac{\delta q}{\delta x \delta y \delta z} = -\left[\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right] = -\operatorname{div} \vec{P} = -\nabla \cdot \vec{P} \quad (5.69)$$

Aplicație

O sarcină Q pozitivă este distribuită uniform în interiorul unei sfere de rază R . Să se determine câmpul electric în interiorul sferei. Să se exprime rezultatul și în funcție de densitatea volumică de sarcină ρ .

Soluție:

Considerăm o sferă de rază r în interiorul sferei de rază R concentrică cu aceasta. Sarcina din interiorul sferei de rază r este q . Utilizăm legea lui Gauss:

$$\iint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

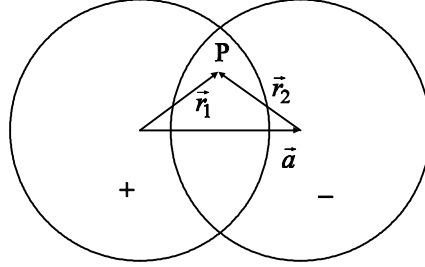


Figura 5.18: Sfere încărcate care se intersectează.

Din considerente de simetrie direcția câmpului electric are direcția razei sferei. Atunci:

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Ținând cont că $q = \rho v = Qv/V$ unde v este volumul sferei de rază r , iar V este volumul sferei de rază R , se obține

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{v}{V} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{r^3}{R^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R^3}$$

Deoarece $Q = \rho V$ cu $V = 4\pi R^3/3$ intensitatea câmpului electric se mai exprimă ca:

$$E = \frac{\rho V}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R^3} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

Vectorial această relație se scrie astfel:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}$$

Aplicație

Care este câmpul electric într-o cavități formată prin intersecția a două sfere încărcate cu densitățile de sarcină ρ și $-\rho$ uniform distribuite în volumul lor. Distanța dintre centrele celor două sfere este a .

Soluție:

Ținând cont de rezultatele din problema anterioară câmpurile create de cele două sfere încărcate în punctul P (Fig. 5.18) sunt:

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}_1 \quad \text{și} \quad \vec{E}_2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}_2$$

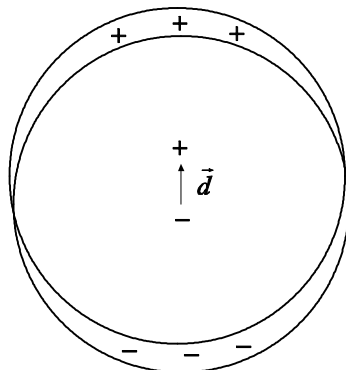


Figura 5.19: Calculul polarizării unei sfere polarizate uniform.

Astfel în punctul P câmpul electric total este:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}_1 - \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{d}$$

Aplicație

Să se găsească câmpul electric produs în interiorul unei sfere de rază R uniform polarizată, cu densitatea de polarizare $\vec{P}$.

Soluție:

Considerăm că există două sfere încărcate uniform, o sferă încărcată pozitiv și o sferă încărcată negativ suprapuse. Dacă cele două sfere se suprapun perfect sarcinile se anulează și nu există polarizare, deoarece nu există momente electrice.

Dacă deplasăm puțin cele două sfere (Fig. 5.19), cu excepția capetelor celor două sfere se formează o mulțime de dipoli. Notând cu N numărul de sarcini (dipoli) în unitatea de volum, cu d deplasarea și cu q mărimea unei sarcini individuale, densitatea de polarizare este:

$$\vec{P} = N\vec{p} = Nqd\vec{d} = \rho\vec{d}$$

Dar cum, conform cu rezultatul obținut în aplicația anterioară:

$$\vec{E} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{d}$$

deoarece $\vec{d}$ este vectorul de la centrul sarcinilor negative la centrul sarcinilor pozitive. Rezultă:

$$\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

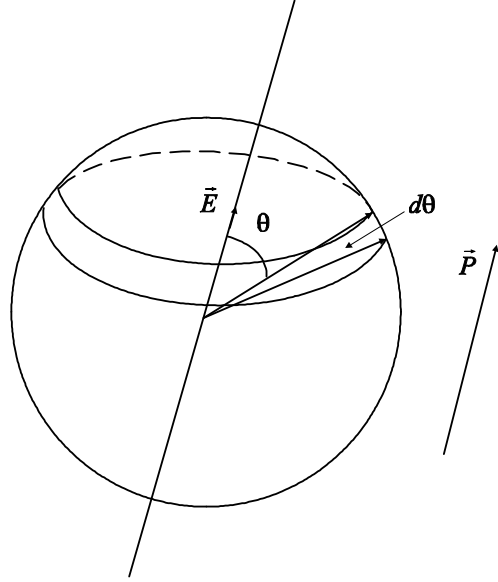


Figura 5.20: Cavitare în interiorul unui dielectric uniform polarizat.

Aplicație

Să se determine câmpul electric din centrul unei sfere goale de rază r , aflată într-un material dielectric polarizat având densitatea de polarizare $\vec{P}$.

Soluție:

Considerăm sfera din interiorul dielectricului ca în Fig. 5.20 și o dreaptă care trece prin centrul sferei paralelă cu $\vec{P}$. Densitatea de sarcină de pe suprafață interioară a sferei depinde de polarizare prin relația

$$\sigma = -P \cos \theta$$

Pe un inelul de rază $r \sin \theta$ și de lățime $r d\theta$ se găsește sarcina dq

$$dq = \sigma dS = -P \cos \theta (2\pi r \sin \theta) r d\theta$$

Considerând două sarcini egale diametral opuse pe inelul considerat intensitatea câmpului electric rezultat în centrul sferei este orientat după o direcție paralelă cu $\vec{P}$ care trece prin acest punct. Astfel intensitatea câmpului creat de sarcina de pe tot inelul în centrul sferei este paralel cu $\vec{P}$ și are valoarea:

$$dE_p = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta = -\frac{P \cos^2\theta \sin\theta d\theta}{2\epsilon_0}$$

Integrând

$$E_p = -\int_0^\pi \frac{P \cos^2\theta \sin\theta d\theta}{2\epsilon_0} = \frac{P}{3\epsilon_0}$$

Rezultă:

$$\vec{E} = \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

Aplicație

Să se determine relația dintre polarizabilitatea α și permitivitatea relativă ϵ_r . În cazul unui dielectric omogen, ale cărui molecule nepolare capătă în câmp electric un moment de dipol indus $\vec{p} = \alpha \vec{E}$. Se cunoaște N numărul de molecule din unitatea de volum a dielectricului.

Soluție

Se consideră că fiecare moleculă a dielectricului se află în centrul unei cavități sferice din interiorul acestuia. Ea se află sub acțiunea unui câmp electric local care este suma dintre câmpul electric extern și câmpul datorat polarizării dielectricului.

$$\vec{E}_{local} = \vec{E} + \vec{E}_d = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = \vec{E} + \frac{\epsilon_0 \chi_e \vec{E}}{3\epsilon_0} = \left(1 + \frac{\chi_e}{3}\right) \vec{E}$$

Densitatea de polarizare este

$$\vec{P} = N\vec{p} = N\alpha \vec{E}_{local}$$

Atunci:

$$\epsilon_0 \chi_e \vec{E} = N\alpha \left(1 + \frac{\chi_e}{3}\right) \vec{E}$$

Rezultă:

$$\alpha = \frac{\epsilon_0 \chi_e}{N \left(1 + \frac{\chi_e}{3}\right)}$$

Cum:

$$\chi_e = \epsilon_r - 1$$

Atunci:

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0 (\epsilon_r - 1)}{N (\epsilon_r + 2)}$$

Această relație poartă numele de formula Clausius - Mossotti.

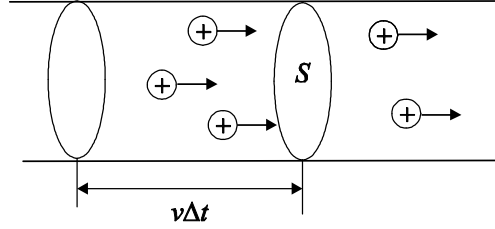


Figura 5.21: Deplasarea sarcinilor electrice prin suprafața S

5.3 Curentul electric

Prin curent electric se înțelege deplasarea dirijată a sarcinilor electrice sub acțiunea unui câmp electric. De exemplu în cazul unui metal aflat la o temperatură diferită de 0 K, electronii de conducție sunt într-o continuă stare de agitație termică. Prin aplicarea unui câmp electric, peste mișcarea de agitație termică se suprapune o mișcare dirijată în sens invers câmpului electric.

Un mediu care conține purtători cvasiliberi capabili să se deplaseze sub acțiunea unui câmp electric poartă numele de conductor.

Un mediu fără purtători de sarcini capabile să se deplaseze sub acțiunea unui câmp electric poartă numele de izolator.

5.3.1 Mărimi ce caracterizează curentul electric

Pentru a defini curentul mai precis presupunem că sarcinile se mișcă perpendicular pe o suprafață de arie S (Fig. 5.21).

Curentul reprezintă sarcina netă care traversează aria S în unitatea de timp. Dacă în intervalul de timp Δt prin suprafața S trece sarcina ΔQ intensitatea medie a curentului care trece este:

$$I_m = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (5.70)$$

Dacă în intervale de timp egale prin suprafața S trec cantități diferite de sarcini, este necesar să se definească intensitatea instantanee a curentului. Pentru aceasta se face ca intervalul de timp Δt să tindă la zero:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad (5.71)$$

În sistemul internațional de unități (SI) intensitatea curentului este o mărime fizică fundamentală iar unitatea sa de măsură este Amperul (A)

$$1\text{A} = 1\text{C}/1\text{s} \quad (5.72)$$

Relația (5.72) nu este o relație de definiție pentru Amper. Relația de mai sus poate fi utilizată mai degrabă pentru definirea unității de sarcină care este coulombul.

Sarcinile care pot trece prin suprafața S pot fi pozitive sau negative. În mod convențional se consideră că sensul de curgere al curentului este același cu sensul în care s-ar deplasa sarcinile electrice pozitive în interiorul conductorului. Astfel când se discută despre curent într-un metal (de exemplu cupru) direcția de deplasare a curentului este opusă direcției de deplasare a electronilor.

Densitatea de curent

Considerăm un conductor omogen și izotrop în care concentrația purtătorilor de sarcină q este n și care se deplasează cu viteza medie $\vec{v}$ pe direcția câmpului, numită viteză de drift. Dacă sarcinile sunt pozitive viteza de drift este orientată în sensul intensității câmpului, iar dacă sarcinile sunt negative viteza este orientată în sens contrar. În intervalul de timp Δt , toți purtătorii de sarcină din cilindrul cu aria bazei S și înălțime $v\Delta t$ vor trece prin secțiunea S din dreapta (Fig. 5.21). Deoarece numărul de purtători de sarcină din cilindru este:

$$N = nSv\Delta t \quad (5.73)$$

sarcina care trece prin aria bazei este $\Delta Q = Nq = nSvq\Delta t$. Atunci intensitatea curentului este:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nvqS \quad (5.74)$$

Densitatea de curent se definește ca fiind sarcina ce trece în unitatea de timp prin unitatea de suprafață:

$$j = \frac{I}{S} = nqv \quad (5.75)$$

Deoarece viteza este o mărime vectorială, rezultă că și densitatea de curent este o mărime vectorială:

$$\vec{j} = nq\vec{v}$$

Acest rezultat poate fi generalizat, în cazul că în materialul respectiv există mai multe tipuri de purtători de sarcină cu concentrațiile n_i , viteze de drift $\vec{v}_i$ și sarcinile q_i :

$$\vec{j} = \sum_i \vec{j}_i = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i \quad (5.76)$$

Dacă conductorul este neomogen concentrația purtătorilor de sarcină depinde de poziție $n = n(x, y, z)$ astfel că și densitatea de curent este diferită de la punct la punct. Rezultă că densitatea de curent $\vec{j} = \vec{j}(x, y, z)$ este o mărime care caracterizează local curentul electric. În acest caz pentru a determina intensitatea curentului printr-o suprafață S , împărțim suprafața S într-o mulțime de suprafețe elementare dS . Dacă direcția densității de curent nu este perpendiculară pe suprafața dS , la intensitatea curentului contribuie doar componenta normală pe suprafața dS a densității de curent. Atunci curentul dI care trece prin suprafața elementară dS este:

$$dI = \vec{j} \vec{n} dS = \vec{j} d\vec{S} \quad (5.77)$$

Pentru determinarea curentului total ce trece prin suprafața S se integrează relația (5.77) pe întreaga suprafață considerată:

$$I = \iint_S dI = \iint_S \vec{j} d\vec{S} \quad (5.78)$$

5.3.2 Ecuația de continuitate

Fie o suprafață închisă S în interiorul unui conductor care cuprinde volumul V . Normala la suprafața închisă fiind îndreptată întotdeauna înspre exteriorul acesteia, integrala $\iint_S \vec{j} d\vec{S}$ reprezintă sarcina care iese în unitatea de timp din volumul V prin $\vec{S}$. Conform legii conservării sarcinii, sarcina electrică care iese din volumul V în unitatea de timp este egală cu minus variația sarcinii în unitatea de timp d din acest volum. Rezultă:

$$\iint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt} \quad (5.79)$$

Dacă se exprimă Q în funcție de densitatea de sarcină din volumul V

$$Q = \iiint_V \rho dv \quad (5.80)$$

atunci

$$\iint_S \vec{j} d\vec{S} + \iiint_V \frac{d\rho}{dt} dv = 0 \quad (5.81)$$

Relația poartă numele de ecuația de continuitate și reprezintă legea de conservare a sarcinii electrice.

5.3.3 Teoria clasică a conducției în metale

Teoria a fost elaborată în anul 1900 de Drude și a fost perfecționată de Lorentz în anul 1910. Teoria se bazează pe ipoteza existenței gazului electronic în metale adică a existenței unor electroni cvasiliberi în interiorul acestora. Prin electroni cvasiliberi, se înțeleg electronii de valență care nu sunt legați de nici un atom al rețelei cristaline și care se pot deplasa în interiorul metalului pe distanțe relativ mari.

Conform acestei teorii în absența câmpului electric electronii se mișcă haotic în toate direcțiile care este analoagă cu mișcarea de agitație termică a moleculelor unui gaz. Când se aplică un câmp electric electronii sunt supuși unei forțe care le imprimă o mișcare direcționată pe direcția câmpului, mișcare care se suprapune peste mișcarea lor haotică. În mișcarea lor electronii suferă ciocniri cu ionii rețelei cristaline care la rândul lor execută mișcări oscilatorii. După fiecare ciocnire electronii își pierd "memoria", adică viteza căpătată prin accelerare în câmp electric revine la zero. Astfel dacă timpul mediu dintre două ciocniri este τ , viteza căpătată de electron înainte de ciocnire este:

$$v = a\tau = \frac{eE}{m_e}\tau \quad (5.82)$$

unde cu m_e se notează așa numita masă efectivă a electronului. Noțiunea de masă efectivă este introdusă deoarece electronul sub acțiunea câmpului electric E se mișcă nu în spațiu liber, ci în câmpul rețelei cristaline a metalului. Astfel electronii se mișcă în interiorul metalelor cu o viteză de drift egală cu viteza medie pe care o capătă între două ciocniri cu ionii rețelei cristaline:

$$v_d = \frac{v}{2} = \frac{eE}{2m_e}\tau \quad (5.83)$$

Atunci densitatea de curent se exprimă ca:

$$j = nev_d = \frac{ne^2\tau}{2m_e}E \quad (5.84)$$

Rezultă că densitatea de curent este proporțională cu E . O astfel de dependență se numește ohmică:

$$j = \sigma E \quad (5.85)$$

Relația (5.85) se poate scrie vectorial:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (5.86)$$

unde σ — poartă numele de conductivitate. Comparând relațiile (5.84) și (5.86) rezultă:

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{2m_e}$$

Relația $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ este valabilă pentru un mare număr de materiale inclusiv semiconductori. Dacă în cazul metalelor variația lui σ este foarte mică în funcție de temperatură, în cazul semiconductoarelor această variație este importantă, datorită variației concentrației purtătorilor de sarcini în funcție de temperatură.

Legea lui Ohm

Să considerăm un conductor de lungime l și secțiune S la capătul căruia se aplică o diferență de potențial egală cu U . Câmpul electric în interiorul conductorului este:

$$E = \frac{U}{l}$$

Acest câmp determină apariția unei densități de curent egală cu:

$$j = \sigma E \quad (5.87)$$

Deoarece $j = I/S$ și $E = U/l$ relația (5.87) se poate scrie ca:

$$\frac{I}{S} = \sigma \frac{U}{l} \quad (5.88)$$

de unde:

$$U = \sigma \frac{l}{S} I = RI \quad (5.89)$$

Mărimea R poartă numele de rezistență:

$$R = \sigma \frac{l}{S} \quad (5.90)$$

Rezistența se măsoară în Ohmi (Ω).

$$1\Omega = \frac{1V}{1A}$$

Inversa conductivității σ poartă numele de rezistivitate:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (5.91)$$

Pentru metale rezistivitatea ρ depinde de temperatură după legea:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t) \quad (5.92)$$

unde ρ_0 este rezistivitatea la 0°C și α este coeficientul de variație cu temperatura al rezistivității. În Tabelul 5.3 sunt prezentate o serie de valori ale lui ρ_0 și α .

Tabelul 5.3

Valori ale rezistivității ρ și a coeficientului de variație a rezistivității cu temperatura α

Material	ρ [Ωm]	α [$^{\circ}\text{C}^{-1}$]
Argint	$1,59 \times 10^{-8}$	$3,8 \times 10^{-3}$
Cupru	$1,7 \times 10^{-8}$	$3,9 \times 10^{-3}$
Aur	$2,44 \times 10^{-8}$	$3,4 \times 10^{-3}$
Aluminiu	$2,82 \times 10^{-8}$	$3,9 \times 10^{-3}$
Tungsten	$5,6 \times 10^{-8}$	$4,5 \times 10^{-3}$
Fier	10×10^{-8}	$5,0 \times 10^{-3}$
Platină	11×10^{-8}	$3,92 \times 10^{-3}$
Plumb	11×10^{-8}	$3,9 \times 10^{-3}$
Carbon	3500×10^{-8}	$-0,5 \times 10^{-3}$

5.3.4 Tensiunea electromotoare

Pentru menținerea unui curent electric într-un circuit este necesar ca purtătorii de sarcină să fie acționați de forțe care să le asigure deplasarea pe o durată de timp suficient de mare.

Sarcinile electrice transferă în mod continuu și ireversibil energia lor atomilor din nodurile rețelei cristaline prin efect Joule. Aceasta înseamnă că pe lângă forțele de natură electrostatică asupra sarcinilor acționează și forțe de natură neelectrostatică numite forțe imprimare.

Ele iau naștere în anumite puncte ale circuitului în care se găsesc surse de tensiune electromotoare (pile electrice, acumulatori care transformă energia liberă prin diferite reacții chimice în energie electrică).

Forțele imprimare determină un câmp electric numit câmp electric imprimat

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}_i}{q} \quad (5.93)$$

Câmpul electric total este suma dintre câmpul electric imprimat și câmpul electrostatic. Lucrul mecanic efectuat asupra unei sarcini care se deplasează din punctul 1 în punctul 2 este:

$$L_{12} = q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + q_0 \int_1^2 \vec{E}_i d\vec{l} \quad (5.94)$$

$$L_{12} = q_0 (V_1 - V_2) + q_0 \mathcal{E}_{12}$$

unde cu $\mathcal{E}_{12}$ am notat tensiunea electromotoare

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_i d\vec{l} \quad (5.95)$$

Definim căderea de tensiune între punctele 1 și 2:

$$U_{12} = \frac{L_{12}}{q} = (V_1 - V_2) + \mathcal{E}_{12} \quad (5.96)$$

Se observă că dacă tensiunea electromotoare este nulă, căderea de tensiune este egală cu diferența de potențial. Pentru un circuit închis

$$L = q \oint \vec{E} d\vec{l} + q \oint \vec{E}_i d\vec{l} \quad (5.97)$$

Dar pentru un câmp electrostatic:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad (5.98)$$

Rezultă că tensiunea electromotoare pe un circuit reprezintă raportul dintre lucrul mecanic efectuat pentru a deplasa sarcina q prin circuit și acea sarcină:

$$\mathcal{E} = \frac{L}{q} = \oint \vec{E}_i d\vec{l} \quad (5.99)$$

Astfel tensiunea electromotoare ce acționează într-un circuit este egală cu lucrul mecanic necesar pentru a deplasa unitatea de sarcină pe întregul circuit.

Aplicație

Un curent electric are expresia:

$$I = 100 \times \sin 120\pi t \text{ Amperi}$$

unde t este exprimat în secunde. Să se calculeze sarcina ce trece printr-o secțiune a conductorului în timpul $t_1 = 1/240$ s.

Soluție:

$$Q = \int_0^{t_1} I dt = 100 \int_0^{t_1} (\sin 120\pi t) dt = -\frac{100}{120\pi} \cos 120\pi t \Big|_0^{t_1} = 0,265 \text{ C}$$

Aplicație

Să se determine sarcina de pe un condensator cu capacitatea C care se descarcă pe o rezistență R în funcție de timp. Inițial condensatorul este încărcat cu sarcina Q . Care este intensitatea curentului care trece prin rezistor.

Soluție:

La un moment de timp dat tensiunea de pe condensator este:

$$U = \frac{q}{C}$$

Curentul care trece prin rezistența R este:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{q}{RC}$$

Cum

$$I = -\frac{dq}{dt}$$

deoarece variația sarcinii pe condensator este negativă, rezultă ecuația diferențială:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} \quad \text{și} \quad \int_Q^q \frac{dq}{q} = \int_0^t -\frac{dt}{RC}$$

Atunci:

$$q = Q \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Produsul RC poartă numele de constanta de timp a circuitului.

5.4 Magnetism

Constatarea proprietăților magnetice a fost făcută încă din antichitate, numele de magnet provenind de la numele unei regiuni din Asia Mică "Magnetia" unde se găseau roci cu astfel de proprietăți.

În 1269 un francez Pierre de Maricourt a găsit că direcțiile unor ace lângă un magnet sferic natural formează linii care înconjoară sfera și trec prin două puncte diametral opuse. Punctele respective au fost numite poli magnetului. Experiențele ulterioare au arătat că indiferent de forma lor magnetii au doi poli: nord (N) și sud (S) care exercită forțe asupra polilor altui magnet. Astfel interacțiunile N-N și S-S sunt de respingere în timp

ce interacțiunile N-S sunt întotdeauna de atracție. Polii au primit numele datorită modului în care un magnet (de exemplu o busolă) se comportă în prezența câmpului magnetic terestru. Dacă un ac magnetic este suspendat de centrul său și se poate mișca liber în plan orizontal, el se va roti până ce polul său nord se va poziționa către polul nord geografic și polul sau sud se va poziționa către sudul geografic. Trebuie remarcat că polul nord geografic din punct de vedere magnetic este un pol sud iar polul sud geografic este din punct de vedere magnetic un pol nord.

În 1600 William Gilbert a realizat o serie de experiențe noi cu o varietate de materiale. Utilizând faptul că magnetii se poziționează într-o direcție preferențială, el a sugerat că Pământul este un magnet uriaș.

În 1750 experimentele realizate cu o balanță de torsione au arătat că forțele care se exercită între polii unor magneti sunt invers proporționale cu pătratul distanței dintre polii care interacționează. Deși forțele între acești poli sunt similare cu cele dintre sarcinile electrice cu privire la modul în care variază cu distanța, un singur pol magnetic nu a putut fi izolat așa cum sarcinile pozitive și cele negative pot fi izolate. Astfel dacă se taie un magnet de-a lungul unui plan perpendicular pe axa ce unește cei doi poli se obțin doi magneti.

În anul 1820 Hans Christian Ørsted a găsit o legătură între electricitate și magnetism. El a descoperit că dacă se aduce un ac magnetic în apropierea unui conductor prin care trece un curent electric, asupra acului magnetic se va exercita o forță. La puțin timp de la descoperirea lui Ørsted, Ampère a arătat că între doi conductori străbătuți de curent electric se exercită forțe de atracție sau de respingere în funcție de sensul curenților. Ele nu au aceeași natură ca și forțele care se exercită între sarcinile electrice. Dacă se introduce o placă metalică între cei doi conductori forța de interacție dintre ei nu se modifică. S-a presupus că o astfel de forță are aceeași natură ca și forța care se exercită între un conductor parcurs de curent electric și un ac magnetic.

Pentru a găsi o corespondență între un ac magnetic și un conductor străbătut de un curent electric, Ampère a presupus că acul magnetic conține un număr foarte mare de curenți microscopici (care formează mici bucle de curent) pe care i-a denumit curenți moleculari.

Ulterior Maxwell a afirmat că astfel de forțe se exercită între orice sarcini electrice în mișcare. Aceste forțe pot fi atribuite existenței în jurul sarcinilor în mișcare a unui câmp numit câmp magnetic. În consecință putem afirma că sursele câmpului magnetic sunt sarcinile electrice în mișcare.

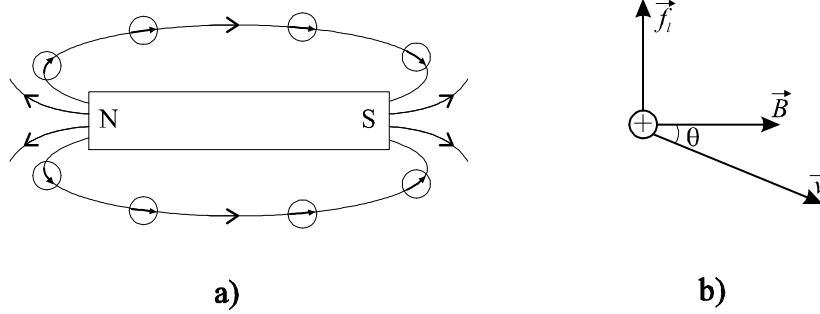


Figura 5.22: a) Liniile de câmp ale unui magnet. b) Direcția forței Lorentz față de direcțiile vitezei și câmpului magnetic

5.4.1 Forța Lorentz. Inducția câmpului magnetic.

Câmpul magnetic poate fi descris cu ajutorul unui vector $\vec{B}$ numit inducție a câmpului magnetic. Direcția lui $\vec{B}$ este direcția în care se poziționează un ac magnetic în punctul respectiv. Ca și în cazul câmpului electric vom putea defini liniile de câmp magnetic ca fiind curbele la care vectorul $\vec{B}$ este tangent în fiecare punct. În Fig. 5.22a sunt reprezentate liniile de câmp ale unui magnet în formă de bară. Experimental ele se pot trasa cu ajutorul unei busole.

Pentru definirea inducției câmpului magnetic se utilizează forța Lorentz $\vec{f}_l$ care este forța care acționează asupra unei particule ce se deplasează în câmp magnetic cu viteza $\vec{v}$ (Fig. 5.22b). Experimental s-a demonstrat că :

$$\vec{f}_l = q (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (5.100)$$

Relația (5.100) poate fi privită ca o relație de definiție pentru inducția câmpului magnetic. În Fig (2.3b) sunt prezentate direcția și sensul forței Lorentz pentru o sarcină pozitivă. Mărimea forței Lorentz este:

$$f_l = qvB \sin \theta \quad (5.101)$$

Deoarece forța Lorentz este perpendiculară pe viteză ea este perpendiculară și pe deplasare. Astfel lucrul mecanic efectuat de forța Lorentz este nul. Atunci conform teoremei variației energiei cinetice rezultă că variația energiei cinetice a unei particule încărcate în câmp magnetic este nulă. În câmp magnetic poate varia doar direcția vitezei unei particule încărcate nu și mărimea sa.

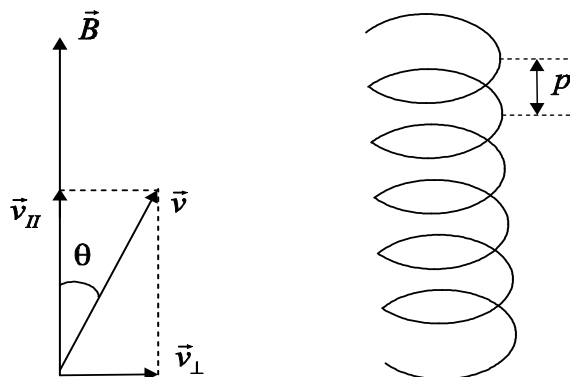


Figura 5.23: Mișcarea elicoidală a unei sarcini care intră sub un unghi diferit de $\pi/2$ într-un câmp magnetic.

Din relația 5.101 rezultă că unitatea de măsură pentru B care poartă numele de Tesla este

$$T = \frac{N}{C \cdot m/s} = \frac{N}{A \cdot m}$$

O unitate tolerată este gaussul (G):

$$1T = 10^4 G$$

Aplicație

Să se determine ce fel de mișcare execută o particulă de masă m încărcată cu sarcina q care intră cu viteza $\vec{v}$ sub un unghi α într-un câmp magnetic uniform de inducție $\vec{B}$.

Soluție:

Se descompune viteza $\vec{v}$ în două componente astfel : $\vec{v}_\perp$ după o direcție perpendiculară pe direcția vectorului $\vec{B}$ și $\vec{v}_\parallel$ după direcția vectorului $\vec{B}$ (Fig. 5.23). Atunci $\vec{v}_\perp$ determină o mișcare circulară a particulei deoarece tot timpul forța Lorentz este perpendiculară pe viteză. Deoarece $\vec{f}_l \perp \vec{B}$ și $\vec{v}_\perp \perp \vec{B}$ forța Lorentz și viteza se află în același plan. Rezultă că forța Lorentz este o forță de tip centripet:

$$qv_\perp B = \frac{mv_\perp^2}{R}$$

Din această relație rezultă raza mișcării circulare:

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \alpha}{qB}$$

Componenta $\vec{v}_{\parallel}$ determină o mișcare uniformă a particulei în lungul direcției lui $\vec{B}$ deoarece această componentă nu determină apariția unei forțe Lorentz:

$$|\vec{f}_l| = qv_{\parallel}B \sin 0 = 0$$

Prin suprapunerea mișcării uniforme și a mișcării circulare se obține în acest caz o mișcare elicoidală.

O caracteristică a acestei mișcări este pasul elicei care reprezintă deplasarea particulei în lungul direcției lui $\vec{B}$ în cursul unei perioade (în timpul când se execută o rotație completă).

$$p = v_{\parallel}T = v_{\parallel} \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi mv}{qB} \cos \alpha$$

Aplicație

Printr-o placă metalică conductoare paralelipipedică trece un curent I . Curentul trece perpendicular printr-o secțiune de laturi b și d . Placa se află într-un câmp magnetic uniform de inducție B paralel cu fețele plăcii aflate la distanța d una de alta. Să se determine diferența de potențial dintre aceste fețe. Se cunoaște concentrația de electroni n din unitatea de volum a metalului din care este realizată placa.

Soluție

Viteza de drift a electronilor este în sens invers sensului de curgere al curentului. Deoarece electronii se mișcă în câmpul magnetic $\vec{B}$, asupra lor va acționa o forță Lorentz

$$f_l = evB$$

al cărei sens este arătat în Fig. 5.24. Atunci fața D se va încărca cu sarcină negativă iar fața A cu sarcină pozitivă. Apare un câmp electric $\vec{E}$ care face ca asupra purtătorilor de sarcină să acționeze și o forță electrică $F_E = eE$ care este în sens contrar forței Lorentz. Pe măsură ce încărcarea fețelor A și D crește, crește și valoarea forței electrice. Particulele nu vor mai fi deviate atunci când forța electrică echilibrează forța Lorentz.

$$eE = evB$$

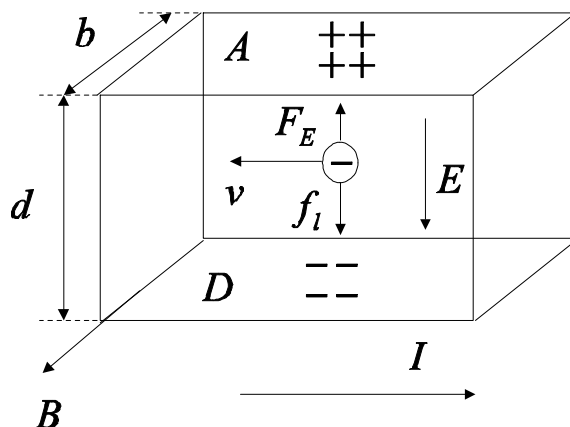


Figura 5.24: Forțele care acționează asupra unor sarcini electrice ce trec printr-un conductor aflat în câmp magnetic.

Rezultă:

$$E = vB$$

Dacă distanța dintre fețele A și D este d , diferența de potențial dintre acestea devine:

$$V_A - V_D = Ed = vBd$$

Ținând cont de expresia intensității curentului electric

$$I = neSv$$

unde n este concentrația de electroni, e este sarcina electronului, S este secțiunea și v este viteza de drift a particulelor, rezultă viteza de drift a sarcinilor electrice:

$$v = \frac{I}{neS} = \frac{I}{nedb}$$

Atunci

$$V_A - V_D = \frac{I}{nedb}Bd = \frac{IB}{neb}$$

Trebuie remarcat că diferența de potențial variază invers proporțional cu concentrația de sarcini electrice. Din acest motiv pentru punerea în evidență a acestui efect, numit efect Hall, este bine să fie utilizat un material semiconductor care are o concentrație mică de purtători de sarcini.

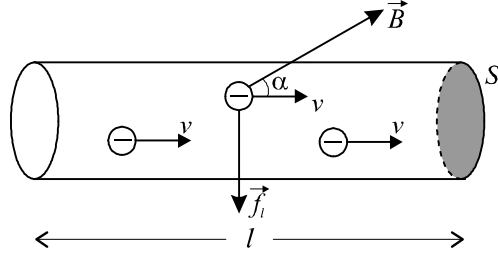


Figura 5.25: Modul în care apare forța electromagnetică care acționează asupra unui conductor plasat în câmp magnetic.

5.4.2 Forța electromagnetică

Dacă asupra unei particule se exercită o forță atunci când aceasta se deplasează în câmp magnetic, este de așteptat ca asupra unui conductor prin care trece un curent aflat în câmp magnetic să se exercite o forță (Fig. 5.25). Să considerăm o porțiune de conductor prin care trece un curent $I = neSv$ aflată în câmp magnetic. Asupra fiecărei sarcini (în cazul nostru electroni) acționează o forță Lorentz.

$$\vec{f}_l = e \left(\vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (5.102)$$

În porțiunea de conductor considerată numărul de purtători de sarcini este:

$$N = nSl$$

unde n este concentrația de electroni liberi, S este secțiunea conductorului și l lungimea conductorului. Atunci forța totală care acționează asupra porțiunii de conductor este

$$\vec{F} = N\vec{f}_l = nlSe \left(\vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (5.103)$$

Vom introduce în loc de $\vec{v}$ vectorul $\vec{l}$ care are modulul egal cu lungimea porțiunii de conductor și sensul vitezei. Putem scrie $l\vec{v} = v\vec{l}$.

Atunci

$$\vec{F} = nvSe \left(\vec{l} \times \vec{B} \right) \quad (5.104)$$

$$\vec{F} = I \left(\vec{l} \times \vec{B} \right) \quad (5.105)$$

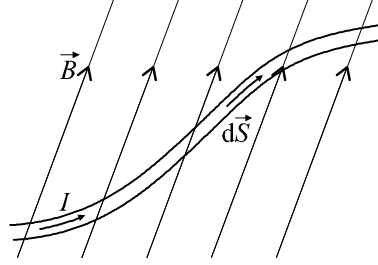


Figura 5.26: Conductor de formă oarecare în câmp magnetic uniform

Să considerăm un conductor având o formă oarecare într-un câmp magnetic uniform (Fig. 5.26).

Forța care acționează asupra porțiunii $d\vec{s}$ este

$$d\vec{F} = I \left(d\vec{s} \times \vec{B} \right) \quad (5.106)$$

unde $d\vec{F}$ este perpendicular pe planul hârtiei, înspre cititor. Ecuația poate fi considerată ca o ecuație alternativă pentru definirea câmpului magnetic $\vec{B}$. Forța totală care se exercită asupra conductorului este:

$$\vec{F} = I \int_a^b d\vec{s} \times \vec{B} \quad (5.107)$$

unde a și b reprezintă capetele conductorului.

Considerăm cazul când conductorul formează o curbă închisă și este plasat într-un câmp magnetic uniform. Atunci

$$\vec{F} = I \oint d\vec{s} \times \vec{B} = I \left(\oint d\vec{s} \right) \times \vec{B} \quad (5.108)$$

Dar:

$$\oint d\vec{s} = 0 \quad (5.109)$$

Rezultă $\vec{F} = 0$. Putem concluziona că forța electromagnetică care acționează asupra oricărei bucle de curent aflată într-un câmp magnetic uniform este nulă.

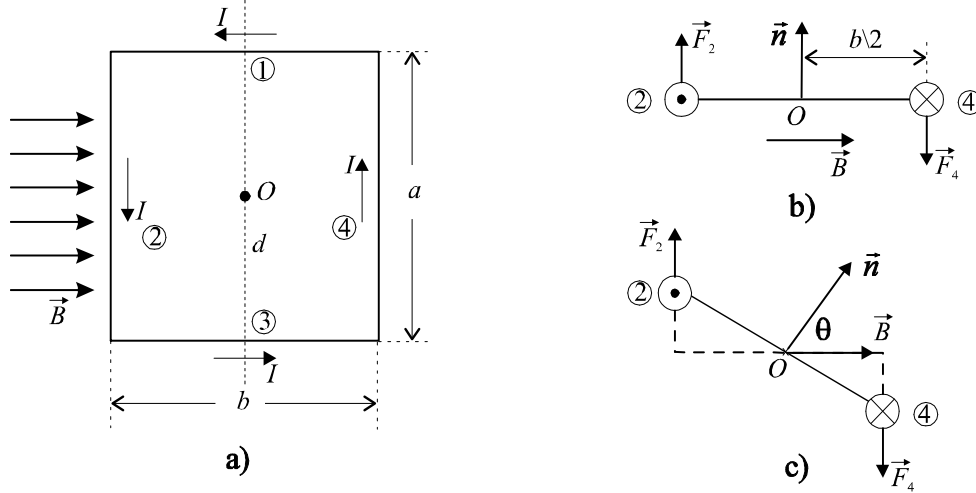


Figura 5.27: a) Buclă dreptunghiulară în câmp magnetic uniform. b) Forțe ce acționează asupra unei bucle de curent aflată în câmp magnetic când direcția inducției câmpului magnetic este perpendiculară pe direcția normalei la suprafața buclei. c) Forțe ce acționează asupra unei bucle de curent aflată în câmp magnetic când direcția inducției câmpului magnetic face un unghi oarecare cu direcția normalei la suprafața buclei

5.4.3 Buclă de curent în câmp magnetic uniform

Să considerăm o buclă de curent de formă dreptunghiulară într-un câmp magnetic uniform ca în Fig. 5.27a.

Asupra laturilor 1 și 3 nu acționează nici o forță deoarece conductorii respectiv sunt paraleli cu liniile câmpului magnetic.

Forțele electromagnetice acționează asupra laturilor 2 și 4 deoarece acestea sunt orientate perpendicular pe câmp. Valorile acestor forțe sunt:

$$F_2 = F_4 = IaB \quad (5.110)$$

Direcțiile lui F_2 și F_4 sunt arătate în Fig. 5.27b. Forțele sunt egale paralele și acționează în sensuri contrare. Ele formează un cuplu de forțe care are tendința să rotească bucla în jurul axei d . Momentul cuplului față de această axă este:

$$M = F_2 \frac{b}{2} + F_4 \frac{b}{2} = IaB \frac{b}{2} + IaB \frac{b}{2} \quad (5.111)$$

$$M = IaB = ISB \quad (5.112)$$

Când bucla este rotită câmpul magnetic și normala fac un unghi de $\theta < 90^\circ$ ca în Fig 5.27c. Forțele F_2 și F_4 acționează pe aceeași direcție în sensuri opuse și rezultanta lor este nulă. Momentul cuplului care acționează asupra buclei este:

$$M = F_2 \frac{b}{2} \sin \theta + F_4 \frac{b}{2} \sin \theta = I a B \frac{b}{2} \sin \theta + I a B \frac{b}{2} \sin \theta = I S B \sin \theta \quad (5.113)$$

unde $S = ab$. Generalizând, momentul care acționează asupra unei bucle de curent este:

$$M = IS (\vec{n} \times \vec{B}) = I (\vec{S} \times \vec{B}) = (I\vec{S}) \times \vec{B} \quad (5.114)$$

unde $\vec{S} = S\vec{n}$, iar $\vec{n}$ este normală pe suprafața buclei. Putem scrie

Mărimea $I\vec{S}$ poartă numele de moment magnetic de dipol:

$$\vec{m} = I\vec{S} \quad (5.115)$$

Atunci momentul forței care acționează asupra buclei se poate scrie ca:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (5.116)$$

Acest moment tinde să alinieze bucla perpendicular pe câmpul magnetic

Putem defini o energie potențială a buclei de curent în câmpul magnetic extern. Pentru aceasta trebuie calculat lucrul mecanic pe care îl efectuează câmpul asupra buclei când o rotește cu un unghi.

$$L = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} m B \sin \theta d\theta = m B (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \quad (5.117)$$

S-a ales $-d\theta$ deoarece în cursul rotirii unghiul θ scade și $d\theta < 0$. Deoarece

$$\Delta E_p = -L = m B (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \quad (5.118)$$

Rezultă:

$$E_p = -I S B \cos \theta + \text{const.} \quad (5.119)$$

Considerăm că atunci când $\theta = \pi/2$, $E_p = 0$, rezultă:

$$E_p = -m B \cos \theta = - \vec{m} \cdot \vec{B} \quad (5.120)$$

Aplicație

Fie un corp cilindric gol de lungime L având razele R_1 și R_2 ($R_1 < R_2$) încărcat cu densitatea volumică de sarcină ρ . Să se determine momentul magnetic, dacă cilindrul se rotește cu viteza unghiulară ω în jurul axei.

Soluție:

Considerând o porțiune din aflată la distanța r de grosime dr . Sarcina din această porțiune de material este:

$$dq = (2\pi L r dr) \rho$$

Curentul echivalent datorat rotației acestei sarcini este:

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\omega dq}{2\pi} = \omega L \rho r dr$$

Momentul magnetic determinat de acest curent este:

$$dm = (\pi r^2) dI = \rho L \omega \pi r^3 dr$$

$$m = L \omega \rho \pi \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{1}{4} L \omega \rho \pi (R_2^4 - R_1^4)$$

5.4.4 Legătura dintre momentul de dipol magnetic și momentul cinetic al unui electron

Să considerăm un electron aflat pe o orbită circulară, perioada de rotație fiind T . Mișcarea electronului este echivalentă cu un curent

$$I = -\frac{e}{T} = -\frac{e\omega}{2\pi} = -\frac{ev}{2\pi r} \quad (5.121)$$

Semnul minus apare deoarece sarcina electronului este negativă.

$$m = SI = -\pi r^2 \frac{ev}{2\pi r} = -\frac{evr}{2} = -\frac{evr m_e}{2m_e}$$

unde m_e este masa electronului. Cum momentul cinetic orbital este:

$$L = m_e v r$$

rezultă relația dintre momentul magnetic de dipol și momentul cinetic

$$m = -\frac{e}{2m_e} L = -\gamma L \quad (5.122)$$

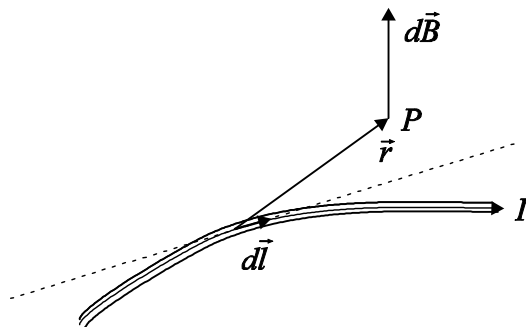


Figura 5.28: Câmpul magnetic creat de o porțiune de conductor de lungime dl prin care trece un curent cu intensitatea I .

Vectorial relația (5.122) se scrie ca:

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L} = -\gamma \vec{L} \quad (5.123)$$

Mărimea $\gamma = e/2m_e$ poartă numele de raport giromagnetic orbital al electronului.

5.4.5 Sursele câmpului magnetic. Legea Biot Savart.

La puțin timp după ce Öersted a descoperit că acul unei busole este deviat de un conductor prin care trece un curent, Jean Bapiste Biot (1774-1862) și Felix Savart au realizat experimente cantitative pentru determinarea forței exercitate de un curent asupra unui magnet. Pornind de la rezultatele experimentale obținute, Biot și Savart au ajuns la o expresie matematică pentru câmpul magnetic $d\vec{B}$ datorat unui element de lungime $d\vec{l}$ din conductor străbătut de curentul I într-un punct P situat la distanța r de elementul considerat (Fig. 5.28).

Vectorul $d\vec{B}$ este perpendicular pe $d\vec{l}$ și pe vectorul de poziție $\vec{r}$. Experimental s-a constatat că mărimea lui $d\vec{B}$ este invers proporțională cu r^2 , proporțională cu lungimea segmentului $d\vec{l}$, cu intensitatea curentului I și cu $\sin \theta$ unde θ este unghiul dintre $\vec{r}$ și $d\vec{l}$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (5.124)$$

unde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{Tm/A}$ este o constantă numită permeabilitatea vidului.

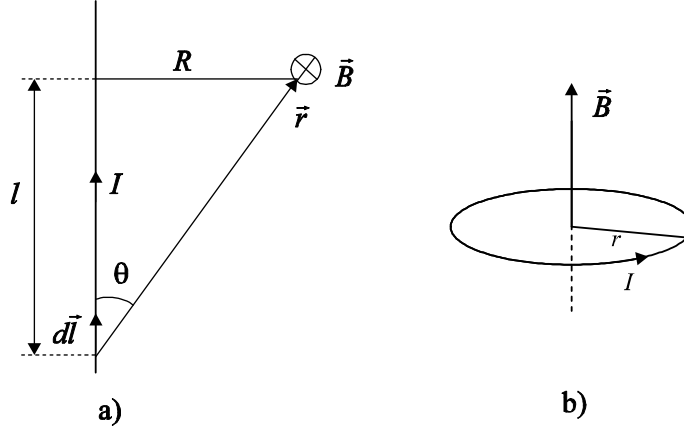


Figura 5.29: a) Câmpul magnetic produs de un curent liniar. b) Câmpul magnetic produs de un curent circular

Pentru calculul câmpului magnetic total trebuie însumate toate contribuțiile elementare:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (5.125)$$

Exemple:

1) Calculul câmpului magnetic produs de un curent liniar (Fig. 5.29a)

Din relația (5.124) rezultă:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin \theta}{r^2}$$

Pentru a calcula pe B vom nota:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$$

și ținem cont că φ variază de la $-\pi/2$ la $\pi/2$. Deoarece $l = R \tan \varphi$ rezultă:

$$dl = \frac{R}{\cos^2 \varphi} d\varphi$$

Cum:

$$r = \frac{R}{\cos \varphi}$$

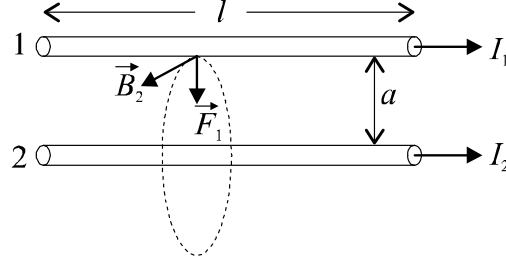


Figura 5.30: Conductoare paralele parcurse de curenți electrici.

atunci

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{R d\varphi}{\cos^2 \varphi} \times \frac{\cos^2 \varphi}{R^2} \times \cos \varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{\cos \varphi d\varphi}{R}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \varphi d\varphi}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{R} \sin \varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (5.126)$$

Astfel rezultă că liniile câmpului magnetic sunt cercuri concentrice în jurul conductorului.

2) Calculul câmpului magnetic produs pe o spiră circulară în centrul ei (Fig. 5.29b)

Folosind legea Biot Savart rezultă că o porțiune de lungime dl din spiră determină un câmp magnetic dB

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \quad (5.127)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\pi r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

5.4.6 Forța de interacție dintre doi conductori paraleli

Să considerăm doi conductori, lungi, drepte paralele aflate la o distanță a unul față de celălalt (Fig. 5.30).

Conductorul 2 prin care trece curentul I_2 creează câmpul magnetic $\vec{B}_2$ în locul unde se află primul conductor. Direcția lui $\vec{B}_2$ este perpendiculară pe conductorul 1, așa cum este prezentat în Fig. 5.30. Atunci forța care acționează asupra primului conductor este:

$$F_1 = I_1 l B_2$$

unde:

$$B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2a\pi}$$

Rezultă:

$$F_1 = \mu_0 \frac{I_1 I_2 l}{2a\pi} \quad (5.128)$$

Conform legii acțiunii și reacțiunii forța F_1 care acționează asupra primului conductor este egală și de sens contrar cu F_2 care acționează asupra celui de-al doilea conductor.

Trebuie observat că dacă curenții care trec prin cele două conductoare au același sens, conductoarele se atrag. Dacă curenții sunt în sensuri contrare conductoarele se resping. Pornind de la relația 5.128 se poate exprima forța pe unitatea de lungime:

$$\frac{F}{l} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2a\pi}$$

Pornind de la această expresie se poate defini Amperul

Amperul este intensitatea curentului care trece prin două conductoare paralele infinite de lungi aflate la distanța de 1 m unul de altul care determină o forță pe unitatea de lungime 2×10^{-7} N/m.

5.4.7 Legea lui Ampère pentru cureți staționari

Să considerăm un conductor rectiliniu infinit străbătut de curentul staționar I . Considerăm o linie a câmpului magnetic, care pentru un curent rectiliniu este un cerc de rază r într-un plan perpendicular pe planul conductorului. Centrul cercului este punctul în care conductorul intersectează planul considerat. Se evaluează integrala $\oint \vec{B} d\vec{l}$ numită circulația vectorului $\vec{B}$ de-a liniei de câmp magnetic. Pentru aceasta se ține cont că inducția câmpului magnetic produs de curentul I la distanța r este dată de relația (5.126). Rezultă:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \oint B dl = B \oint dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 I \quad (5.129)$$

Deși rezultatul a fost determinat pentru cazul particular al unui conductor liniar, rezultatul este valabil pentru orice curbă închisă străbătută de un curent I . Relația a fost stabilită pentru cazul unui curent staționar. Legea lui Ampère descrie apariția câmpului magnetic datorită unui curent continuu.

Dacă se ține cont că intensitatea I a curentului se poate exprima funcție de densitatea de curent pe o suprafață S care se sprijină pe curba C pe care se calculează circulația vectorului $\vec{B}$ rezultă:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_S \vec{j} d\vec{S} \quad (5.130)$$

Aplicație

Să se determine câmpul magnetic în interiorul și exteriorul unui cilindru de rază R prin care circulă un curent de densitate j știind că liniile de câmp sunt cercuri concentrice în plane perpendiculare pe axa cilindrului.

Soluție:

a) Pentru calculul câmpului magnetic în interiorul cilindrului se aplică legea lui Ampere pe un contur circular cu centrul pe axa cilindrului aflat într-un plan perpendicular pe cilindru de raza $r < R$.

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} d\vec{S}$$

unde S este suprafața care sprijină pe conturul C . Rezultă

$$2\pi r B = \mu_0 j \pi r^2$$

de unde

$$B = \frac{\mu_0 j r}{2}$$

b) Pentru calculul câmpului magnetic în exteriorul cilindrului se aplică legea lui Ampere pe un contur cu centrul pe axa cilindrului $r > R$. Se obține:

$$2\pi r B = \mu_0 j \pi R^2$$

de unde

$$B = \frac{\mu_0 j R^2}{2r}$$

Aplicație

Să se determine câmpul magnetic de unui solenoid care constă din n spire pe unitatea de lungime aflate pe un cilindru de rază R .

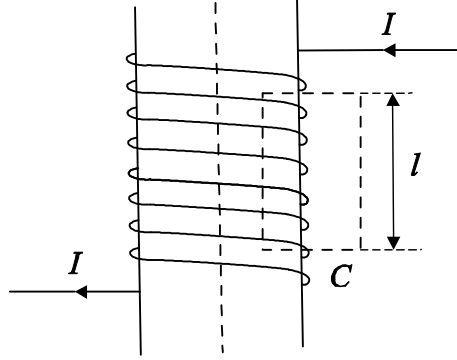


Figura 5.31: Solenoid străbătut de curent electric.

Soluție

Presupunem solenoidul ca fiind ideal. Pentru acest tip de solenoid câmpul magnetic în exterior este nul. În interiorul solenoidului câmpul este unul uniform, liniile de câmp fiind paralele cu axa acestuia. Considerăm curba C aleasă ca în Fig. 5.31

Aplicăm pe această curbă legea lui Ampère.

$$\oint_{(1)} \vec{B} d\vec{l} = Bl = \mu_0 NI$$

unde N reprezintă numărul de spire pe distanța l . În general se consideră N numărul de spire al întregului solenoid și l lungimea acestuia. Rezultă că interiorul solenoidului inducția câmpului magnetic este:

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

5.4.8 Fluxul câmpului magnetic

Fluxul câmpului magnetic este definit în același mod în care este definit ca și fluxul câmpului electric. Fluxul câmpului magnetic printr-o suprafață elementară dS se definește ca:

$$d\Phi = \vec{B} \vec{n} dS = \vec{B} d\vec{S}$$

Pentru întreaga suprafață :

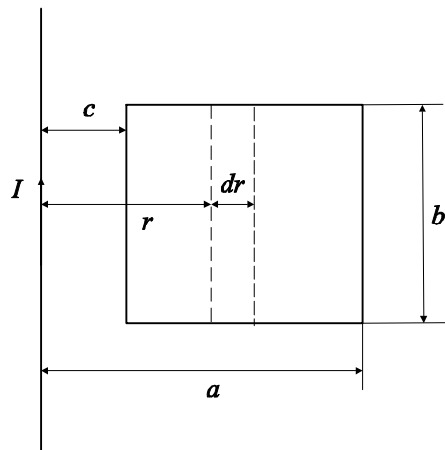


Figura 5.32: Cadru aflat în apropierea unui curent liniar.

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \vec{n} dS \quad (5.131)$$

Dacă câmpul magnetic este uniform și suprafața este plană:

$$\Phi = BS \cos \theta \quad (5.132)$$

unde θ este unghiul dintre normala la suprafață și direcția inducției magnetice. Unitatea de măsură a fluxului se numește Weber (Wb).

$$\text{Wb} = \text{T} \cdot \text{m}^2 \quad (5.133)$$

Aplicație

Să se determine fluxul câmpului magnetic produs de un curent liniar printr-o suprafață dreptunghiulară ca în Fig. 5.32.

Soluție:

Câmpul magnetic la distanța r de curent este

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

Fluxul magnetic elementar printr-un dreptunghi cu laturile b și dr aflat la distanța r de curent este:

$$d\Phi = B b dr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi r} dr$$

Atunci

$$\Phi = \int_c^a \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{a}{c}$$

5.4.9 Legea lui Gauss pentru câmpul magnetic

Când s-a stabilit Legea lui Gauss pentru un câmp electric a rezultat că fluxul câmpului electric printr-o suprafață închisă este proporțional cu sarcina din interiorul ei. În cazul că sarcina totală este nulă rezultă că și fluxul total este nul.

Deoarece în cazul câmpului magnetic nu există sarcini magnetice, prin analogie cu situația câmpului electric rezultă că fluxul câmpului magnetic prin orice suprafață închisă este nul.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (5.134)$$

5.4.10 Curent de deplasare și forma generală a legii lui Ampère

Sarcinile electrice în mișcare produc câmpul magnetic. Pentru un curent continuu care este produs de un câmp electric constant în timp legea lui Ampère are forma $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ unde integrala este considerată se efectuează pe o curbă închisă C care înconjoară curentul, iar curentul I este curentul ce trece printr-o suprafață care se sprijină pe curba C .

Trebuie remarcat că Legea lui Ampère scrisă în această formă este valabilă numai în cazul câmpului electric constant în timp. Maxwell a observat această limitare și a modificat Legea lui Ampère pentru a include câmpurile electrice variabile în timp.

Putem înțelege acest lucru considerând un condensator care se încarcă cu sarcină electrică ca în Fig. 5.33. Când curentul de conducție este prezent, sarcina armăturii pozitive se schimbă, dar între plăcile condensatorului nu există nici un fel de curent de conducție.

Să considerăm două suprafețe S_1 și S_2 ca în Fig. 5.33 mărginite de aceeași curbă închisă P . Aplică legea lui Ampere sub forma dată de relația (5.130) în două situații:

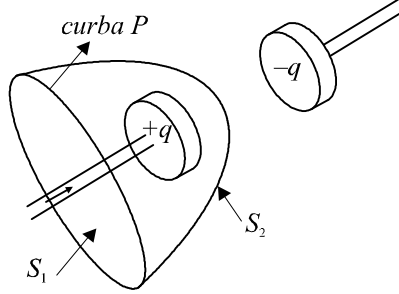


Figura 5.33: Determinarea legii lui Ampere în cazul general

Când curba P se consideră că înconjoară suprafața S_1 , $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$, iar când curba P se consideră înconjoară de suprafața S_2 , $\oint \vec{B} d\vec{l} = 0$.

Rezultă o situație contradictorie datorată discontinuității curentului. Maxwell a rezolvat problema prin postularea unui nou termen care este adăugat în membrul drept al ecuației 5.130 și care poartă numele de curent de deplasare:

$$I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint \vec{E} \vec{n} dS = \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} \quad (5.135)$$

unde integrala se face pe suprafața care se sprijină pe curba care încojoară curentul de conducție considerat.

Când condensatorul se încarcă sau se descarcă câmpul electric variabil este echivalent cu un curent numit curent de deplasare. Cu acest nou termen forma generală a legii lui Ampere devine:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (5.136)$$

sau

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \iint \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \vec{n} dS = \mu_0 I + \mu_0 \iint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \vec{n} dS \quad (5.137)$$

unde $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ este inducția câmpului electric.

5.5 Magnetism în medii materiale

5.5.1 Momentul magnetic al atomilor

Am arătat că pentru un electron care se deplasează pe o orbită circulară, momentul magnetic orbital al electronului poate fi scris sub forma:

$$\vec{m}_L = -\frac{e}{2m_e}\vec{L}$$

Conform mecanicii cuantice momentul cinetic orbital poate lua doar valorile discrete $|\vec{L}| = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ unde $l = 0, 1, 2, \dots$ poartă numele de număr cuantic orbital, iar $\hbar = h/2\pi$, unde $h = 6,63 \times 10^{-34}$ Js este constanta lui Planck. Rezultă că și momentul magnetic asociat mișcării orbitale este cuantificat:

$$m_L = \frac{e\hbar}{2m_e}\sqrt{l(l+1)} \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (5.138)$$

Deși orice substanță conține electroni cele mai multe substanțe nu sunt magnetice deoarece momentul magnetic al unui electron este anulat de momentul magnetic al altui electron care se rotește în direcție opusă. Rezultă este că momentul magnetic produs de mișcarea orbitală este ori zero ori foarte mic.

În plus un electron (ca și protonii și alte particule) au un moment cinetic propriu numit spin. Într-o reprezentare clasică momentul propriu provine din mișcarea de rotație a particulei în jurul axei sale. Mărimea spinului unui electron este:

$$S = \hbar\sqrt{s(s+1)} \quad (5.139)$$

unde s poartă număr cuantic de spin și pentru electroni are valoarea $1/2$. Momentul magnetic caracteristic asociat cu spinul electronului este:

$$m_S = 2\frac{e\hbar}{2m_e}\sqrt{s(s+1)} \quad (5.140)$$

Se observă că momentul magnetic asociat mișcării orbitale și momentul magnetic determinat de spinul electronului sunt exprimate cu ajutorul mărimii

$$\mu_0 = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \times 10^{-24} \text{Am}^2 \quad (5.141)$$

care poartă numele de magneton Bohr.

În atomi care conțin mai mulți electroni aceștia se împerechează doi câte doi cu spini opuși; astfel momentul datorat spinului se anulează. Oricum atomii care conțin un număr impar de electroni au cel puțin un electron neîmperecheat și există un moment magnetic de spin. Momentul magnetic total este suma dintre momentele magnetice de spin și orbital.

În Tabelul 5.4 de mai jos sunt prezentate momentele magnetice ale câtorva atomi

Tabelul 5.4
Momente magnetice a unor atomi

Atomi	μ ($\text{A}\cdot\text{m}^2$)
H	$9,27 \times 10^{-24}$
He	0
Ne	0
Ca^{3+}	$19,8 \times 10^{-24}$

Nucleul atomilor are de asemenea un moment magnetic asociat, determinat de componenții săi (protonii și neutronii). Oricum momentele magnetice ale protonului și neutronului sunt mult mai mici decât ale electronului astfel că într-o primă aproximație momentul magnetic asociat nucleului se neglijează.

5.5.2 Vectorul densitate de magnetizare și vectorul intensitate câmp magnetic

Starea de magnetizare a unei substanțe este descrisă de vectorul densitate de magnetizare $\vec{M}$ care este definit ca momentul magnetic al unității de volum.

Așa cum este de așteptat inducția totală a câmpului magnetic $\vec{B}$ într-un câmp dintr-o substanță depinde de câmpul magnetic $\vec{B}_0$ produs de curenții liberi (care trec prin conductor) și de magnetizarea substanței.

Se consideră o regiune umplută cu substanță magnetică în care câmpul magnetic $\vec{B}_0$ este produs de curenții care trec prin conductoare și $\vec{B}_m$ este câmpul produs de substanță magnetică:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$$

Vom încerca să determinăm o relație între $\vec{B}_m$ și densitatea de magnetizare $\vec{M}$. Pentru aceasta considerăm că $\vec{B}_m$ este determinat mai degrabă de un solenoid decât de o substanță magnetică.

$$B_m = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 \frac{N S I}{l S} \quad (5.142)$$

unde N este numărul de spire, l este lungimea iar S este secțiunea solenoidului. Observăm că la numărător $N(SI)$ reprezintă momentul magnetic $\vec{m}$ al solenoidului, iar numitorul $lS = V$ este volumul acestuia.

Atunci B_m poate fi exprimat ca:

$$B_m = \mu_0 \frac{m}{V} = \mu_0 M \quad (5.143)$$

Astfel când o substanță este plasată în câmp magnetic, inducția totală a câmpului magnetic în acea substanță se exprimă ca:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M} \quad (5.144)$$

Când se analizează câmpurile magnetice datorate magnetizării este convenabil să se introducă o mărime numită intensitatea câmpului magnetic $\vec{H}$ în interiorul substanței. Ea este determinată doar de curenți de conducție și este definită ca:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \quad (5.145)$$

deoarece inducția magnetică $\vec{B}_0$ este produsă doar de curenții de conducție. Atunci relația (5.144) se scrie ca:

$$B = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (5.146)$$

Unitatea de măsură a intensității câmpului magnetic H este A/m.

5.5.3 Clasificarea substanțelor magnetice

Substanțele magnetice pot fi clasificate în trei categorii: substanțe feromagnetice, substanțe paramagnetice și diamagnetice. Substanțele paramagnetice și feromagnetice sunt constituite din atomi care au momentele magnetice permanente. Materialele diamagnetice sunt materiale ale căror atomi nu prezintă momente magnetice permanente. În cazul substanțelor diamagnetice momentele magnetice sunt induse de câmpul magnetic.

Pentru substanțele paramagnetice și diamagnetice omogene și izotrope densitatea de magnetizare este proporțională cu intensitatea câmpului magnetic $\vec{H}$:

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \quad (5.147)$$

unde χ este un factor adimensional numit susceptibilitate magnetică relativă. Pentru substanțele paramagnetice $\chi > 0$ și $\vec{M}$ este în același sens cu $\vec{H}$. Pentru substanțele diamagnetice $\chi < 0$ și $\vec{M}$ are sensul opus lui $\vec{H}$. Inducția câmpului magnetic în aceste substanțe este:

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} \quad (5.148)$$

unde μ_r este o constantă care poartă numele de permeabilitate magnetică relativă și este legată de susceptibilitatea magnetică prin relația:

$$\mu_r = (1 + \chi) \quad (5.149)$$

Se poate defini și o permeabilitate absolută prin relația

$$\mu = \mu_0(1 + \chi)$$

Pentru substanțele paramagnetice $\mu > \mu_0$ iar pentru cele diamagnetice $\mu < \mu_0$. Pentru substanțele paramagnetice și diamagnetice susceptibilitatea magnetică χ este foarte mică (de ordinul $10^{-6} - 10^{-4}$), astfel că practic $\mu \simeq \mu_0$ pentru aceste substanțe. Pentru substanțele feromagnetice μ poate fi de mii de ori mai mare decât μ_0 .

Relația simplă (5.147) dintre $\vec{H}$ și $\vec{M}$ nu este valabilă pentru substanțele feromagnetice. Se găsește că pentru acest tip de substanțe $\vec{M}$ nu mai este o funcție liniară de $\vec{H}$. Mai mult densitatea de magnetizare $\vec{M}$ depinde nu numai de intensitatea câmpului magnetic $\vec{H}$ ci și de stările anterioare prin care trece substanța, adică de istoria ei. Acest lucru este valabil și pentru inducția câmpului magnetic din substanțele feromagnetice, deoarece aceste este legată de densitatea de magnetizare prin relația $\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0\vec{M}$.

În Tabelul 5.5 sunt prezentate câteva susceptibilități pentru substanțe paramagnetice și diamagnetice.

Tabel 5.5

Susceptibilități magnetice pentru substanțe paramagnetice și diamagnetice

Substanțe paramagnetice		Substanțe diamagnetice	
<i>Aluminiu</i>	$2,3 \times 10^{-5}$	<i>Bismut</i>	$-1,66 \times 10^{-5}$
<i>Calciu</i>	$1,9 \times 10^{-5}$	<i>Cupru</i>	$-9,8 \times 10^{-5}$
<i>Crom</i>	$2,7 \times 10^{-5}$	<i>Diamant</i>	$-2,2 \times 10^{-5}$
<i>Litiu</i>	$2,1 \times 10^{-5}$	<i>Aur</i>	$-3,6 \times 10^{-5}$
<i>Magneziu</i>	$1,2 \times 10^{-5}$	<i>Plumb</i>	$-1,7 \times 10^{-5}$
<i>Niobiu</i>	$2,6 \times 10^{-4}$	<i>Mercur</i>	$-2,9 \times 10^{-5}$
<i>Oxigen</i>	$2,1 \times 10^{-6}$	<i>Azot</i>	-5×10^{-5}
<i>Platină</i>	$2,9 \times 10^{-4}$	<i>Argint</i>	$-2,6 \times 10^{-5}$
<i>Tungsten</i>	$6,8 \times 10^{-5}$	<i>Siliciu</i>	$-4,2 \times 10^{-5}$

5.5.4 Feromagnetism

Un mic număr de substanțe pot prezenta o magnetizare permanentă. Ele sunt substanțele feromagnetice. Aceste substanțe conțin momente magnetice permanente care au tendința să se alinieze în câmpuri magnetice. Odată momentele magnetice aliniate, substanța rămâne magnetizată după ce câmpul extern este anulat. Acest fapt se datorează faptului că între momentele magnetice vecine există o cuplare puternică ce poate fi explicată cu ajutorul mecanicii cuantice.

Toate substanțele feromagnetice sunt formate din microdomenii în care momentele magnetice sunt aliniate. Aceste domenii au volume cuprinse în intervalul $10^{-12} - 10^{-8} \text{ m}^3$ și conțin în jur de $10^{17} - 10^{21}$ atomi. Frontierele dintre diversele domenii cu orientări diferite ale magnetizării sunt numite pereți. Într-o probă nemagnetică momentele magnetice ale microdomeniilor sunt orientate aleatoriu astfel că momentul magnetic total este nul. Când proba este plasată într-un câmp magnetic extern de intensitate $\vec{H}$ dimensiunile domeniilor magnetice ale căror momente sunt paralele cu $\vec{H}$ își cresc volumul rezultând astfel o probă magnetizată. Când câmpul magnetic devine foarte puternic domeniile în care momentele nu sunt aliniate devin foarte mici. Când câmpul magnetic este anulat proba rămâne cu o magnetizare în sensul câmpului inițial. La temperaturi obișnuite, agitația termică nu este suficient de puternică pentru a distruge orientarea momentelor magnetice.

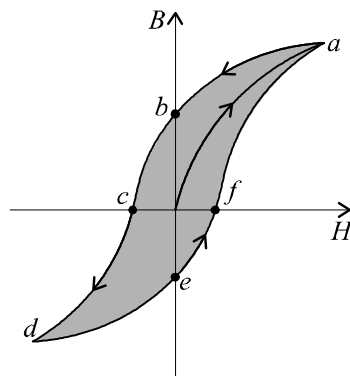


Figura 5.34: Curba de histerezis

Dacă se măsoară B în funcție de H se observă că atunci când H crește, inducția câmpului magnetic ajunge la o valoare de saturație. Când H scade la zero (punctul b) inducția magnetică nu ajunge la zero. Valoarea poartă numele de inducție magnetică remanentă. Dacă sensul lui $\vec{H}$ se schimbă, momentele magnetice se reorientează până ce proba devine nemagnetizată când $\vec{B} = 0$. Valoarea intensității câmpului magnetic la care inducția magnetică $\vec{B}$ ajunge din nou la zero poartă numele de intensitate a câmpului magnetic coercitiv. O creștere în sens invers determină o magnetizare în sens invers ajungând în punctul de saturație. O comportare similară se petrece când H se reduce din nou. În acest caz curba urmează drumul d, e, f . Dacă H crește suficient de mult se ajunge din nou în punctul de saturație a . Efectul poartă numele de histerezis și arată că magnetizarea substanțelor feromagnetice depinde de istoria substanței și de intensitatea câmpului magnetic.

Curba închisă reprezentată în Fig. 5.34 se numește curbă de histerezis. Curba de magnetizare este importantă din alt punct de vedere: aria închisă de curba de magnetizare reprezintă energia necesară pentru realizarea ciclului histerezis.

Când temperatura unei substanțe feromagnetice crește și depășește o anumită temperatură numită temperatură Curie substanța își pierde magnetizarea permanentă și devine paramagnetică. Sub temperatura Curie momentele magnetice sunt aliniate și substanța este feromagnetică. Deasupra acestei temperaturi agitația termică este suficient de puternică să determine o orientare haotică a momentelor magnetice.

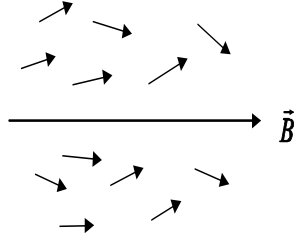


Figura 5.35: Orientarea momentelor magnetice în câmp extern în cazul unei substanțe paramagnetice.

5.5.5 Paramagnetism

Substanțele paramagnetice au susceptibilitatea magnetică mică și pozitivă $\chi > 0$, fiind determinată de prezența atomilor și a ionilor care posedă un moment magnetic. Aceste momente interacționează slab unele cu altele și sunt orientate haotic în lipsa unui câmp extern. Când o substanță paramagnetică este plasată într-un câmp magnetic extern, momentele magnetice tind să se alinieze cu câmpul magnetic (Fig. 5.35). Acest proces este în competiție cu procesul de agitație termică care se opune alinierii momentelor magnetice.

Pierre Curie (1859-1906) a găsit experimental că densitatea de magnetizarea substanțelor paramagnetice este proporțională cu câmpul magnetic aplicat și invers proporțională cu temperatura absolută:

$$M = C \frac{H}{T} \quad (5.150)$$

unde C este o constantă. Această lege poartă numele de Legea Curie iar C este constanta Curie.

5.5.6 Diamagnetism

Când un câmp magnetic extern este aplicat unei substanțe diamagnetice, apare un moment magnetic slab în direcție opusă câmpului magnetic aplicat. Deși diamagnetismul este prezent în toate materialele, efectele sunt mult mai mici decât acelea determinate de paramagnetism și feromagnetism.

Pentru a înțelege diamagnetismul să considerăm doi electroni care se învârtesc în jurul nucleului în direcții opuse. Deoarece momentele magnetice ale celor doi electroni sunt egale în mărime și opuse în direcție ele se anulează reciproc.

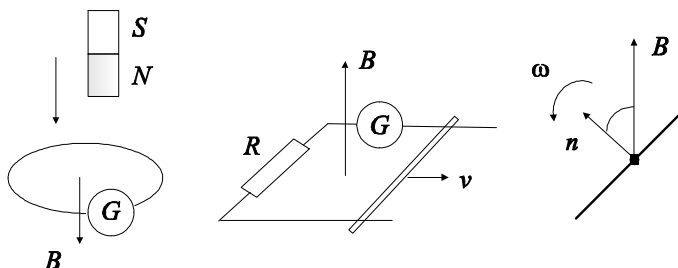


Figura 5.36: Metode de obținere a fenomenului de inducție electromagnetică

Când un câmp extern este aplicat asupra electronilor acționează o forță Lorentz $q\vec{v} \times \vec{B}$. Aceasta se adaugă forței coulombiene și crește viteza orbitală a electronului al cărui moment magnetic este antiparalel cu câmpul și scade viteza electronului al cărui moment magnetic este paralel cu câmpul. Ca rezultat al compunerii celor două momente magnetice rezultă un moment magnetic invers câmpului magnetic aplicat.

5.6 Inducția electromagnetică

5.6.1 Introducere

Fenomenul de inducție electromagnetică a fost descoperit de Faraday în 1831 și el constă în faptul că variația fluxului inducției magnetice prin suprafața unui circuit electric determină apariția un curent electric prin acel circuit. Acest curent se numește curent de inducție.

Pornind de faptul că fluxul câmpului magnetic are expresia:

$$\Phi = BS \cos \alpha \quad (5.151)$$

există mai multe moduri de a crea un flux magnetic variabil (Fig.5.36).

1. Existența unui câmp magnetic variabil. Aceasta se realizează prin apropierea unui magnet permanent de circuitul considerat. Apropierea magnetului face ca inducția câmpului magnetic să crească pe suprafața circuitului. Dacă magnetul este oprit $\vec{B}$ rămâne constant, fluxul magnetic rămâne constant și curentul prin circuit se anulează.

2. Varierea suprafeței circuitului într-un câmp magnetic constant. Aceasta se poate realiza prin deplasarea unei bare mobile AB pe două conductoare paralele fixe legate printr-o rezistență afla într-un câmp magnetic.

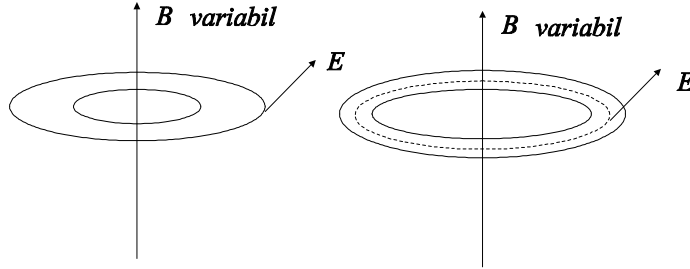


Figura 5.37: Liniile câmpului electric într-o regiune cu un câmp magnetic variabil

3. Varierea unghiului α dintre $\vec{n}$ și $\vec{B}$. Aceasta se poate realiza prin rotirea unei spire într-un câmp magnetic în jurul unui ax perpendicular pe B .

4. Un flux magnetic variabil se obține și atunci când există combinații ale celor trei cazuri prezentate anterior.

Trebuie remarcat însă că apariția fenomenului de inducție electromagnetică nu este neapărat legată de existența circuitului:

În cazul general fenomenul de inducție electromagnetică se poate defini ca fiind fenomenul de apariție a unui câmp electric cu liniile închise în regiunile din spațiu unde există un câmp magnetic variabil.

Liniile câmpului electric indus sunt în plane perpendiculare pe $\vec{B}$. Fie un inel introdus într-un câmp magnetic variabil astfel ca acesta să conțină o linie a câmpului electric indus $\vec{E}$. Linia de câmp este reprezentată punctat în Fig.5.37. Se consideră o porțiune dl foarte mică din acest conductor. Deoarece în interiorul său există un câmp electric $\vec{E}$ sarcinile din interiorul acestuia vor fi puse în mișcare. Lucrul mecanic efectuat de câmpul indus pentru a deplasa sarcina q pe lungimea dl este:

$$\delta L = Fdl = qEdl \quad (5.152)$$

Definim tensiunea electromotoare (t.e.m) indusă pe porțiunea dl ca fiind:

$$d\mathcal{E} = \frac{\delta L}{q} = Edl \quad (5.153)$$

Mai general relația (5.153) se scrie ca:

$$d\mathcal{E} = \vec{E}d\vec{l} \quad (5.154)$$

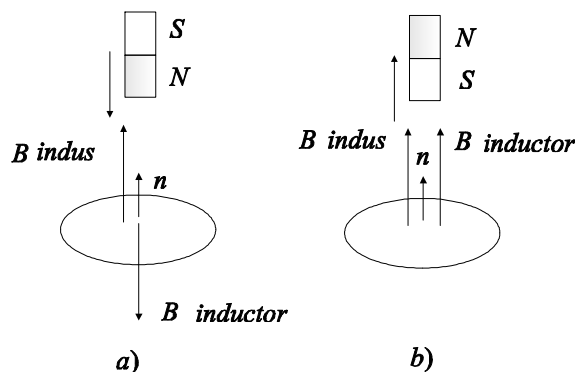


Figura 5.38: Legea lui Lentz

Pe întregul conductor tensiunea electromotoare indusă va fi o sumă a tensiunilor electromotoare induse pe fiecare porțiune de circuit. Rezultă că într-un circuit a cărui suprafață este constantă și în care apare fenomenul de inducție tensiunea electromotoare indusă este distribuită de-a lungul întregului circuit.

5.6.2 Legea lui Lentz

Într-un circuit închis t. e. m indusă și curentul indus au un astfel de sens ca variația fluxului magnetic indus să se opună variației fluxului magnetic inductor.

Legea lui Lentz se referă la curenții induși, ceea ce înseamnă că ea se aplică numai la circuite închise. Dacă circuitul este deschis putem raționa în funcție de ce s-ar întâmpla dacă circuitul ar fi închis. Vom exemplifica legea lui Lentz în cazul unui magnet ce se apropie de o spiră fixă (Fig. 5.38a). Deoarece magnetul se apropie de spiră, să zicem cu polul nord inducția câmpului magnetic inductor crește.

Atunci:

$$\Phi_{inductor} = \vec{B}_{inductor} \vec{n} S = - B_{inductor} S \quad (5.155)$$

Cum $\vec{B}_{inductor}$ crește rezultă că $\Phi_{inductor}$ crește "în sens negativ". Pentru a se opune unei astfel de variații a fluxului magnetic inductor, fluxul magnetic indus trebuie să crească "în sens pozitiv", adică $\Phi_{indus} > 0$ de unde rezultă că $\vec{B}_{indus}$ trebuie să fie în același sens cu $\vec{n}$. Curentul va circula prin spiră în sens trigonometric.

În cazul circuitelor închise pentru care suprafața nu variază, putem realiza raționamentul luând în considerație numai vectorul inducție magnetică. În cazul de mai sus $\vec{B}_{indus}$ trebuie să se opună variației lui $\vec{B}_{inductor}$. Aceasta se realizează dacă $\vec{B}_{indus}$ este în sens contrar lui $\vec{B}_{inductor}$.

În mod asemănător putem judeca situația când un magnet se depărtează de o spiră fixă, polul sud al magnetului fiind îndreptat spre spiră (Fig .5.38b) $\vec{B}_{inductor}$ este îndreptat înspre polul sud al magnetului și el scade când magnetul se îndepărtează de spiră. Atunci $\vec{B}_{indus}$ trebuie să se opună acestei variații și el va fi în sensul lui $\vec{B}_{inductor}$.

5.6.3 Legea inducției electromagnetice

Apariția tensiunii electromotoare induse $\mathcal{E}$ într-un circuit este datorată variației unui flux magnetic prin acesta. Faraday a ajuns la concluzia că tensiunea electromotoare indusă $\mathcal{E}$ este proporțională cu viteza de variație a fluxului prin circuitul respectiv:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (5.156)$$

Semnul minus ia în considerare legea lui Lentz. Dar

$$\Phi = \iint_S \vec{B} d\vec{S}$$

Atunci:

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \quad (5.157)$$

Tensiunea electromotoare pentru circuit se obține din relația (5.154):

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} d\vec{l} \quad (5.158)$$

Din relațiile (5.157) și (5.158) se obține:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \quad (5.159)$$

Câmpul electric produs datorită fenomenului de inducție electromagnetică nu este asociat unor sarcini electrice ci variației câmpului magnetic. Deși ambele tipuri de câmpuri electrice determină forțe asupra sarcinilor electrice, ele totuși se deosebesc. Astfel liniile câmpului datorat sarcinilor sunt deschise în timp ce liniile câmpului electric indus sunt închise. În cazul câmpului electric produs de sarcini diferența de potențial dintre două punct este:

$$V_2 - V_1 = - \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$$

Dacă punctele 1 și 2 coincid $V_2 = V_1$ integrala se realizează pe o curbă închisă. Rezultă condiția ca acest câmp să fie unul conservativ:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$$

În cazul câmpului electric datorat variației câmpului magnetic, $\oint \vec{E} d\vec{l} \neq 0$. Un astfel de câmp nu mai este unul conservativ și nu se mai poate defini un potențial.

5.6.4 T.e.m. indusă într-un conductor deplasat în câmp magnetic

Considerăm cazul în care conductorul este deplasat perpendicular pe liniile câmpului magnetic. Când conductorul se deplasează cu viteza v , el mătură suprafața $dS = lvdt$ unde l este lungimea conductorului respectiv. Fluxul magnetic măturat este:

$$d\Phi = BdS = Blvdt \quad (5.160)$$

Atunci t.e.m. indusă este, fără a ține cont de sensul ei:

$$|\mathcal{E}| = \frac{d\Phi}{dt} = Blv \quad (5.161)$$

Sensul t. e. m. poate fi stabilit cu ajutorul regulii mâinii drepte: Se așează mâna în lungul conductorului, astfel ca vectorul $\vec{B}$ să intre în palmă, iar degetul mare să fie în sensul vitezei de deplasare a conductorului. Celelalte patru degete vor indica sensul t. e. m. induse.

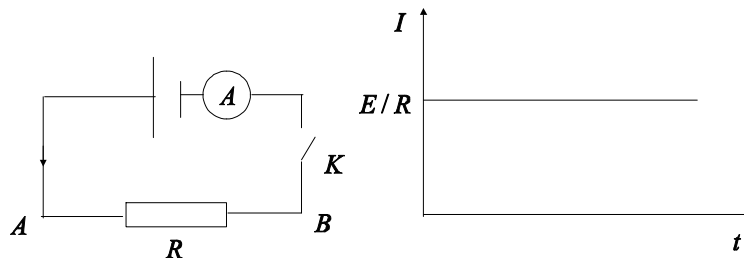


Figura 5.39: Curentul într-un circuit cu rezistență după închiderea comutatorului

Pentru un conductor rectiliniu perpendicular pe liniile de câmp, deplasat cu o viteză $\vec{v}$ perpendiculară pe conductor și care face un unghi α cu vectorul inducție magnetică $\vec{B}$ tensiunea electromotoare indusă are expresia:

$$\mathcal{E} = Blv \sin \alpha \quad (5.162)$$

5.6.5 Autoinducția

Autoinducția este fenomenul de inducție electromagnetică produs într-un circuit datorită variației intensității curentului prin acel circuit.

Pentru punerea în evidență a fenomenului de autoinducție se pot realiza o serie de experiențe. Astfel prin închiderea comutatorului K din circuitul din Fig.5.39 intensitatea curentului ajunge practic instantaneu la valoarea:

$$I = \frac{E}{R} \quad (5.163)$$

În cazul că în serie cu rezistența R se pune un solenoid ideal (Fig. 5.40) se constată că intensitatea curentului crește lent până la valoarea E/R . În acest caz prin închiderea comutatorului, curentul având o tendință de creștere prin bobină, determină un flux magnetic variabil care are ca efect apariția unei t.e.m. induse. Această t.e.m. indusă conform Legii lui Lentz trebuie să aibă un astfel de sens încât să se opună variației fluxului magnetic inductor, deci și a curentului din circuit. Ea poartă numele de t.e.m. autoindusă și apariția ei determină o încetinire a creșterii a curentului în circuit.

În cazul unui circuit parcurs de un curent de intensitate I inducția câmpului magnetic produs B este proporțional cu I . Cum fluxul câmpului magnetic este proporțional cu B rezultă că fluxul magnetic propriu prin

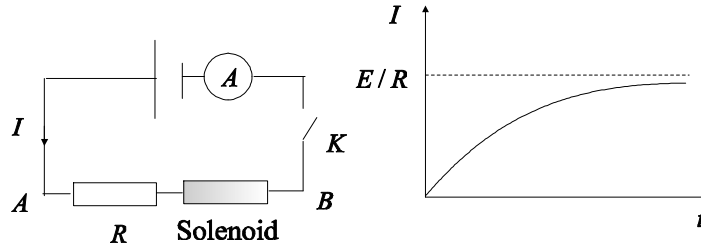


Figura 5.40: Curentul într-un circuit cu rezistență și bobină după închiderea comutatorului

suprafața unui circuit este direct proporțional cu intensitatea curentului I din acel circuit

$$\Phi = LI \quad (5.164)$$

Mărimea L se numește inductanța circuitului și se măsoară în Henry ($H=Wb/m^2$). Inductanța circuitului este o caracteristică a fiecărui circuit, ea depinde de forma geometrică a circuitului precum și de mediul aflat în interiorul circuitului.

Legea autoinducției se determină pornind de la legea inducției

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \quad (5.165)$$

Rezultă că t.e.m. autoindusă este proporțională cu viteza de variație a intensității curentului electric prin circuit.

5.6.6 Inductanța unui solenoid

Fluxul magnetic ce străbate un solenoid de lungime l cu secțiunea S și numărul de spire N străbătut de curentul I este $\Phi = NBS$. Deoarece

$$B = \mu_0\mu_r \frac{NI}{l} \quad (5.166)$$

rezultă

$$\Phi = \mu_0\mu_r \frac{N^2S}{l} I \quad (5.167)$$

Comparând cu $\Phi = LI$ rezultă că

$$L = \mu_0\mu_r \frac{N^2S}{l} \quad (5.168)$$

unde μ_r este permeabilitatea relativă a miezului solenoidului.

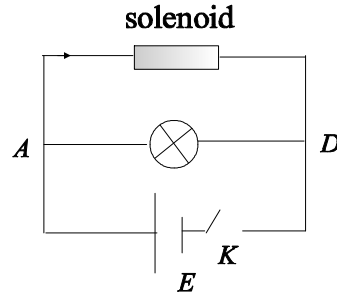


Figura 5.41: Circuit cu bobină și bec

5.6.7 Energia câmpului magnetic

Se consideră circuitul din Fig.5.41 realizat astfel ca atunci când comutatorul K este închis becul să nu lumineze. Când se deschide comutatorul K se constată, că pentru un scurt timp becul luminează. Aceasta o putem explica prin faptul că energia câmpului magnetic al solenoidului se transformă în energie electrică. Deschiderea comutatorului K determină apariția unei tensiuni electromotoare autoinduse:

$$\mathcal{E} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} = -L \frac{(0 - I)}{\Delta t} = + \frac{LI}{\Delta t} \quad (5.169)$$

unde I este intensitatea curentului prin solenoid înainte de deschiderea comutatorului K . Energia electrică transferată W circuitului după deconectarea sursei, când datorită apariției t. e. m. autodinduse prin circuitul format din bec și solenoid trece sarcina Δq este:

$$W = \mathcal{E} \Delta q \quad (5.170)$$

Cum prin solenoid intensitatea curentului scade în Δt de la valoarea I la valoarea 0, intensitatea medie a curentului este

$$I_m = \frac{I + 0}{2} = \frac{I}{2} \quad (5.171)$$

Atunci

$$\Delta q = I_m \Delta t = \frac{I}{2} \Delta t \quad (5.172)$$

Energia câmpului magnetic este egală cu cea transferată circuitului:

$$W = \mathcal{E} \Delta q = \frac{LI^2}{2} \quad (5.173)$$

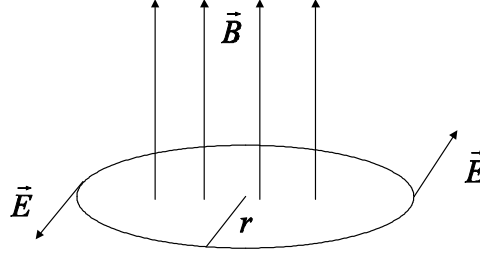


Figura 5.42: Spiră circulară în câmp magnetic uniform.

Considerând că nu există nici un miez în interiorul solenoidului ($\mu_r = 1$), relația (5.173) se scrie ținând cont de (5.168) astfel:

$$W = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 S I^2}{2l} = \frac{Sl}{2} \left(\frac{NI}{l} \right) \left(\mu_0 \frac{NI}{l} \right) = V \frac{HB}{2}$$

unde V este volumul ocupat de câmpul magnetic. Astfel densitatea de energie a câmpului magnetic este

$$w = \frac{W}{V} = \frac{HB}{2} \quad (5.174)$$

Deși expresia densității de energie a câmpului magnetic a fost dedusă într-un caz particular, ea este valabilă pentru orice câmp magnetic.

Aplicație

O spiră circulară se află într-un câmp magnetic uniform (Fig. 5.42). Dacă inducția câmpului magnetic se modifică în timp, care este câmpul electric indus (Fig. 5.42)

Soluție:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$2\pi r E = -\frac{d}{dt} (\pi r^2 B) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

$$E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

Aplicație

Să se determine tensiunea electromotoare indusă într-o spiră de arie S care se rotește cu viteză unghiulară constantă în jurul unui ax perpendicular pe vectorul inducție câmp magnetic $\vec{B}$ al unui câmp uniform.

Soluție:

Aceasta constituie o metodă de producere a curentului alternativ. Fluxul magnetic ce străbate spira la un moment dat este

$$\Phi = \vec{B}\vec{n}S = BS \cos \alpha$$

unde $\alpha = \alpha_0 + \omega t$ și α_0 reprezintă unghiul dintre normala $\vec{n}$ și vectorul $\vec{B}$ la începutul mișcării.

$$\phi = BS \cos(\omega t + \alpha_0)$$

Atunci:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = BS\omega \sin(\omega t + \alpha_0) = \mathcal{E}_{\max} \sin(\omega t + \alpha_0)$$

Aplicație

Într-o regiune din spațiu există un câmp magnetic uniform paralel cu axa Oz . Mărimea lui variază în timp astfel:

$$B = B_0 \sin \omega t$$

Să se determine intensitatea câmpului electric indus.

Soluție:

Pentru a calcula câmpul electric vom alege un contur de rază r într-un plan perpendicular pe axa Oz . Se aplică legea inducției electromagnetice:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$$

unde Φ este fluxul magnetic prin suprafața $S = \pi r^2$. Dar:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 2\pi r E$$

și

$$\phi = BS = \pi r^2 B_0 \sin \omega t$$

Atunci din legea inducției rezultă:

$$2\pi r E = -\pi r^2 B_0 \omega \cos \omega t$$

Intensitatea câmpului electric este:

$$E = -\frac{1}{2} r B_0 \omega \cos \omega t$$

5.7 Ecuațiile Maxwell

Ecuațiile Maxwell reprezintă formularea matematică a principalelor postulate ale electrodinamicii clasice. Ele sunt un sistem complet de ecuații în sensul că determină univoc câmpul electromagnetic. Ele sunt valabile în anumite situații, și anume atunci când corpurile materiale sunt imobile iar constantele de material ε , μ , σ nu depind de timp sau de intensitatea câmpurilor. Se face abstracție de prezența unor materiale ce prezintă momente electrice și magnetice dipolare permanente. Nu se ia în considerare dependența constantelor de material de temperatură. Aceste ecuații se exprimă sub forma unor legi generale precum și a unor legi de material.

5.7.1 Legea fluxului electric

În vederea legii lui Gauss pentru câmp electric se scrie ca

$$\iint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dv \quad (5.175)$$

unde dv este elementul de volum, iar S este o suprafață închisă care înconjoară volumul V . Integrala de suprafață se poate transforma în una de volum:

$$\iint_S \vec{E} d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dv \quad (5.176)$$

unde ∇ este operatorul divergență și:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (5.177)$$

Rezultă că:

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dv \quad (5.178)$$

și:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (5.179)$$

În mediile materiale densitatea totală de sarcină este suma dintre densitatea sarcinilor libere ρ_l și densitatea sarcinilor de polarizare ρ_p :

$$\rho = \rho_l + \rho_p \quad (5.180)$$

Astfel:

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_l + \rho_p}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho - \nabla \vec{P}) \quad (5.181)$$

deoarece relația dintre densitatea de polarizare și densitatea sarcinilor de polarizare este:

$$\nabla \vec{P} = -\rho_p \quad (5.182)$$

Din relația (5.181) se obține:

$$\varepsilon_0 \nabla \vec{E} + \nabla \vec{P} = \nabla (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_l \quad (5.183)$$

Deoarece inducția câmpului electric $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, rezultă:

$$\nabla \vec{D} = \rho_l \quad (5.184)$$

Aceasta este forma diferențială a legii lui Gauss pentru medii materiale. Forma integrală a acestei legii este:

$$\iint_S \vec{D} d\vec{S} = \iiint_V \rho_l dV \quad (5.185)$$

unde suprafața S este o suprafață închisă care înconjoară volumul V .

Relațiile (5.184) și (5.185) arată că inducția câmpului electric este determinată de sarcinile libere, relația (5.182) arată că densitatea de polarizare este determinată de sarcinile legate, iar relațiile (5.175) și (5.179) arată că intensitatea câmpului electric este determinată de totalitatea sarcinilor (libere și legate)

5.7.2 Legea lui Gauss pentru magnetism

Deoarece câmpul magnetic nu este produs de sarcini magnetice, fluxul inducției câmpului magnetic printr-o suprafață închisă este nul

$$\iint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (5.186)$$

unde S este o suprafață închisă. Integrala de suprafață poate fi transformată într-o integrală de volum, astfel că

$$\iint_S \vec{B} d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.187)$$

Rezultă astfel forma locală a legii lui Gauss pentru câmpul magnetic:

$$\nabla \vec{B} = 0 \quad (5.188)$$

Ecuatiile de mai sus sunt o consecință a faptului că liniile de câmp sunt închise.

5.7.3 Legea inducției electromagnetice

Legea inducție magnetice sub forma integrală este

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} d\vec{S} \quad (5.189)$$

unde S este o suprafață care se sprijină pe curba închisă C . Integrala curbilinie poate fi transformată într-una pe suprafață:

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) d\vec{S} \quad (5.190)$$

Atunci

$$\iint_S (\nabla \times \vec{E}) d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \quad (5.191)$$

Rezultă astfel formă diferențială a acestei legi:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.192)$$

unde operatorul $\nabla \times$ este operatorul rotor și:

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \quad (5.193)$$

Relațiile (5.189) și (5.192) arată că un câmp magnetic variabil în timp produce un câmp electric ale cărui linii de câmp sunt închise. Acest câmp electric este unul imprimat și nu derivă dintr-un potențial.

5.7.4 Legea lui Ampère

În vid forma generală a legii lui Ampère este:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \quad (5.194)$$

Dar în vid $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$. Se obține astfel o formă mai generală a legii lui Ampère:

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = I + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \quad (5.195)$$

Dar cum:

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{H}) d\vec{S}$$

și

$$I = \iint_S j d\vec{S}$$

relația 5.195 devine:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (5.196)$$

Relația 5.196 arată că există două surse ale câmpului magnetic: curenții și câmpurile electrice variabile în timp.

5.7.5 Legile de material

Experimental se constată existența unor relații între $\vec{P}$ și $\vec{E}$, $\vec{H}$ și $\vec{M}$ și între $\vec{j}$ și $\vec{E}$. Ele sunt determinate de starea mediului.

Legătura dintre $\vec{P}$ și $\vec{E}$

În general densitatea de polarizare $\vec{P}$ este o sumă formată din doi termeni:

$$\vec{P} = \vec{P}_p + \vec{P}_t \quad (5.197)$$

Termenul $\vec{P}_p$ este polarizarea permanentă și este independentă de existența câmpului electric (se poate obține o polarizare permanentă tensionând pe o anumită direcție un cristal piezoelectric).

Termenul $\vec{P}_t$ poartă numele de polarizare temporală și este determinat de acțiunea câmpului electric.

$$\vec{P}_t = \vec{P}_t(\vec{E}) \quad (5.198)$$

Astfel în mediile anizotrope dar liniare:

$$\begin{aligned} P_x &= \varepsilon_0 (\chi_{xx}^e E_x + \chi_{xy}^e E_y + \chi_{xz}^e E_z) \\ P_y &= \varepsilon_0 (\chi_{yx}^e E_x + \chi_{yy}^e E_y + \chi_{yz}^e E_z) \\ P_z &= \varepsilon_0 (\chi_{zx}^e E_x + \chi_{zy}^e E_y + \chi_{zz}^e E_z) \end{aligned} \quad (5.199)$$

Mărimile χ_{ij}^e unde $i, j = x, y, z$ sunt componentele unui tensor simetric, denumit tensorul susceptibilității electrice. Există un anumit sistem de referință în care tensorul respectiv are diferite de zero doar componentele pe diagonală. Relațiile (5.199) se pot scrie condensat:

$$\vec{P}_t = \varepsilon_0 \overline{\overline{\chi}}^e \vec{E} \quad (5.200)$$

Într-un mediu omogen și izotrop mărimea tensorială $\overline{\overline{\chi}}^e$ devine un scalar χ_e .

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (5.201)$$

În cazul în care nu există polarizare permanentă pentru mediile anizotrope liniare, inducția câmpului electric se scrie că:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \overline{\overline{\chi}}^e \vec{E} = \varepsilon_0 \left(1 + \overline{\overline{\chi}}^e\right) \vec{E} = \varepsilon_0 \overline{\overline{\varepsilon}} \vec{E} \quad (5.202)$$

unde

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = 1 + \overline{\overline{\chi}}^e \quad (5.203)$$

este tensorul permitivității relative a mediului respectiv.

În cazul mediilor izotrope fără polarizare permanentă

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \quad (5.204)$$

iar permitivitatea relativă este un scalar:

$$\varepsilon = 1 + \chi_e \quad (5.205)$$

Legătura dintre $\vec{H}$ și $\vec{M}$

Densitatea de magnetizare a unui material este dată de suma a doi termeni:

$$\vec{M} = \vec{M}_p + \vec{M}_t \quad (5.206)$$

unde $\vec{M}_p$ este magnetizarea permanentă, independentă de câmpul magnetic și $\vec{M}_t$ magnetizarea temporală, dependentă de câmpul magnetic. Corpurile feromagnetice prezintă magnetizare permanentă. Magnetizarea temporală se întâlnește la toate corpurile și în general are o valoare foarte mică:

$$\vec{M}_t = \vec{M}_t(\vec{H}) \quad (5.207)$$

În mediile anizotrope liniare fără magnetizare permanentă:

$$\vec{M} = \vec{M}_t = \overline{\chi^m} \vec{H} \quad (5.208)$$

unde $\overline{\chi^m}$ este tensorul permeabilității magnetice. În cazul mediilor izotrope liniare tensorul degenerează într-un scalar:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

În cazul mediilor anizotrope fără magnetizare permanentă inducția câmpului magnetic este:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \left(1 + \overline{\chi^m}\right) \vec{H} = \mu_0 \overline{\mu_r} \vec{H} \quad (5.209)$$

unde $\overline{\mu}$ este tensorul permeabilității relative.

În mediile izotrope liniare cei doi tensori devin scalari:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (5.210)$$

5.7.6 Legătura dintre $\vec{j}$ și $\vec{E}$

În mediile anizotrope și liniare legătura dintre vectorii $\vec{j}$ și $\vec{E}$ este dată de legea lui Ohm a cărei formă generală este:

$$\vec{j} = \overline{\sigma} (\vec{E} + \vec{E}_i) \quad (5.211)$$

unde $\overline{\sigma}$ este tensorul conductivității, iar $\vec{E}_i$ este intensitatea câmpurilor electrice de origine neelectrostatică. $\vec{E}_i$ se numește câmp electric imprimat.

5.8 Probleme

5.1 Trei sarcini punctiforme pozitive sunt situate pe axa Ox. Sarcina $q_1 = 20 \mu\text{C}$ este situată la coordonata $x_1 = 3 \text{ m}$ iar sarcina $q_2 = 10 \mu\text{C}$ se află în origine. Unde trebuie situată o sarcină q_3 astfel încât asupra acesteia forța care acționează asupra ei să fie nulă.

5.2 Să se determine câmpul electric creat de un dipol care constă din două sarcini q și $-q$ aflate la distanța $2a$, pe axa dipolului.

5.3 Un inel de rază R este încărcat uniform cu o sarcină pozitivă Q . Să se calculeze câmpul electric într-un punct aflat la distanța x de centrul inelului perpendicular pe planul acestuia.

5.4 Un inel de rază R este încărcat uniform cu o sarcină pozitivă Q . Să se determine potențialul creat de sarcină într-un punct aflat la distanța x de centrul inelului perpendicular pe planul acestuia.

5.5 Un disc de rază R este încărcat uniform cu sarcina Q cu densitatea de sarcină σ . Să se determine potențialul și câmpul electric creat de sarcină într-un punct aflat la distanța x de centrul discului perpendicular pe planul acestuia.

5.6 Să se determine potențialul și câmpul electric creat de un dipol cu sarcinile q și $-q$ aflate la distanța a una de alta la distanța x de centrul dipolului pe direcția axei care leagă cele două sarcini.

5.7 O bară de lungime l situată de-a lungul axei Ox cu unul din capete în origine este încărcată uniform cu sarcină electrică pozitivă cu densitatea liniară λ . Să se determine potențialul într-un punct situat pe axa Oy la coordonata a pozitivă pe această axă.

5.8 Potențialul într-o regiune a spațiului este

$$V(x, y, z) = 5x - 3x^2 + 2yz^2$$

unde potențialul este considerat în volți iar x, y și z în metri. Să se determine câmpul electric în punctul $(1, 0, -2)$.

5.9 Moleculele de apă momentul de dipol $p = 6,3 \times 10^{-30}$ Cm. O probă de apă ce conține $N = 10^{21}$ molecule care au dipoli orientați în sensul unui câmp de intensitate $E = 2,5 \times 10^5$ N/C (V/m). Care este lucrul mecanic pentru a orienta dipoli perpendicular pe câmp.

5.10 O sarcină q pozitivă este distribuită uniform în interiorul unei sfere dielectrice omogene cu permitivitatea ε . Se cere intensitatea câmpului electric în interiorul și în afara sferei.

5.11 Când o diferență de 100 V este aplicată armăturilor unui plan paralel, acestea se încarcă cu o sarcină superficială cu densitatea egală cu 30 nC/cm². Să se determine distanța dintre armături. Se cunoaște $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$ F/m.

5.12 Un condensator plan constă din două armături $S = 10$ cm², separate la distanța de 2 mm în aer. Cele două armături se află la o diferență de potențial $U = 10$ V.

- Să se calculeze câmpul electric dintre armături.
- Să se determine densitatea superficială de sarcină.
- Să se calculeze capacitatea condensatorului.
- Să se afle sarcina de pe fiecare armătură.

5.13 O sferă conductoare de rază a încărcată cu sarcina Q este învelită într-un strat dielectric cu permitivitatea relativă ε_r , astfel încât raza sferei astfel construită este b . Să se determine potențialul la care se află sfera.

5.14 O sferă dielectrică cu permitivitatea relativă ε , aflată într-un câmp electric uniform $\vec{E}$. Să se determine polarizarea acestei sferei.

5.15 Un cablu coaxial de 50 m este format dintr-un conductor cu diametrul de 2,5 mm și are o sarcină $Q = 8$ nC. Conductorul care înconjoară firul are 7,5 mm și are o sarcină $-Q = -8$ nC. Să se calculeze:

- Capacitatea cablului
- Diferența de potențial dintre cele două conductoare cablului coaxial

5.16 Un condensator cu capacitate de 3 μ F este conectat la o diferență de potențial de 12 V. Care este energia stocată în condensator.

5.17 Armăturile unui condensator plan paralel aflate în aer sunt separate prin distanța $d = 1,00$ mm. Care este densitatea de energie a câmpului

electric dintre armăturile condensatorului, dacă acesta este încărcat la o diferență de potențial $U = 500$ V.

5.18 Un conductor de cupru are secțiunea $S = 3 \times 10^{-6}$ m². Dacă prin conductor trece un curent de 10 A, care este viteza de drift a electronilor? Densitatea cuprului este $\rho = 8950$ kg/m³. Se consideră că fiecare atom contribuie cu un electron la electronii de conducție. Masa molară a cuprului este $\mu = 29$ kg/kmol.

5.19 O sârmă de cupru are diametru $d = 1$ mm. Prin acest conductor trece un curent $I = 1,8$ A. Densitatea de electroni liberi este $n = 8,5 \times 10^{28}$ electroni/m³. Să se găsească:

- a) densitatea de curent;
- b) viteza de drift.

5.20 Într-un atom Bohr electronul are o traiectorie circulară cu raza $r = 5,29 \times 10^{-11}$ m cu viteza $v = 2,19 \times 10^6$ m/s. Care este curentul efectiv asociat cu această mișcare.

5.21 Un cablu coaxial de lungime l este format dintr-un conductor cu diametrul a și altul coaxial cu diametrul b . Între cele două conductoare există un material plastic cu rezistivitatea ρ . Să se calculeze rezistența radială a cablului.

5.22 Un condensator cu capacitatea C este cuplat cu ajutorul unui comutator într-un circuit care constă dintr-o sursă de tensiune electromotoare E și rezistența R . Să se determine modul în care variază intensitatea curentului de încărcare a condensatorului funcție de timp.

5.23 Presupunem că un curent care trece printr-un conductor descrește exponențial după ecuația

$$I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Să se determine sarcina ce trece printr-o secțiune a conductorului în intervalele de timp $(0, 6\tau)$ și $(0, 60\tau)$.

5.24 O bucată de material de formă paralelipipedică se extinde de la $z = -a$ la $z = +a$. Prin ea trece un curent a cărei densitate este

$$\vec{j} = j\vec{e}_x$$

Să se determine câmpul magnetic funcție de z .

5.25 Să se determine câmpul magnetic în interiorul unei bobine toroidale. O bobină toroidală este un solenoid de lungime finită curbat în formă de tor. Se cunoaște N (numărul de spire) și curentul I care trece prin bobină.

5.26 Să se determine câmpul magnetic pe axa unui inel de rază R , străbătut de curentul I , la distanța x de centrul inelului, perpendicular pe planul în care se află inelul.

5.27 În circuitul exterior al unei surse cu t.e.m. E sunt legate în serie un rezistor cu rezistența R și o bobină cu inductanța L . Rezistorul și bobina se conectează în circuit prin intermediul unui comutator, care inițial este deschis. Cu variază intensitatea curentului în circuit după închiderea comutatorului?

5.28 O bară conductoare OE se rotește în jurul axei AB cu viteza unghiulară constantă ω pe un conductor perfect circular de rază R . Bara intersectează liniile unui câmp magnetic uniform de inducție B perpendicular pe suprafața inelului conductor. Să se determine tensiunea ce poate fi măsurată între punctele C și F .