

Capitolul 1

Elemente de mecanică newtoniană

1.1 Cinematica punctului material

Cinematica este partea din mecanică ce studiază mișcarea fără a-i considera cauzele. Prin mișcare mecanică înțelegem schimbarea în timp a poziției unui corp în raport cu alt corp material. Corpul față de care se studiază mișcarea care prin convenție, este considerat fix poartă numele de corp de referință. De corpul de referință poate fi atașat rigid un sistem de coordonate (de exemplu un sistem ortogonal cu trei axe). Pentru măsurarea timpului este necesar un ceasornic. Aceasta implică un proces periodic (de exemplu oscilațiile unui pendul). Sistemul de coordonate și ceasornicul formează sistemul de referință. Un rol important îl au sistemele de referință în care este valabil principiul inerției și care poartă numele de *sisteme inerțiale*. Sistemele inerțiale se deplasează unele față de altele cu viteză constantă. Un corp material este în general un sistem complex. Pentru studiul mișcării acestuia se pot face o serie de simplificări cum ar fi neglijarea formei acestuia sau a dimensiunilor sale. Astfel, un corp ale cărui dimensiuni pot fi neglijate în raport cu spațiul înconjurător, poartă numele de punct material.

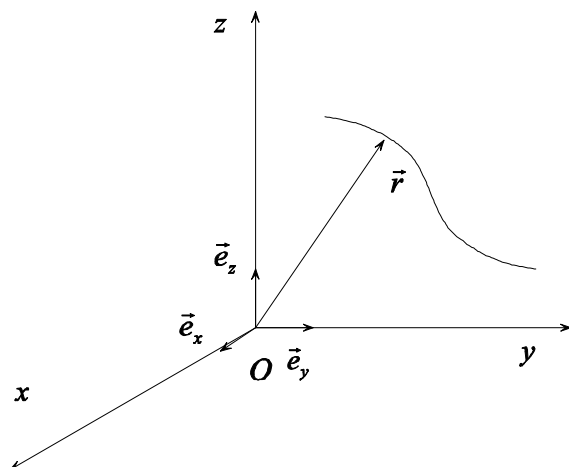


Figura 1.1: Vectorul de poziție este vectorul cu originea în originea sistemului de coordonate și cu vârful pe punctul material

1.1.1 Mărimi fundamentale

Traietorie

Mișcarea unui punct material este caracterizată prin modificarea în timp a coordonatelor sale în sistemul de coordonate ales. Astfel, într-un sistem de coordonate cartezian, cunoașterea mișcării este echivalentă cu a cunoaște evoluția în timp a razei vectoare sau a vectorului de poziție (Fig. 1.1).

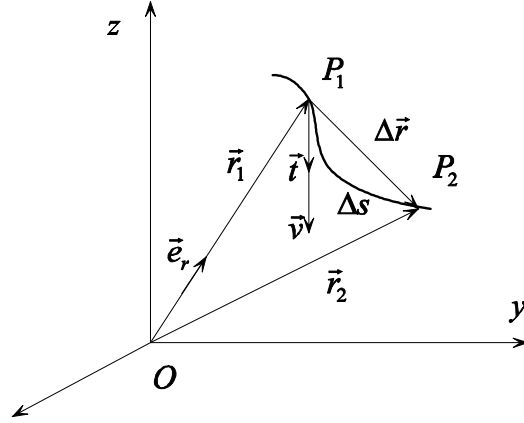
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z \quad (1.1)$$

Se numește traietorie curba descrisă de punctul material în timpul mișcării sale.

Funcția $\vec{r}(t)$ trebuie să satisfacă anumite condiții. Ea trebuie să fie continuă, uniformă, finită și cel puțin de două ori derivabilă. Ecuațiile:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

poartă numele de ecuațiile dinamice ale mișcării și ele reprezintă ecuațiile parametrice ale traietoriei, având ca parametru timpul.

Figura 1.2: Vectorul deplasare $\Delta\vec{r}$ și vectorul viteză $\vec{v}$

Prin eliminarea timpului se obțin două ecuații:

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= 0 \\ f_2(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Fiecare din aceste ecuații reprezintă câte o suprafață, traiectoria fiind curba de intersecție a celor două suprafețe.

Viteza

Viteza unei particule reprezintă variația poziției sale raportată la unitatea de timp. Fie $\vec{r}_1$ vectorul de poziție al punctului material la momentul t și $\vec{r}_2$ vectorul de poziție la momentul $t + \Delta t$. Vectorul $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ se numește vector de deplasare.

Definim vectorul viteză medie (Fig. 1.2):

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{e}_x + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{e}_y + \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{e}_z \quad (1.4)$$

Modulul vitezei medii este:

$$v_m = |\vec{v}_m| = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} \quad (1.5)$$

Pentru a caracteriza mișcarea punctului material trebuie definită viteza instantanee. Prin definiție:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z \quad (1.6)$$

Cum

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z \quad (1.7)$$

prin identificare din relațiile 1.6 și 1.7 se obține pentru componentele vitezei:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (1.8)$$

Când are loc trecerea la limită, $P_2 \rightarrow P_1$, secanta P_1P_2 se rotește în jurul lui P_1 și devine tangentă la traiectorie. Rezultă că vectorul viteză instantanee este tangent la traiectorie.

Deoarece la limită (pentru deplasări foarte mici) lungimea arcului de curbă coincide cu lungimea coardei rezultă:

$$\frac{|d\vec{r}|}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} = 1 \quad (1.9)$$

În relația 1.9 Δs este spațiul parcurs pe curbă de mobil iar s este lungimea arcului pe traiectorie de la un punct considerat ca referință și poartă denumirea de coordonată curbilinie.

Atunci derivata $d\vec{r}/ds$ - având modulul egal cu unitatea este un versor îndreptat în direcția tangentei la curbă. Se notează acest versor cu $\vec{t}$; el are sensul creșterii lui s .

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t} \quad (1.10)$$

Atunci:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \vec{t} \frac{ds}{dt} = \vec{t}v \quad (1.11)$$

unde $v = ds/dt$ este viteza de deplasare pe traiectorie; ea reprezintă spațiul parcurs pe traiectorie în unitatea de timp. Ținând cont de cele prezentate mai sus:

$$|\vec{v}| = |\vec{t}v| = v \quad (1.12)$$

adică viteza pe traiectorie este egală cu modulul vectorului viteză.

În concluzie vectorul viteză instantanee este tangent la traiectorie și îndreptat în sensul mișcării.

Putem exprima vectorul de poziție ca fiind:

$$\vec{r} = \vec{e}_r(t)r(t) \quad ; \quad |\vec{e}_r(t)| = 1 \quad (1.13)$$

unde $\vec{e}_r$ este versorul razei vectoare.

Atunci, putem exprima viteza astfel:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r(t) + r\frac{d\vec{e}_r(t)}{dt} \quad (1.14)$$

Semnificația formulei de mai sus este următoarea: viteza punctului material este datorată atât variației modulului razei vectoare cât și direcției razei vectoare.

În plus vectorul $d\vec{e}_r/dt$ este perpendicular pe $\vec{e}_r$.

Acest lucru se poate demonstra, ținând cont că

$$|\vec{e}_r| = 1 \quad (1.15)$$

Atunci:

$$\vec{e}_r^2 = 1$$

Derivând în raport cu timpul relația de mai sus se obține:

$$\frac{d\vec{e}_r^2}{dt} = 2\vec{e}_r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = 0 \quad (1.16)$$

și se justifică afirmația făcută anterior. Trebuie observat că deși $|\vec{e}_r| = 1$, $\vec{e}_r$ își modifică direcția în timp. Astfel, putem trage concluzia că derivata unui vector variabil, dar de modul constant este perpendiculară pe acel vector.

Accelerația

În general în cursul unei mișcări viteza $\vec{v}$ variază atât ca direcție cât și ca modul. Se impune introducerea unei mărimi care să caracterizeze această variație. Această mărime poartă numele de accelerație. Ea reprezintă variația vitezei în unitatea de timp. Ca și în cazul vitezei vom defini o accelerație medie pe un interval de timp Δt (Fig. 1.3)

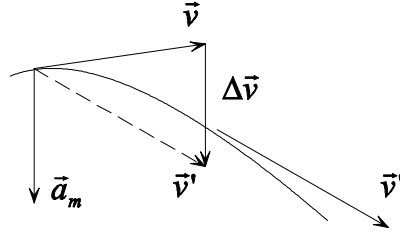


Figura 1.3: Accelerație medie

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (1.17)$$

precum și o accelerație instantanee

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{e}_x + \frac{dv_y}{dt} \vec{e}_y + \frac{dv_z}{dt} \vec{e}_z \quad (1.18)$$

care mai poate fi scrisă ca:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{e}_x + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{e}_y + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{e}_z \quad (1.19)$$

Exprimând accelerația în funcție de proiecțiile sale pe cele trei axe de coordonate

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

se obține:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (1.20)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (1.21)$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (1.22)$$

Se observă că accelerația este îndreptată înspre interiorul traiectoriei și nu este tangentă la traiectorie.

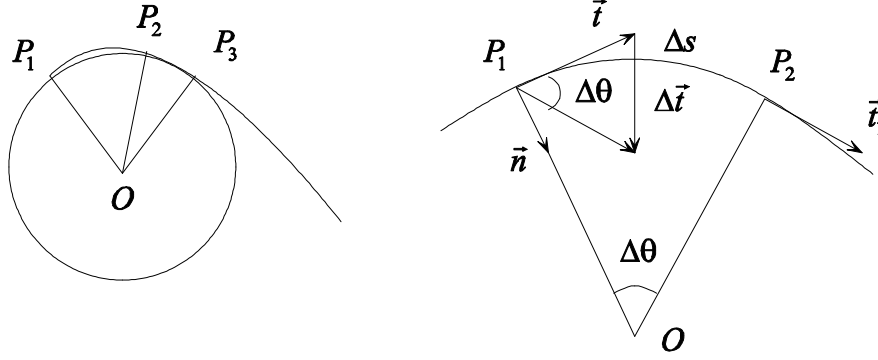


Figura 1.4: Curbura și raza de curbura

O descriere mai detaliată a vectorului accelerație impune definirea unor mărimi noi precum raza de curbura și curbura. Se consideră pe o curbă C (Fig. 1.4) trei puncte necolineare P_1 , P_2 , P_3 .

Cele trei puncte definesc un cerc a cărui rază R dă curbura medie $C = 1/R$ a curbei pe porțiunea $P_1P_2P_3$. Dacă punctele P_1 și P_3 tind către P_2 atunci cercul obținut poartă numele de cerc de curbura sau cerc osculator al curbei în punctul P_2 . Planul limită definit de cele trei puncte poartă numele de plan osculator și conține cercul osculator. Se poate defini astfel raza de curbura într-un punct:

$$R = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta\theta} = \frac{ds}{d\theta} \quad (1.23)$$

Curbura în punctul respectiv este inversul razei:

$$C = \frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} \quad (1.24)$$

Din Fig. 1.4 se observă că $\Delta s/\Delta\theta$ reprezintă raza cercului osculator.

Astfel curbura C măsoară gradul de abatere a curbei de la linia dreaptă. Vectorul unitate perpendicular pe tangenta la curbă într-un punct îndreptat înspre centrul de curbura și aflat în planul osculator poartă numele de normală principală. Din Fig.1.4 se vede că:

$$\left| \frac{\Delta \vec{t}}{\Delta\theta} \right| = \frac{2 |\vec{t}| \sin \Delta\theta/2}{\Delta\theta} = \frac{\sin \Delta\theta/2}{\Delta\theta/2}$$

Atunci când $\Delta\theta \rightarrow 0$ rezultă:

$$\frac{\sin \Delta\theta/2}{\Delta\theta/2} \rightarrow 1$$

Astfel:

$$\left| \frac{\Delta \vec{t}}{\Delta\theta} \right| \rightarrow 1 \quad ; \quad \left| \frac{d\vec{t}}{d\theta} \right| = 1 \quad (1.25)$$

Atunci când P_1 se apropie de punctul P_2 vectorul $\vec{t}$ se rotește în jurul lui P_1 iar $\Delta\vec{t}$ devine perpendicular pe $\vec{t}$. Rezultă:

$$\frac{d\vec{t}}{d\theta} = \vec{n} \quad (1.26)$$

În plus

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} = C\vec{n} = \frac{\vec{n}}{R} \quad (1.27)$$

Derivând relația 1.11 obținem :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{t}) = \frac{dv}{dt}\vec{t} + v\frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + v\frac{d\vec{t}}{ds}\frac{ds}{dt} \\ \vec{a} &= \frac{dv}{dt}\vec{t} + v^2\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Se poate exprima accelerația ca sumă din doi vectori perpendiculari:

$$\vec{a} = a_t\vec{t} + a_n\vec{n} \quad (1.29)$$

unde

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad (1.30)$$

poartă denumirea de accelerație tangențială, ea fiind datorată variației modului vitezei, iar

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad (1.31)$$

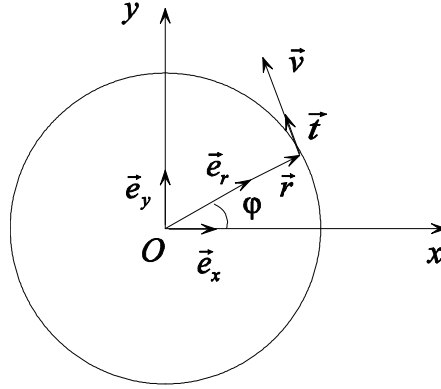


Figura 1.5: Mișcarea circulară

poartă denumirea de accelerație normală sau centripetă și este datorată variației direcției vitezei.

Se remarcă faptul că mișcarea curbilinie este întotdeauna o mișcare accelerată deoarece $\vec{a}_n \neq 0$.

Rezultă că accelerația se descompune într-o componentă tangențială $\vec{a}_t$ care este îndreptată de-a lungul vitezei și o componentă normală $\vec{a}_n$ îndreptată înspre centrul de curbura.

1.1.2 Mișcarea circulară

Mișcarea circulară este mișcarea unui punct material a cărei traiectorie este un cerc.

Într-o mișcare circulară variază numai direcția razei vectoriale $\vec{r}$ (Fig. 1.5).

Atunci în relația 1.14 $dr/dt = 0$. Rezultă:

$$\vec{v} = r \frac{d\vec{e}_r}{dt} \quad (1.32)$$

Conform Fig. 1.5 versorul razei vectoriale se scrie ca:

$$\vec{e}_r = \vec{e}_x \cos \varphi(t) + \vec{e}_y \sin \varphi(t) \quad (1.33)$$

Deoarece

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = (-\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi) \frac{d\varphi}{dt} \quad (1.34)$$

putem scrie:

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{t} \frac{d\varphi}{dt} \quad (1.35)$$

unde

$$\vec{t} = -\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi \quad (1.36)$$

și

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \quad (1.37)$$

reprezintă viteza unghiulară.

Astfel în mișcarea circulară, vectorul viteză este:

$$\vec{v} = r\omega\vec{t} \quad (1.38)$$

iar modulul său este:

$$v = |\vec{v}| = r\omega \quad (1.39)$$

Accelerația tangențială este:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon \quad (1.40)$$

unde

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad (1.41)$$

poartă numele de accelerație unghiulară.

Accelerația normală sau centripetă este:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (1.42)$$

Accelerația totală este:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (1.43)$$

Viteza poate fi scrisă vectorial prin introducerea vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$ perpendiculară pe planul traiectoriei circulare având sensul dat de

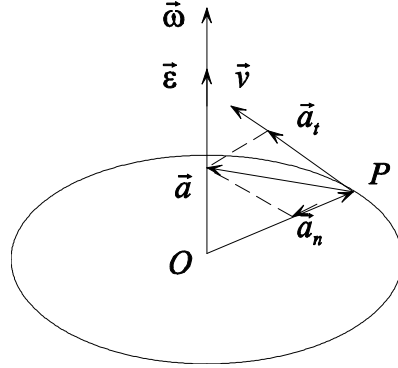


Figura 1.6: Accelerația normală și tangențială în cazul mișcării circulare

regula burghiului drept (Fig. 1.6). Se poate defini și vectorul accelerație unghiulară ca fiind:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (1.44)$$

care va fi situat pe aceeași axă cu $\vec{\omega}$.

Din Fig. 1.6 se observă că:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (1.45)$$

$$\vec{a}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \quad (1.46)$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 \vec{r} = -\frac{v^2}{r^2} \vec{r} \quad (1.47)$$

Ca exemplu putem considera cazul mișcării circulare uniforme. În acest caz $\omega = \text{const.}$ Rezultă că accelerația unghiulară și accelerația tangențială sunt nule, numai accelerația normală fiind diferită de zero. Pentru o astfel de mișcare se pot defini frecvența și perioada.

Frecvența ν reprezintă numărul de rotații efectuat de corp în unitatea de timp.

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.48)$$

Perioada T reprezintă timpul în care se efectuează o rotație completă

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.49)$$

1.2 Legile mecanicii

1.2.1 Formulările legilor mecanicii

Legea I (Principiul inerției)

Experimental s-a constatat că dacă asupra unui corp aflat în stare de repaus nu se exercită acțiunea altor corpuri această stare se menține un timp nedefinit. Dacă se lansează pe un plan șlefuit o bilă se constată că traiectoria acesteia este o dreaptă iar în intervale de timp scurte mișcarea este aproape o mișcare uniformă în sensul că viteza se micșorează foarte puțin.

Repetând experiența pe alte plane se constă că cu cât suprafața planului este mai bine șlefuită micșorarea vitezei în același interval de timp este mai mică. Aceste fapte duc la concluziile următoare:

- în punctul de contact dintre bilă și plan apar interacții care se opun mișcării;
- dacă interacțiile care se opun mișcării ar fi eliminate atunci mișcarea bilei ar fi o mișcare rectilinie uniformă.

Generalizând, se poate formula principiul inerției:

Orice corp liber își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă (un corp liber este corpul asupra căruia nu se exercită nici forțe nici momente indiferent de modul de aplicare).

Principiul nu a putut fi verificat în mod absolut în practică, deoarece nici un corp nu poate fi izolat complet de acțiunea celorlalte corpuri care-l înconjoară. Experiențele care au dus la această concluzie au minimizat cât s-a putut de mult sau au anulat într-un fel acțiunile exterioare corpului.

Proprietatea unui corp de a-și menține starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă poartă numele de inerție.

Sistemele de referință în care este valabil principiul inerției poartă numele de sisteme inerțiale. Ca o observație trebuie remarcat că sistemele de referință legate de pământ nu sunt riguros inerțiale, datorită mișcării acestuia. Abaterile sunt însă mici, astfel încât aceste sisteme pot fi considerate ca inerțiale.

Legea a II-a (Legea fundamentală a mecanicii)

În mecanică se consideră două feluri de interacțiuni dintre două corpuri:

a) interacțiuni în urma cărora viteza unuia din corpuri se modifică (în mărime și direcție), adică corpul este accelerat.

b) interacțiuni în urma cărora corpurile se deformează.

Cele două tipuri de acțiuni poartă numele de forțe. În continuare ne vom limita la primul caz.

Experimental s-a constatat că accelerația căpătată de un corp este proporțională cu forța care acționează asupra lui.

$$\vec{a} \sim \vec{F}$$

Atunci legea a doua se formulează astfel:

Accelerația pe care o capătă un corp datorită acțiunii unei forțe este direct proporțională cu mărimea acelei forțe și colineară cu ea.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (1.50)$$

În relația de mai sus m este un parametru ce caracterizează corpul respectiv și poartă numele de masă. Newton a interpretat acest parametru ca fiind cantitatea de substanță conținută într-un corp. Deoarece cu cât masa este mai mare accelerația imprimată este mai mică, se poate spune că masa unui corp este o măsură a inerției sale. Din acest motiv masa m poartă numele de masă inerțială.

Legea a doua poate fi exprimată și în alt mod. Pentru aceasta se definește impulsul ca fiind produsul dintre masă și viteză.

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (1.51)$$

Dacă se consideră masa ca fiind o constantă

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (1.52)$$

Rezultă că:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (1.53)$$

Relația 1.53 reprezintă o altă formă a legii a II-a a dinamicii. Ea este valabilă și în cadrul mecanicii relativiste unde masa este o mărime variabilă.

Legea a III-a (Principiul acțiunii și reacțiunii)

Forțele care acționează asupra unui corp sunt determinate de alte corpuri. Experimental se constată că forțele cu care un corp acționează asupra altuia determină instantaneu din partea celui de-al doilea o reacțiune asupra primului. Se găsește că cele două două forțe sunt egale dar de sens contrar. Prin generalizarea acestor fapte s-a obținut principiul acțiunii și reacțiunii:

Dacă un corp acționează asupra altui corp cu o forță $\vec{F}_{12}$, al doilea corp acționează asupra primului cu o forță $\vec{F}_{21}$ egală în mărime și de sens contrar cu prima forță.

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Cele două forțe poartă numele de acțiune și reacțiune și acționează asupra unor corpuri diferite.

Legea a IV-a (Principiul suprapunerii forțelor)

Principiul suprapunerii forțelor arată ce se petrece atunci când asupra unui corp acționează simultan mai multe forțe:

Dacă asupra unui corp acționează forțele $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, efectul obținut este același ca și în cazul în care asupra corpului ar acționa o singură forță

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \quad (1.54)$$

Aceasta înseamnă ca fiecare forță acționează independent, efectul uneia dintre ele nefiind afectat de existența celorlalte forțe.

1.2.2 Sisteme de referință (SR)

Așa cum s-a arătat, studiul mișcării corpurilor impune raportarea acestora la un sistem spațio-temporal (SR) care constă:

- dintr-un sistem de coordonate (atașat de un corp considerat prin convenție fix);
- un ceasornic pentru măsurarea timpului.

Newton a ajuns la concluzia că un sistem de referință, fixat de corpuri materiale nu poate fi absolutizat, din lipsa motivelor care ar susține unicitatea unui astfel de sistem.

Totuși un sistem de referință fix a fost introdus, deși despre poziționarea acestuia nu se poate spune nimic precis. Acesta este spațiul absolut.

Admiterea timpului absolut a fost realizată în așa fel încât marcarea momentelor de timp absolut nu putea fi atribuită unor evenimente materiale.

Alegerea unui sistem de referință se face astfel încât principiile mecanicii să fie satisfăcute iar fenomenele studiate să apară cât mai simplu.

În conformitate cu aceasta s-a introdus sistemul de referință inerțial (SRI); în acest sistem principiul inerției este satisfăcut.

Cerințele ce trebuie îndeplinite de spațiu și timp în sistemul de referință inerțial pentru menținerea stării de mișcare rectilinie și uniformă sau repaus relativ a unui corp liber sunt:

- 1 Omogenitatea spațiului: toate punctele din spațiu sunt echivalente.
- 2 Izotropia spațiului: traiectoriile corpurilor libere în mișcare sunt rectilinii indiferent de direcțiile în care are loc mișcarea.
- 3 Uniformitatea timpului: corpurile libere parcurg spații egale în intervale de timp egale.

1.2.3 Transformările Galilei

Fie două sisteme S și S' inerțiale, S' fiind în mișcare relativă față de S cu viteza constantă $\vec{v}$. Un punct material are coordonatele $(\vec{r}, t)$ în S și $(\vec{r}', t')$ în S'.

Se pune problema de a determina relațiile de trecere de la coordonatele $(\vec{r}, t)$ la coordonatele $(\vec{r}', t')$.

Aceste relații sunt date de transformările Galilei și rezultă din existența spațiului absolut și a timpului absolut.

Transformarea timpului

Se consideră două sisteme de referință cu două ceasornice identice. Deoarece poziția unui ceasornic în sistemul căruia îi este atașat nu contează se poate alege poziția acestuia astfel ca să existe un moment în care poziția celor două ceasornice să coincidă. Astfel se poate realiza sincronizarea lor.

$$t_0 = t'_0 = 0 \quad (1.55)$$

În mecanica clasică se presupune că mersul ceasornicelor este independent de starea de mișcare a sistemelor de referință; scurgerea timpului este aceeași

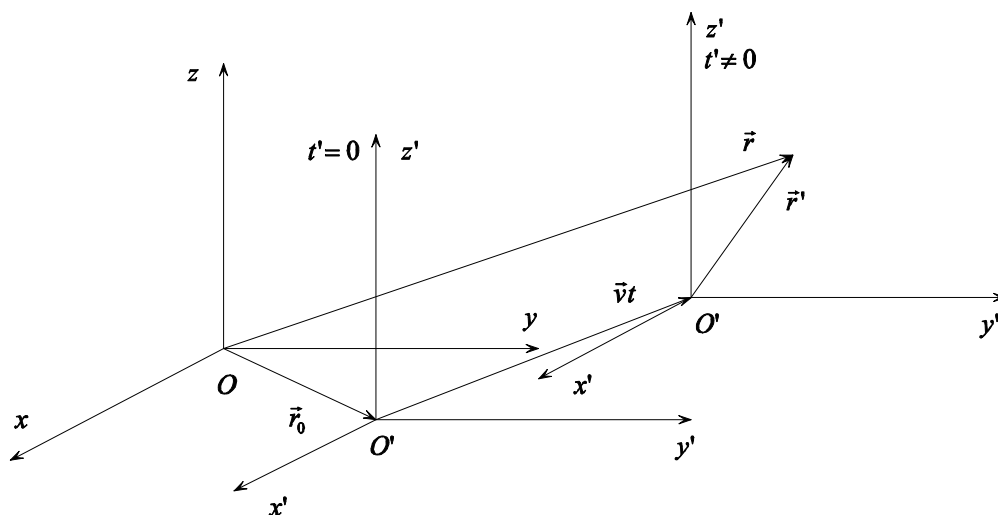


Figura 1.7: Transformările Galilei. Sistemul S' este reprezentat la două momente de timp: $t = 0$ și $t \neq 0$.

în ambele sisteme de referință; atunci:

$$t' = t \quad (1.56)$$

Se constată că dacă se admite existența unui timp absolut, simultaneitatea este absolută: două sau mai multe evenimente simultane într-un sistem de referință inerțial sunt simultane în orice alt sistem de referință inerțial.

Transformarea spațiului

Pentru deducerea relației de transformare dintre $\vec{r}$ și $\vec{r}'$ se consideră că:

- etaloanele de lungime nu se modifică în funcție de starea de mișcare a sistemelor cărora le sunt atașate;
- măsurarea unei distanțe într-un sistem se face prin considerarea pozițiilor celor două extremități la un moment de timp t .

Se consideră că la $t' = t = 0$ originea sistemului S' se găsește la coordonata $\vec{r}_0$. Din Fig. 1.7 se observă că:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' + \vec{v}t \quad (1.57)$$

Relația 1.57 reprezintă relația de transformare a spațiului.

Pentru $t = 0$, $\vec{r}_0 = 0$, relațiile Galilei care dau transformarea spațiului și timpului devin:

$$\begin{aligned} t &= t' \\ \vec{r} &= \vec{r}' + \vec{v}t \end{aligned} \quad (1.58)$$

Dacă S' se deplasează de-a lungul axei Oy , relațiile Galilei sunt:

$$\begin{aligned} t &= t' \\ x &= x' \\ y &= y' + vt \\ z &= z' \end{aligned} \quad (1.59)$$

Derivând relația 1.57 se obține relația de legătură dintre vitezele punctului material din cele două sisteme de referință

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

viteza punctului material în S , și

$$\vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

viteza punctului material în S' :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{v} \quad (1.60)$$

Atunci:

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v} \quad (1.61)$$

Dacă un corp se mișcă rectiliniu și uniform (cu viteză constantă în sistemul de referință S) el se va mișca în același mod și în sistemul S' .

Dacă S și S' sunt inerțiale, atunci sistemele de referință se mișcă unele față de altele cu viteză constantă.

Pentru obținerea relațiilor dintre accelerațiile din cele două sisteme de referință se derivează în raport cu timpul relația 1.61:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}'}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.62)$$

Rezultă:

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

Cum masa este constantă, legea a II-a a dinamicii își păstrează aceeași formă în ambele sisteme de referință. Acest fapt a dus la enunțarea principiului relativității al lui Galilei:

Legile mecanicii sunt invariante la transformările Galilei.

1.3 Dinamica punctului material

1.3.1 Teorema impulsului

Din principiul al doilea al dinamicii rezultă:

$$\vec{F}dt = d\vec{p} \quad (1.63)$$

Se definește impulsul forței astfel:

$$\vec{H} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \quad (1.64)$$

Din 1.63 și 1.64 rezultă:

$$\vec{H} = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m_2\vec{v}_2 - m_1\vec{v}_1 \quad (1.65)$$

Cum în mecanica clasică masa este constantă $m_1 = m_2$ se obține:

$$\vec{H} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \Delta\vec{p} \quad (1.66)$$

Relația 1.66 reprezintă teorema impulsului:

Impulsul forței rezultante aplicate unui punct material este egal cu variația impulsului punctului material.

Dacă asupra punctului material nu acționează nici o forță ($\vec{F} = 0$), sau rezultanta forțelor ce acționează asupra punctului este nulă atunci:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad (1.67)$$

Integrând relația 1.67 se obține:

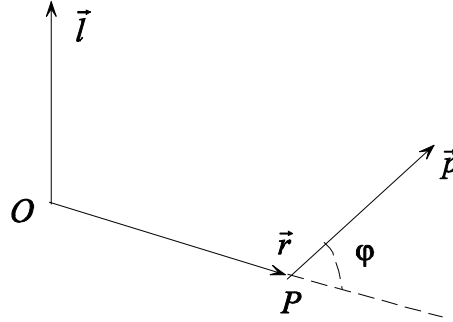


Figura 1.8: Momentul cinetic

$$\vec{p} = \text{const} \quad (1.68)$$

Aceasta este legea conservării impulsului:

Dacă rezultanta forțelor ce acționează asupra unui punct material este nulă, impulsul acestuia rămâne constant.

1.3.2 Teorema momentului cinetic

Momentul cinetic (Fig. 1.8) al unui punct material P se definește în raport cu un punct O :

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (1.69)$$

Rezultă că momentul cinetic este un vector perpendicular pe planul format de vectorul de poziție și impuls. Modulul lui este:

$$l = rp \sin \varphi = rmv \sin \varphi$$

Se derivează expresia 1.69 și se obține:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

sau

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \quad (1.70)$$

deoarece $\vec{v} \times \vec{p} = 0$, $\vec{v}$ și $\vec{p}$ fiind vectori pe aceeași direcție. Mărimea $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ este momentul forței. Rezultă:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{l}}{dt} \quad (1.71)$$

Aceasta reprezintă teorema momentului cinetic.

Momentul forței este egal cu derivata momentului cinetic în raport cu timpul.

În cazul în care momentul forței este nul:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = 0$$

Prin integrare rezultă:

$$\vec{l} = \text{const}$$

Aceasta este expresia matematică a legii de conservare a momentului cinetic.

Dacă momentul rezultat al forțelor care acționează asupra unui punct material este nul, momentul cinetic se conservă.

1.3.3 Lucrul mecanic

Forțele pot produce deplasări ale corpurilor. O măsură a efectului produs de forță este lucrul mecanic. Presupunând că prin acțiunea forței $\vec{F}$ are loc o deplasare foarte mică $d\vec{r}$ a punctului material pe traiectorie (Fig. 1.9) se poate defini lucrul mecanic elementar:

$$\delta L = \vec{F} d\vec{r} \quad (1.72)$$

În cazul unei deplasări finite între punctele (1) și (2):

$$L = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} d\vec{r} = \int_{(1)}^{(2)} F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (1.73)$$

În cazul unei forțe constante:

$$L = \vec{F} \int_{(1)}^{(2)} d\vec{r} = \vec{F}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F} \vec{d} = Fd \cos \alpha \quad (1.74)$$

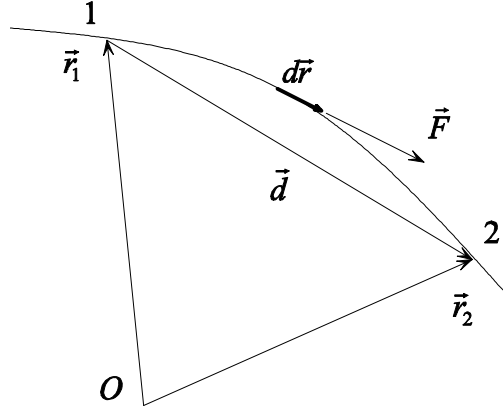


Figura 1.9: Lucrul mecanic

unde α este unghiul dintre forța $\vec{F}$ și vectorul deplasare $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Se observă că dacă $\vec{F} \perp \vec{d}$ atunci $L = 0$, fapt ce arată că într-o deplasare curbilinie doar componenta tangențială a forței efectuează lucru mecanic.

1.3.4 Puterea

Definim puterea ca fiind viteza cu care este efectuat lucrul mecanic.

Puterea medie în intervalul de timp Δt este raportul dintre lucrul mecanic ΔL efectuat în acest interval și valoarea intervalului Δt :

$$P_m = \frac{\Delta L}{\Delta t} \quad (1.75)$$

Puterea instantanee sau puterea momentană se definește ca fiind¹:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{\delta L}{dt} \quad (1.76)$$

Cum $\delta L = \vec{F} d\vec{r}$ rezultă:

$$P = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (1.77)$$

¹S-a introdus notația δL pentru a menționa faptul că lucrul mecanic nu este o diferențială totală exactă.

1.3.5 Teorema energiei cinetice

Din legea a doua a mecanicii:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

rezultă:

$$\vec{F} \vec{v} dt = m \vec{v} d\vec{v} \quad (1.78)$$

sau:

$$\vec{F} d\vec{r} = d \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) \quad (1.79)$$

Deoarece

$$\delta L = \vec{F} d\vec{r}$$

rezultă:

$$\delta L = d \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) = d \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \quad (1.80)$$

Se observă că lucrul elementar al rezultantei forțelor ce acționează asupra unui punct material este egal în orice moment, cu diferențiala mărimii $mv^2/2$ care poartă numele de energie cinetică. Integrând relația 1.80 se obține:

$$L = \int_{(1)}^{(2)} d \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = E_{c2} - E_{c1} \quad (1.81)$$

unde:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m} \quad (1.82)$$

este energia cinetică.

Relația 1.81 reprezintă teorema variației energiei cinetice:

Lucrul mecanic efectuat de rezultanta forțelor ce acționează asupra unui punct material este egal cu variația energiei cinetice a punctului material.

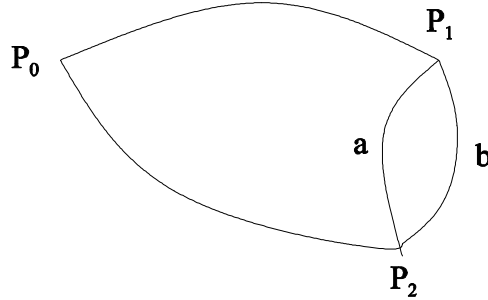


Figura 1.10: Energia potențială. Lucrul mecanic efectuat de forțele conservative este același între punctele P_1 și P_2 indiferent de drumul parcurs.

1.3.6 Energia potențială

Există câmpuri de forțe numite conservative (câmpul gravitațional, câmpul electrostatic) în care lucru mecanic efectuat de forțele câmpului asupra punctului material nu depinde de traiectorie sau viteză, ci numai de poziția inițială și finală. O consecință a acestui fapt este că lucrul mecanic efectuat de astfel de forțe asupra unui punct material ce se deplasează pe o traiectorie închisă este nul. Din Fig. 1.10 rezultă:

$$L_{P_1 a P_2} = L_{P_1 b P_2}$$

$$L_{P_1 a P_2} - L_{P_1 b P_2} = 0$$

$$L_{P_1 a P_2} + L_{P_2 b P_1} = 0$$

sau:

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0$$

Această proprietate se poate considera ca o definiție a câmpului conservativ. Astfel un câmp de forțe este conservativ dacă lucrul mecanic efectuat de forțele câmpului pe orice traiectorie închisă este nul.

Pentru a defini energia potențială se alege un punct P_0 de referință. Acest punct poate fi un punct fix sau poate fi plasat la infinit.

Într-un câmp conservativ energia potențială E_p într-un punct P este egală cu lucrul mecanic cu semn schimbat efectuat de forțele câmpului pentru deplasarea punctului material din P_0 în P:

$$E_p(\vec{r}) = - \int_{P_0}^P \vec{F} d\vec{r} = \int_P^{P_0} \vec{F} d\vec{r} \quad (1.83)$$

Atunci:

$$L_{P_1 P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_0} \vec{F} d\vec{r} + \int_{P_0}^{P_2} \vec{F} d\vec{r}$$

sau:

$$L_{P_1 P_2} = E_p(P_1) - E_p(P_2) \quad (1.84)$$

Rezultă:

$$L_{P_1 P_2} = - [E_p(P_2) - E_p(P_1)] = -\Delta E_p \quad (1.85)$$

Relația diferențială corespunzătoare este: $\delta L = -dE_p$
Cum

$$\delta L = \vec{F} d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (1.86)$$

iar

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz \quad (1.87)$$

se obține:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$$

$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

adică:

$$\vec{F} = -\nabla E_p \quad (1.88)$$

Relația de mai sus indică modul în care se determină forțele ce acționează asupra punctului material când se cunoaște energia potențială.

Valoarea efectivă a energiei potențiale nu are semnificație fizică datorită modului arbitrar în care se alege punctul P_0 (acesta în general se alege astfel încât expresia energiei potențiale să fie cât mai simplă). Semnificație fizică are doar variația energiei potențiale care este legată de lucrul forțelor conservative. Astfel energia potențială se determină până la o constantă arbitrară.

1.3.7 Conservarea energiei mecanice

Fie un punct material ce se deplasează într-un câmp conservativ, atât sub acțiunea forțelor conservative cât și unor forțe neconservative; atunci, conform teoremei variației energiei cinetice:

$$L = E_{c2} - E_{c1} \quad (1.89)$$

unde E_{c2} este energia cinetică în poziția finală, iar E_{c1} este energia cinetică în poziția inițială.

Având în vedere faptul că asupra punctului material acționează atât forțe conservative cât și forțe neconservative, vom considera lucrul mecanic ca o sumă:

$$L = L_C + L_{NC} \quad (1.90)$$

unde L_C este lucrul mecanic al forțelor conservative, iar L_{NC} lucrul mecanic al forțelor neconservative. Cum:

$$L_C = -(E_{p2} - E_{p1}) \quad (1.91)$$

atunci

$$L_{NC} - (E_{p2} - E_{p1}) = E_{c2} - E_{c1} \quad (1.92)$$

și:

$$L_{NC} = (E_{p2} + E_{c2}) - (E_{p1} + E_{c1}) \quad (1.93)$$

Se definește energia mecanică a unui punct material ca fiind suma dintre energia cinetică și cea potențială:

$$E = E_c + E_p \quad (1.94)$$

Atunci

$$L_{NC} = E_2 - E_1, \quad (1.95)$$

Relația 1.95 reprezintă teorema variației energiei mecanice:

Lucrul mecanic al forțelor neconservative care acționează asupra unui punct material este egal cu variația energiei mecanice a punctului material respectiv.

Dacă asupra punctului material nu acționează forțe neconservative atunci $L_{NC} = 0$ și

$$E_2 = E_1. \quad (1.96)$$

Aceasta este legea conservării energiei mecanice:

Într-un câmp de forțe conservative energia mecanică a punctului material rămâne constantă în cursul mișcării, având loc o transformare a energiei cinetice în energie potențială și invers.

1.4 Dinamica sistemelor de puncte materiale

1.4.1 Teorema impulsului total. Conservarea impulsului

Fie un sistem de N puncte materiale de mase m_k , având vectorii de poziție $\vec{r}_k$, $k = 1, 2, \dots, N$

Masa totală a sistemului de puncte materiale este

$$M = \sum_{k=1}^N m_k \quad (1.97)$$

Se definește centrul de masă al sistemului ca fiind punctul al cărui vector de poziție este:

$$\vec{R} = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^N m_k} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k \quad (1.98)$$

Putem defini viteza centrului de masă:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} \quad (1.99)$$

Rezultă:

$$\vec{V} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k \quad (1.100)$$

Asupra unui punct P_k se exercită pe de o parte forțe interne $\vec{F}_{kl}^{(i)}, l \neq k$ din partea celorlalte puncte materiale și pe de altă parte forțe externe $\vec{F}_k^{(e)}$, din partea unor corpuri care nu fac parte din sistemul considerat.

Conform legii acțiunii și reacțiunii forțele interne sunt perechi, egale două câte două și de sensuri contrare.

$$\vec{F}_{kl}^{(i)} = -\vec{F}_{lk}^{(i)} \quad (1.101)$$

Din acest motiv, însumând totalitatea forțelor interne pe întreg sistemul rezultatul este nul.

$$\vec{F}^{(i)} = \sum_{\substack{k,l=1 \\ l \neq k}}^N \vec{F}_{kl}^{(i)} = 0 \quad (1.102)$$

Se notează cu $\vec{p}_k = m\vec{v}_k$ - impulsul particulei k , și se definește impulsul total al sistemului:

$$\vec{P} = \sum_{k=1}^N \vec{p}_k \quad (1.103)$$

Pentru un punct material, principiul al II-lea al dinamicii se scrie:

$$\vec{F}_k = \frac{d\vec{p}_k}{dt} \quad (1.104)$$

unde

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)} \quad (1.105)$$

iar

$$\vec{F}_k^{(i)} = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \vec{F}_{kl}^{(i)} \quad (1.106)$$

reprezintă rezultanta forțelor interne ce acționează asupra particulei k .

Atunci

$$\vec{F}_k^{(e)} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \vec{F}_{kl}^{(i)} = \frac{d\vec{p}_k}{dt} \quad (1.107)$$

Însumând pentru toate punctele materiale:

$$\sum_{k=1}^N \vec{F}_k^{(e)} + \sum_{\substack{k,l=1 \\ l \neq k}}^N \vec{F}_{kl}^{(i)} = \sum_{k=1}^N \frac{d\vec{p}_k}{dt} \quad (1.108)$$

și ținând cont de relația 1.102 se obține:

$$\vec{F}^{(e)} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^{(e)} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \vec{p}_k = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (1.109)$$

Expresia 1.109 reprezintă teorema impulsului total:

Derivata în raport cu timpul a impulsului total al unui sistem de particule este egală cu rezultanta forțelor externe ce acționează asupra sistemului de puncte materiale.

Ținând cont de relația 1.100 obținem:

$$\vec{P} = M\vec{v} \quad (1.110)$$

adică impulsul total este egal cu produsul dintre masa totală a sistemului și viteza centrului de masă.

Dacă rezultanta forțelor externe ce acționează asupra sistemului este nulă:

$$\vec{F}^{(e)} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^{(e)} = 0$$

atunci

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad (1.111)$$

iar

$$\vec{P} = \text{const} \quad (1.112)$$

Se obține astfel legea conservării impulsului:

Impulsul unui sistem de puncte materiale rămâne constant când rezultanta forțelor exterioare este nulă.

1.4.2 Teorema momentului cinetic total. Conservarea momentului cinetic total

Pentru sistemul de puncte materiale considerat putem defini momentul cinetic total față de un punctul O , care este originea sistemului de coordonate considerat:

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^N \vec{l}_k = \sum_{k=1}^N (\vec{r}_k \times \vec{p}_k) \quad (1.113)$$

unde

$$\vec{l}_k = \vec{r}_k \times \vec{p}_k \quad (1.114)$$

este momentul cinetic al particulei k .

Se derivează relația 1.114 în raport cu timpul și se obține:

$$\frac{d}{dt} \vec{l}_k = \vec{r}_k \times \frac{d\vec{p}_k}{dt} + \frac{d\vec{r}_k}{dt} \times \vec{p}_k$$

sau

$$\frac{d}{dt} \vec{l}_k = \vec{r}_k \times \vec{F}_k + \vec{v}_k \times \vec{p}_k = \vec{r}_k \times \vec{F}_k \quad (1.115)$$

deoarece

$$\vec{v}_k \times \vec{p}_k = \vec{v}_k \times m\vec{v}_k = 0$$

unde

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)}$$

Atunci

$$\frac{d}{dt} \vec{l}_k = \vec{r}_k \times [\vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)}], \quad (k = 1, \dots, N) \quad (1.116)$$

Se însumează relațiile de mai sus și se obține:

$$\sum_{k=1}^N \frac{d}{dt} \vec{l}_k = \sum_{k=1}^N [\vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(e)}] + \sum_{k=1}^N [\vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(i)}]$$

sau

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M}^{(e)} + \vec{M}^{(i)} \quad (1.117)$$

unde

$$\vec{M}^{(e)} = \sum_{k=1}^N [\vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(e)}] \quad (1.118)$$

este momentul forțelor exterioare, iar

$$\vec{M}^{(i)} = \sum_{k=1}^N \left[\vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(i)} \right] = \sum_{\substack{k,l=1 \\ l \neq k}}^N \left[\vec{r}_k \times \vec{F}_{kl}^{(i)} \right] \quad (1.119)$$

este momentul forțelor interne.

Vom arăta că $\vec{M}^{(i)} = 0$.

Într-adevăr, suma este formată din perechi de termeni

$$\vec{r}_k \times \vec{F}_{kl}^{(i)} + \vec{r}_l \times \vec{F}_{lk}^{(i)} = \vec{r}_k \times \vec{F}_{kl} - \vec{r}_l \times \vec{F}_{kl} = (\vec{r}_k - \vec{r}_l) \times \vec{F}_{kl} = 0$$

Aceasta este adevărat deoarece vectorul $\vec{F}_{kl}$ are pe direcția vectorului $\vec{r}_k - \vec{r}_l$ dintre cele două particule.

Atunci:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(e)} \quad (1.120)$$

Relația 1.120 reprezintă teorema variației momentului cinetic total:

Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic total $\vec{L}$ al unui sistem este egală cu momentul rezultat $\vec{M}$ al forțelor externe.

Dacă $\vec{M}^{(e)} = 0$, atunci momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale se conservă.

$$L = \text{const}$$

Aceasta este legea conservării momentului cinetic total.

Momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale rămâne constant când momentul forțelor exterioare ce acționează asupra sistemului este nul.

1.4.3 Teorema energiei cinetice. Conservarea energiei mecanice

Dacă se ia în considerare relația 1.79 pentru un punct material k , teorema energiei cinetice se scrie:

$$d \left(\frac{1}{2} m_k v_k^2 \right) = \left[\vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)} \right] d\vec{r} \quad (1.121)$$

În relația 1.121 cu $\vec{F}_k^{(e)}$ s-a notat rezultanta forțelor exterioare ce acționează asupra particulei k , iar cu $F_k^{(i)}$ s-a notat rezultanta forțelor interne ce acționează asupra particulei k .

Se însumează pentru toate punctele materiale; rezultă:

$$d \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \vec{v}_k^2 \right) = \sum_{k=1}^N F_k^{(e)} d\vec{r} + \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^{(i)} d\vec{r}$$

sau

$$d \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k v_k^2 \right) = \delta L^{(e)} + \delta L^{(i)} \quad (1.122)$$

Dacă se integrează relația de mai sus se obține:

$$\Delta \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k v_k^2 \right) = L^{(e)} + L^{(i)} \quad (1.123)$$

În relația 1.123 cu $L^{(e)}$ s-a notat lucrul mecanic al forțelor exterioare ce acționează asupra sistemului, iar cu $L^{(i)}$ s-a notat lucrul mecanic al forțelor interne ce acționează asupra sistemului.

Relația 1.123 reprezintă expresia matematică a teoremei variației energiei cinetice totale.

Variația energiei cinetice totale este egală cu lucrul mecanic efectuat de toate forțele, atât externe cât și interne.

Dacă forțele interne sunt conservative, atunci se poate introduce energia potențială a sistemului care este funcție numai de pozițiile tuturor punctelor materiale ale sistemului, adică funcție numai de configurația sistemului.

$$L^{(i)} = -\Delta E_p$$

Atunci:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p + L^{(e)}$$

sau

$$\Delta (E_c + E_p) = L^{(e)} \quad (1.124)$$

Variația energiei mecanice, a unui sistem în care forțele interne sunt conservative este egală cu lucrul mecanic al forțelor externe aplicate.

Dacă sistemul este izolat forțele externe sunt nule:

$$L^{(e)} = 0$$

Rezultă că:

$$E_c + E_p = \text{const} \quad (1.125)$$

Aceasta este legea de conservare a energiei mecanice pentru un sistem de puncte materiale:

În cazul unui sistem izolat în care forțele interne sunt conservative, energia mecanică totală este constantă.

Capitolul 2

Mișcarea oscilatorie

2.1 Oscilații armonice

2.1.1 Ecuația de mișcare

Mișcarea oscilatorie armonică este determinată de forțe de tip elastic. În cazul în care se consideră că forța care acționează asupra unui punct material are direcția axei Ox:

$$\vec{F} = -kx\vec{e}_x \quad (2.1)$$

unde k este constanta de elasticitate iar $\vec{e}_x$ este versorul axei Ox.

Forța este îndreptată către origine, punct ce reprezintă poziția de echilibru în care valoarea ei este nulă. Ținând cont de legea a doua a dinamicii:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2x}{dt^2}\vec{e}_x \quad (2.2)$$

rezultă o ecuație diferențială de ordinul al doilea.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

care se poate scrie:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0 \quad (2.3)$$

unde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.4)$$

reprezintă pulsația mișcării oscilatorii.

Soluția generală a unei astfel de ecuații poate fi pusă sub forma:

$$x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t \quad (2.5)$$

unde a și b sunt constante care depind de condițiile inițiale. Mărimea $x(t)$ poartă numele de elongație și reprezintă depărtarea față de poziția de echilibru la care punctul material ajunge la un moment dat.

Soluția 2.5 se poate scrie și sub forma:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta_0) \quad (2.6)$$

unde A și θ_0 sunt constante care depind de condițiile inițiale. A poartă numele de amplitudinea mișcării și reprezintă depărtarea maximă de poziția de echilibru la care ajunge punctul material. Mărimea θ_0 poartă numele de fază inițială a mișcării iar $\varphi = \omega t + \theta_0$ este faza mișcării.

Echivalența soluțiilor 2.5 și 2.6 se justifică astfel: dezvoltând funcția cosinus obținem:

$$x(t) = A \sin \theta_0 \sin \omega t + A \cos \theta_0 \cos \omega t \quad (2.7)$$

Identificând relațiile 2.5 și 2.7 se obține:

$$\begin{aligned} a &= A \sin \theta_0 \\ b &= A \cos \theta_0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

O caracteristică a acestei mișcării este periodicitatea. Pentru a determina perioada mișcării se ține cont de faptul că funcția cosinus este periodică cu perioada 2π . Notând cu T perioada mișcării:

$$\cos(\omega t + \theta_0 + 2\pi) = \cos[\omega(t + T) + \theta_0]$$

Rezultă că perioada T , care reprezintă timpul în care se efectuează o oscilație este:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.9)$$

Frecvența mișcării se definește ca fiind inversul perioadei și reprezintă numărul de oscilații efectuate în unitatea de timp:

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (2.10)$$

Viteza și accelerația în mișcarea oscilatorie armonică sunt:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \theta_0) \quad (2.11)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 x \quad (2.12)$$

2.1.2 Energia oscilatorului armonic

Forțele elastice sunt forțe conservative (lucrul mecanic efectuat de acestea nu depinde de drum ci doar de poziția inițială și finală) Cum:

$$\delta L = F dx = -k x dx$$

prin integrare între pozițiile x_1 și x_2 se obține:

$$L = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = -\frac{k}{2} (x_2^2 - x_1^2) \quad (2.13)$$

Deoarece lucrul mecanic depinde doar de poziția inițială și finală se poate defini o energie potențială:

$$\Delta E_p = -L = \frac{k}{2} (x_2^2 - x_1^2) \quad (2.14)$$

$$E_p = \frac{kx^2}{2} + \text{const} \quad (2.15)$$

Energia potențială este definită până la o constantă arbitrară. Aceasta arată că semnificație fizică are doar variația acesteia și nu valoarea ei. Cum constanta aditivă se poate alege arbitrar, se consideră că în poziția în care $x = 0$ energia potențială este nulă. Atunci această constantă devine zero. Ținând cont de cele de mai sus și de relația 2.6 se obține:

$$E_p = \frac{k}{2} A^2 \cos^2(\omega t + \theta_0) \quad (2.16)$$

Cum $\omega^2 = \frac{k}{m}$ relația 2.16 se scrie:

$$E_p = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \cos^2(\omega t + \theta_0) \quad (2.17)$$

Energia cinetică se obține ținând cont de expresia vitezei 2.11 și este dată de expresia:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \sin^2(\omega t + \theta_0) \quad (2.18)$$

Energia mecanică a oscilatorului armonic liniar este suma dintre energia cinetică și cea potențială. Rezultă:

$$E = E_c + E_p = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \quad (2.19)$$

Se constată că energia oscilatorului armonic liniar este proporțională cu pătratul amplitudinii și pătratul pulsației și nu depinde de timp.

2.1.3 Energii medii

Fie o funcție $f(t)$ care depinde de timp. Se definește valoarea medie a funcției în intervalul de timp $[t_1, t_2]$ ca fiind:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \quad (2.20)$$

Se observă că valoarea medie a funcției respective depinde de intervalul pe care se face medierea.

Pentru mărimi periodice intervalul de timp se ia egal cu perioada T :

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (2.21)$$

O proprietate a mediei temporale este aceea că media sumei a două funcții este egală cu suma mediilor fiecărei funcții luate în parte.

$$\langle f + g \rangle = \langle f \rangle + \langle g \rangle \quad (2.22)$$

Trebuie remarcat că media temporală a unui produs de două funcții nu este egală cu produsul mediilor celor două funcții:

$$\langle fg \rangle \neq \langle f \rangle \langle g \rangle \quad (2.23)$$

Relațiile 2.22 și 2.23 se demonstrează pornind de la definiția valorii medii.

Pentru calculul valorilor medii a energiei cinetice și a energiei potențiale a oscilatorului armonic este necesar să se calculeze mediile temporale ale funcțiilor $\sin^2 \omega t$ și $\cos^2 \omega t$.

$$\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} \langle 1 - \cos 2\omega t \rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \langle \cos 2\omega t \rangle = \frac{1}{2} \quad (2.24)$$

deoarece $\langle \cos 2\omega t \rangle = 0$

În mod analog se demonstrează:

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} \quad (2.25)$$

Atunci se poate calcula direct energia cinetică medie și energia potențială medie a oscilatorului armonic liniar ținând cont de rezultatele 2.24 și 2.25

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \langle \sin^2 (\omega t + \theta) \rangle = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} E \quad (2.26)$$

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \langle \cos^2 (\omega t + \theta) \rangle = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} E \quad (2.27)$$

Se observă că mediile în timp a celor două energii sunt egale iar suma lor este energia totală.

2.1.4 Reprezentări ale mișcării oscilatorii

a) Reprezentarea fazorială

Mișcarea oscilatorie poate fi reprezentată cu ajutorul unui vector rotitor (Fig. 2.1) a cărui mărime este egală cu amplitudinea iar viteza unghiulară de rotație ω este egală cu pulsația mișcării respective. În Fig. 2.1 vectorul este reprezentat la un moment oarecare. Acest vector poartă numele de fazor. Pentru a cunoaște elongația la un moment dat se proiectează vectorul respectiv pe axa Ox.

b) Reprezentarea complexă

Se consideră că vectorul din Fig. 2.1 reprezintă un număr complex, axa reală fiind axa Ox. Astfel:

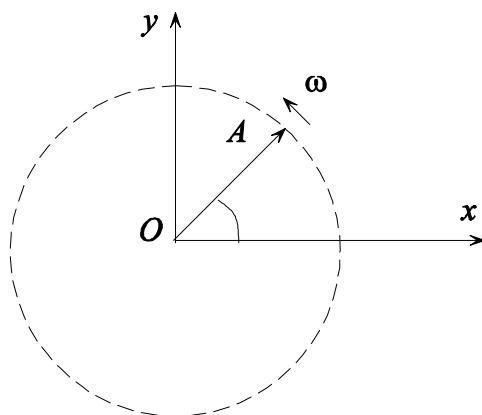


Figura 2.1: Reprezentarea fazorială a mișcării oscilatorii

$$x = A \cos(\omega t + \theta_0) = \operatorname{Re}[A \exp i(\omega t + \theta_0)] \quad (2.28)$$

sau

$$x = \operatorname{Re}[\bar{A} \exp i\omega t] \quad (2.29)$$

unde $\bar{A} = A \exp i\theta_0$ poartă numele de amplitudine complexă; se observă că $|\bar{A}| = A$, adică modulul amplitudinii complexe este egal cu amplitudinea reală. Numărul complex se notează cu o bară deasupra. De cele mai multe ori se efectuează calculele cu numere complexe și doar în rezultatul final se va considera partea reală.

2.1.5 Compunerea mișcărilor oscilatorii

Compunerea mișcărilor oscilatorii de-a lungul aceleiași axe

Presupunem că asupra unui corp acționează pe aceeași direcție două forțe de tip elastic:

$$\begin{aligned} F_1 &= -k_1 x \\ F_2 &= -k_2 x \end{aligned} \quad (2.30)$$

Se consideră următoarele cazuri:

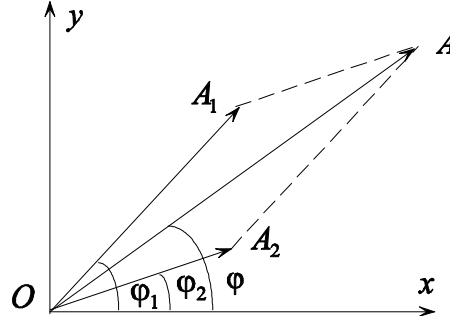


Figura 2.2: Compunerea a două oscilații de aceeași pulsație

a) *constantele elastice sunt egale* $k_1 = k_2 = m/\omega^2$

Atunci fiecare forță determină o mișcare oscilatorie:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \theta_{10})$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \theta_{20})$$

Compunerea acestor oscilații se poate face analitic prin însumarea celor două expresii de mai sus. Mai simplu compunerea se face pornind de la reprezentarea fazorială a celor două mișcări (Fig. 2.2) prin sumarea vectorială a celor doi fazori la un moment dat.

Se obține astfel pentru amplitudine expresia:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\theta_{10} - \theta_{20})} \quad (2.31)$$

Pentru determinarea fazei inițiale se consideră proiecția lui A la momentul inițial pe cele două axe de coordonate. Se obține:

$$A_x(0) = A_1 \cos \theta_{10} + A_2 \cos \theta_{20}$$

$$A_y(0) = A_1 \sin \theta_{10} + A_2 \sin \theta_{20}$$

Atunci se poate exprima tangenta unghiului care reprezintă defazajul inițial:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{A_y(0)}{A_x(0)} = \frac{A_1 \sin \theta_{10} + A_2 \sin \theta_{20}}{A_1 \cos \theta_{10} + A_2 \cos \theta_{20}}$$

Trebuie remarcat faptul ca funcția tangentă este o funcție periodică cu perioada π . Ea nu determină univoc cadranul în care se găsește θ_0 . Pentru aceasta trebuie să se cunoască semnele lui A_x și A_y .

Valoarea amplitudinii rezultante dată de relația 2.31 depinde nu numai de amplitudinile A_1 și A_2 ale celor două mișcări oscilatorii ci și de diferența de fază dintre acestea $\theta_{10} - \theta_{20}$.

Dacă:

$$\Delta\theta_0 = \theta_{10} - \theta_{20} = 2k\pi \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (2.32)$$

rezultă:

$$A = A_1 + A_2 \quad (2.33)$$

În acest caz se spune că oscilațiile sunt în fază.

Dacă:

$$\Delta\theta_0 = \theta_{10} - \theta_{20} = (2k + 1)\pi \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (2.34)$$

rezultă:

$$A = |A_1 - A_2| \quad (2.35)$$

În acest caz se spune că oscilațiile sunt în opoziție de fază.

Un alt caz interesant este acela când

$$\Delta\theta_0 = \theta_{10} - \theta_{20} = (2k + 1)\frac{\pi}{2} \quad (k = 0, 1, \dots)$$

Atunci:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

iar oscilațiile sunt în cuadratură.

b) constantele elastice nu sunt egale $k_1 \neq k_2$

Aceasta înseamnă că nici pulsațiile celor două mișcări nu sunt egale.

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_{10}) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_{20}) \end{aligned}$$

Ca și în cazul anterior compunerea oscilațiilor se face fazorial:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (2.36)$$

De această dată însă fazele nu mai sunt considerate la momentul inițial ci la un moment oarecare:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \omega_1 t + \theta_{10} \\ \varphi_2 &= \omega_2 t + \theta_{20} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Din acest motiv mișcarea rezultantă nu mai este o mișcare armonică simplă deoarece amplitudinea ei este variabilă în timp.

Pentru a avea o privire de ansamblu asupra acestora se consideră cazul când amplitudinile celor două mișcări oscilatorii sunt egale și fazele inițiale sunt nule:

$$A_1 = A_2 = A$$

și

$$\theta_{10} = \theta_{20} = 0.$$

Atunci:

$$x = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t \quad (2.38)$$

Se obține:

$$x = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t = 2A \cos \Omega t \cos \omega t \quad (2.39)$$

unde:

$$\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad (2.40)$$

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (2.41)$$

Dacă $\omega_2 \lesssim \omega_1$ (adică ω_2 este puțin mai mic decât ω_1) se observă că mișcarea oscilatorie are amplitudinea variabilă în timp după legea $2A \cos \Omega t$. Se spune că amplitudinea este modulată. Dacă $\Omega t = k\pi$ amplitudinea rezultantă este maximă. Dacă notăm cu τ intervalul de timp după care amplitudinea devine din nou maximă atunci:

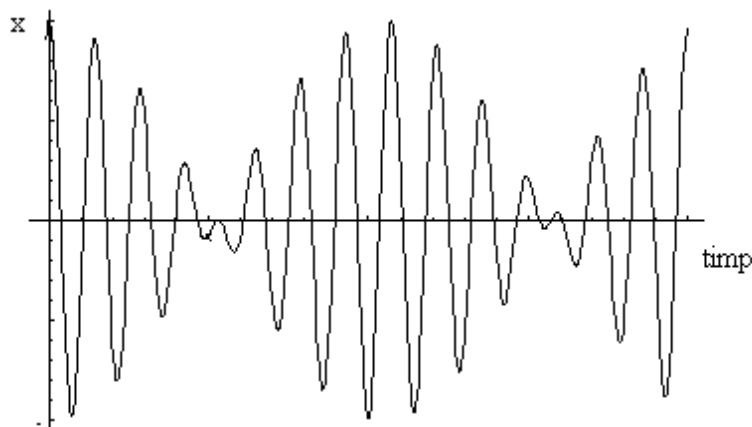


Figura 2.3: Compunerea a doua oscilații cu pulsații de valori apropiate

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{1}{\nu_1 - \nu_2} \quad (2.42)$$

Frecvența la care se succed maximele amplitudinii este:

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \nu_1 - \nu_2 \quad (2.43)$$

Fenomenul de succesiune a maximelor oscilațiilor rezultante poartă numele de *bătăi*, nume sugerat de fenomenul acustic care-i corespunde.

Relația 2.42 arată că intervalul de timp dintre maximele succesive ale amplitudinii este cu atât mai mare (bătăile sunt mai rare) cu cât frecvențele oscilațiilor care se compun sunt mai apropiate. Invers bătăile sunt mai dese cu cât frecvențele oscilațiilor diferă mai mult una de alta.

În Fig. 2.3 este reprezentat grafic rezultatul compunerii a două oscilații cu frecvențe apropiate.

Fenomenul poate fi pus în evidență cu ajutorul a două diapazoane care vibrează cu frecvențe diferite dar apropiate. Astfel două diapazoane cu frecvențele de 400 Hz și 320 Hz vor da bătăi cu frecvența de 80 Hz iar sunetul produs de cele două va fi perceput ca un sunet de frecvență joasă deși fiecare din diapazoane are o frecvență mai mare.

Fenomenul apare de exemplu în cazul avioanelor bimotoare care zboară la înălțime. Sunetul auzit se întărește sau slăbește succesiv. Aceasta se datorează motoarelor sale, ale căror turații diferă puțin.

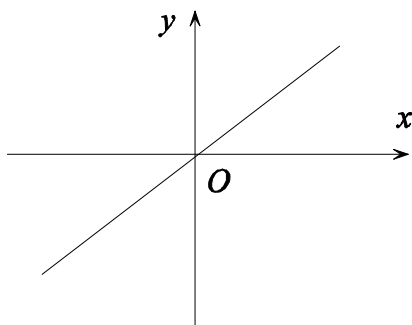


Figura 2.4: Compunerea a două oscilații de aceeași pulsație efectuate în direcții perpendiculare cu o diferență de fază $\theta_0 = 0$

Compunerea mișcărilor oscilatorii care se efectuează în direcții perpendiculare

Să considerăm două mișcări oscilatorii cu aceeași pulsație, una după axa Ox și alta după axa Oy:

$$x = A \cos \omega t \quad (2.44)$$

$$y = B \cos (\omega t + \theta_0) \quad (2.45)$$

Se consideră următoarele cazuri:

a) Dacă $\theta_0 = 0$ atunci prin eliminarea timpului din relațiile de mai sus rezultă:

$$y = \frac{B}{A}x \quad (2.46)$$

Relația 2.46 reprezintă ecuația unei drepte. Traectoria punctului material este o dreaptă și este reprezentată în Fig. 2.4

b) Dacă $\theta_0 = \pi$ atunci prin eliminarea timpului din ecuațiile 2.44 și 2.45 se obține:

$$y = -\frac{B}{A}x \quad (2.47)$$

Aceasta reprezintă tot ecuația unei drepte.

c) Dacă $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ecuațiile 2.44 și 2.45 devin:

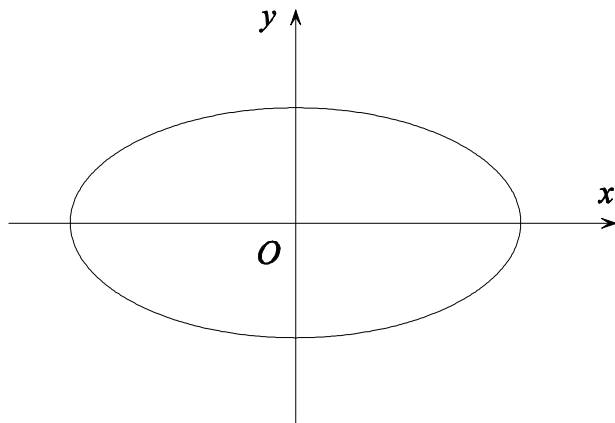


Figura 2.5: Compunerea a două oscilații care se efectuează în direcții perpendiculare cu aceeași pulsație și o diferență de fază $\theta_0 = \pi/2$

$$x = A \cos \omega t \quad (2.48)$$

$$y = B \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = -B \sin \omega t \quad (2.49)$$

Din 2.48

$$\cos \omega t = \frac{x}{A}$$

iar din 2.49

$$\sin \omega t = -\frac{y}{B}$$

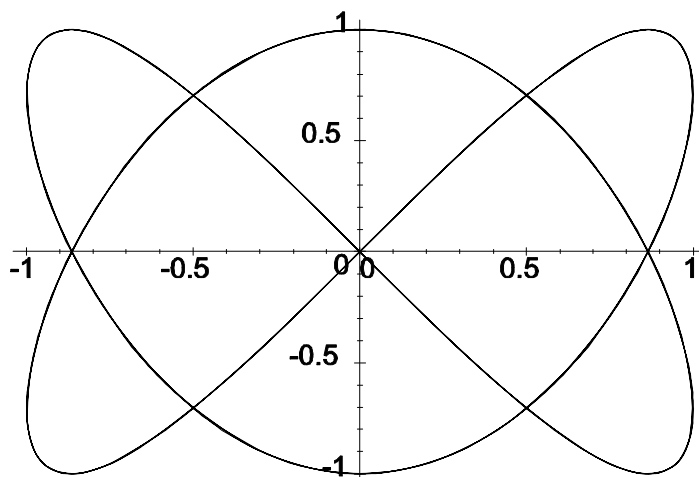
Deoarece $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$ se obține în final ecuația:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (2.50)$$

Ecuația 2.50 reprezintă ecuația unei elipse raportată la axele Ox și Oy (Fig. 2.5).

Dacă $A = B$ atunci traiectoria devine circulară.

d) Dacă $\theta_0 \neq 0, \pi, \frac{\pi}{2}$ rezultă tot o traiectorie eliptică însă axele elipsei sunt înclinate față de axele de coordonate.



În cazul în care frecvențele oscilațiilor perpendiculare nu sunt egale traiectoria punctului material descrie mai multe ramuri. Alura acestor curbe (denumite figuri Lissajous) depinde de raportul frecvențelor și de diferența de fază dintre cele două oscilații. În Fig. 2.1.5 este ilustrat un astfel de caz.

Figurile Lissajous pot fi puse în evidență cu ajutorul unui osciloscop în care pe cele două perechi de plăci de deflexie ale acestuia se aplică semnale de frecvențe diferite. Trebuie remarcat că aceste curbe pot fi închise sau deschise. O condiție necesară ca aceste curbe să fie închise este ca raportul frecvențelor să fie egal cu raportul a două numere întregi.

2.2 Oscilații amortizate

Presupunem că în afară de forța elastică care acționează asupra punctului material există și o forță de frecare care implică o disipare de energie. Fenomenul care are loc nu este un proces pur mecanic, dar de multe ori poate fi descris printr-un model în care intervine o forță de rezistență. Se admite o forță de rezistență proporțională cu viteza ($F_r = -\lambda v$). O astfel de forță există de exemplu într-un mediu vâscos și ea acționează asupra corpurilor ce se deplasează în acest mediu cu viteze relativ mici. Cum problema pe care o tratăm este unidimensională legea a doua a mecanicii se scrie în acest caz:

$$ma = -kx - \lambda v \quad (2.51)$$

Rezultă ecuația

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Se împarte ecuația de mai sus la m și se notează $2\gamma = \lambda/m$ (γ poartă numele de constantă de amortizare) și $\omega_0^2 = k/m$; se obține:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.52)$$

Ecuația caracteristică a acestei ecuații diferențiale omogene este:

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0 \quad (2.53)$$

cu soluțiile:

$$r_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (2.54)$$

Se consideră următoarele cazuri:

a) $\gamma > \omega_0$ (*mișcare aperiodică*)

Atunci r_1 și r_2 sunt reale, iar ecuația 2.52 are o soluție de forma

$$x = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad (2.55)$$

sau

$$x = A \exp\left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)t + B \exp\left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)t \quad (2.56)$$

Se observă că deoarece ambii exponenți sunt negativi elongația tinde la zero când timpul tinde la infinit. Din punct de vedere fizic aceasta înseamnă că avem de-a face cu o amortizare foarte puternică (Fig. 2.6).

b) $\gamma = \omega_0$ (*mișcare aperiodică critică*)

În acest caz $r_1 = r_2 = -\gamma$, iar soluția generală a ecuației este de forma

$$x = (At + B) \exp(-\gamma t) \quad (2.57)$$

Mișcarea este o mișcare aperiodică, evoluția spre starea de echilibru ne mai fiind neapărat o evoluție monotonă (Fig. 2.7). Semnul elongației se

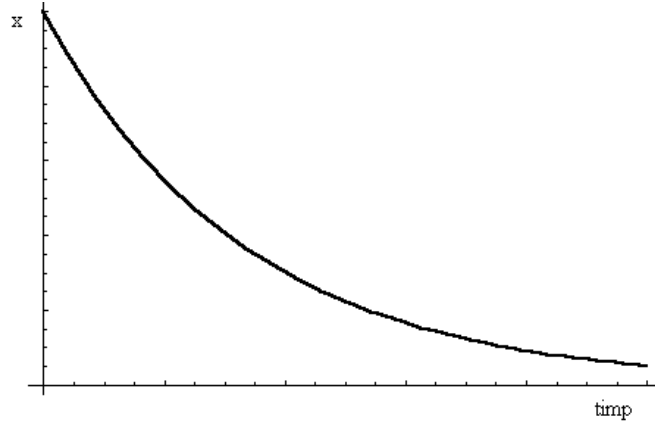


Figura 2.6: Mișcare aperiodică

poate păstra sau schimba o singură dată. Amortizarea critică este importantă în practică în cazul sistemelor la care trebuie evitată oscilația acestora în jurul poziției de echilibru, ca de exemplu în cazul amortizoarelor pentru autovehicule.

c) $\gamma < \omega_o$ (*mișcare periodică amortizată*)

În acest caz soluțiile ecuației caracteristice 2.54 se pot scrie ca:

$$r_1 = -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma + i\omega$$

$$r_2 = -\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma - i\omega$$

unde

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (2.58)$$

Soluția generală a ecuației 2.52 este în acest caz:

$$x = e^{-\gamma t} [A \exp(i\omega t) + B \exp(-i\omega t)] \quad (2.59)$$

Pentru a discuta forma acestei ecuații se utilizează formulele lui Euler:

$$\exp(i\omega t) = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

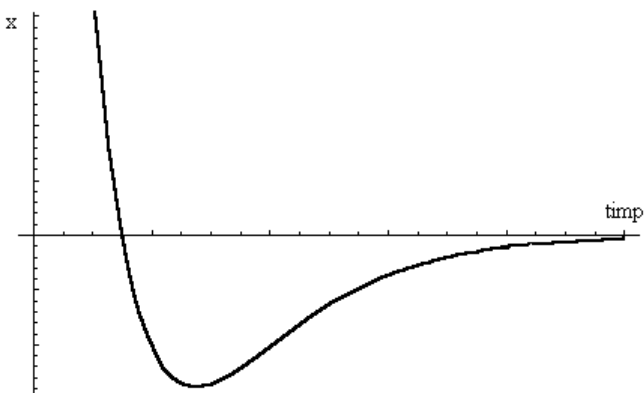


Figura 2.7: Mișcare aperiodică critică

$$\exp(-i\omega t) = \cos \omega t - i \sin \omega t$$

Atunci:

$$x(t) = [(A + B) \cos \omega t + i(A - B) \sin \omega t] e^{-\gamma t} \quad (2.60)$$

Deoarece elongația trebuie să fie reală A și B trebuie să fie complex conjugate:

$$\begin{aligned} A &= a + ib \\ B &= a - ib \end{aligned}$$

Rezultă:

$$x = e^{-\gamma t} (2a \cos \omega t - 2b \sin \omega t)$$

sau:

$$x = e^{-\gamma t} 2a \left(\cos \omega t - \frac{2b}{2a} \sin \omega t \right) \quad (2.61)$$

Notând $\frac{2b}{2a} = \operatorname{tg} \theta$ relația 2.61 devine:

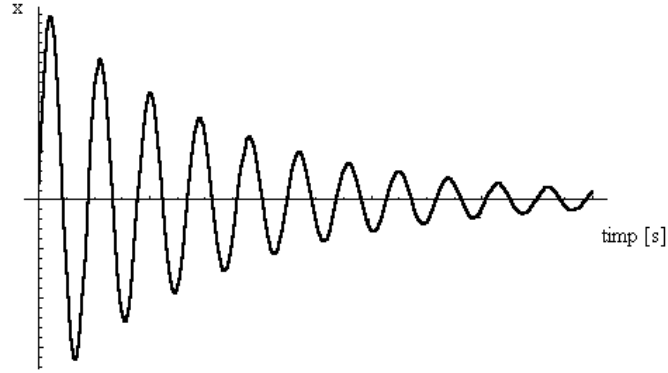


Figura 2.8: Mișcare periodică amortizată

$$x = \frac{2a}{\cos \theta} e^{-\gamma t} (\cos \omega t \cos \theta - \sin \omega t \sin \theta) \quad (2.62)$$

În plus dacă se notează $A_0 = \frac{2a}{\cos \theta}$ se obține:

$$x = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \theta) \quad (2.63)$$

Rezultă că punctul material execută oscilații amortizate cu o amplitudine descrescătoare în timp

$$A = A_0 e^{-\gamma t} \quad (2.64)$$

cu pulsația

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (2.65)$$

Reprezentarea mișcării este dată în Fig. 2.8.

Acesta este cazul regimului cvasiperiodic al oscilațiilor amortizate. Cuasi-perioada acestor oscilații este:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \quad (2.66)$$

Raportul elongațiilor sau amplitudinilor după un interval de timp egal cu perioada T este:

$$\frac{x(t)}{x(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\gamma t}}{A_0 e^{-\gamma(t+T)}} = e^{\gamma T} \quad (2.67)$$

Logaritmul acestui raport poartă numele de decrement logaritm.

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \gamma T \quad (2.68)$$

Acesta este o mărime adimensională ce caracterizează gradul de amortizare al oscilațiilor (cu cât este mai mare cu atât oscilațiile se amortizează mai repede).

Amortizarea oscilațiilor este legată de pierderea de energie a punctului material care execută oscilațiile amortizate. Deoarece variația energiei mecanice este egală cu lucrul mecanic al forțelor neconservative:

$$dE = -\lambda \frac{dx}{dt} dx \quad (2.69)$$

iar puterea disipată este egală cu variația energiei (variație care este negativă) în unitatea de timp, se obține:

$$P = \frac{dE}{dt} = -\lambda \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -2\gamma m v^2 \quad (2.70)$$

Expresia

$$Q = \frac{1}{2} \lambda v^2 = \gamma m v^2 \quad (2.71)$$

poartă numele de funcție de disipație. Se observă că

$$P = -2Q \quad (2.72)$$

2.3 Oscilații forțate

Datorită forțelor neconservative care disipă energie, oscilațiile sunt amortizate. Pentru a întreține mișcarea oscilatorie trebuie intervenit cu o forță din exterior care să compenseze pierderile de energie. Cazurile interesante sunt cele în care forța exterioară este o funcție periodică în timp. Deoarece această funcție se poate dezvolta în serii Fourier, care conțin funcții sinusoidale sau

cosinusoidale este interesant să se examineze fenomenul când forța are forma cea mai simplă, adică

$$F = F_0 \cos \omega t \quad (2.73)$$

Atunci ecuația de mișcare a punctului material care oscilează într-un mediu disipativ este:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \lambda v + F_0 \cos \omega t \quad (2.74)$$

sau ținând cont de faptul că $2\gamma = \lambda/m$ și $\omega_0^2 = k/m$ se obține:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (2.75)$$

Soluția generală a unei astfel de ecuații diferențiale de ordinul doi neomogene este:

$$x = x_0(t) + x_1(t) \quad (2.76)$$

unde $x_0(t)$ este soluția generală a ecuației omogene asociate iar $x_1(t)$ este o soluție particulară a ecuației neomogene.

După un timp suficient de lung $x_0(t)$ tinde la zero cum s-a prezentat la studiul mișcării oscilatorii amortizate. Aceasta înseamnă că ceea ce contează după un interval de timp suficient de lung este soluția particulară a ecuației neomogene care trebuie să fie de forma:

$$x_1(t) = A \cos(\omega t + \theta) \quad (2.77)$$

Substituind 2.77 în 2.75 se obține:

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \theta) - 2\gamma\omega A \sin(\omega t + \theta) + \omega_0^2 A \cos(\omega t + \theta) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (2.78)$$

Ecuația 2.78 reprezintă o identitate. Se egalează cu zero coeficienții lui $\sin \omega t$ și $\cos \omega t$ și rezultă:

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \theta - 2\gamma\omega A \sin \theta = \frac{F_0}{m} \quad (2.79)$$

$$A(\omega^2 - \omega_0^2) \sin \theta - 2\gamma\omega A \cos \theta = 0 \quad (2.80)$$

Se ridică la pătrat cele două ecuații, se adună și se obține:

$$A^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2 A^2 = \left(\frac{F_0}{m} \right)^2 \quad (2.81)$$

Rezultă:

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \quad (2.82)$$

Din 2.80 se obține:

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (2.83)$$

În concluzie:

a) La o solicitare sinusoidală oscilatorul va oscila cu o pulsație ce nu este pulsația lui proprie ci este pulsația forței exterioare care acționează asupra lui.

b) Mișcarea este defazată în raport cu forța exterioară.

c) Amplitudinea și faza depind de pulsația forței ω .

d) Amplitudinea și faza nu depind de condițiile inițiale (oricum soluția este valabilă pentru timpi suficienți de mari)

Prezintă interes următoarele cazuri:

a) $\omega \ll \omega_0$

În acest caz termenii ce conțin pe ω^2 sunt neglijabili față de cei ce conțin pe ω_0^2 . Aceasta este situația în care perioada forței este mult mai mare decât perioada proprie de oscilație ($T \gg T_0$). Atunci:

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} \quad (2.84)$$

Pentru a determina valoarea lui θ trebuie să se calculeze efectiv $\cos \theta$ și $\sin \theta$. Din ecuațiile 2.79 și 2.80 rezultă:

$$\cos \theta = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 A^2 \omega^2}} \quad (2.85)$$

$$\sin \theta = -\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 A^2 \omega^2}} \quad (2.86)$$

În situația care s-a considerat $\cos \theta > 0$ și $\sin \theta < 0$. Din acest motiv unghiul θ se află în cadranul al patrulea și, în condițiile date, tinde la zero ($\theta \rightarrow 0$). Atunci:

$$x = \frac{F_0}{k} \cos \omega t \quad (2.87)$$

Aceasta înseamnă că forța exterioară și elongația punctului sunt în fază.

b) $\omega \gg \omega_0$

În această caz termenii care conțin pe ω_0^2 sunt neglijabili în raport cu cei ce conțin pe ω^2 . Atunci:

$$A \cong \frac{F_0}{m\sqrt{\omega^4 + 4\gamma^2\omega^2}} \cong \frac{F_0}{m\omega^2} \quad (2.88)$$

Cum $\cos \theta < 0$ și $\sin \theta < 0$ rezultă $\theta \in (\pi, 3\pi/2)$ și $\theta \rightarrow \pi$. Elongația este în opoziție de fază cu forța exterioară. Astfel:

$$x = \frac{F_0}{k} \cos(\omega t + \theta) = -\frac{F_0}{k} \cos \omega t$$

c) $\omega = \omega_0$

Atunci

$$A = \frac{F_0}{2m\gamma\omega} \quad (2.89)$$

și cum $\cos \theta = 0$ rezultă $\theta = \pi/2$

$$x = \frac{F_0}{2m\gamma\omega} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.90)$$

Elongația este defazată cu $\pi/2$ în raport cu forța exterioară.

Rezonanța

Atunci când pulsația forței exterioare ω variază, variază și amplitudinea A . Din relația 2.82 rezultă că amplitudinea oscilațiilor depinde de valoarea amplitudinii forței exterioare F , de pulsația ω și factorul de atenuare γ . Considerând valoarea amplitudinii forței exterioare constantă, și privind pe γ ca pe un parametru se va urmări variația amplitudinii oscilației funcție de pulsația perturbației externe. Pentru a vedea dacă amplitudinea are un maxim expresia ei se derivează în raport cu ω și derivata se egalează cu zero.

$$-4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\gamma^2\omega = 0$$

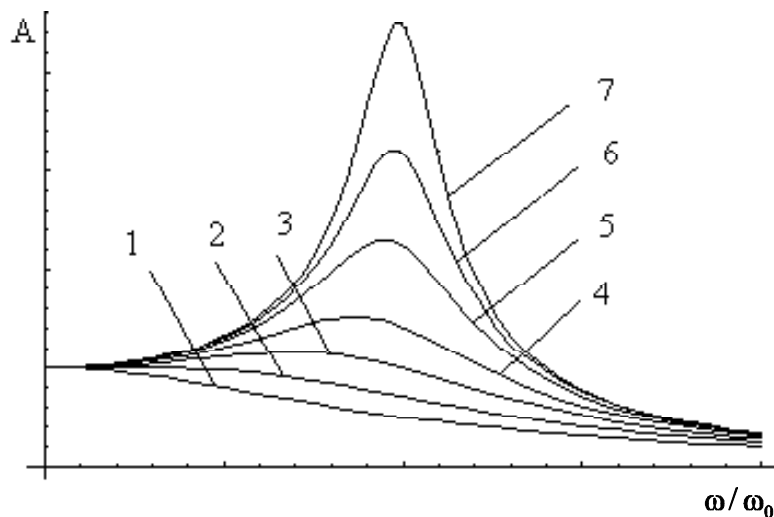


Figura 2.9: Rezonanța. Curbele corespund cazurilor în care $4\gamma^2/\omega_0^2$ are valorile: 4 (curba 1); 2 (curba 2); 1 (curba 3); 0,5 (curba 4); 0,2 (curba 5); 0,1 (curba 6); 0,005 (curba 7).

Valoarea ω_M corespunzătoare maximului este:

$$\omega_M = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} < \omega_0 \quad (2.91)$$

Se observă că dacă $\omega_0^2 < 2\gamma^2$ funcția $A = A(\omega)$ nu prezintă un maxim și ea este o funcție descrescătoare de ω . Aceasta este situația în care amortizarea este mare.

Dacă $\omega_0^2 > 2\gamma^2$ amplitudinea prezintă un maxim pentru o valoare ω_M denumită pulsație de rezonanță. Fenomenul poartă denumirea de *rezonanță*. Valoarea maximă a amplitudinii este:

$$A = A(\omega_M) = \frac{F_0}{2m\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} > A(\omega_0) \quad (2.92)$$

Din relația de mai sus se observă că amplitudinea A ia valori cu atât mai mari cu cât γ este mai mic. În cazul în care $\gamma \rightarrow 0$, $A \rightarrow \infty$.

În Fig. 2.9 este reprezentată variația amplitudinii în funcție de raportul ω/ω_0 pentru diverse valori ale lui γ . Cu cât γ scade, se micșorează și domeniul de pulsații ale forței exterioare pentru care are loc fenomenul de rezonanță.

2.4 Analiză Fourier

2.4.1 Funcții periodice

Se demonstrează că o funcție periodică $f(t)$ de perioadă T se poate descompune într-o serie trigonometrică de forma:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (2.93)$$

sau:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \alpha_n) \quad (2.94)$$

unde $\omega = 2\pi/T$. Putem trece de la prima expresie la cea de-a doua astfel:

$$f(t) = a_n \left(\cos n\omega t + \frac{b_n}{a_n} \sin n\omega t \right)$$

Punând:

$$\operatorname{tg} \theta_n = -\frac{b_n}{a_n}$$

Atunci:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\cos n\omega t - \operatorname{tg} \theta_n \sin n\omega t)$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\cos \theta_n} \cos(n\omega t + \theta_n) \quad (2.95)$$

Prin identificarea lui 2.94 cu 2.95 se obține:

$$\theta_n = \alpha_n \quad (2.96)$$

$$A_n = \frac{a_n}{\cos \alpha_n} = (a_n^2 + b_n^2) \quad (2.97)$$

Pentru obținerea coeficienților a_n și b_n se înmulțește egalitatea 2.93 cu $\cos n\omega t$ și $\sin n\omega t$ și se integrează pe perioada T . Se observă că:

$$\begin{aligned}\int_0^T \cos n\omega t \sin k\omega t \, dt &= 0 \\ \int_0^T \cos n\omega t \cos k\omega t \, dt &= \frac{T}{2} \delta_{nk} \\ \int_0^T \sin n\omega t \sin k\omega t \, dt &= \frac{T}{2} \delta_{nk}\end{aligned}$$

unde δ este simbolul lui Kroneker:

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n \neq k \\ 1 & \text{dacă } n = k \end{cases} \quad (2.98)$$

Se obține expresia:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, dt = \langle f \rangle$$

care reprezintă media funcției respective pe o perioadă:

$$b_0 = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t \, dt$$

Dezvoltarea în serie Fourier se poate exprima cu ajutorul funcțiilor exponențiale. Astfel relația 2.93 se poate scrie:

$$\begin{aligned}f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2} [\exp(in\omega t) + \exp(-in\omega t)] \\ &\quad - \frac{ib_n}{2} [\exp(in\omega t) - \exp(-in\omega t)]\end{aligned}$$

sau:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_n - ib_n) e^{in\omega t} + \frac{1}{2} (a_n + ib_n) e^{-in\omega t} \right] \quad (2.99)$$

Putem face ca suma să se extindă de la $-\infty$ la ∞ notând:

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

Atunci:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega t) \quad (2.100)$$

Se observă că $c_{-n} = c_n^*$ unde cu steluță notăm expresia complex conjugată. Coeficienții dezvoltării în serie sunt dați de relațiile:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt \quad (2.101)$$

Funcțiile periodice pot fi reprezentate cu ajutorul unor funcții sinusoidale cu pulsații egale cu multipli întregi ai pulsației fundamentale ω . Spectrul este dat de o diagramă în care sunt reprezentate amplitudinile A_n în funcție de frecvență; el constă din linii verticale de diverse mărimi (proportionale cu amplitudinile).

2.4.2 Funcții neperiodice

Atunci când mărimea investigată este o funcție neperiodică în locul seriei Fourier discrete intervine o integrală Fourier. În locul unui spectru discret rezultă un spectru continuu. Se demonstrează că dacă $f(t)$ este o funcție neperiodică ea poate fi pusă sub forma

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} a(\omega) \cos[\omega t + \theta(\omega)] d\omega \quad (2.102)$$

Sub formă complexă, funcția considerată se exprimă astfel:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (2.103)$$

unde $c(-\omega) = c^*(\omega)$ și:

$$c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (2.104)$$

Vom discuta pe scurt legătura dintre reprezentarea reală și reprezentarea complexă a integralei Fourier. Pentru aceasta vom porni de relația 2.102 pe care o vom prelucra ținând cont de formulele lui Euler:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} a(\omega) [\cos \omega t \cos \theta - \sin \omega t \sin \theta] d\omega$$

sau

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{a(\omega)}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \cos \theta - \frac{ia(\omega)}{2} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \sin \theta \right] d\omega \quad (2.105)$$

Grupând în mod convenabil termenii expresiei 2.105 aceasta devine:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \theta - ia(\omega) \sin \theta] e^{i\omega t} d\omega + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \theta + ia(\omega) \sin \theta] e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (2.106)$$

Expresia de mai sus poate fi scrisă mai condensat astfel:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.107)$$

unde

$$c(\omega) = \frac{a(\omega) \cos \theta - ia(\omega) \sin \theta}{2} \quad (2.108)$$

și

$$c(-\omega) = c^*(\omega) \quad (2.109)$$

Din relația 2.108 rezultă:

$$|a(\omega)| = 2|c(\omega)| \quad (2.110)$$

În plus se obține:

$$\operatorname{tg} \theta(\omega) = -\frac{\operatorname{Im}[c(\omega)]}{\operatorname{Re}[c(\omega)]} \quad (2.111)$$

În concluzie, funcțiile periodice prezintă un spectru discret în timp ce funcțiile neperiodice prezintă un spectru continuu.

2.4.3 Aplicații ale dezvoltărilor în integrale Fourier

Perturbație de durată finită

Considerăm o oscilație de pulsație ω_0 care durează un interval de timp finit Δt . Ea poate fi reprezentată astfel:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t \in [-\infty, -\Delta t/2] \\ A_0 e^{i\omega_0 t} & t \in [-\Delta t/2, \Delta t/2] \\ 0 & t \in [\Delta t/2, \infty] \end{cases} \quad (2.112)$$

O astfel de funcție poate fi dezvoltată într-o integrală Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.113)$$

unde

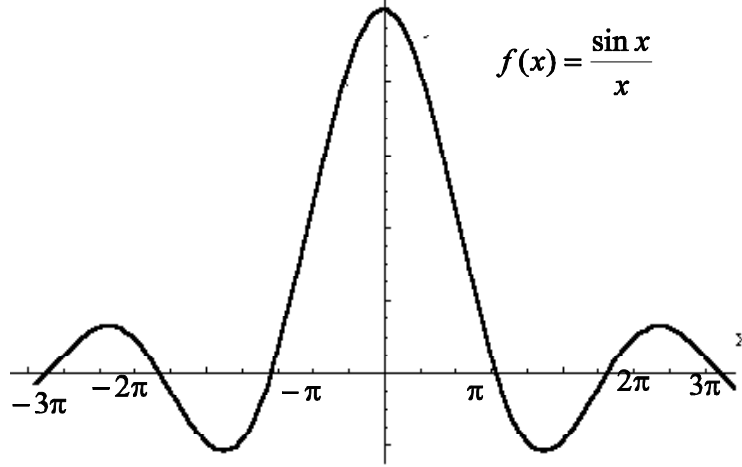
$$c(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.114)$$

Vom calcula acești coeficienți:

$$c(\omega) = \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} A_0 e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = A_0 \frac{\exp[i(\omega_0 - \omega)t]}{i(\omega_0 - \omega)} \Big|_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2}$$

Rezultă:

$$c(\omega) = A_0 \frac{\exp\left[i(\omega_0 - \omega) \frac{\Delta t}{2}\right] - \exp\left[-i(\omega_0 - \omega) \frac{\Delta t}{2}\right]}{i(\omega_0 - \omega)} \quad (2.115)$$

Figura 2.10: Funcția $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Astfel:

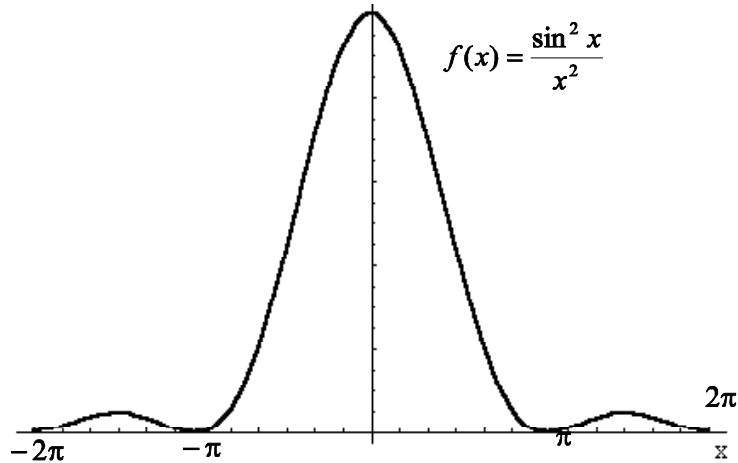
$$c(\omega) = A_0 \Delta t \frac{\sin \left[(\omega_0 - \omega) \frac{\Delta t}{2} \right]}{(\omega_0 - \omega) \frac{\Delta t}{2}} = A_0 \Delta t \frac{\sin \frac{\Delta \omega \Delta t}{2}}{\frac{\Delta \omega \Delta t}{2}} \quad (2.116)$$

Notând cu $\xi = \frac{\Delta \omega \Delta t}{2}$ relația 2.116 se va scrie:

$$c(\omega) = A_0 \Delta t \frac{\sin \xi}{\xi} \quad (2.117)$$

În Fig. 2.10 este arătată variația funcției $f(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi}$. Ea este o funcție pară, care oscilează în jurul valorii de zero și care pentru valori mari ale lui ξ se amortizează. Se observă că pentru $\xi \rightarrow 0$, $f(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi} \rightarrow 1$. Funcția se anulează atunci când $\sin \xi = 0$, adică atunci când $\xi = \pm m\pi$, unde m este un număr întreg diferit de zero. Extremele acestei funcții se determină prin calcularea derivatei acesteia în raport cu ξ . Se obține:

$$\frac{\xi \cos \xi - \sin \xi}{\xi^2} = 0$$

Figura 2.11: Funcția $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$

de unde rezultă că:

$$\operatorname{tg} \xi = \xi \quad (2.118)$$

Relația 2.118 este o ecuație transcendentă care se poate rezolva numeric sau grafic.

Din 2.113 se constată că oscilația inițială s-a descompus într-o mulțime continuă de oscilații monocromatice cu pulsații diferite.

Energia asociată fiecărei oscilații este proporțională cu $|c^2(\omega)|$ unde

$$|c^2(\omega)| = A_0^2 (\Delta t)^2 \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} \quad (2.119)$$

Reprezentare acestei funcții este dată în Fig. 2.11.

Când $\omega = \omega_0$

$$|c^2(\omega_0)| = A_0^2 (\Delta t)^2 \quad (2.120)$$

iar când ω corespunde primului maxim secundar $|c^2(\omega)| = 0.04 \times A_0^2 (\Delta t)^2$. Din acest motiv se consideră că distribuția spectrală a perturbației respective este semnificativă numai în intervalul $\xi \in [-\pi, \pi]$.

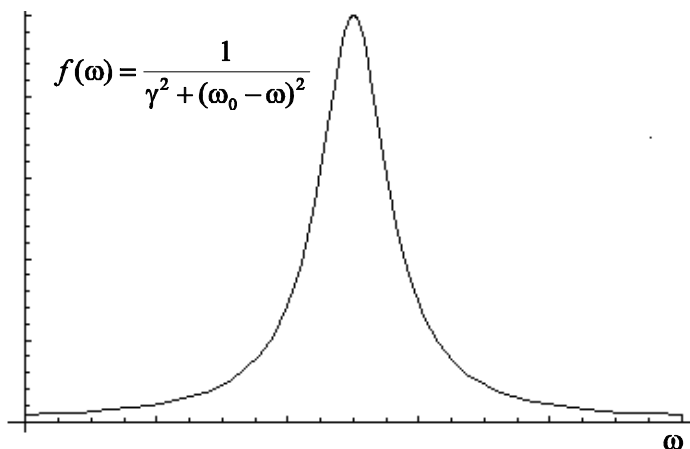


Figura 2.12: Distribuția Lorentz

O mărime care caracterizează această distribuție a energiei este lărgimea la semiînălțime. Din $\frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} = \frac{1}{2}$ rezultă:

$$\Delta\omega\Delta t = 1,78$$

Se observă că cu cât Δt este mai mare cu atât $\Delta\omega$ este mai mic și spectrul de pulsații în care poate fi descompusă perturbația este mai restrâns. Invers cu cât Δt este mai mic cu atât distribuția este mai largă.

Spectrul unei oscilații amortizate

Vom considera o expresie a oscilației amortizate de forma:

$$x(t) = A \exp(-\gamma t) \exp(i\omega_0 t) \quad , \quad t > 0 \quad (2.121)$$

Coeficienții dezvoltării sunt:

$$c(\omega) = \int_0^\infty A \exp(-\gamma t) \exp[i(\omega_0 - \omega)t] dt \quad (2.122)$$

$$c(\omega) = A_0 \frac{\exp[i(\omega_0 - \omega) - \gamma]t}{i(\omega_0 - \omega) - \gamma} \Big|_0^\infty \quad (2.123)$$

Rezultă:

$$c(\omega) = \frac{1}{\gamma - i(\omega_0 - \omega)} \quad (2.124)$$

Ca și în cazul precedent se va calcula $|c^2(\omega)|$, acest termen fiind proporțional cu energia oscilației de pulsație ω .

$$|c^2(\omega)| = \frac{1}{\gamma^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \quad (2.125)$$

Dependența lui $|c^2(\omega)|$ de ω este reprezentată în Fig. 2.12; ea este o distribuție Lorentz.

Valoarea mărimii $|c^2(\omega)|$ este maximă atunci când numitorul expresiei 2.125 este minim. Aceasta se petrece când $\omega = \omega_0$. Valoarea maximă este

$$|c_m^2| = \frac{1}{\gamma^2}$$

Pentru a determina lărgimea la semiînălțime se pune condiția ca

$$|c^2(\omega)| = \frac{1}{\gamma^2 + (\omega_0 - \omega)^2} = \frac{|c_m^2|}{2} = \frac{1}{2\gamma^2}$$

Rezultă ecuația

$$(\omega_0 - \omega)^2 = \gamma^2 \quad (2.126)$$

sau:

$$\omega_0 - \omega = \pm\gamma$$

Astfel soluțiile ecuației 2.126 sunt:

$$\omega_1 = \omega_0 - \gamma$$

și

$$\omega_2 = \omega_0 + \gamma$$

Lărgimea la semiînălțime este:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma \quad (2.127)$$

Se constată că cu cât γ este mai mic, (adică cu cât amortizarea este mai mică) cu atât lărgimea la semînălțime a distribuției este mai mică, adică spectrul de frecvențe este mai restrâns.

Capitolul 3

Teoria formală a undelor

3.1 Introducere

Se numesc unde, perturbațiile care se propagă din aproape în aproape prin intermediul unui câmp. De exemplu scoaterea din poziția de echilibru a unei particule care este situată într-un mediu elastic determină ieșirea din poziția de echilibru și a particulelor vecine datorită forțelor elastice ce se exercită între particulele mediului. În acest mod mișcarea se propagă din aproape în aproape prin intermediul unui câmp de forțe elastice.

Prezența unei unde presupune existența unei surse care produce perturbația inițială și a unui mediu în care aceasta să se propage.

După natura perturbației, putem avea diferite feluri de unde:

- unde elastice (undele acustice), care sunt produse de oscilații de natură mecanică de mică amplitudine care se propagă în medii elastice;
- unde termice, care apar datorită diferențelor de temperatură și caracterizează fenomenul de propagare a căldurii;
- unde electromagnetice, care sunt produse de perturbații de natură electromagnetică.

Pentru primele două tipuri de unde este necesar un mediu material, în timp ce undele electromagnetice se pot propaga și în vid.

Mediile în care se propagă undele pot fi:

- omogene sau neomogene după cum mărimile care caracterizează mediul sunt, respectiv nu sunt dependente de coordonatele punctului;
- izotrope sau anizotrope după cum mărimile ce caracterizează mediul sunt sau nu funcție de direcția în care sunt măsurate;

- dispersive sau nedispersive după cum viteza de propagare a undei depinde sau nu de frecvență;
- liniare sau neliniare după cum rezultanta compunerii a mai multor unde se exprimă sau nu printr-o relație liniară.

După caracterul perturbației, undele pot fi:

- scalare, pentru care perturbația este caracterizată de o mărime scalară;
- vectoriale, pentru care perturbația este caracterizată de o mărime vectorială.

După modul în care apar perturbațiile în raport cu direcția de propagare, undele pot fi:

- transversale, când oscilațiile sau deplasările se efectuează în plane perpendiculare pe direcția de propagare;
- longitudinale, când oscilațiile sau deplasările se efectuează în direcția de propagare a undelor.

Din punct de vedere fizic, perturbațiile armonice prezintă o importanță deosebită. Ele sunt produse de un sistem fizic antrenat într-o stare de oscilație armonică. Starea de oscilație a sursei se transmite și în celelalte puncte ale mediului având o frecvență egală cu cea a sursei, dar cu o fază întârziată față de aceasta, datorită timpului necesar pentru ca oscilațiile să se propage de la sursă la punctul respectiv.

Trebuie remarcat că perturbațiile armonice cu o frecvență fixă reprezintă un caz ideal. Studiul acestor cazuri ideale permite o extrapolare în cazurile reale, când pot să apară fenomene periodice nearmonice; acestea pot fi abordate prin aplicarea unor metode matematice cunoscute (serii sau integrale Fourier).

Se definesc:

- suprafața de undă, locul geometric al punctelor care oscilează în fază;
- frontul de undă, locul geometric al punctelor cele mai îndepărtate de sursa de oscilație care oscilează în fază.

După forma suprafeței de undă, undele pot fi clasificate ca:

- unde cilindrice (produse de surse filiforme);
- unde sferice (produse de o sursă punctiformă);
- unde plane (frontul de undă este un plan perpendicular pe direcția de propagare).

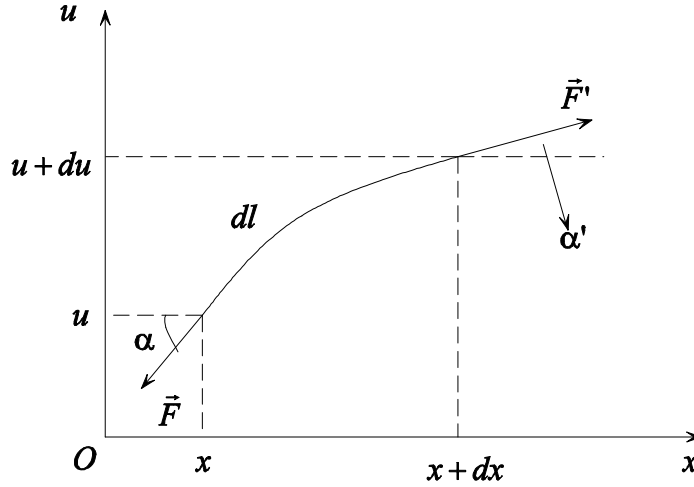


Figura 3.1: Deformarea unui element al unei corzii vibrante

3.2 Ecuația unidimensională a undelor

Pentru determinarea acestei ecuații se consideră o coardă vibrantă, care efectuează mici oscilații transversale. Coarda este elastică și are o masă constantă pe unitatea de lungime. Deoarece s-a presupus că această coardă este elastică și omogenă, tensiunea este tangentă la coardă, iar legea lui Hooke este valabilă. Se neglijează forțele de frecare și greutatea corzii.

Se consideră un element al corzii de lungime dl și de masă dm (Fig. 3.1). Fie u deplasarea unui punct al corzii față de poziția sa de echilibru (care se află pe axa Ox). La capetele sale acționează forțele $\vec{F}$ și $\vec{F}'$ care sunt egale în modul cu tensiunea din coardă. Datorită oscilațiilor, deplasarea u este funcție de coordonata x (adică de poziția punctului) și de timp.

Deoarece oscilațiile sunt foarte mici, unghiurile α și α' sunt foarte mici. Atunci:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha \simeq \sin \alpha \simeq \alpha \quad (3.1)$$

Se proiectează forțele pe axa Ox și se obține:

$$dF_x = F \cos \alpha' - F \cos \alpha = 0 \quad (3.2)$$

deoarece $\cos \alpha' \simeq \cos \alpha = 1$.

Astfel, practic nu există mișcare de-a lungul axei Ox.

Se proiectează forțele pe axa Oy și se obține:

$$dF_y = F \sin \alpha' - F \sin \alpha \simeq F(\alpha' - \alpha)$$

$$dF_y = F \left[\frac{\partial u(x+dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] = F \frac{\partial [u(x+dx, t) - u(x, t)]}{\partial x}$$

Atunci

$$dF_y = F \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] dx = F \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx \quad (3.3)$$

Conform legii a doua a dinamicii :

$$F \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx = dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.4)$$

unde

$$dm = \rho S dl = \rho S \sqrt{(dx)^2 + (du)^2} = \rho S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} dx$$

unde S este secțiunea corzii iar ρ este densitatea corzii. Deoarece $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$ este foarte mică:

$$dm \simeq \rho S dx \quad (3.5)$$

Atunci, ținând cont de 3.5 relația 3.4 devine:

$$F \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \rho S \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

și

$$\frac{F}{\rho S} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.6)$$

Se observă că mărimea $(F/\rho S)^{1/2}$ are dimensiunile unei viteze; într-adevăr

$$\left[\frac{F}{\rho S} \right] = \frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{m^3}{kg} \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{m^2}{s^2}$$

Notând cu

$$v^2 = \frac{F}{\rho s}$$

relația 3.6 se poate scrie:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.7)$$

Aceasta este ecuația unidimensională a undelor. Ea este o ecuație de tip d'Alembert.

3.2.1 Soluția ecuației unidimensionale a undelor

Se arată că soluția cea mai generală a ecuației 3.7 este de forma

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (3.8)$$

unde f și g sunt funcții arbitrare de argumentele indicate.

Pentru aceasta se va arăta la început că $f(x - vt)$ este o soluție a ecuației 3.8. Notând

$$z = x - vt$$

se obține:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = -v \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.9)$$

și în final:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-v \frac{\partial f}{\partial z} \right) = -v \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (3.10)$$

Astfel ecuația undelor este satisfăcută.

În mod analog se poate arăta că și $g(x + vt)$ este soluție a ecuației 3.7.

Unda reprezentată de $f(x - vt)$ reprezintă o undă progresivă sau undă directă, iar unda reprezentată de $g(x + vt)$ reprezintă o undă regresivă sau unda indirectă, care se propagă înspre sursă.

Unda directă se propagă în sensul axei Ox. Pentru a justifica acest fapt se consideră că la momentul t_2 în x_2 există aceeași perturbație ca la momentul t_1 în x_1 . Atunci:

$$f(x_2 - vt_2) = f(x_1 - vt_1)$$

De aici rezultă:

$$x_2 - vt_2 = x_1 - vt_1$$

adică

$$x_2 = x_1 + v(t_2 - t_1)$$

Se observă că dacă $t_2 > t_1$, atunci $x_2 > x_1$ adică perturbația se propagă în sensul axei Ox, adică de la sursă în afară.

Mărimea $x - vt$ poartă denumirea de fază undei. Punând condiția ca faza să fie constantă

$$x - vt = \text{const}$$

și diferențiind această relație rezultă:

$$dx - vdt = 0$$

Astfel viteza

$$v = \frac{dx}{dt}$$

poartă denumirea de viteză de fază.

3.2.2 Integrarea ecuației undelor

În multe probleme este suficientă obținerea unei soluții particulare a ecuației undelor. Una din metodele clasice utilizate pentru rezolvarea efectivă a ecuației undelor este aceea a separării variabilelor. În această metodă soluția se poate scrie sub forma:

$$u(x, t) = X(x)\mathcal{T}(t) \quad (3.11)$$

Introducând 3.11 în 3.7 obținem:

$$\mathcal{T}(t) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{1}{v^2} X(x) \frac{d^2 \mathcal{T}(t)}{dt^2}$$

sau:

$$\frac{v^2}{X} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{1}{\mathcal{T}} \frac{d^2 \mathcal{T}(t)}{dt^2} = \text{const} \quad (3.12)$$

Cum din punct de vedere fizic importante sunt fenomenele periodice, este necesar ca această constantă de separare să fie negativă. Atunci

$$\frac{1}{\mathcal{T}} \frac{d^2 \mathcal{T}(t)}{dt^2} = -\omega^2 \quad (3.13)$$

Se obține astfel o ecuație diferențială de ordinul doi:

$$\frac{d^2 \mathcal{T}}{dt^2} + \omega^2 \mathcal{T} = 0 \quad (3.14)$$

care admite soluția generală:

$$\mathcal{T} = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \quad (3.15)$$

Ecuția pe care o satisface $X(x)$ este:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} X = 0 \quad (3.16)$$

Punând $k = \omega/v$ (k poartă denumirea de număr de undă) se obține ecuația:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0 \quad (3.17)$$

Soluția generală a acestei ecuații este:

$$X = D_1 e^{ikx} + D_2 e^{-ikx} \quad (3.18)$$

Rezultă că o soluție a ecuației undelor se poate pune sub forma unei suprapuneri de funcții de forma :

$$u(x, t) = e^{\pm i(\omega t \pm kx)} \quad (3.19)$$

Forma concretă a soluției ecuației undelor se poate obține dacă se cunosc condițiile inițiale și condițiile la limită. Un astfel de calcul se va face pentru coarda vibrantă.

3.2.3 Unda armonică plană

O soluție particulară a ecuației undelor este:

$$u(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx + \varphi_0)} \quad (3.20)$$

O astfel de soluție care reprezintă o undă progresivă poartă numele de *undă armonică plană*. Reprezentarea de mai sus dată sub formă complexă este comodă în calcule. Dacă se ia doar partea reală a acestei reprezentări se obține reprezentarea reală a unei armonice plane:

$$u(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \quad (3.21)$$

Unda armonică plană este un concept idealizat; ea este o undă neîntreruptă extinsă la infinit și este importantă deoarece există procese fizice ce pot fi approximate prin expresii de forma 3.20.

În plus orice perturbație poate fi reprezentată prin intermediul integralei Fourier ca o sumă de perturbații elementare de forma $a(\omega) e^{i\omega t} d\omega$.

În cazul unei plane faza acestuia este:

$$\phi = \omega t - kx + \varphi_0 \quad (3.22)$$

Funcția $u(x, t)$ este o funcție periodică în spațiu și timp. Pentru a caracteriza cele două periodicități se ține cont de faptul că funcția cosinus este o funcție periodică cu perioada principală 2π .

Periodicitatea în timp este caracterizată prin perioada T . Din condiția

$$\omega(t + T) - kx + \varphi_0 = \omega t - kx + \varphi_0 + 2\pi$$

rezultă că:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.23)$$

unde ω - poartă numele de pulsație.

Periodicitatea în spațiu este caracterizată prin mărimea numită lungime de undă λ . Din condiția

$$\omega t - k(x + \lambda) + \varphi_0 = \omega t - kx + \varphi_0 - 2\pi$$

rezultă:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (3.24)$$

Lungimea de undă este distanța minimă dintre două puncte care oscilează în fază.

Se observă că:

$$\omega = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.25)$$

și

$$k = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.26)$$

3.2.4 Unde staționare

O undă staționară se obține prin suprapunerea a două unde armonice de egală amplitudine care se propagă în direcții opuse.

$$u(x, t) = a \cos(\omega t - kx) + a \sin(\omega t + kx) = 2a \cos kx \cos \omega t \quad (3.27)$$

Se observă că dacă în cazul unei armonice progresive amplitudinea este aceeași indiferent de coordonată, în cazul unei staționare amplitudinea $A = 2a \cos kx$ este dependentă de coordonata x , adică de poziție.

Pozițiile în care amplitudinea este maximă poartă numele de ventre iar pozițiile în care amplitudinea este minimă poartă numele de noduri.

3.2.5 Coarda vibrantă; unde staționare

Pentru a observa modul concret în care se obține o soluție a ecuației undelor vom considera o coardă vibrantă. Pentru determinarea mișcării concrete a corzii pe lângă ecuația 3.7 trebuie cunoscută starea inițială, adică trebuie cunoscute funcțiile:

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi_1(x) \quad (3.29)$$

Se consideră o coardă vibrantă de lungime l fixată la capetele de coordonate $x = 0$ și $x = l$. Condițiile la limită sunt:

$$u(0, t) = 0 \quad ; \quad u(l, t) = 0 \quad (3.30)$$

Pentru rezolvarea problemei se utilizează metoda separării variabilelor așa cum s-a prezentat anterior. În acest caz soluțiile ecuațiilor 3.14 și 3.16 vor fi scrise sub formă reală.

$$\mathcal{T}(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (3.31)$$

$$X(x) = C \cos kx + D \sin kx \quad (3.32)$$

O soluție particulară este:

$$u(x, t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) (C \cos kx + D \sin kx) \quad (3.33)$$

Punând condițiile la limită 3.30 se obține:

$$C = 0 \quad (3.34)$$

și

$$D \sin kl = 0 \quad (3.35)$$

A doua ecuație este satisfăcută și atunci când $D = 0$, dar o astfel de valoare conduce la soluția banală pentru ecuația inițială. Rezultă că trebuie pusă condiția:

$$\sin kl = 0$$

Această condiție este satisfăcută când

$$kl = n\pi \quad (n = 1, 2, 3...) \quad (3.36)$$

Rezultă valori discrete ale numărului de undă.

$$k_n = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.37)$$

Atunci o soluție particulară este:

$$u_n(x, t) = (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (3.38)$$

unde

$$\omega_n = vk_n = \frac{n\pi v}{l} \quad (3.39)$$

Soluția generală este formată dintr-o suprapunere de forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi v}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi v}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (3.40)$$

Pentru determinarea coeficienților A_n și B_n vom ține cont de condițiile inițiale 3.28 și 3.29. Din relația 3.28 rezultă:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \varphi(x) \quad (3.41)$$

Relației

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n\pi v}{l} A_n \sin \frac{n\pi v}{l} t + \frac{n\pi v}{l} B_n \cos \frac{n\pi v}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

i se aplică condiția 3.29; rezultă:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi v}{l} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \varphi_1(x) \quad (3.42)$$

Relațiile 3.41 și 3.42 constituie dezvoltări ale funcțiilor $\varphi(x)$ și $\varphi_1(x)$ în serii de funcții de sinus. Pentru calculul coeficienților A_n și B_m se înmulțesc ecuațiile 3.41 și 3.42 cu $\sin \frac{k\pi}{l}$ și se integrează între 0 și l . Se obține:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left(\varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \right) dx \quad (3.43)$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^l \left(\varphi_1(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \right) dx$$

Spre deosebire de o undă armonică progresivă a cărei amplitudine este independentă de poziția punctului care oscilează, în cazul acesta amplitudinea de oscilație a fiecărui punct depinde de poziția sa și nu depinde de timp. O astfel de undă este o undă staționară.

Introducând lungimea de undă

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2}{n}l \quad (3.44)$$

se obține

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi v}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi v}{l} t \right) \sin \frac{2\pi}{\lambda_n} x \quad (3.45)$$

Relația 3.45 arată că în coarda vibrantă se pot forma unde staționare cu diferite frecvențe și lungimi de undă; acestea sunt modurile de vibrație ale corzii.

Frecvența

$$v_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2l} \cdot v = \frac{v}{2l} \quad (3.46)$$

se numește frecvență fundamentală. Ea este cea mai mică frecvență emisă de coardă.

În Fig. 3.2 sunt arătate modurile în care oscilează o coardă vibrantă:

$n = 1$; $v_1 = \frac{v}{2l}$; $\lambda_1 = 2l$ -frecvență fundamentală

$n = 2$; $v_2 = 2v_1$; $\lambda_2 = l$ -prima armonică

$n = 3$; $v_3 = 3v_1$; $\lambda_3 = \frac{2l}{3}$ -a doua armonică

Punctele în care amplitudinea este nulă poartă numele de noduri, iar cele în care amplitudinea este maximă poartă numele de ventre.

3.3 Unde tridimensionale

În spațiu funcția de undă $u(x, t)$ va depinde și de coordonatele y și z . Vom nota cu $\psi(x, y, z, t)$ această funcție.

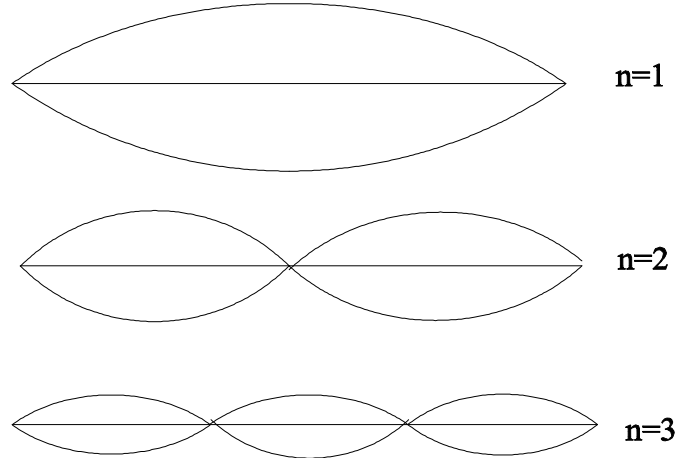


Figura 3.2: Moduri de oscilație în cazul unei coarde vibrante

Mărimea ψ poate fi un scalar, un vector sau chiar o mărime tensorială. În continuare discuția va fi limitată la cazul undelor scalare. Ecuația undelor 3.7 devine în cazul tridimensional:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (3.47)$$

3.3.1 Unda plană

Fie $\vec{r}$ vectorul de poziție al unui punct iar $\vec{u}$ vectorul unitate al unei direcții date. Dacă soluția este de forma $\psi(\vec{u}\vec{r}, t)$ înseamnă că starea de oscilație este aceeași în toate punctele unui plan $\vec{u}\vec{r} = \text{const}$. În acest caz se spune că unda este plană, deoarece suprafețele de undă sunt plane.

Soluția generală a ecuației 3.47 este de forma:

$$\psi(\vec{u}\vec{r}, t) = \psi_+(\vec{u}\vec{r} - vt) + \psi_-(\vec{u}\vec{r} + vt) \quad (3.48)$$

unde prima parte corespunde unde progresive iar a doua unde regresive.

Pentru determinarea unei forme analitice se consideră o soluție de forma:

$$\psi = \psi_1(x) \cdot \psi_2(y) \cdot \psi_3(z) \cdot e^{i\omega t} \quad (3.49)$$

Se obține pentru partea atemporală ecuația:

$$\frac{1}{\psi_1} \frac{d^2 \psi_1(x)}{dx^2} + \frac{1}{\psi_2} \frac{d^2 \psi_2(y)}{dy^2} + \frac{1}{\psi_3} \frac{d^2 \psi_3(z)}{dz^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} \quad (3.50)$$

Se notează

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad (3.51)$$

Fiecare termen din 3.50 este o funcție de o singură variabilă; pentru ca suma lor să fie constantă, fiecare termen trebuie să fie constant. Se obțin astfel trei ecuații:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi_1} \frac{d^2 \psi_1(x)}{dx^2} &= -k_x^2 \\ \frac{1}{\psi_2} \frac{d^2 \psi_2(y)}{dy^2} &= -k_y^2 \\ \frac{1}{\psi_3} \frac{d^2 \psi_3(z)}{dz^2} &= -k_z^2 \end{aligned} \quad (3.52)$$

cu

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (3.53)$$

ale căror soluții sunt:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A e^{\pm i k_x x} \\ \psi_2 &= B e^{\pm i k_y y} \\ \psi_3 &= C e^{\pm i k_z z} \end{aligned} \quad (3.54)$$

O soluție particulară a ecuației undelor ce corespunde unei unde progresive este:

$$\psi_+ = A \exp \{i [\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)]\} \quad (3.55)$$

Introducând vectorul $\vec{k}$ cu componentele k_x, k_y, k_z , denumit vector de undă, relația 3.55 se scrie:

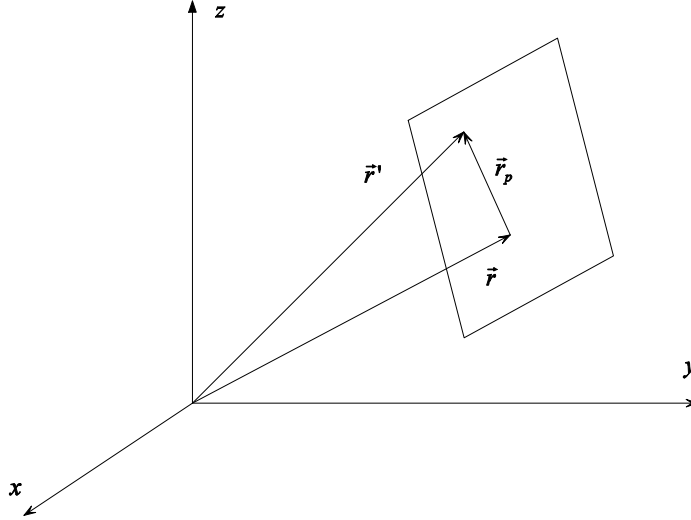


Figura 3.3: Unda plană

$$\psi_+ = A \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (3.56)$$

Aceasta este forma unei unde armonice plane monocromatice.

Într-adevăr suprafețele de undă sunt la un moment dat definite de ecuația $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const}$ sau de ecuația $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const}$ care este echivalentă cu

$$k_x x + k_y y + k_z z = \text{const} \quad (3.57)$$

Aceasta este ecuația unor plane a căror normală are direcția vectorului de undă $\vec{k}$ și versorul $\vec{u} = \frac{\vec{k}}{k}$.

Se consideră doi vectori $\vec{r}$ și $\vec{r}'$ cu vârful pe un plan de fază constantă. La un moment dat $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const}$ și $\vec{k} \cdot \vec{r}' = \text{const}$ (Fig. 3.3).

$$\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') = 0$$

Notând $\vec{r}' - \vec{r} = \vec{r}_p$, unde $\vec{r}_p$ este un vector conținut în planul de fază constantă, se observă că:

$$\vec{k} \cdot \vec{r}_p = 0 \quad (3.58)$$

adică $\vec{k}$ este perpendicular pe planul de fază constantă.

Deoarece $\vec{k}$ este perpendicular pe planele pentru care faza este constantă el are direcția de propagare.

Faza undei este:

$$\phi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \quad (3.59)$$

Se observă că:

$$\omega = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.60)$$

$$\vec{k} = -\nabla \phi \quad (3.61)$$

3.3.2 Unda sferică

Când sursa este punctiformă, iar mediul este omogen și izotrop, perturbațiile se propagă la fel în toate direcțiile. Atunci funcția de undă va fi o funcție doar de distanța de la sursă și nu va depinde de unghiurile polare ci numai de modulul razei vectoriale $\psi(r, t)$.

Pentru a determina forma funcției $\psi(r, t)$ se exprimă laplaceianul în coordonate sferice:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad (3.62)$$

Deoarece funcția de undă depinde doar de distanța r ecuația undelor devine:

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (3.63)$$

Făcând substituția:

$$\psi(r, t) = \frac{f(r, t)}{r} \quad (3.64)$$

relația 3.63 devine:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (3.65)$$

Ecuția 3.65 are soluția generală de forma

$$f = f_1 \left(t - \frac{r}{v} \right) + f_2 \left(t + \frac{r}{v} \right) \quad (3.66)$$

cele două funcții f_1 și f_2 fiind arbitrare.

Se aplică metoda separării variabilelor și se obțin soluții particulare pentru ecuația 3.63 de forma:

$$\psi = \frac{A}{r} e^{i\omega(t+\frac{r}{v})} + \frac{B}{r} e^{i\omega(t-\frac{r}{v})} \quad (3.67)$$

care reprezintă o suprapunere dintre o undă progresivă și una regresivă. Se constată că pentru unda sferică, amplitudinea variază cu $1/r$.

3.3.3 Ecuația atemporală a undelor

Noțiunea de undă armonică plană poate fi extinsă la o funcție de forma

$$\psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad (3.68)$$

în care amplitudinea este o funcție de poziție. Chiar și în această situație se poate face o separare a variabilelor temporale de cele spațiale. Astfel se scrie:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{i\omega t} \quad (3.69)$$

Dacă se introduce această formă în ecuația 3.47 se obține pentru $\psi(\vec{r})$ ecuația:

$$\frac{\partial^2 \psi(\vec{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(\vec{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(\vec{r})}{\partial z^2} + k^2 \psi(\vec{r}) = 0 \quad (3.70)$$

Aceasta este ecuația atemporală a undelor; ea este o ecuație de tip Helmholtz.

3.4 Pachet de unde

Așa cum s-a prezentat anterior, o perturbație de durată finită poate fi considerată ca o suprapunere de oscilații monocromatice a căror frecvențe sau pulsații sunt practic cuprinse într-un interval:

$$\left(\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}, \nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2} \right)$$

respectiv

$$\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right)$$

Rezultă că atunci când este implicată o perturbație de durată finită unda nu este monocromatică, ci reprezintă o suprapunere a undelor monocromatice cu pulsațiile cuprinse într-un interval. Se spune că avem de-a face cu o suprapunere de unde numit grup de unde sau pachet de unde.

Funcția de undă, se poate scrie ca o suprapunere de forma:

$$\psi(r, t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} A(\omega) e^{i(\omega t - kx)} d\omega \quad (3.71)$$

În scopul simplificării calculelor se consideră $A(\omega) = A_0$. Aproximația este acceptabilă dacă $\Delta\omega \ll \omega_0$.

Deoarece numărul de undă k nu este precizat și depinde de ω , k se poate dezvolta în serie în funcție de ω în jurul lui ω_0 și ne putem limita la primii termeni din dezvoltare.

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} \quad (3.72)$$

Atunci

$$\psi(x, t) = A_0 \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \left\{ \exp i \left[\omega t - k_0 x - (\omega - \omega_0) \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} x \right] \right\} d\omega$$

sau

$$\psi(x, t) = A_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \left\{ \exp i(\omega - \omega_0) \left[t - \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} x \right] \right\} d\omega \quad (3.73)$$

Se face schimbarea de variabilă $\omega - \omega_0 = y$ și se notează

$$\zeta = t - \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} x \quad (3.74)$$

Rezultă astfel:

$$\psi(x, t) = A_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\frac{\Delta\omega}{2}} e^{iy\zeta} dy$$

sau

$$\psi(x, t) = A_0 [\exp i(\omega_0 t - k_0 x)] \cdot \frac{\exp(i\frac{\Delta\omega}{2}\zeta) - \exp(-i\frac{\Delta\omega}{2}\zeta)}{i\zeta}$$

$$\psi(x, t) = 2A_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \cdot \frac{2 \sin \frac{\Delta\omega}{2} \zeta}{\zeta}$$

Atunci:

$$\psi(x, t) = A_0 \Delta\omega \cdot \frac{\sin \frac{\Delta\omega}{2} \zeta}{\frac{\Delta\omega}{2} \zeta} e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \quad (3.75)$$

Expresia de mai sus arată că suprapunerea undelor armonice plane dintr-un domeniu îngust de pulsații este analoagă unei unde "armonice" a cărei amplitudine este modulată cu factorul

$$\frac{\sin \frac{\Delta\omega}{2} \zeta}{\frac{\Delta\omega}{2} \zeta} \quad (3.76)$$

Aceasta înseamnă că la un moment dat, amplitudinea undei este diferită de zero într-un domeniu restâns din spațiu.

Maximul amplitudinii corespunde valorii

$$\frac{\Delta\omega}{2} \zeta = 0 \quad (3.77)$$

Se observă că la grupul de unde, pe lângă suprafețele echifaze apar și suprafețe pe care amplitudinea este constantă.

Dacă se ține cont de 3.74 rezultă că aceste suprafețe au ecuația:

$$\frac{\Delta\omega}{2} \left[t - \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} x \right] = \text{const} \quad (3.78)$$

De aici rezultă așa numita viteză de grup - viteza cu care se propagă suprafețele echiamplitudine (sau maximul pachetului)

$$v_g = \frac{dx}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega=\omega_0} \quad (3.79)$$

Deoarece energia în cazul mișcării oscilatorii este proporțională cu pătratul amplitudinii, rezultă că viteza de grup reprezintă viteza cu care se propagă energia.

Din condiția ca faza să fie constantă ($\omega_0 t - k_0 x = \text{const}$) rezultă viteza de fază

$$v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega_0}{k_0} \quad (3.80)$$

În continuare se va determina legătura dintre viteza de fază și viteza de grup.

Relația dintre viteza de fază și viteza de grup se poate determina astfel:

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega=\omega_0} = \frac{d}{dk}(kv_f) = v_f + k \frac{dv_f}{dk} \quad (3.81)$$

Un alt mod de estimare a lui v_g este și următorul

$$\frac{dv_f}{dk} = \frac{dv_f}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} = \frac{dv_f}{d\lambda} \frac{d}{dk} \left(\frac{2\pi}{k} \right) = -\frac{2\pi}{k^2} \frac{dv_f}{d\lambda} \quad (3.82)$$

sau

$$\frac{dv_f}{dk} = -\frac{\lambda}{k} \frac{dv_f}{d\lambda} \quad (3.83)$$

$$v_g = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda} \quad (3.84)$$

Există medii în care viteza de fază depinde de k (sau λ), și care se numesc *medii dispersive*, și medii în care viteza de fază nu depinde de k (sau λ), și care se numesc *medii nedispersive*. În mediile dispersive $v_f \neq v_g$.

Se observă că în cazul mediilor nedispersive $\frac{dv_f}{dk} = 0$ sau $\frac{dv_f}{d\lambda} = 0$; atunci $v_f = v_g$. În astfel de medii, viteza de grup este egală cu viteza de fază.

Dacă $\frac{dv_f}{d\lambda} > 0$ (dispersie normală) viteza de fază este mai mare decât viteza de grup.

Dacă $\frac{dv_f}{d\lambda} < 0$ (dispersia este anomală) viteza de fază este mai mică decât viteza de grup.

Trebuie remarcat că, în mediile nedispersive pachetul de unde rămâne grupat, în timp ce, în mediile dispersive, pachetul de unde nu-și mai păstrează

forma ci se dispersează deoarece undele care îl compun se deplasează cu viteze diferite.

Referitor la compactitatea pachetului de undă, din relația 3.75 se constată că amplitudinea este modulată de funcția $\frac{\sin \frac{\Delta\omega}{2}\zeta}{\frac{\Delta\omega}{2}\zeta}$. Se observă că funcția $\frac{\sin \frac{\Delta\omega}{2}\zeta}{\frac{\Delta\omega}{2}\zeta}$ în care se notează $\alpha = \frac{\Delta\omega}{2}\zeta$ are valori semnificative când abaterea unghiului α față de valoarea zero este egală cu π , ($\Delta\alpha = \pi$).

În realitate trebuie să se țină cont că amplitudinea este diferită de zero și dacă $\Delta\alpha \geq \pi$.

Se consideră două situații:

a) Momentul de timp este fixat. Atunci:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta\omega}{2} \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} \Delta x \quad (3.85)$$

Cum

$$\left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} \Delta\omega \simeq \Delta k \quad (3.86)$$

se obține:

$$\Delta x \Delta k \geq 2\pi \quad (3.87)$$

Relația 3.87 arată că în cazul unui pachet de unde nu se poate stabili cu aceeași precizie valoarea vectorului de undă și coordonata x care localizează pachetul.

b) Poziția în spațiu este fixată; atunci:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta\omega}{2} \Delta t$$

astfel că:

$$\Delta t \cdot \Delta\omega \geq 2\pi \quad (3.88)$$

Relațiile 3.87 și 3.88 poartă numele de relațiile de incertitudine referitoare la pachetul de undă.

Relația 3.88 poate fi privită ca o relație între durata semnalului ce generează pachetul de undă și domeniul de frecvențe al acestuia. Se observă că pentru durate Δt foarte mari, $\Delta\omega$ este foarte mic. La limită, dacă semnalul ar fi de durată infinită, unda obținută ar fi perfect monocromatică. În funcție de

durata Δt a semnalului, pachetele de undă sunt caracterizate de domeniul de frecvențe

$$\Delta\nu \geq \frac{1}{\Delta t} \quad (3.89)$$

O aplicație a acestui fapt este banda de frecvențe a semnalului folosit în televiziune.

De exemplu, imaginea unui televizor este formată din 600 de linii, fiecare linie având 600 de puncte. Imaginea este formată dintr-un ansamblu de $3,6 \cdot 10^5$ imagini punctiforme. Pentru a avea o senzație de continuitate, este necesar ca în fiecare punct să se succedă 25 de imagini pe secundă. Deci pentru formarea unei imagini pe ecranul unui televizor este necesar un număr $n = 25 \cdot 3,6 \cdot 10^5 \simeq 10^7$ impulsuri pe secundă. Aceasta înseamnă că durata unui semnal trebuie să fie $\Delta t = 10^{-7}$ s. Atunci, domeniul de frecvențe corespunzătoare unui semnal este:

$$\Delta\nu = \frac{1}{\Delta t} = 10 \text{ MHz.}$$

Cum frecvențele purtătoare utilizate în televiziune sunt cuprinse între 400 și 800 MHz există posibilitatea de a folosi un spațiu de 40 de canale diferite.

În cazul unor unde purtătoare care sunt generate de laser în domeniul vizibil domeniul de frecvențe ar fi dat de $\Delta\nu = \nu_r - \nu_v = 2 \times 10^{14}$ Hz, unde ν_r este frecvența radiației roșii iar ν_v este frecvența radiației violete. Se pot obține 2×10^7 canale diferite.

Capitolul 4

Mecanică analitică

4.1 Introducere

Mecanica analitică a fost dezvoltată cu scopul de a se putea rezolva problemele de mecanică relativ complicate. Ea a fost rezultatul cercetărilor efectuate mai ales de matematicieni precum Lagrange, Euler, Hamilton.

O caracteristică importantă a acestei discipline este înlocuirea coordonatelor carteziene prin coordonate generalizate.

Ecuatiile obținute se exprimă diferit de cele ale mecanicii newtoniene. Ele sunt ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi și al doilea. Rezultatele ce se obțin sunt identice cu cele obținute când se utilizează ecuațiile mecanicii newtoniene.

Principiile mecanicii analitice se exprimă în alt mod, formularea acestora fiind mai complexă, interpretarea fizică fiind mai puțin evidentă.

Principiile mecanicii analitice sunt de două feluri:

a) principii diferențiale, care studiază comportarea sistemului pornind de la deplasările elementare ale acestuia, deplasări care pot fi reale sau virtuale.

b) principii integrale, care studiază comportarea sistemului pornind de la deplasări finite ale acestuia.

4.1.1 Legături

Starea de mișcare a unui sistem de N puncte materiale este definită dacă în orice moment de timp se cunosc pozițiile și vitezele tuturor particulelor adică a vectorilor $\vec{r}_i$ și $\frac{d\vec{r}_i}{dt}$ ($i = 1, 2, \dots, N$).

Pentru aceasta este necesar să se rezolve sistemul de ecuații diferențiale:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}^{(i)} + \vec{F}_i^{(e)} = \vec{F}_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.1)$$

În ecuațiile de mai sus $\vec{F}_{ij}^{(i)}$ sunt forțe interne ale sistemului, iar $\vec{F}_i^{(e)}$ este rezultanta forțelor externe ce acționează asupra particulei i . Această formulare nu simplifică mult problema, deoarece este necesar să se ia în considerație constrângerile care limitează mișcarea sistemului. Aceste constrângeri poartă numele de legături. Exemple de legături pot fi ușor arătate. Astfel moleculele unui gaz dintr-un vas sunt constrânse de pereții vasului să se deplaseze în interiorul acestuia. O particulă plasată pe suprafața unei sfere se poate deplasa doar pe suprafața acesteia sau în regiunea externă a sferei.

Fie un sistem de N puncte materiale notate cu $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Spunem că sistemul este supus la legături dacă sunt impuse condiții asupra variabilelor $\vec{r}_i$ și $\frac{d\vec{r}_i}{dt}$. Aceste restricții se exprimă prin anumite relații care au forma unor egalități

$$f \left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \frac{d\vec{r}_1}{dt}, \frac{d\vec{r}_2}{dt}, \dots, \frac{d\vec{r}_N}{dt}, t \right) = 0 \quad (4.2)$$

și care poartă numele de legături *bilaterale*, sau prin inegalități de forma

$$f \left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \frac{d\vec{r}_1}{dt}, \frac{d\vec{r}_2}{dt}, \dots, \frac{d\vec{r}_N}{dt}, t \right) \geq 0 \quad (4.3)$$

care poartă numele de legături *unilaterale*.

Aceasta nu este singurul mod de clasificare al legăturilor.

Dacă timpul nu este conținut explicit în expresia legăturii, aceasta poartă numele de legătură *scleronomă*. Dacă timpul este conținut în mod explicit, legătura este *reonomă*.

Exemplu:

Fie cazul unui punct material ce se deplasează numai pe suprafața unei sfere de rază R , al cărui centru are coordonatele (x_0, y_0, z_0) . Atunci legătura se exprimă astfel:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \quad (4.4)$$

Dacă sfera pe care deplasează punctul material este în repaus legătura este scleronomă. Dacă sfera nu este în repaus față de sistemul inerțial considerat, atunci coeficienții x_0 , y_0 , z_0 care apar în ecuația legăturii sunt funcții de timp astfel că legătura este reonomă. În aceste cazuri se consideră cunoscută mișcarea corpurilor care asigură legătura.

Dacă legătura se exprimă printr-o egalitate în care nu apar vitezele

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad (4.5)$$

legătura poartă numele de legătură *olonomă*. În celelalte cazuri legătura poartă numele de legătură *neolonomă*.

Legăturile exprimate prin egalități care conțin vitezele particulelor poartă numele de legături cinematice sau dinamice. Un interes particular prezintă legăturile descrise de expresii care sunt diferențiale totale exacte și care depind liniar de componentele vitezelor

$$\sum_{j=1}^N \vec{g}_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \frac{d\vec{r}_j}{dt} + g_0(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad (4.6)$$

Se observă că deoarece ecuația 4.5 este satisfăcută de soluțiile ecuațiilor de mișcare la orice moment de timp, prin derivarea acesteia în raport cu timpul se poate scrie relația:

$$\sum_{j=1}^N \nabla_j f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \frac{d\vec{r}_j}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (4.7)$$

Ecuația 4.6 se obține din ecuația 4.7 în cazul particular când

$$\vec{g}_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = \nabla_j f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \quad (4.8)$$

unde

$$\nabla_j f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = \frac{\partial f}{\partial x_j} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y_j} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z_j} \vec{e}_z \quad (4.9)$$

iar

$$g_0(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (4.10)$$

În acest caz expresia legăturii descrisă de relația 4.6 este integrabilă. Legăturile diferențiale integrabile sunt tot legături olonome.

Totuși o legătură descrisă de relația 4.6 nu este complet echivalentă cu cea descrisă de relația 4.5 deoarece prin integrarea acesteia se obține:

$$f(\vec{r}_j, t) = C \quad (4.11)$$

unde C este o constantă arbitrară.

Legăturile exprimate prin forme integrabile poartă numele de legături *Pffaf*. Importanța lor constă în faptul că un sistem caracterizat de astfel de legături poate fi tratat ca și un sistem olonom.

În continuare ne vom ocupa numai de sisteme de puncte materiale care sunt supuse unor legături olonome.

4.1.2 Grade de libertate; coordonate generalizate

Fie un sistem de N puncte materiale pentru care există s legături de forma

$$f_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad (4.12)$$

unde $k = 1, 2, \dots, s$.

Numărul s nu poate fi oricât de mare. Relațiile 4.12 reprezintă un sistem de ecuații în (x_i, y_i, z_i) unde $i = 1, 2, \dots, N$ care este incompatibil dacă $s > 3N$. Dacă $s = 3N$ sistemul poate fi rezolvat în coordonatele (x_i, y_i, z_i) ; când timpul nu apare explicit, coordonatele punctelor materiale capătă valori fixe adică legăturile obligă sistemul să stea în repaus.

Dacă $s < 3N$ sistemul de ecuații 4.12 este nedeterminat și înseamnă că numai $3N - s$ coordonate sunt independente, restul coordonatelor putând fi determinate în funcție de primele prin rezolvarea sistemului 4.12. Numărul de variabile independente care descriu mișcarea sistemului este:

$$l = 3N - s \quad (4.13)$$

Acest număr reprezintă numărul de grade de libertate.

Se pot alege ca variabile independente l coordonate carteziane, celelalte rezultând din relațiile de legătură. În cele ce urmează se vor considera toate coordonatele carteziane funcții de l variabile independente q_k unde $k = 1, 2, \dots, l$ și eventual de timp:

$$\vec{r}_j = \vec{r}_j(q_1, q_2, \dots, q_l, t) = \vec{r}_j(q_k, t) \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.14)$$

Prin q_k se notează ansamblul celor l variabile independente. Variabilele independente nu au obligatoriu dimensiunea unei lungimi și se numesc coordonate generalizate ale sistemului. Ele au următoarele proprietăți:

1) Variind independent variabilele q_k , variabilele $\vec{r}_j$ date de relațiile 4.14 capătă valori ce satisfac relațiile de legătură 4.12 .

2) Se pot obține relațiile inverse

$$q_k = q_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (4.15)$$

în care vectorii $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ pot lua valorile permise doar de legături.

Variabilelor independente q_k li se poate asocia un spațiu cu l dimensiuni, numit spațiul configurațiilor. Fiecărui punct din acest spațiu îi corespunde un ansamblu de valori q_k ($k = 1, 2, \dots, l$). Atunci unei configurații instantanee a sistemului de particule îi corespunde un punct din spațiul configurațiilor, denumit punct reprezentativ.

În timp configurația se schimbă astfel că punctul reprezentativ își schimbă poziția în spațiul configurațiilor. El descrie o curbă numită *traietorie generalizată* a sistemului. Funcțiile $q_k = q_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, l$) reprezintă ecuațiile parametrice ale traiectoriei generalizate.

4.1.3 Forțe de legătură

Trebuie observat că existența legăturilor nu mai este compatibilă cu ecuațiile de mișcare de forma:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i \left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, \frac{d\vec{r}_1}{dt}, \frac{d\vec{r}_2}{dt}, \dots, \frac{d\vec{r}_n}{dt}, t \right) \quad (4.16)$$

unde prin $\vec{F}_i$ se înțelege forța ce acționează asupra particulei i , datorată celorlalte particule ale sistemului și eventual unor câmpuri externe. Relațiile de mai sus rămân valabile doar în cazul sistemelor nesupuse la legături. Dacă se derivează de două ori relațiile 4.2 se obțin egalități în care apar accelerațiile, vitezele și coordonatele de poziție. Dacă se înlocuiesc accelerațiile cu valorile lor care rezultă din relațiile 4.16 se obțin relații în care apar și forțele $\vec{F}_i$. Deoarece forțele $\vec{F}_i$ nu sunt determinate de legături aceste egalități în general nu sunt satisfăcute.

Din acest motiv se ajunge la concluzia că existența legăturilor atrage după sine apariția unor noi forțe $\vec{R}_i$ cu $i = 1, 2, \dots, N$ numite forțe de legătură. Atunci relațiile 4.16 devin:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i + \vec{R}_i \quad (4.17)$$

Rezultă că forțele care acționează asupra particulelor dintr-un sistem se împart în două categorii:

- forțe aplicate $\vec{F}_i$ care sunt cunoscute;
- forțe de legătură $\vec{R}_i$ care în general pot fi determinate numai după ce se cunoaște starea sistemului.

Un exemplu simplu ilustrează acest fapt. Se consideră un obiect aflat pe o masă. Asupra lui acționează forța de greutate. Masa însă îl împiedică să cadă astfel că accelerația sa este zero. Acest fapt este posibil numai dacă masa acționează asupra obiectului cu o forță egală în mărime cu greutatea lui și de sens contrar acesteia. Forța aplicată va fi atunci greutatea iar forța de legătură va fi reacțiunea mesei.

Fie o particulă care se deplasează pe o curbă sau pe o suprafață. Forța de legătură poate fi descompusă într-o componentă aflată în planul tangent la suprafața respectivă $\vec{R}_t$ și o altă componentă $\vec{R}_n$ normală pe acest plan. În general componenta tangențială corespunde unei frecări între punctul material și curba sau suprafața pe care se mișcă.

Dacă componenta tangențială a forței de legătură este nulă atunci spunem că legătura este ideală.

4.2 Formalismul Lagrange

4.2.1 Principiul lucrului mecanic virtual - principiul lui d'Alembert

Fie un sistem de puncte materiale supus unor legături olonome ideale:

$$f_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad (4.18)$$

Deoarece legăturile sunt perfecte componentele tangențiale ale forțelor de legătură sunt nule. Dacă se deplasează în mod arbitrar orice punct material al sistemului de-a lungul suprafeței sau curbei pe care acest punct este obligat să se găsească în baza legăturilor impuse, forțele de legătură rămân normale la suprafața sau la curba considerată. Atunci lucrul mecanic al forțelor de legătură în cursul deplasării este nul. Totuși afirmația precedentă este adevărată numai dacă suprafețele sau curba pe care este obligat corpul să se

miște nu se deplasează în timp. În caz contrar deplasarea poate avea o componentă în direcția normalei, adică de-a lungul forței de legătură și lucrul mecanic al acesteia ar fi diferit de zero.

Se definește deplasare virtuală a sistemului orice variație continuă a coordonatelor (x_j, y_j, z_j) cu $j = 1, 2, \dots, N$ astfel încât condițiile de legătură să fie satisfăcute la același moment de timp. Ne interesează deplasările virtuale infinitezimale adică trecerea de la anumite valori $\vec{r}_j$ la $\vec{r}_j + \delta\vec{r}_j$, trecere compatibilă cu legăturile date. Atunci și coordonatele $\vec{r}_j + \delta\vec{r}_j$ trebuie să satisfacă relațiile de legătură 4.18.

$$f_i(\vec{r}_j + \delta\vec{r}_j, t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (4.19)$$

Se dezvoltă în serie relațiile 4.19 după valorile $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ și se obține:

$$f_i(\vec{r}_j + \delta\vec{r}_j, t) = f_i(\vec{r}_j) + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \delta y_j + \frac{\partial f_i}{\partial z_j} \delta z_j \right) = 0 \quad (4.20)$$

Ținând cont de relațiile 4.18 rezultă:

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \delta y_j + \frac{\partial f_i}{\partial z_j} \delta z_j \right) = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (4.21)$$

Acestea sunt condițiile ca deplasarea $(\delta x_j, \delta y_j, \delta z_j)$ să fie o deplasare virtuală în sensul definiției date mai sus.

Deoarece forțele de legătură sunt perpendiculare pe suprafețele sau curbele pe care se află particulele în cursul unei deplasări virtuale lucrul mecanic al forțelor de legătură este nul:

$$\sum_{j=1}^N \vec{R}_j \delta\vec{r}_j = 0 \quad (4.22)$$

Această afirmație constituie enunțul principiului lucrului mecanic virtual (d'Alembert).

Trebuie remarcat că deplasarea virtuală nu are nimic de-a face cu o deplasare reală în cursul mișcării sistemului.

Înmulțind relațiile 4.17 cu $\delta\vec{r}_i$ și sumând se obține:

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \delta \vec{r}_i \quad (4.23)$$

Dacă se ține cont de 4.22 relația de mai sus devine:

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta \vec{r}_i \quad (4.24)$$

Astfel principiul lucrului mecanic virtual se poate scrie:

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} - \vec{F}_i \right) \delta \vec{r}_i = 0 \quad (4.25)$$

4.2.2 Forțe generalizate

Fie un sistem de N particule supuse la s legături date de relațiile 4.12 pentru care putem alege $l = 3N - s$ coordonate generalizate $q_k = q_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)$ care joacă rolul unor parametri de mișcare ai sistemului. În acest caz o deplasare virtuală infinitesimală a sistemului se poate obține prin varierea la un moment dat a coordonatele generalizate q_k :

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^l \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.26)$$

Lucrul mecanic efectuat pentru o astfel de deplasare a sistemului este:

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \sum_{k=1}^l \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^l Q_k \delta q_k \quad (4.27)$$

unde:

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (4.28)$$

Mărimea Q_k poartă numele de forță generalizată corespunzătoare coordonatei generalizate q_k și în general ea depinde de coordonatele generalizate și de vitezele generalizate:

$$Q_k = Q_k(q_1, q_2, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_l, t) \quad (4.29)$$

unde în expresia 4.29 am folosit pentru derivata temporală notația

$$\frac{dq_k}{dt} = \dot{q}_k$$

Mărimile $\dot{q}_k$ ($k = 1, 2, \dots, l$) poartă numele de viteze generalizate.

Forțele generalizate nu au întotdeauna dimensiunile unei forțe (adică ele nu se măsoară în newtoni).

Dacă forțele $\vec{F}_j$ derivă dintr-un potențial:

$$\vec{F}_j = -\nabla_j U \quad (4.30)$$

Atunci:

$$Q_k = -\sum_{j=1}^N (\nabla_j U) \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} \quad (4.31)$$

sau

$$Q_k = -\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial q_k} \right) \quad (4.32)$$

Astfel:

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (4.33)$$

În cazul sistemelor conservative, deoarece energia potențială nu depinde de vitezele generalizate, nici forțele generalizate nu vor depinde de vitezele generalizate.

4.2.3 Ecuațiile Lagrange

În cele ce urmează se consideră un sistem de puncte materiale supuse unor legături olonome. Se înlocuiesc relațiile 4.26 care corelează deplasările virtuale în coordonate carteziane cu cele în coordonate generalizate, în relația 4.25. Atunci:

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} - \vec{F}_i \right) \sum_{k=1}^l \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \quad (4.34)$$

Relația 4.34 se mai poate scrie:

$$\sum_{k=1}^l \left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k - \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^l \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \quad (4.35)$$

sau

$$\sum_{k=1}^l \left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k = 0 \quad (4.36)$$

În virtutea independenței deplasărilor virtuale δq_k :

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} - Q_k = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (4.37)$$

Se va arăta în continuare că expresia:

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (4.38)$$

se poate exprima cu ajutorul energiei cinetice a sistemului. Pentru aceasta se pornește de la expresia energiei cinetice totale a sistemului de puncte materiale considerat.

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)^2 \quad (4.39)$$

Se derivează această expresia în raport cu o viteză generalizată.

Rezultă:

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) \quad (4.40)$$

Cum $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_l, t)$ atunci:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^l \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (4.41)$$

Din această expresie se obține:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (4.42)$$

Relația 4.40 devine:

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (4.43)$$

Se derivează această relație încă o dată în raport cu timpul și se obține:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} \right) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \quad (4.44)$$

Cum:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) \quad (4.45)$$

atunci:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} \right) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) \quad (4.46)$$

Din relația de mai sus se obține:

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)^2 \quad (4.47)$$

Atunci relațiile 4.37 devin:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)^2 \right] - Q_k = 0 \quad (4.48)$$

Ținând cont de relația 4.39 obținem:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (4.49)$$

Ecuatiile de mai sus sunt ecuațiile Lagrange și permit determinarea mișcării sistemului. Numărul lor este egal cu numărul gradelor de libertate ale sistemului.

Dacă forțele derivă dintr-un potențial, ecuațiile lui Lagrange se pot scrie sub o formă compactă.

Pentru aceasta se introduce funcția Lagrange definită de relația:

$$L = E_c - U \quad (4.50)$$

Deoarece vitezele generalizate sunt conținute doar în expresia energiei cinetice:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} \quad (4.51)$$

iar

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} = \frac{\partial (L - E_c)}{\partial q_k} \quad (4.52)$$

relațiile 4.49 capată forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (4.53)$$

Ecuatiile Lagrange sub forma dată de relațiile 4.49 sau 4.53 reprezintă un sistem de l ecuații diferențiale de ordinul al doilea necunoscute fiind funcțiile $q_k = q_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, l$.

Rezolvarea sistemului presupune introducerea a $2l$ constante arbitrare $C_1, C_2, \dots, C_{2l}$ astfel încât:

$$q_k = q_k(t, C_1, C_2, \dots, C_{2l}), \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (4.54)$$

Determinarea constantelor se face din cunoașterea condițiilor inițiale, adică a stării la un moment dat:

$$q_k(t_0), \quad \dot{q}_k(t_0), \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (4.55)$$

Practic, metoda de rezolvare a unei probleme de mecanică cu ajutorul formalismului Lagrange constă în următoarele:

1. Se stabilește numărul gradelor de libertate ale sistemului și se aleg coordonatele generalizate q_k , exprimând, dacă este necesar, dependența coordonatelor carteziane de coordonatele generalizate.
2. Se construiesc funcțiile E_c , Q_k sau L .
3. Se exprimă cele $2l$ condiții inițiale pentru coordonatele generalizate. Aceasta se face pornind de la condițiile inițiale exprimate în coordonate carteziane (relațiile 4.14).
4. Se integrează ecuațiile lui Lagrange și se ține cont de condițiile inițiale. Se determină astfel dependența de timp a coordonatelor generalizate. Din cunoașterea dependenței coordonatelor carteziane de cele generalizate se poate determina și dependența de timp a coordonatelor carteziane.
5. Din cunoașterea dependențelor $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$ se pot determina și forțele de legătură cu ajutorul relațiilor:

$$\vec{R}_i = m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} - \vec{F}_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.56)$$

Obsevații

1. Dacă funcția lui Lagrange nu depinde de una din coordonatele generalizate, de exemplu q_k atunci se obține o *integrală primă a mișcării*. O integrală primă a mișcării este o mărime care nu variază în cursul mișcării: ea se conservă în cursul evoluției sistemului. Întradevăr dacă $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ din

ecuațiile lui Lagrange rezultă $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0$. Atunci:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \text{const} \quad (4.57)$$

O astfel de coordonată generalizată se numește coordonată ciclică.

2. Funcția lui Lagrange este definită până la o derivată totală a unei funcții în raport cu timpul. Astfel, dacă în locul funcției inițiale se consideră funcția lui Lagrange de forma:

$$L' = L + \frac{d}{dt} F(q_1, q_2, \dots, q_l, t) \quad (4.58)$$

ecuațiile lui Lagrange își păstrează forma. Într-adevăr:

$$L' = L + \frac{dF}{dt} = L + \sum_{k=1}^l \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (4.59)$$

Din 4.59 rezultă

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial F}{\partial q_k} \quad (4.60)$$

Derivând în raport cu timpul relația 4.60 se obține:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{dF}{dt} \right) \quad (4.61)$$

Din 4.59

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial L'}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{dF}{dt} \right) \quad (4.62)$$

Ținând cont de 4.61 și 4.62 din 4.53 se obține:

Rezultă:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q_k} = 0 \quad (4.63)$$

Din cele prezentate mai sus rezultă că o funcție de coordonatele generalizate și de timp, care este o derivată totală în raport cu timpul, poate să fie omisă din expresia funcției lui Lagrange.

3. Dacă numai o parte din forțele ce acționează asupra sistemului derivă dintr-un potențial ecuațiile lui Lagrange pot fi scrise sub forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k, \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (4.64)$$

unde Q'_k reprezintă forțele ce nu derivă dintr-un potențial.

4. Ecuațiile lui Lagrange se pot scrie sub forma 4.53 și în cazuri în care forțele generalizate pot fi exprimate sub forma:

$$Q_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (4.65)$$

În expresia de mai sus funcția $U = U(q_1, q_2, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_l, t)$ poartă numele de potențial generalizat. Acesta poate fi cazul mișcării unei particule de masă m și sarcină electrică e într-un câmp electromagnetic extern.

5. Chiar dacă sistemul de puncte materiale nu este supus la legături, forma 4.53 pentru ecuațiile de mișcare poate fi folosită dacă se poate trece la alt sistem de variabile independente față de care ecuațiile de mișcare se scriu mai simplu. De exemplu în cazul unei particule care se mișcă într-un câmp central de forțe este util să se treacă de la coordonatele carteziene la coordonatele polare (în plan) sau la cele sferice (în spațiu).

4.2.4 Principiul Hamilton

Principiul Hamilton face parte din categoria principiilor integrale. Principiul integral se referă la întreaga mișcare a sistemului pe toată durata sa într-un interval de timp finit. El este un principiu variațional, prin variație înțelegând trecerea sistemului de la o traiectorie la alta în spațiul configurațiilor. Se iau în considerație toate traiectoriile posibile atât cele reale cât și cele virtuale. Pe o traiectorie virtuală sunt satisfăcute legăturile dar nu sunt valabile ecuațiile de mișcare.

Formularea principiului se poate face pornind de la principiul deplasărilor virtuale al lui d'Alembert.

Principiul lui Hamilton postulează că oricărui sistem i se poate asocia o funcție L care descrie starea sistemului

$$L = L(q_k, \dot{q}_k, t) \quad (4.66)$$

Evoluția sistemului în intervalul de timp (t_1, t_2) se desfășoară astfel încât funcționala numită acțiune

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt \quad (4.67)$$

să aibă o valoare extremă.

Aici prin q_k și prin $\dot{q}_k$ s-a notat ansamblul coordonatelor generalizate, respectiv ansamblul vitezelor generalizate.

Principiul poate fi formulat astfel:

Dintre toate traiectoriile posibile din spațiul configurațiilor care trec prin două puncte fixe, corespunzătoare configurațiilor la momentele t_1

și t_2 se realizează aceea pentru care acțiunea are o valoare extremă sau este staționară.

Ecuatiile de mișcare ale sistemului se vor obține din condiția ca variația acțiunii să fie zero.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt = 0 \quad (4.68)$$

Se consideră o traiectorie din spațiul configurațiilor

$$q_k = q_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (4.69)$$

și o traiectorie vecină:

$$q'_k = q'_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (4.70)$$

Variațiile coordonatelor generalizate sunt:

$$\delta q_k(t) = q'_k(t) - q_k(t) \quad (4.71)$$

iar variațiile vitezelor generalizate:

$$\delta \dot{q}_k(t) = \dot{q}'_k(t) - \dot{q}_k(t) = \frac{d}{dt} [q'_k(t) - q_k(t)] = \frac{d}{dt} \delta q_k \quad (4.72)$$

Deoarece cele două traiectorii pornesc și ajung în același punct:

$$\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0 \quad (4.73)$$

Variația acțiunii este:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q'_k, \dot{q}'_k, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt \quad (4.74)$$

Rezultă:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} (L(q'_k, \dot{q}'_k, t) - L(q_k, \dot{q}_k, t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_k, \dot{q}_k, t) dt$$

sau

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^l \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) dt \quad (4.75)$$

deoarece deplasările virtuale nu depind de timp.

Deoarece

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} (\delta q_k) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k \quad (4.76)$$

atunci:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^l \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k \right] \quad (4.77)$$

Cum $\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^l \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) = \sum_{k=1}^l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (4.78)$$

Atunci:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^l \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k dt \quad (4.79)$$

Conform principiului lui Hamilton dacă traiectoria este reală atunci integrala 4.79 trebuie să se anuleze oricare ar fi variațiile δq_k . Deoarece aceste deplasări sunt independente între ele, pentru ca variația δS să fie nulă este necesar ca:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (4.80)$$

Acestea sunt ecuațiile Lagrange.

Când s-au dedus ecuațiile Lagrange din principiul D'Alembert a rezultat că $L = E_c - U$.

Dacă în prezentarea mecanicii analitice se pornește de la principiul Hamilton în enunțul acestuia trebuie inclusă afirmația că există o funcție numită funcția Lagrange cu ajutorul căreia se scrie funcționala acțiune.

Pentru construirea funcției Lagrange se utilizează câteva principii foarte generale:

a) *principiul superpoziției* care afirmă că se însumează termenii care se referă la particulele considerate independente, termenii ce corespund interacțiilor dintre particule și termenii ce corespund interacției particulelor cu câmpuri externe.

b) *principiul invarianței galileiene* care afirmă că acțiunea este aceeași în orice sistem de referință. Principiul este o consecință a principiului relativității galileiene.

c) *principiul de corespondență*: rezultatele care se obțin cu ajutorul mecanicii newtoniene trebuie să se regăsească atunci când se utilizează funcția Lagrange.

Trebuie remarcat că:

a) Funcția Lagrange nu depinde decât de coordonatele și vitezele generalizate (derivatele de ordin superior în raport cu timpul nu intervin). Această dependență este conformă cu faptul că starea unui sistem se cunoaște dacă se cunosc coordonatele și vitezele generalizate.

b) Într-un sistem închis funcția Lagrange nu depinde explicit de timp.

c) Dacă un sistem mecanic este compus din mai multe părți, care nu interacționează, atunci:

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_n \quad (4.81)$$

d) Funcția Lagrange poate fi multiplicată printr-o constantă arbitrară; atunci ecuațiile de mișcare nu se modifică. Operațiunea de multiplicare poate fi înțeleasă ca o schimbare a unităților de măsură pentru L .

4.3 Legile de conservare și proprietățile de simetrie

Așa cum s-a precizat mai înainte, în cazul unui sistem mecanic care are l grade de libertate se obțin l ecuații diferențiale de ordin doi în raport cu timpul. Aceste ecuații de mișcare pot fi integrate rezultând uneori funcții cu semnificații fizice cunoscute, alteleori acest lucru nefiind posibil. Chiar dacă nu se obține o soluție completă a ecuațiilor de mișcare, în multe probleme pot fi puse în evidență funcții de coordonatele și vitezele generalizate care sunt constante în timp. Aceste funcții se numesc integrale prime ale mișcării.

Pentru un sistem închis cu l grade de libertate numărul integralelor prime independente este $2l - 1$. Așa cum am arătat anterior soluția generală a

4.3. LEGILE DE CONSERVARE ȘI PROPRIETĂȚILE DE SIMETRIE 113

ecuațiilor lui Lagrange depinde de $2l$ constante:

$$q_k = q_k(t, C_1, C_2, \dots, C_{2l}) \quad , \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (4.82)$$

$$\dot{q}_k = \dot{q}_k(t, C_1, C_2, \dots, C_{2l}) \quad , \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (4.83)$$

Deoarece pentru un sistem închis timpul nu este conținut în mod explicit în ecuațiile de mișcare, se poate alege originea acestuia în mod arbitrar. Aceasta înseamnă că una din cele $2l$ constante arbitrare din soluțiile ecuațiilor poate fi pusă sub forma unei constante aditive.

$$q_k = q_k(t + t_0, C_1, C_2, \dots, C_{2l-1}) \quad (4.84)$$

$$\dot{q}_k = \dot{q}_k(t + t_0, C_1, C_2, \dots, C_{2l-1}) \quad (4.85)$$

Dacă se elimină $t + t_0$, cele $2l - 1$ constante se pot exprima în funcție de coordonatele q_k și vitezele generalizate $\dot{q}_k$. Rezultă că aceste constante sunt integrale prime.

Printre integralele prime ale mișcării există unele care sunt legate de proprietățile generale ale spațiului și timpului. În continuare se prezintă legea de conservare a energiei care decurge din proprietatea de uniformitate a curgerii timpului, legea de conservare a impulsului care decurge din proprietatea de omogenitate a spațiului și legea de conservare a momentului cinetic care decurge din proprietatea de izotropie a spațiului.

4.3.1 Conservarea energiei

Legea conservării energiei rezultă din uniformitatea curgerii timpului.

Din condiția de uniformitate a curgerii timpului pentru un sistem închis rezultă că funcția Lagrange nu depinde explicit de timp (forma ei rămâne aceeași la orice moment de timp). Atunci:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^l \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \quad (4.86)$$

Cum din ecuațiile lui Lagrange rezultă că:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \quad (4.87)$$

se obține

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^l \dot{q}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_{k=1}^l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k = \sum_{k=1}^l \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) \quad (4.88)$$

$$\frac{d}{dt} \left(L - \sum_{k=1}^l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) = 0 \quad (4.89)$$

Rezultă că:

$$L - \sum_{k=1}^l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \text{const} \quad (4.90)$$

Dacă asupra sistemului acționează doar forțe conservative:

$$L = E_c - U \quad (4.91)$$

În expresia de mai sus energia cinetică este funcție de pătratele vitezelor particulelor care alcătuiesc sistemul, adică:

$$E_c = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(\sum_{k=1}^l \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \quad (4.92)$$

Relația 4.92 se poate pune sub forma:

$$E_c = a + \sum_{k=1}^l a_k \dot{q}_k + \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^l a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j \quad (4.93)$$

unde:

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \\ a_k &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \\ a_{kj} &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \end{aligned}$$

4.3. LEGILE DE CONSERVARE ȘI PROPRIETĂȚILE DE SIMETRIE 115

Dacă transformările de coordonate nu conțin timpul, adică dacă legăturile sunt independente de timp (scleronome) doar ultimul termen din relația 4.93 este diferit de zero. Aceasta rezultă din faptul că derivatele parțiale în raport cu timpul ale coordonatelor sunt nule. Rezultă că energia cinetică este o funcție pătratică omogenă în vitezele generalizate. Utilizând teorema lui Euler referitoare la funcțiile omogene și observând că U nu depinde de vitezele generalizate când sistemul este conservativ obținem:

$$\sum_{k=1}^l \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{k=1}^l \dot{q}_k \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} = 2E_c \quad (4.94)$$

Atunci relația 4.90 devine:

$$E_c + U = \text{const} \quad (4.95)$$

Aceasta reprezintă legea de conservare a energiei în sistemele în care acționează doar forțe conservative: suma dintre energia cinetică și energia potențială (energia totală) este o constantă.

4.3.2 Conservarea impulsului

Această lege de conservare rezultă din proprietatea de omogenitate a spațiului. Din proprietatea de omogenitate a spațiului, care ilustrează faptul că toate punctele din spațiu sunt echivalente rezultă că proprietățile mecanice ale unui sistem nu se schimbă dacă se realizează o translație a întregului sistem în spațiu.

Pentru a demonstra această proprietate se considera o translație infinitesimală în spațiu și se pune condiția ca funcția Lagrange să rămână neschimbată. Se definește operația de translație a sistemului ca o transformare prin care toate punctele sistemului se deplasează cu același segment:

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \delta \vec{r} \quad (4.96)$$

Într-o astfel de transformare variația funcției Lagrange este:

$$\delta L = \sum_{i=1}^N (\nabla_i L) \delta \vec{r} = \delta \vec{r} \sum_{i=1}^N (\nabla_i L) \quad (4.97)$$

Pentru ca funcția Lagrange $L(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)$ să nu se schimbe când facem o deplasare arbitrară $\delta \vec{r}$ este necesar ca:

$$\sum_{i=1}^N (\nabla_i L) = \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial L}{\partial y_i} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial L}{\partial z_i} \right) \vec{e}_z \right] = 0 \quad (4.98)$$

Deoarece

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) ; \quad \frac{\partial L}{\partial y_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) ; \quad \frac{\partial L}{\partial z_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) \quad (4.99)$$

din relația 4.98 se obține:

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \vec{e}_x + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) \vec{e}_y + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) \vec{e}_z \right] = 0$$

adică

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) \vec{e}_z \right] \right] = 0 \quad (4.100)$$

Deoarece

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i = p_{x_i} ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = m\dot{y}_i = p_{y_i} ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} = m\dot{z}_i = p_{z_i} \quad (4.101)$$

și cum impulsul total al sistemului este:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N (p_{x_i} \vec{e}_x + p_{y_i} \vec{e}_y + p_{z_i} \vec{e}_z) \quad (4.102)$$

din relația 4.100 rezultă:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad ; \quad \vec{P} = \text{const} \quad (4.103)$$

Astfel impulsul total este o constantă de mișcare pentru sistemul considerat.

S-a obținut astfel legea de conservare a impulsului total al unui sistem de particule în absența unui câmp extern.

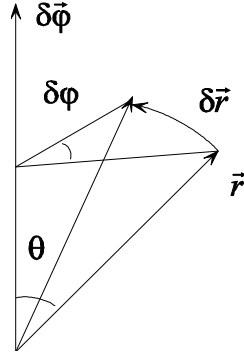


Figura 4.1: Reprezentarea unei rotații infinitezimale

4.3.3 Conservarea momentului cinetic

Conservarea momentului cinetic rezultă din proprietatea de izotropie a spațiului: proprietățile mecanice ale unui sistem închis nu se schimbă în cursul unei rotații în spațiu a sistemului în ansamblu său.

Pentru a demonstra această lege se consideră o rotație în spațiu (Fig. 4.1), după care se pune condiția ca funcția lui Lagrange să rămână neschimbată.

Numim vector de rotație infinitezimală $\delta\vec{\varphi}$ vectorul a cărui valoare este egală cu unghiul de rotație $\delta\varphi$ și a cărui direcție coincide cu axa de rotație. Sensul lui $\delta\vec{\varphi}$ este dat de regula burghiului.

Deplasarea liniară (Fig. 4.1) a extremității vectorului de poziție este legată de unghiuri prin relația:

$$|\delta\vec{r}| = r \sin \theta \delta\varphi \quad (4.104)$$

Direcția vectorului $\delta\vec{r}$ este dată de:

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{r} \quad (4.105)$$

Rotația modifică nu numai direcția vectorului de poziție ci și vitezele tuturor particulelor:

$$\delta\vec{v} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{v} \quad (4.106)$$

Atunci:

$$\begin{aligned} \delta L = & \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \right) \delta x_i + \left(\frac{\partial L}{\partial y_i} \right) \delta y_i + \left(\frac{\partial L}{\partial z_i} \right) \delta z_i \right] \\ & + \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta v_{xi} + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) \delta v_{yi} + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) \delta v_{zi} \right] \end{aligned} \quad (4.107)$$

Deoarece:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= p_{x_i} & \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{dp_{x_i}}{dt} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} &= p_{y_i} & \frac{\partial L}{\partial y_i} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) = \frac{dp_{y_i}}{dt} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} &= p_{z_i} & \frac{\partial L}{\partial z_i} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) = \frac{dp_{z_i}}{dt} \end{aligned}$$

Rezultă:

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \left(\frac{d\vec{p}_i}{dt} \delta \vec{r} + \vec{p}_i \delta \vec{v}_i \right) \quad (4.108)$$

Ținând cont de relațiile 4.105 și 4.106 se obține:

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \left[\frac{d\vec{p}_i}{dt} (\delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_i) + \vec{p}_i (\delta \vec{\varphi} \times \vec{v}_i) \right] = 0 \quad (4.109)$$

sau

$$\delta L = \delta \varphi \sum_{i=1}^N \left[\left(\vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) + (\vec{v} \times \vec{p}_i) \right] = \delta \varphi \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) \right] = 0 \quad (4.110)$$

Cum rotația infitezimală este arbitrară

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) \right] = 0 \quad (4.111)$$

Deoarece prin definiție $\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ este momentul cinetic al particulei i momentul cinetic total al sistemului este $\vec{M} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{p}_i)$.

Din 4.111 rezultă că momentul cinetic total al sistemului se conservă.

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \text{const} \quad (4.112)$$

4.4 Formalismul Hamilton

4.4.1 Ecuațiile Hamilton-Jacobi

Pentru descrierea sistemelor mecanice și evoluției în timp a acestora Hamilton a introdus o altă funcție în locul funcției Lagrange.

Ideea de bază constă în descrierea stării mecanice printr-un sistem de $2l$ variabile $q_1, q_2, \dots, q_l, p_1, p_2, \dots, p_l$. Variabilele $q_1, q_2, \dots, q_l$ sunt coordonatele generalizate, iar variabilele $p_1, p_2, \dots, p_l$ poartă numele de impulsuri generalizate și se definesc prin relațiile

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (4.113)$$

Se consideră un sistem descris de funcția Lagrange $L(q_k, \dot{q}_k, t)$. Atunci

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^l \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t}$$

unde

$$\ddot{q}_k = \frac{d^2 q_k}{dt^2}$$

Rezultă:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^l \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^l \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) - \dot{q}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] + \frac{\partial L}{\partial t} \quad (4.114)$$

Folosind ecuațiile lui Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

relația 4.114 devine:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^l \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \quad (4.115)$$

sau

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^l p_k \dot{q}_k - L \right] = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (4.116)$$

Se observă că dacă $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ membrul stâng este nul, ceea ce înseamnă că mărimea fizică reprezentată de membrul stâng având dimensiunea unei energii se conservă. Această funcție poartă numele de funcția lui Hamilton.

$$H = \sum_{k=1}^l p_k \dot{q}_k - L \quad (4.117)$$

Ea depinde de coordonatele și impulsurile generalizate ale sistemului și de timp.

$$H = H(q_k, p_k, t) \quad (4.118)$$

Cu ajutorul funcției Hamilton ecuațiile de mișcare se pot scrie sub o altă formă. Diferențiind expresia 4.118 rezultă:

$$dH = d \left(\sum_{k=1}^l p_k \dot{q}_k - L \right) = \sum_{k=1}^l p_k d\dot{q}_k + \sum_{k=1}^l \dot{q}_k dp_k - dL \quad (4.119)$$

Dar

$$dL = \sum_{k=1}^l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k + \sum_{k=1}^l \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

sau

$$dL = \sum_{k=1}^l p_k d\dot{q}_k + \sum_{k=1}^l \dot{p}_k dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

astfel încât 4.119 se poate pune sub forma:

$$dH = \sum_{k=1}^l \dot{q}_k dp_k - \sum_{k=1}^l \dot{p}_k dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (4.120)$$

Din 4.118 rezultă că diferențiala lui H este:

$$dH = \sum_{k=1}^l \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \sum_{k=1}^l \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (4.121)$$

Prin identificarea coeficienților diferențialelor din expresiile 4.120 și 4.121, se obține:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (4.122)$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad , \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (4.123)$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad , \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (4.124)$$

Ecuțiile 4.123 și 4.124 sunt cunoscute sub numele de ecuațiile canonice ale lui Hamilton. Acestea formează un sistem alcătuit din $2l$ ecuații diferențiale de ordinul întâi. Soluțiile lor depind de $2l$ constante arbitrare:

$$q_k = q_k(t, C_1, C_2, \dots, C_{2l}) \quad (4.125)$$

$$p_k = p_k(t, C_1, C_2, \dots, C_{2l}) \quad (4.126)$$

Pentru determinarea constantelor $C_1, C_2, \dots, C_{2l}$ este necesară cunoașterea la un moment dat a valorilor coordonatelor generalizate și a impulsurilor generalizate.

În cazul unui sistem conservativ H coincide cu energia totală. Conform relației 4.94

$$\sum_{k=1}^l \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{k=1}^l \dot{q}_k p_k = 2E_c \quad (4.127)$$

astfel încât 4.117 devine:

$$H = 2E_c - L = 2E_c - E_c + U = E_c + U \quad (4.128)$$

Remarcăm că ecuațiile canonice se pot obține dintr-un principiu variațional. Pentru aceasta se exprimă funcția lui Lagrange ținând cont de relația 4.117

$$L = \sum_{k=1}^l p_k \dot{q}_k - H \quad (4.129)$$

Atunci acțiunea se poate scrie ca:

$$S = \int_{t_2}^{t_1} \left[\sum_{k=1}^l p_k \dot{q}_k - H \right] dt \quad (4.130)$$

Variația acțiunii este:

$$\delta S = \int_{t_2}^{t_1} \left[\sum_{k=1}^l \left(p_k \delta \dot{q}_k + \dot{q}_k \delta p_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k - \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k \right) \right] dt \quad (4.131)$$

Se integrează prin părți și se obține:

$$\begin{aligned} \delta S &= \sum_{k=1}^l p_k \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=1}^l \left(\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) \delta p_k \right] dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=1}^l \left(\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \delta q_k \right] dt \end{aligned} \quad (4.132)$$

Mișcarea reală corespunde staționarității acțiunii ($\delta S = 0$).

Cum $\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0$ iar variațiile δp_k și δq_k sunt independente parantezele din expresia (4.132) trebuie să fie nule fapt care implică satisfacerea relațiilor 4.123 și 4.124.

4.4.2 Spațiul fazelor

Dacă se aplică formalismul Hamilton se poate descrie starea dinamică a sistemului la un moment dat prin valorile coordonatelor și impulsurilor generalizate q_k și p_k numite variabile canonice unde $k = 1, 2, \dots, l$. Aceste $2l$ mărimi constituie coordonatele unui punct într-un spațiu cu $2l$ dimensiuni, care a fost denumit spațiul fazelor. Evoluția în timp a sistemului este dată de:

$$q_k = q_k(t) \quad (4.133)$$

$$p_k = p_k(t) \quad (4.134)$$

și este reprezentată în spațiul fazelor prin traiectoria punctului reprezentativ. Ecuația traiectoriei este dată sub formă parametrică, parametrul fiind timpul t .

Este important de observat că pentru sistemele conservative funcția lui Hamilton este o integrală primă. Expresia $H(q_k, p_k) = \text{const}$ este descrisă în spațiul fazelor printr-o hipersuprafață $2l - 1$ dimensională.

4.4.3 Parantezele Poisson

Deoarece ecuațiile canonice descriu variația în timp a variabilelor canonice se poate obține legea de variație a oricărei mărimi ce depinde de starea sistemului. Fie $f(q_k, p_k, t)$ o astfel de mărime care pentru generalitate se presupune că depinde explicit de timp. Derivata totală a acesteia în raport cu timpul este:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^l \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right)$$

Dacă se ține cont de ecuațiile canonice ecuația de mai sus se poate scrie:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^l \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \quad (4.135)$$

Suma din membrul al doilea se numește paranteză Poisson a funcțiilor H și f și se notează astfel:

$$\{H, f\} = \sum_{k=1}^l \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right) \quad (4.136)$$

Astfel pentru două mărimi oarecare se poate defini în general paranteza Poisson:

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^l \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right) \quad (4.137)$$

Obsevații

a) Paranteza Poisson este antisimetrică

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad (4.138)$$

b) Paranteza Poisson este liniară în raport cu fiecare termen:

$$\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1 \{f_1, g\} + c_2 \{f_2, g\} \quad (4.139)$$

$$\{f, c_1 g_1 + c_2 g_2\} = c_1 \{f, g_1\} + c_2 \{f, g_2\} \quad (4.140)$$

c) Sunt satisfăcute relațiile:

$$\{f, g_1 g_2\} = \{f, g_1\} g_2 + \{f, g_2\} g_1 \quad (4.141)$$

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + f_2 \{f_1, g\} \quad (4.142)$$

d) În cazul în care $f = f(u, v, \dots)$ unde funcțiile u și v depind de variabilele canonice:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial u} \{u, g\} + \frac{\partial f}{\partial v} \{v, g\} + \dots \quad (4.143)$$

e) Derivata parțială în raport cu timpul a unei paranteze Poisson se exprimă astfel:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} \quad (4.144)$$

f) Este satisfăcută identitatea lui Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0 \quad (4.145)$$

Trebuie remarcat că proprietățile (a)-(e) rezultă direct din definiția parantezelor Poisson. Identitatea lui Jacobi trebuie verificată prin calcul direct.

Parantezele Poisson joacă un rol important în mecanica analitică. Există câteva cazuri importante care sunt menționate mai jos:

a) Parantezele Poisson ale variabilelor canonice sunt:

$$\{q_i, q_j\} = 0 \quad (4.146)$$

$$\{p_i, p_j\} = 0 \quad (4.147)$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (4.148)$$

b) Parantezele Poisson ale unei funcții și a unei variabile canonice sunt:

$$\{f, q_k\} = -\frac{\partial f}{\partial p_k} \quad (4.149)$$

$$\{f, p_k\} = \frac{\partial f}{\partial q_k} \quad (4.150)$$

Dacă $f = H$ atunci:

$$\{H, q_k\} = -\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k \quad (4.151)$$

$$\{H, p_k\} = \frac{\partial H}{\partial q_k} = \dot{p}_k \quad (4.152)$$

Ecuatiile 4.151 și 4.152 constituie o altă exprimare a ecuațiilor canonice Hamilton.

c) Funcțiile care rămân constante în cursul mișcării, constituie integrale prime ale mișcării. Condiția ca o funcție f să fie o integrală primă a mișcării este ca $\frac{df}{dt} = 0$. Atunci din relația 4.135 se scrie:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0 \quad (4.153)$$

Dacă integrala primă nu depinde explicit de timp rezultă:

$$\{H, f\} = 0 \quad (4.154)$$

În particular când $f = H$, $\{H, H\} = 0$ se obține un nou mod de exprimare a legii conservării energiei.

d) O ultimă observație se referă la teorema Poisson. Aceasta afirmă că dacă f și g sunt două integrale prime atunci și paranteza lor Poisson este o integrală primă a mișcării. Pentru a demonstra acest fapt se calculează derivata în raport cu timpul a parantezei Poisson $\{f, g\}$.

$$\frac{d}{dt} \{f, g\} = \frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} + \{H, \{f, g\}\} \quad (4.155)$$

Se ține cont că:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} \quad (4.156)$$

Utilizând identitatea Jacobi și ținând cont de proprietatea de antisimetrie a parantezelor Poisson:

$$\{H, \{f, g\}\} = -\{f, \{g, H\}\} - \{g, \{H, f\}\} = 0 \quad (4.157)$$

relația 4.155 devine:

$$\frac{d}{dt} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} - \{f, \{g, H\}\} - \{g, \{H, f\}\}$$

sau:

$$\frac{d}{dt} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} + \{H, g\} \right\}$$

Rezultă:

$$\frac{d}{dt} \{f, g\} = \left\{ \frac{df}{dt}, g \right\} + \left\{ f, \frac{dg}{dt} \right\} \quad (4.158)$$

Deoarece funcțiile f și g sunt integrale prime ale mișcării, ele nu variază în timp astfel că derivatele în raport cu timpul sunt nule. Rezultă:

$$\frac{d}{dt} \{f, g\} = 0 \quad (4.159)$$

Astfel, teorema lui Poisson este demonstrată. Prin acest procedeu se pot obține alte integrale prime. Numărul de integrale prime independente este $2l - 1$.

4.5 Transformări canonice

Să considerăm cazul în care hamiltonianul este o constantă a mișcării și toate coordonatele generalizate sunt ciclice. În aceste condiții hamiltonianul va depinde doar de impulsurile generalizate:

$$H = H(p_k)$$

Din $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$ iar $\partial L / \partial \dot{q}_k = \text{const}$ (relația 4.57) rezultă că impulsurile generalizate sunt constante.

Atunci ecuațiile pentru coordonatele generalizate au o formă mai simplă:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \omega_k \quad , \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (4.160)$$

unde ω_k sunt funcții de p_k și sunt constante (deoarece impusul conjugat unei coordonate ciclice este constant în timp). Se integrează 4.160 și rezultă:

$$q_k = \omega_k t + \beta_k \quad (4.161)$$

Trebuie remarcat că pentru un anumit sistem se pot alege mai multe seturi de coordonate generalizate. Astfel, în cazul mișcării unui punct material în plan, se pot alege coordonatele generalizate ca fiind coordonatele carteziane sau coordonatele polare. De exemplu în cazul unei mișcări în câmp central dacă se aleg coordonatele carteziane ca fiind coordonate generalizate atunci nici una dintre cele două nu sunt coordonate ciclice. Dacă însă se lucrează în coordonate polare, θ este o coordonată ciclică.

Numărul de coordonate ciclice depinde de modul de alegere a coordonatelor generalizate; pentru fiecare problemă în parte se poate alege un set de coordonate care să fie ciclice.

Vom studia transformarea de la un set de variabile la alt set de variabile mai convenabile. În cazul formalismului Hamilton impulsurile generalizate sunt variabile independente. Din acest motiv transformarea de coordonate necesită implicarea impulsurilor generalizate. Astfel se considera că:

$$Q_k = Q_k(q_i, p_i, t) \quad (4.162)$$

$$P_k = P_k(q_i, p_i, t) \quad (4.163)$$

Pentru ca aceste relații să reprezinte o adevărată schimbare de variabile este necesar ca relațiile 4.162 și 4.163 să fi inversabile față de variabilele q_i și p_i , adică:

$$q_k = q_k(Q_i, P_i, t) \quad (4.164)$$

$$p_k = p_k(Q_i, P_i, t) \quad (4.165)$$

Condiția necesară și suficientă pentru ca acest fapt să fie posibil este ca Jacobianul sistemului să fie diferit de zero, adică:

$$J = \frac{\partial(P_1, P_2, \dots, P_l, Q_1, Q_2, \dots, Q_l)}{\partial(p_1, p_2, \dots, p_l, q_1, q_2, \dots, q_l)} \neq 0 \quad (4.166)$$

Date fiind avantajele formei canonice a ecuațiilor de mișcare este de dorit ca și în noile variabile Q_k, P_k ecuațiile de mișcare să aibă forma canonică:

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} \quad (4.167)$$

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \quad (4.168)$$

unde $\tilde{H}$ este o funcție Hamilton convenabil aleasă.

Transformarea pentru care relațiile 4.167 și 4.168 sunt valabile poartă numele de *transformare canonică*.

Aceasta nu este posibil când transformarea este arbitrară. Pentru ca transformarea să fie posibilă se impun anumite condiții denumite condiții de canonicitate.

Pentru a determina condițiile ca transformarea să fie canonică se ține cont de principiul lui Hamilton în care funcția lui Lagrange se exprimă astfel:

$$L = \sum_{k=1}^l p_k \dot{q}_k - H(q_i, p_i, t) \quad (4.169)$$

Atunci acțiunea în funcție de variabilele q_j, p_j este:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=1}^l p_k \dot{q}_k - H(q_i, p_i, t) \right] dt \quad (4.170)$$

Integrala acțiunii în variabilele Q_k , P_k este dată de o relație similară:

$$\tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=1}^l P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(Q_k, P_k, t) \right] dt \quad (4.171)$$

În cazul mișcării reale a sistemului condițiile $\delta S = 0$ și $\delta \tilde{H} = 0$ duc la concluzia că cele două integrale pot diferi printr-o derivată totală în raport cu timpul a unei funcții F . De aici rezultă:

$$\sum_{k=1}^l (p_k \dot{q}_k - P_k \dot{Q}_k) + (\tilde{H} - H) = \frac{dF}{dt} \quad (4.172)$$

sau

$$\left(\sum_{k=1}^l p_k dq_k - H dt \right) - \left(\sum_{k=1}^l P_k dQ_k - \tilde{H} dt \right) = dF \quad (4.173)$$

Rezultă:

$$p_k = \frac{\partial F}{\partial q_k} \quad (4.174)$$

$$P_k = \frac{\partial F}{\partial Q_k} \quad (4.175)$$

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (4.176)$$

$F(q_k, Q_k, t)$ poartă numele de funcție generatoare a transformării canonice.

Se pot obține deasemenea noi funcții generatoare. De exemplu dacă se adaugă la ambii membri ai relației 4.173 diferențiala totală $d\left(\sum_{k=1}^l P_k Q_k\right)$ se obține:

$$\sum_{k=1}^l Q_k dP_k + \sum_{k=1}^l p_k dq_k - (\tilde{H} - H) dt = d\left(F + \sum_{k=1}^l P_k Q_k\right) \quad (4.177)$$

Expresia diferențială din membrul drept scrisă în variabilele q_k , P_k constituie o nouă funcție generatoare care se notează cu $G(q_k, P_k, t)$.

Astfel:

$$p_k = \frac{\partial G}{\partial q_k} \quad (4.178)$$

$$Q_k = \frac{\partial G}{\partial P_k} \quad (4.179)$$

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial G}{\partial t} \quad (4.180)$$

În mod analog se obține forma transformărilor exprimate prin funcții generatoare ce depind de variabilele (p_k, P_k) sau (p_k, Q_k) .

Transformările canonice formează un grup. Proprietățile acestuia sunt:

a) Transformarea identică

$$P_k = p_k, Q_k = q_k, k = 1, 2, \dots, l \quad (4.181)$$

este canonică.

b) Inversa unei transformări canonice este tot o transformare canonică. Condiția de canonicitate este îndeplinită deoarece expresia obținută prin înlocuirea lui p_k cu P_k și q_k cu Q_k în condiția de canonicitate 4.173 este o diferențială totală exactă a lui F .

c) Produsul a două transformări canonice este tot o transformare canonică. Prin produs a două transformări canonice se înțelege rezultatul obținut ca urmare a aplicării succesive a două transformări canonice. Pe lângă transformarea

$$Q_k = Q_k(q_i, p_i, t) \quad (4.182)$$

$$P_k = P_k(q_i, p_i, t) \quad (4.183)$$

se consideră și transformarea:

$$Q'_k = Q'_k(Q_i, P_i, t) \quad (4.184)$$

$$P'_k = P'_k(Q_i, P_i, t) \quad (4.185)$$

Atunci:

$$Q'_k = Q'_k(q_i, p_i, t) \quad (4.186)$$

$$P'_k = P'_k(q_i, p_i, t) \quad (4.187)$$

Pe baza proprietăților Jacobienilor rezultă:

$$\frac{\partial(P'_k, Q'_k)}{\partial(p_i, q_i)} = \frac{\partial(P'_k, Q'_k)}{\partial(P_i, Q_i)} \frac{\partial(P_k, Q_k)}{\partial(p_i, q_i)} \quad (4.188)$$

Jacobianul noii transformări este diferit de zero deoarece Jacobienii din membrul drept sunt diferiți de zero. Pentru a arăta că transformarea produs este tot canonică se pornește de la condițiile de canonicitate a celor două transformări inițiale:

$$\left(\sum_{k=1}^l p_k dq_k - H dt \right) - \left(\sum_{k=1}^l P_k dQ_k - \tilde{H} dt \right) = dF \quad (4.189)$$

$$\left(\sum_{k=1}^l P_k dQ_k - \tilde{H} dt \right) - \left(\sum_{k=1}^l P'_k dQ'_k - \tilde{H}' dt \right) = dF' \quad (4.190)$$

Se observă că prin adunarea celor două relații se obține:

$$\left(\sum_{k=1}^l p_k dq_k - H dt \right) - \left(\sum_{k=1}^l P'_k dQ'_k - \tilde{H}' dt \right) = (dF + dF') \quad (4.191)$$

fapt ce exprimă canonicitatea transformării produs.

Rezultă că totalitatea transformărilor canonice formează un grup.

Se observă că modul de definire al noilor coordonate și impulsuri generalizate face ca noțiunile respective să-si piardă din sensul inițial. Acest lucru se datorează faptului că noile variabile canonice Q_k precum și noile impulsuri generalizate depind atât de vechile coordonate generalizate q_k cât și de vechile impulsuri generalizate p_k .

Condiția ca variabilele să fie canonic conjugate se poate exprima cu ajutorul parantezelor Poisson.

Se demonstrează mai întâi teorema generală de invarianță a parantezelor Poisson față de transformările canonice.

Fie $\{f, g\}_{p,q}$ paranteza Poisson a celor două funcții în raport cu variabilele canonice p_k, q_k și $\{f, g\}_{P,Q}$ paranteza Poisson a celor două funcții în raport cu variabilele canonice P_k, Q_k . Atunci:

$$\{f, g\}_{p,q} = \{f, g\}_{P,Q} \quad (4.192)$$

Relația se poate verifica prin calcul direct, dar se poate justifica și prin considerații calitative. Astfel se observă că în relațiile 4.174 și 4.175 timpul joacă rolul unui parametru. Prin urmare dacă demonstrăm egalitatea pentru mărimi care nu depind explicit de timp, relațiile vor fi adevărate și în cazul general. Să considerăm formal că funcția g este o funcție Hamilton a unui sistem fictiv. Atunci:

$$\{f, g\}_{p,q} = \frac{df}{dt} \quad (4.193)$$

Dar derivata în raport cu timpul $\frac{df}{dt}$ nu poate depinde decât de proprietățile sistemului și nu depinde de alegerea variabilelor. Prin urmare $\{f, g\}$ nu variază în cazul în care vom trece de la un grup la alt grup de variabile canonice. Rezultă că egalitatea 4.192 este satisfăcută.

Atunci datorită relațiilor 4.146 , 4.147 , 4.148 și teoremei de invarianță a parantezelor Poisson

$$\{Q_k, Q_i\}_{P,Q} = \{Q_k, Q_i\}_{p,q} = 0 \quad (4.194)$$

$$\{P_k, P_i\}_{P,Q} = \{P_k, P_i\}_{p,q} = 0 \quad (4.195)$$

$$\{P_k, Q_i\}_{P,Q} = \{P_k, Q_i\}_{p,q} = \delta_{ki} \quad (4.196)$$

Relațiile 4.196 constituie condiția de canonicitate exprimată cu ajutorul parantezelor Poisson.

4.6 Ecuația Hamilton-Jacobi

Utilitatea transformărilor canonice constă în faptul că ele permit trecerea ecuațiilor de mișcare dintr-o formă canonică în alta. Dacă se alege în mod convenabil o funcție generatoare se pot obține ecuațiile canonice în cea mai simplă formă. Aceasta este:

$$\dot{P}_k = 0, \quad \dot{Q}_k = 0 \quad (4.197)$$

În acest caz particular variabilele canonice sunt constante. Acest lucru este posibil dacă hamiltonianul nu este dependent de P_k și Q_k și depinde eventual numai de timp. Cum în ecuațiile canonice hamiltonianul apare numai prin derivatele sale parțiale în raport cu P_k și Q_k , atunci se poate alege $\tilde{H} = 0$. Se notează cu $S = S(q_k, Q_k, t)$ funcția generatoare a acestei transformări canonice. Atunci:

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} \quad (4.198)$$

$$P_k = -\frac{\partial S}{\partial Q_k} \quad (4.199)$$

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.200)$$

Cum $\tilde{H} = 0$ rezultă că

$$H\left(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (4.201)$$

Această ecuație este cunoscută sub numele de ecuația Hamilton-Jacobi. Din ecuațiile 4.197 rezultă:

$$Q_k = a_k, \quad P_k = -b_k \quad (4.202)$$

unde a_k și b_k sunt constante. Cum în relația 4.201 variabilele Q_k nu apar explicit, ținându-se cont de 4.202 rezultă că trebuie să se găsească o soluție a ecuației Hamilton-Jacobi $S = S(q_k, a_k, t)$ care depinde de l constante arbitrare a_k (numite constante arbitrare esențiale). O astfel de soluție poartă numele de integrală completă a ecuației cu derivate parțiale Hamilton-Jacobi.

Ecuația Hamilton Jacobi este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi având $l + 1$ variabile independente $q_1, q_2, \dots, q_l$ și t . O soluție generală a ecuației va trebui să conțină $l + 1$ constante de integrare independente. Cum funcția S nu apare în ecuația Hamilton - Jacobi decât prin intermediul derivatelor sale rezultă că dacă S este o soluție a ecuației atunci și $S + C$ va fi o soluție. Prin urmare una din cele $l + 1$ constante este o constantă aditivă. Această constantă nu are sens fizic și se poate alege egală cu zero. Rezultă faptul că din celelalte l constante esențiale nici una nu este aditivă.

Din relația 4.199 și relațiile 4.202 rezultă:

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = b_k \quad (4.203)$$

Deoarece $S = S(q_i, a_i, t)$ rezultă că:

$$b_k = b_k(q_i, a_i, t) \quad (4.204)$$

Rezolvând sistemul de ecuații 4.204 în funcție de coordonatele generalizate se obține:

$$q_k = q_k(a_i, b_i, t) \quad (4.205)$$

Deoarece

$$\frac{\partial S}{\partial q_k} = p_k$$

se obține $p_k = p_k(q_i, a_i, t)$. Folosind relațiile 4.205 se obține:

$$p_k = p_k(a_i, b_i, t) \quad (4.206)$$

În concluzie operațiile necesare pentru a determina mișcarea unui sistem de puncte materiale sunt:

- a) Se află integrala completă a ecuației Hamilton-Jacobi
- b) Se egalează derivatele parțiale ale integralei complete în raport cu parametri care-i conține (a_k) cu constante noi (b_k).
- c) Se rezolvă sistemul astfel obținut în funcție de variabilele q_k .

Trebuie remarcat că nu există un procedeu general pentru găsirea integralei complete. În anumite cazuri o metodă care permite simplificarea problemei este metoda separării variabilelor. Ea se utilizează de exemplu când hamiltonianul nu depinde de timp.

Atunci se consideră S de forma:

$$S(q_k, a_k, t) = S_0(q_k, a_k) + S_1(a_k, t) \quad (4.207)$$

Introducând pe S în ecuația 4.201 se obține:

$$\frac{\partial S_1(a_k, t)}{\partial t} + H\left(q_k, \frac{\partial S_0(q_k, a_k)}{\partial q_k}\right) = 0 \quad (4.208)$$

Deoarece primul termen depinde doar de timp, iar următorul numai de variabilele independente q_k , egalitatea este satisfăcută dacă fiecare termen este constant.

$$\frac{\partial S_1(a_k, t)}{\partial t} = -E \quad (4.209)$$

$$H \left[q_k, \frac{\partial S_0(q_k, a_k)}{\partial q_k} \right] = E \quad (4.210)$$

Din ecuația 4.209 rezultă

$$S_1 = -Et \quad (4.211)$$

Deoarece hamiltonianul nu depinde explicit de timp, constanta E este chiar energia sistemului.

Rămâne de rezolvat ecuația 4.210 care se numește ecuația Hamilton-Jacobi redusă.

Rezultă astfel că dacă funcția generatoare S este determinată prin integrarea ecuației Hamilton-Jacobi rezolvarea mișcării sistemului se reduce la rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice.

Într-un anumit sens funcția generatoare care rezultă din ecuația Hamilton-Jacobi este chiar acțiunea. Astfel pentru formularea principiului Hamilton s-a considerat integrala

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (4.212)$$

luată de-a lungul unei traiectorii între două poziții caracterizate de coordonatele generalizate $q_k^{(1)}$ și $q_k^{(2)}$ pe care sistemul le ocupă la momentele t_1 , respectiv t_2 . Considerăm noțiunea de acțiune sub un alt aspect. Fie integrala acțiunii pentru traiectorii reale toate cu o origine comună în punctul din spațiul configurațiilor $q_k^{(1)}$, (integrala dată de 4.212 are un singur capăt fix). Cu alte cuvinte vom considera acțiunea ca o funcție de valorile coordonatelor generalizate la limita superioară de integrare. Astfel:

$$S(q_k, q_k^{(1)}, t) = \int_{t_1}^t L(q_k, \dot{q}_k, t) dt \quad (4.213)$$

Variația acțiunii conform relației 4.77 este în acest caz:

$$\delta S = \int_{t_1}^t \sum_{k=1}^l \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k$$

sau

$$\delta S = \sum_{k=1}^l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \Big|_{t_1}^t + \int_{t_1}^t \sum_{k=1}^l \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k \quad (4.214)$$

Deoarece traiectoriile mișcării reale satisfac ecuațiile lui Lagrange integrale din relația 4.214 se anulează. În primul termen din 4.214 la limita inferioară $\delta q_k(t_1) = 0$. La limita superioară $\delta q_k(t)$ se notează cu δq_k . Atunci:

$$\delta S = \sum_{k=1}^l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^l p_k \delta q_k \quad (4.215)$$

De aici rezultă:

$$\frac{\partial S}{\partial q_k} = p_k \quad (4.216)$$

Se consideră apoi funcția S ca o funcție de timp. Atunci derivata sa totală este:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{k=1}^l \frac{\partial S}{\partial q_k} \dot{q}_k = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{k=1}^l p_k \dot{q}_k \quad (4.217)$$

Având în vedere relația 4.213:

$$\frac{dS}{dt} = L \quad (4.218)$$

Din ultimele două relații se poate scrie că:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = - \sum_{k=1}^l p_k \dot{q}_k + L \quad (4.219)$$

și

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(q_k, p_k, t) \quad (4.220)$$

Dacă în această ultimă relație se înlocuiesc impulsurile generalizate date de relația 4.216 rezultă că funcția S satisface ecuația Hamilton-Jacobi. Acesta a fost și motivul pentru care s-a notat inițial funcția generatoare cu S .

Capitolul 5

Termodinamică

5.1 Noțiuni fundamentale

5.1.1 Sistem termodinamic, starea sistemului

Prin sistem înțelegem o porțiune din univers cuprinzând un ansamblu de corpuri precum și câmpurile de interacțiune dintre ele. Restul universului poartă numele de mediu extern. În practică acest termen cuprinde acele părți ale mediului care au un efect direct asupra comportării sistemului. Interfața dintre sistem și mediul extern poartă numele de învelișul sistemului sau frontieră și trebuie bine definită. Frontiera nu trebuie să fie neapărat materializată în sensul că nu întotdeauna ea reprezintă o interfață fizică. Aceasta înseamnă că sistemul nu este în general izolat de mediul extern. Trebuie remarcat că în timp ce termenul de sistem este extrem de larg, conceptul de sistem termodinamic este mai restrâns.

Sistemul termodinamic trebuie să îndeplinească două condiții: să conțină un număr suficient de particule (atomi, molecule) și să fie delimitat clar de restul universului. Interacția sistemului cu mediul extern se realizează prin schimb de energie și masă. Pornind de cele două modalități de interacție cu mediul extern sistemele pot fi clasificate astfel:

- sisteme deschise: sunt sistemele care schimbă substanță și energie cu mediul extern;
- sisteme închise: sunt sistemele care nu schimbă substanță cu mediul extern. Acestea sunt de două feluri: sisteme izolate - care nu schimbă nici substanță și nici energie cu mediul extern, și sisteme neizolate - care schimbă doar energie cu mediul extern.

Starea unui sistem termodinamic reprezintă totalitatea proprietăților sale la un moment dat. Ea este determinată de condițiile impuse din exterior sistemului dat.

Mărimile ce caracterizează starea sistemului poartă numele de parametri de stare. Pentru un sistem ei sunt dați de experiență.

În general nu toți parametri de stare pot lua valori independente, între aceștia putând exista anumite relații care poartă numele de ecuații de stare. Din acest motiv parametri ce caracterizează un sistem termodinamic pot fi împărțiți în două clase: unii din acești parametri pot lua valori arbitrare și se numesc parametri independenți, iar ceilalți pot fi exprimați în funcție de primii și se numesc parametri dependenți. Cunoașterea parametrilor independenți caracterizează complet starea sistemului. Alegerea parametrilor independenți se face în funcție de specificul problemei studiate.

Parametri de stare pot fi clasificați după mai multe criterii:

Astfel o clasificare îi împarte în parametri intensivi și parametri extensivi. Parametri extensivi sunt parametri legați de extinderea spațială a sistemului. Fie un sistem S împărțit în două subsisteme S_1 și S_2 . Fie a_1 valoarea unui parametru în subsistemul S_1 și a_2 valoarea parametrului în subsistemul S_2 . Parametrul considerat este extensiv dacă în cazul sistemului reunit (format din cele două subsisteme) valoarea lui satisface relația:

$$a = a_1 + a_2 \quad (5.1)$$

Un exemplu de parametru extensiv îl constituie masa.

Parametri intensivi sunt parametri care nu depind de extinderea spațială a sistemului. De multe ori ei caracterizează proprietățile locale ale sistemului. De exemplu parametri intensivi sunt presiunea și temperatura.

O altă clasificare împarte parametri în parametri externi și parametri interni. Parametri externi sunt parametri dependenți de sistemele înconjurătoare ale sistemului considerat (de exemplu intensitățile unor câmpuri electrice și magnetice în care evoluează sistemele). Parametri interni sunt parametri care depind și de proprietățile interne ale sistemului.

Starea unui sistem poartă numele de stare staționară dacă parametri care definesc starea sistemului nu evoluează în timp. Un exemplu de stare staționară este acela al difuziei termice într-o bară metalică. Dacă extremitățile barei se mențin la temperaturi constante T_1 și T_2 ($T_1 < T_2$) se stabilește un transport de energie de la sursa caldă la sursa rece. Temperatura nu este constantă în lungul barei, dar valorile locale sunt constante în timp.

Starea de echilibru termodinamic este starea staționară care se stabilește în interiorul sistemului când nu există schimburi de energie sau substanță cu mediul extern.

5.1.2 Transformări de stare

Transformarea de stare sau procesul termodinamic reprezintă trecerea sistemului dintr-o stare în altă stare. Procesele pot fi clasificate după mai multe criterii.

Astfel după mărimea variației parametrilor procesele pot fi diferențiale (dacă parametri sistemului suferă variații foarte mici) și finite (dacă variațiile parametrilor sunt semnificative).

O altă clasificare este după natura stărilor intermediare prin care trece sistemul.

Se numește proces cuasistatic procesul în care parametri sistemului variază lent în timp astfel încât stările intermediare să poată fi considerate cu o bună aproximație stări de echilibru. De fapt ele nu sunt stări de echilibru perfect ci sunt stări foarte apropiate de cele de echilibru.

Dacă stările intermediare nu pot fi considerate ca stări de echilibru procesul este necuasistatic (nonstatic).

O altă clasificare este aceea care ia în considerație reversibilitatea proceselor termodinamice.

Un proces se numește reversibil dacă sensul desfășurării lui poate fi inversat sau dacă sistemul poate evolua din starea finală în starea inițială trecând prin aceleași stări intermediare de echilibru prin care sistemul a trecut în transformarea primară. Astfel rezultă că unele transformări cuasistatice pot fi transformări reversibile.

Unele din procesele cuasistatice se realizează în sens unic. Un astfel de proces este difuzia a două gaze aflate în două recipiente legate între ele cu un tub foarte subțire. Acest proces este ireversibil. Ireversibile sunt toate procesele necuasistatice.

Trebuie observat că procesele cuasistatice reversibile sunt procese idealizate. În realitate în natură nu există procese reversibile. Totuși, procesele reversibile prezintă o mare importanță în sensul că permit punerea în evidență a mărimilor termodinamice de stare. În plus, în multe aplicații este util ca procesele să fie studiate inițial idealizându-le ca procese reversibile și apoi să se introducă factorii care determină ireversibilitatea proceselor respective.

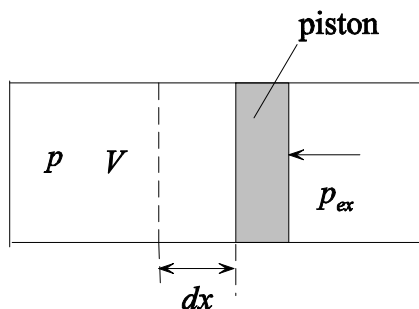


Figura 5.1: Lucrul mecanic elementar efectuat prin deplasarea unui piston într-un cilindru

5.1.3 Lucrul mecanic

Unul dintre tipurile importante de interacție este cel datorat existenței unor forțe care se exercită între sistem și mediul extern. Trebuie distins între forțele care se exercită de către sistem asupra mediului extern și forțele cu care mediul extern acționează asupra sistemului. Aceste forțe conform principiului acțiunii și reacțiunii sunt egale în mărime, dar de sens contrar.

Prin forțe de interacție vom înțelege forțele exercitate de mediul extern asupra sistemului considerat. Aceasta este convenția cu care se va lucra în continuare.

a) *Lucrul mecanic la alungirea unei bare*

Se consideră că asupra unei bare elastice de lungime l se exercită o forță de tracțiune F care alungește bara cu dl . Atunci lucrul mecanic elementar este:

$$\delta L = F dl \quad (5.2)$$

b) *Lucrul mecanic efectuat de presiune*

Considerăm că sistemul constă dintr-un fluid ce ocupă volumul V dintr-un cilindru închis cu ajutorul unui piston mobil. Sub acțiunea forțelor externe pistonul se deplasează cu distanța infinitesimală dx (Fig. 5.1).

Atunci lucrul mecanic elementar se scrie:

$$\delta F = F dx = p_{ex} S dx \quad (5.3)$$

unde cu p_{ex} am notat presiunea exterioară care se exercită asupra pistonului.

În plus $Sdx = -dV$ (deoarece la o deplasare dx în sensul forței externe ce acționează asupra sistemului volumul se micșorează). În cazul că avem de-a face cu o transformare cuasistatică stările intermediare sunt stări de echilibru iar forța totală care acționează asupra sistemului trebuie să fie nulă. Astfel dacă se notează cu p presiunea din interiorul sistemului:

$$pS - p_{ex}S = 0 \quad (5.4)$$

adică $p = p_{ex}$. Atunci expresia lucrului mecanic este:

$$\delta L = -p dV \quad (5.5)$$

Se observă că dacă $dV < 0$, $\delta L > 0$ mediul extern efectuează un lucru mecanic asupra sistemului, iar dacă $dV > 0$, $\delta L < 0$ sistemul efectuează un lucru mecanic asupra mediului.

c) Lucrul mecanic al tensiunii superficiale

Fie o peliculă de lichid cu tensiunea superficială σ asupra căreia acționează o forță F . Atunci când o dimensiune a suprafeței variază cu dx lucrul mecanic efectuat este:

$$\delta L = F dx \quad (5.6)$$

Cum procesul se consideră cuasistatic forța F de tracțiune trebuie să fie egală, dar de sens contrar cu forța datorată tensiunii superficiale a lichidului care se opune varierii suprafeței acestuia. Atunci $F = F_s = \sigma l$, unde l este lungimea conturului pe care acționează forțele de tensiune superficiale. Astfel:

$$\delta L = \sigma l dx = \sigma dS \quad (5.7)$$

d) Forma generală a expresiei lucrului mecanic

Se pornește de la discuția efectuată mai sus și se exprimă lucrul mecanic sub forma:

$$\delta L = A da \quad (5.8)$$

În expresia de mai sus A joacă rolul forței și poartă numele de forță generalizată iar a este un parametru de poziție care poartă numele de coordonată generalizată. Dacă asupra sistemului acționează mai multe tipuri de forțe lucrul mecanic elementar va fi suma lucrurilor mecanice elementare:

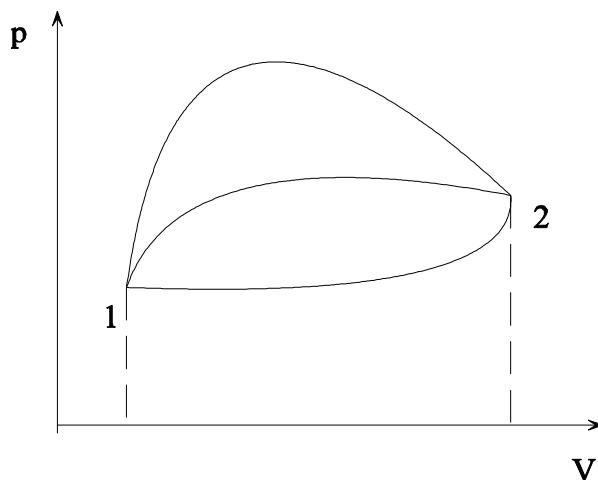


Figura 5.2: Lucrul mecanic în diverse transformări

$$\delta L = \sum_k A_k da_k \quad (5.9)$$

Parametri a_k - coordonatele generalizate - sunt parametri externi, deoarece ei sunt determinați de acțiunile ce au loc asupra sistemului. Forțele generalizate A_k depind atât de condițiile impuse din exterior cât și de coordonatele particulelor ce alcătuiesc sistemul. Acestea sunt parametri interni.

Trebuie remarcat că dacă se consideră o transformare între două stări de echilibru lucrul mecanic depinde de modul în care se face această transformare. În cazul unui fluid, stările acestuia se pot reprezenta într-o diagramă p, V . Într-o astfel de reprezentare lucrul mecanic total $L = - \int_1^2 p dV$ este egal în valoare absolută cu aria cuprinsă între axa OV și curba $p = p(V)$. Astfel în Fig. 5.2 sunt reprezentate mai multe transformări de la o stare la alta. Se observă că ariile de sub curbele respective sunt diferite ceea ce înseamnă că lucrul mecanic depinde de drum (de tipul de transformare).

Un concept util care va fi folosit foarte mult în continuare este acela de *sistem izolat adiabatic*. Un astfel de sistem nu poate schimba energie cu mediul extern decât prin efectuare de lucru mecanic.

5.1.4 Principiul general al termodinamicii

Un sistem izolat ajunge întotdeauna după un anumit timp într-o stare de echilibru termodinamic și nu poate ieși de la sine din această stare.

Acesta este principiul general al termodinamicii și se bazează pe nenumărate observații experimentale.

Acest postulat are rolul unui principiu director. El arată sensul în care evoluează procesele de neechilibru și pune în evidență ireversibilitatea lor. Trebuie remarcat că principiul general nu dă nici un fel de informație privitor la durata relaxării pentru atingerea stării finale de echilibru. În plus principiul general arată și limitele de aplicabilitate ale termodinamicii, deoarece în enunțul acestuia se vorbește de sisteme izolate. În astfel de sisteme numărul de particule trebuie să fie foarte mare, dar nu infinit. Menționăm și faptul că termodinamica studiază fenomenele în care fluctuațiile sunt neesențiale. Din punct de vedere al fizicii statistice înseamnă că sistemele respective nu trebuie să conțină un număr foarte mic de particule.

5.2 Principiul I al termodinamicii

5.2.1 Energia internă a unui sistem termodinamic

Se consideră un sistem termodinamic izolat adiabatic care suferă un proces ciclic. Lucrul mecanic trebuie să fie nul deoarece în caz contrar ar fi posibil crearea unui perpetuum mobile de speța I, adică ar fi posibilă obținerea de lucru mecanic fără ca să existe vreo modificare a sistemului respectiv. Rezultă că lucrul mecanic efectuat de forțele exterioare asupra unui sistem termodinamic depinde doar de starea inițială și finală. Astfel a fost formulat principiul I pentru sistemele izolate adiabatic.

Există o funcție U care depinde doar de starea sistemului astfel încât într-o transformare oarecare a sistemului izolat adiabatic între stările a și b :

$$L_{ab} = U_b - U_a \quad (5.10)$$

Lucrul efectuat de un sistem izolat adiabatic nu depinde de drum.

Funcția U poartă denumirea de energie internă a sistemului. Din relația de mai sus rezultă că U , energia internă a sistemului, este definită până la o constantă aditivă. Pentru a preciza valoarea acestei constante se alege în

mod arbitrar o anumită stare O de referință în care energiei i se atribuie valoarea zero.

Revenind la forma diferențială a primului principiu se poate afirma că pentru un sistem izolat adiabetic:

$$dU = \delta L \quad (5.11)$$

5.2.2 Formularea generală a primului principiu al termodinamicii

Formularea restrânsă a primului principiu a permis introducerea funcției de stare numită energie internă a cărei variație în procesele adiabatice este egală cu lucrul mecanic efectuat.

Dacă sistemul nu mai este închis într-un înveliș adiabetic relațiile 5.10 și 5.11 nu mai sunt valabile pentru o transformare oarecare. În acest caz lucrul mecanic depinde nu numai de starea inițială și finală, ci și de stările intermediare. De aceea se introduce mărimea Q_{ab} prin relația:

$$Q_{ab} = U_b - U_a - L_{ab} \quad (5.12)$$

Această mărime poartă denumirea de cantitate de căldură. Dacă $Q_{ab} > 0$ se spune că sistemul primește căldură iar dacă $Q_{ab} < 0$ sistemul cedează căldură. Deoarece în membrul drept al ecuației 5.12 intervine lucrul mecanic, care este o mărime de transformare, rezultă că și căldura depinde de stările intermediare prin care trece sistemul când evoluează între cele două stări. Pentru a înțelege semnificația căldurii se consideră un proces în care lucrul mecanic este nul: $L_{ab} = 0$. Atunci:

$$Q_{ab} = U_b - U_a \quad (5.13)$$

Aceasta înseamnă că mărimea Q (cantitatea de căldură), este acea mărime care determină variația energiei interne fără ca să aibă loc variația parametrilor externi.

Egalitatea 5.12 se scrie sub forma:

$$U_b - U_a = L_{ab} + Q_{ab} \quad (5.14)$$

și se observă că deși fiecare termen din membrul al doilea depinde de stările intermediare, suma lor nu depinde decât de starea inițială și finală. Egalitatea de mai sus constituie forma generală a principiului I.

Variația energiei interne a unui sistem termodinamic închis este egală cu suma dintre lucrul mecanic primit sau cedat de sistem și căldura elementară cedată sau primită de sistem.

Sub formă diferențială¹ primul principiu se scrie:

$$dU = \delta L + \delta Q \quad (5.15)$$

Dacă $Q_{ab} = 0$ atunci din 5.14 obținem:

$$U_b - U_a = L_{ab} \quad (5.16)$$

Aceasta este forma primului principiu în cazul sistemelor izolate adiabatic. Rezultă că sistemele izolate adiabatic nu schimbă căldură cu mediul extern.

Principiul I formulat pentru sisteme închise reprezintă legea conservării energiei. Într-adevăr dacă $Q_{ab} = 0$ și $L_{ab} = 0$, $U_b = U_a$ și energia unui sistem izolat se conservă.

5.2.3 Temperatura empirică. Principiul zero

Contactul termic

Fie două sisteme S_1 și S_2 separate printr-un perete fix și adiabatic și situate într-o încălțată izolată adiabatic de mediul extern. Sistemul S_1 se găsește într-o stare de echilibru E_1 iar sistemul S_2 se găsește într-o stare de echilibru E_2 . Se înlocuiește peretele adiabatic dintre cele două sisteme cu unul diaterm care permite schimbul de căldură dintre cele două sisteme. Se spune că sistemele sunt în contact termic. În urma acestei operații sistemul $S = S_1 \cup S_2$ izolat adiabatic de mediul extern se va găsi în general într-o stare de neechilibru termic. După un timp conform principiului fundamental al termodinamicii sistemul S va ajunge într-o stare de echilibru. Noile stări de echilibru E'_1 și E'_2 ale sistemelor S_1 , respectiv S_2 vor diferi în general de stările inițiale de echilibru.

Există și situații când sistemele se găsesc în astfel de stări încât înlocuirea peretelui adiabatic dintre ele cu unul diaterm nu determină schimbarea stărilor inițiale ale celor două sisteme. În acest caz cele două sisteme se găsesc într-o relație de echilibru termic.

¹Prin convenție se vor nota cu d respectiv δ variațiile unor mărimi care sunt, respectiv nu sunt, diferențiale totale exacte.

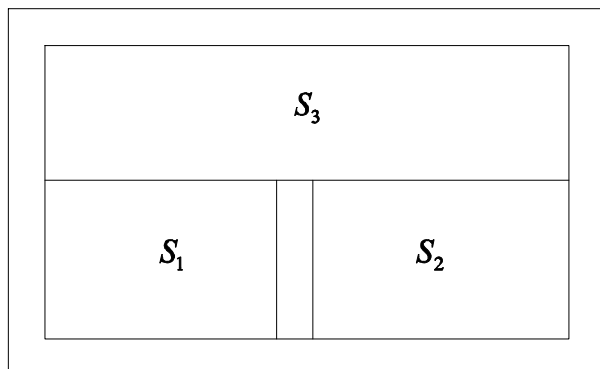


Figura 5.3: Tranzitivitatea echilibrului termic

Tranzitivitatea echilibrului termic

Fie două sisteme S_1 și S_2 izolate printr-un înveliș adiabetic. Dacă sistemele sunt aduse în contact termic cu un al treilea sistem S_3 (Fig. 5.3) atunci S_1 și S_3 respectiv S_2 și S_3 fie rămân într-o stare de echilibru termic, fie evoluează datorită schimbului termic într-o altă stare de echilibru comună.

Dacă se înlătură învelișul adiabetic dintre S_1 și S_2 și se izolează sistemul S_3 se constată că sistemele S_1 și S_2 sunt în echilibru termic. Prin urmare echilibrul termic este tranzitiv.

Pornindu-se de la proprietatea de tranzitivitate a echilibrului termic se poate împărți mulțimea sistemelor termodinamice în clase de echivalență. Sistemele dintr-o clasă de echivalență puse în contact termic unele cu altele sunt în echilibru termic. Dacă două sisteme din două clase de echivalență diferite sunt puse în contact termic ele nu vor fi în echilibru termic. Fiecărei clase de echivalență i se poate asocia un parametru. Acest parametru va caracteriza din punct de vedere termic fiecare sistem termodinamic în parte, fiind un parametru intern. El poartă numele de temperatură empirică.

Principiul zero al termodinamicii

Temperatura este o funcție de starea de echilibru termodinamic.

Rezultă că temperatura empirică este un parametru care permite compararea stărilor sistemelor aflate la echilibru.

Din formularea principiului zero al termodinamicii rezultă că starea de echilibru termodinamic este determinată de temperatură și de toți parametri

externi. Astfel se poate da și o altă formulare a principiului zero:

Toți parametri interni ai sistemului sunt funcții de parametri externi și de temperatură.

Ecuatii de stare

Matematic principiul zero al termodinamicii se scrie astfel:

$$A_i = A_i(a_1, a_2, \dots, a_n, \theta) \quad (5.17)$$

unde cu θ am notat temperatura empirică.

Energia internă este o funcție de stare a sistemului astfel că:

$$U = U(a_1, a_2, \dots, a_n, \theta) \quad (5.18)$$

Ecuatiile 5.17 poartă numele de ecuații termice de stare iar ecuația 5.18 poartă numele de ecuație calorică de stare.

Ecuatiile termice de stare și ecuația calorică de stare se obțin fie prin metode experimentale fie prin metodele fizicii statistice.

De exemplu în cazul gazului ideal ecuația termică de stare poartă numele de ecuația Clapeyron-Mendeleev și are forma:

$$pV = \nu RT$$

Ecuatia calorică de stare este:

$$U = \nu C_V T + U_0$$

În relațiile de mai sus ν este numărul de kmoli, iar C_V este căldura molară la volum constant.

5.3 Principiul al II-lea al termodinamicii

5.3.1 Diverse formulări ale principiului al II - lea

Primul principiu al termodinamicii introduce mărimea de stare numită energie internă, mărime ce nu variază în absența acțiunilor exterioare. Astfel într-o transformare ciclică variația energiei interne este nulă astfel că:

$$L + Q = 0 \quad (5.19)$$

Această ecuație specifică posibilitatea de a transforma lucrul mecanic în căldură și invers, fără a preciza condițiile fizice în care acest fapt este posibil. Pot exista trei situații:

- a) $L = 0$ $Q = 0$
- b) $L < 0$ $Q > 0$
- c) $L > 0$ $Q < 0$

Când este realizat cazul al doilea spunem că sistemul funcționează ca o mașină termică în sensul că primește căldură din exterior și furnizează lucru mecanic. Analizând funcționarea mașinilor termice, Sadi Carnot a ajuns la concluzia că ele nu pot funcționa dacă preiau căldură de la o singură sursă cu o temperatură dată. Pe baza acestor observații Clausius a formulat principiul al doilea sub forma:

Este imposibil de a realiza o transformare al cărui unic rezultat să fie transferarea căldurii de la o sursă cu temperatură dată la un corp cu o temperatură mai ridicată.

sau

Trecerea căldurii de la un corp rece la unul mai cald are loc întotdeauna cu modificarea simultană a sistemului și mediului extern.

O altă formulare a fost dată de Kelvin:

Este imposibil de realizat o transformare al cărui unic rezultat să fie o transformare în lucru mecanic a căldurii luată de la o sursă cu o temperatură constantă.

Din examinarea datelor experimentale Planck a ajuns la concluzia că:

Este imposibil de construit o mașină termică care să producă lucrul mecanic luând căldura de la o singură sursă de căldură.

Această formulare arată imposibilitatea unui perpetuum mobile de speța a II-a.

Dacă se consideră o transformare ciclică și monoteră (în care sistemul este în contact termic cu o singură sursă de căldură) atunci din variantele (a), (b) și (c) se exclude varianta (b). Se observă că varianta (c) nu este exclusă ceea ce arată posibilitatea transformării integrale a lucrului mecanic în căldură. Situația (a) o întâlnim în cazul unei transformări ciclice monoterme reversibile. Astfel conform principiului al II - lea dacă transformarea are loc într-un sens $L \geq 0$ și $Q \leq 0$. În cazul transformării inverse $L' = -L$ și $L' \geq 0$ adică $-L \geq 0$. Rezultă că $L = 0$. Atunci și $Q = 0$.

Putem afirma că într-o transformare ciclică monotermă și reversibilă sistemul nu schimbă cu mediul exteriorul nici căldură nici lucru mecanic.

Formularea cea mai generală a principiului II a fost dată de Carathéodory:

În vecinătatea unei stări de echilibru a unui sistem termodinamic omogen există stări care nu pot fi atinse prin procese adiabatic reversibile.

5.3.2 Fundamentele matematice ale principiului al II-lea

Se numește o formă Pfaff o expresie de forma:

$$\delta\Pi = \sum_{i=1}^n X_i dx_i \quad (5.20)$$

În expresia de mai sus $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sunt variabile independente iar $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sunt funcții de variabilele independente.

O formă Pfaff se numește olonomă dacă admite un factor integrant, adică dacă există o funcție $\mu = \mu(x_1, x_2, \dots, x_n)$ astfel încât:

$$d\Phi = \mu\delta\Pi \quad (5.21)$$

să fie o diferențială totală exactă.

O formă Pfaff care nu admite un factor integrant se numește neolonomă. Ecuația Pfaff este ecuația satisfăcută de către forma Pfaff:

$$\delta\Pi = 0 \quad (5.22)$$

În cazul formelor olonome, ecuația devine:

$$d\Phi = \mu\delta\Pi = 0 \quad (5.23)$$

care are ca integrală primă $\Phi = C = \text{const.}$ Rezultă că integralele prime ale unei forme Pfaff olonome sunt date sub forma unei familii de suprafețe ce depind de un parametru C . Dacă forma Pfaff depinde de m variabile, integralele prime vor fi hipersuprafețe situate în spațiul R^m . Trebuie remarcat că hipersuprafețele respective nu se intersectează adică nu există nici un drum de la o hipersuprafață la alta pentru care $d\Pi = 0$ (Fig. 5.4).

Aceasta înseamnă că hipersuprafețele, soluții ale ecuației Pfaff nu se intersectează fiind disjuncte. În plus se demonstrează că dacă μ este un factor

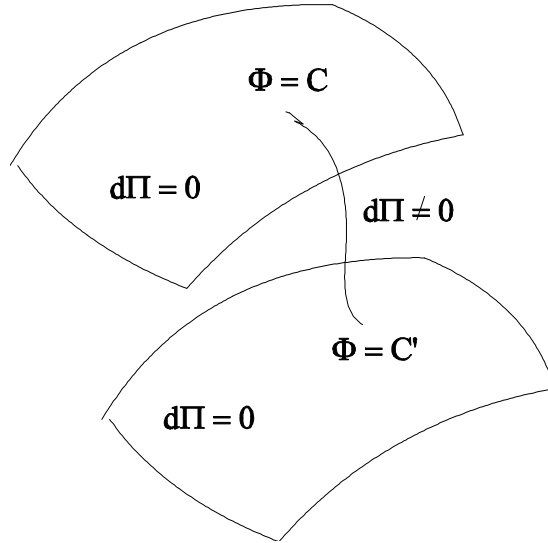


Figura 5.4: Hipersuprafețe în spațiul m dimensional ca integrale ale unei forme Pfaff olonome

integrant, atunci și $\mu G(\Phi)$ unde G este o funcție arbitrară de integrala primă Φ a funcției Pfaff este factor integrant.

Conform principiului al doilea sub forma dată de Carathéodory, în vecinătatea unei stări de echilibru există stări care sunt inaccesibile printr-un proces adiabatic reversibil. Să considerăm un sistem izolat adiabatic care este caracterizat de un număr de parametri externi $a_1, a_2, \dots, a_n$ și temperatura empirică θ . Fie $\sum^I$ o stare de echilibru. Variind coordonatele se pot efectua o mulțime de procese izentropice care trec prin stări de echilibru diferite și care generează în spațiul stărilor (spațiul stărilor este un spațiu cu axele $a_1, a_2, \dots, a_n$ și θ) o suprafață izentropă². În vecinătatea stării $\sum^I$ sistemului există o mulțime de stări de echilibru care nu pot fi atinse prin transformări izentropice. Atunci pentru a atinge astfel de stări eliminăm învelișul adiabatic lăsând sistemul să evolueze către o astfel de stare. În acest caz $\delta Q \neq 0$. Se reface din nou învelișul adiabatic după ce sistemul a ajuns într-o astfel de stare și se variază din nou parametri sistemului în mod reversibil. Se va genera o nouă suprafață izentropă. Se generează o mulțime de suprafețe izentropice care nu se intersectează una cu alta. Cum în transformările de pe

²Procesul izentrop este procesul adiabatic reversibil.

o suprafață izentropă $\delta Q = 0$ iar pentru transformările dintre două suprafețe $\delta Q \neq 0$ rezultă că forma diferențială δQ , care nu este o diferențială totală exactă, este o formă olonomă.

5.3.3 Entropia empirică

Căldura elementară δQ fiind o formă Pfaff olonomă admite un factor integrant ξ . Expresia:

$$d\Phi = \xi \delta Q \quad (5.24)$$

este o diferențială totală exactă ale cărei integrale prime $\Phi = C$ reprezintă o familie de hipersuprafețe caracterizate de parametrul C . Pe fiecare hipersuprafață este satisfăcută ecuația Pfaff $\delta\Phi = 0$. Suprafețele $\Phi = C$ sunt chiar suprafețele izentropice. Deoarece mărimea Φ este o diferențială totală exactă ea este o mărime de stare și caracterizează starea unui sistem din punct de vedere al izentropiei. Ea poartă numele de *entropie empirică*.

5.3.4 Entropia și temperatura absolută

Pentru a simplifica considerațiile care vor fi făcute se consideră un sistem simplu, coordonata generalizată fiind V iar forța generalizată $-p$. Sistemul se consideră într-o stare în care temperatura empirică este θ . Vom diviza acest sistem în două subsisteme S_1 și S_2 primul ocupând volumul V_1 iar cel de-al doilea volumul V_2 .

Se presupune că sistemului inițial i se transferă o cantitate de căldură δQ printr-un proces reversibil. Cantitatea de căldură se repartizează celor două subsisteme astfel:

$$\delta Q = \delta Q_1 + \delta Q_2 \quad (5.25)$$

unde δQ_1 este cantitatea de căldură ce revine primului sistem, iar δQ_2 este cantitatea de căldură care revine celui de-al doilea sistem.

Cum căldurile elementare sunt forme Pfaff olonome pentru fiecare dintre acestea există câte un factor integrant. Astfel putem scrie:

$$d\Phi_1 = \xi_1(V_1, \theta) \delta Q_1 \quad (5.26)$$

$$d\Phi_2 = \xi_2(V_2, \theta) \delta Q_2 \quad (5.27)$$

$$d\Phi = \xi (V_1, V_2, \theta) \delta Q \quad (5.28)$$

Atunci relația 5.25 devine:

$$d\Phi = \frac{\xi}{\xi_1} d\Phi_1 + \frac{\xi}{\xi_2} d\Phi_2 \quad (5.29)$$

Entropiile empirice Φ_1 , Φ_2 și Φ sunt funcții de stare, care la echilibru depind doar de coordonata generalizată (în cazul nostru de volum) și de temperatura empirică. Astfel:

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi_1(V_1, \theta) \\ \Phi_2 = \Phi_2(V_2, \theta) \\ \Phi = \Phi(V_1, V_2, \theta) \end{cases} \quad (5.30)$$

Dacă se consideră primele două ecuații se pot exprima volumele în funcție de entropie

$$\begin{cases} V_1 = V_1(\Phi_1, \theta) \\ V_2 = V_2(\Phi_2, \theta) \end{cases} \quad (5.31)$$

ceea ce înseamnă că factorii integranți sunt de forma:

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi_1(\Phi_1, \theta) \\ \xi_2 = \xi_2(\Phi_2, \theta) \\ \xi = \xi(\Phi_1, \Phi_2, \theta) \end{cases} \quad (5.32)$$

Rezultă că entropia empirică a sistemului se poate exprima ținând cont de relațiile 5.30 și 5.31 astfel:

$$\Phi = \Phi(\Phi_1, \Phi_2, \theta) \quad (5.33)$$

Atunci:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \Phi_1} d\Phi_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial \Phi_2} d\Phi_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} d\theta \quad (5.34)$$

Prin identificarea expresiilor 5.29 și 5.34 se obține:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \Phi_1} \right)_{\Phi_2} = \frac{\xi}{\xi_1} \quad (5.35)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \Phi_2} \right)_{\Phi_1} = \frac{\xi}{\xi_2} \quad (5.36)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)_{\Phi_2, \Phi_2} = 0 \quad (5.37)$$

Se observă că:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \Phi_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \Phi_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (5.38)$$

unde $i = 1, 2$

Atunci ținând cont de 5.35 rezultă:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\xi_1}{\xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\xi_2}{\xi} \right) = 0 \quad (5.39)$$

Rezultă că rapoartele factorilor integranți nu depind explicit de temperatura empirică θ . Aceasta se poate întâmpla în cazul în care aceștia se exprimă ca un produs de două funcții, una depinzând de temperatura empirică (și care este același pentru oricare din factorii integranți) și cealaltă de entropia empirică.

$$\begin{cases} \xi_1 = \beta(\theta) \varphi_1(\Phi_1) \\ \xi_2 = \beta(\theta) \varphi_2(\Phi_2) \\ \xi = \beta(\theta) \varphi(\Phi) \end{cases} \quad (5.40)$$

Rezultă:

$$\beta(\theta) = \frac{\xi_1}{\varphi_1(\Phi_1)} = \frac{\xi_2}{\varphi_2(\Phi_2)} = \frac{\xi}{\varphi(\Phi)} \quad (5.41)$$

Dacă cele două sisteme, indiferent de modul în care sunt alese, se află la echilibru la temperatura empirică θ , se poate defini funcția $\beta = \beta(\theta)$ independentă de sistemul considerat.

Cum ξ_i sunt factorii integranți iar φ_i sunt funcții de entropiile empirice Φ_i atunci și rapoartele $\frac{\xi_i}{\varphi_i}$ sunt factori integranți ai căldurii indiferent de forma funcțiilor φ_i . Rezultă că $\beta(\theta)$ este un factor integrant al căldurilor primite de subsistemele S_1 și S_2 și sistemul S . În concluzie indiferent de mărimea și natura sistemului aflat la temperatura θ , pentru cantitatea de căldură primită există același factor integrant. Rezultă că expresia:

$$\beta(\theta) \delta Q$$

este diferențială totală exactă, iar entropia care corespunde acestui factor integrant privilegiat este o entropie privilegiată. Se poate presupune:

$$\beta(\theta) = \frac{1}{T(\theta)} \quad (5.42)$$

unde T poartă denumirea de temperatură absolută.

Atât temperatura T cât și entropia privilegiată care se notează cu S , se numesc absolute deoarece ele au fost definite în mod absolut, fără a se face vreo referire la vreo proprietate specifică a sistemelor respective.

Se poate scrie:

$$dS = \frac{1}{T} \delta Q \quad (5.43)$$

Astfel se poate formula principiul al doilea:

Există o funcție de stare numită entropie care pentru procesele reversibile satisface relația 5.43.

Din cele discutate anterior rezultă următoarele proprietăți ale entropiei:

a) Entropia este o funcție de stare, dS este o formă diferențială totală exactă. Atunci pentru o transformare ciclică

$$\oint dS = 0 \quad (5.44)$$

indiferent de reversibilitatea sau ireversibilitatea procesului respectiv.

b) Pentru o stare arbitrară entropia este definită până la o constantă aditivă; între două stări însă variația entropiei este bine definită:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} \quad (5.45)$$

c) Entropia este o funcție aditivă.

Dacă se divide un sistem S într-o serie de subsisteme S_1 , S_2 , ..., S_n atunci:

$$\delta Q = \sum_{k=1}^n \delta Q_k \quad (5.46)$$

și

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \sum_{k=1}^n \frac{\delta Q_k}{T} = \sum_{k=1}^n dS_k \quad (5.47)$$

5.3.5 Principiul al II - lea pentru procesele ireversibile

Un mare număr de experiențe au arătat că în cazul proceselor ireversibile (așa cum sunt procesele reale) entropia variază chiar și în cazul când sistemul nu schimbă căldură cu mediul extern. Această variație a entropiei, datorită ireversibilității este întotdeauna pozitivă.

Se consideră un singur exemplu: destinderea adiabatică în vid a unui gaz ideal.

Fie două recipiente izolate adiabatic de mediul exterior. Într-unul din ele se află un gaz iar celălalt este vidat. Gazul se află în recipientul de volum V_1 la presiunea p_1 și temperatura T_1 . Recipientul vidat are volumul V_2 . Cele două recipiente comunică între ele printr-un robinet. Se deschide robinetul astfel încât gazul va ocupa și recipientul de volum V_2 . Procesul este un proces necuasistatic (deoarece se produce într-un timp scurt iar stările intermediare nu sunt stări de echilibru) și ireversibil (gazul nu se comprimă de la sine în V_1).

Procesul are loc fără schimb de căldură ($Q = 0$) iar lucrul mecanic este nul deoarece destinderea este liberă. Atunci $\Delta U = Q + L = 0$ și cum $\Delta U = C_V \Delta T$ atunci $\Delta T = 0$. Procesul este și izoterm. Se ține cont că entropia este o funcție de stare și se calculează variația de entropie considerând un proces cuasistatic reversibil izoterm în care gazul se destinde de la volumul V_1 la volumul $V_2 + V_1$. Într-un proces izoterm:

$$\delta Q = -\delta L = p dV = \frac{\nu R T}{V} dV$$

unde ν este numărul de kmoli.

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{\nu R}{V} dV$$

Rezultă:

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_1+V_2} \frac{\nu R}{V} dV = \nu R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} > 0$$

Aceiași variație de entropiei poate fi atribuită și procesului ireversibil între aceleași două stări. În procesul reversibil creșterea entropiei are loc datorită unui aport de căldură pe când în procesul ireversibil creșterea entropiei are loc fără aport de căldură. În acest ultim caz creșterea de entropie se datorește ireversibilității procesului. Atunci în cazul proceselor ireversibile se poate formula principiul al II-lea astfel:

$$dS = d_i S > 0 \quad (5.48)$$

unde indicele i se referă la ireversibilitatea procesului.

Dacă sistemul nu este izolat adiabatic atunci entropia variază și datorită schimbului de căldură:

$$d_e S = \frac{\delta Q}{T} \quad (5.49)$$

Temperatura T nu este întotdeauna temperatura sistemului (deoarece pentru stările de neechilibru prin care trece sistemul în cursul unui proces ireversibil temperatura nici nu se poate defini). Temperatura T este temperatura termostatului cu care sistemul este în contact termic și cu care schimbă căldură.

Atunci variația totală a entropiei este:

$$dS = d_e S + d_i S \quad (5.50)$$

sau

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + d_i S$$

Atunci:

$$dS > \frac{\delta Q}{T} \quad (5.51)$$

unde δQ este cantitatea de căldură schimbată de sistem în procesul ireversibil.

5.3.6 Egalitatea lui Clausius. Ecuația fundamentală a termodinamicii

Se consideră o transformare ciclică reversibilă. Deoarece entropia este o funcție de stare variația ei este nulă.

$$\oint dS = \oint \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad (5.52)$$

Egalitatea de mai sus poartă numele de *egalitatea lui Clausius*. Trebuie remarcat că dacă într-un proces ciclic oarecare este adevărată ecuația de mai sus procesul este reversibil. Pentru a deduce ecuația fundamentală a termodinamicii se pornește de la principiul întâi.

$$dU = \delta Q + \delta L \quad (5.53)$$

unde:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n A_i da_i$$

Atunci:

$$dU = TdS + \sum_{i=1}^n A_i da_i \quad (5.54)$$

5.3.7 Inegalitatea lui Clausius. Inecuația fundamentală a termodinamicii

În cazul unui proces ciclic ireversibil avem:

$$\oint dS > \oint \frac{\delta Q}{T} \quad (5.55)$$

Cum $\oint dS = 0$ rezultă:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} < 0 \quad (5.56)$$

Relația 5.56 poartă numele de *inegalitatea lui Clausius*. O consecință a acesteia este faptul că într-o incintă izolată adiabatic nu se poate desfășura un proces ciclic ireversibil. Deoarece procesul este ciclic ar trebui ca $\oint dS = 0$. Cum procesul este ireversibil ar trebui ca $\oint dS = \oint d_i S > 0$ ceea ce duce la o contradicție.

Deoarece

$$TdS > \delta Q$$

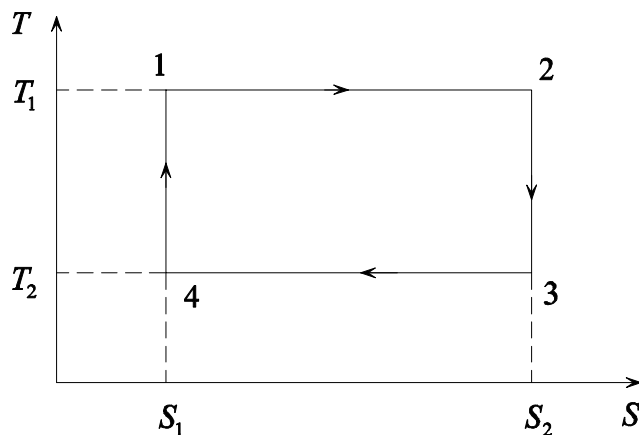


Figura 5.5: Ciclul Carnot

iar

$$\delta Q = dU - \delta L$$

atunci:

$$TdS > dU - \delta L \quad (5.57)$$

Această inegalitate pentru procesele ireversibile poate fi exprimată în cazul cel mai general care include și procesele reversibile astfel:

$$TdS \geq dU - \delta L \quad (5.58)$$

5.3.8 Ciclul Carnot reversibil

Ciclul Carnot constă din două procese izoterme și două procese adiabatice (Fig. 5.5). Notăm cu $\mathcal{L} = -L$ - lucrul mecanic efectuat de sistem asupra mediului extern.

Procesul 1-2 este o destindere izotermă în care sistemul primește căldura $Q_1 > 0$ și efectuează lucru mecanic asupra mediului ($\mathcal{L} = -L < 0$).

Procesul 2-3 este o destindere adiabatică ($Q = 0$, $S = \text{const}$). Sistemul efectuează lucru mecanic.

Procesul 3-4 este o comprimare izotermă (sistemul cedează căldură iar asupra lui mediul efectuează lucru mecanic).

Procesul 4-1 este o comprimare adiabatică în care mediul extern efectuează lucru mecanic asupra sistemului.

Pentru întreg ciclul (ținând cont de egalitatea lui Clausius) se obține:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + \int_2^3 \frac{\delta Q}{T} + \int_3^4 \frac{\delta Q}{T} + \int_4^1 \frac{\delta Q}{T} \quad (5.59)$$

Pentru cele două transformări adiabatică (în care căldura schimbată cu mediul este nulă):

$$\int_2^3 \frac{\delta Q}{T} = \int_4^1 \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Pentru transformarea izotermă 1-2:

$$\int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_1}{T_1}$$

Pentru transformarea izotermă 3-4:

$$\int_3^4 \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_2}{T_2}$$

Pe întreg ciclul se obține:

$$\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} = 0 \quad (5.60)$$

sau:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1} \quad (5.61)$$

Cu T_1 și T_2 am notat temperaturile implicate în cele două transformări. Acestea sunt de fapt temperaturile celor două surse de căldură cu care sistemul este în contact.

Cum $Q_1 > 0$ și $Q_2 < 0$ iar $\Delta U = 0$ atunci lucrul mecanic efectuat de sistem în cursul întregului ciclu este:

$$\mathcal{L} = -L = Q_1 + Q_2 = Q_1 - |Q_2| \quad (5.62)$$

Atunci randamentul ciclului Carnot este:

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} \quad (5.63)$$

Din această expresie rezultă că randamentul ciclului Carnot depinde numai de temperaturile celor două surse de căldură care determină temperaturile celor două procese izoterme și este independent de natura sistemului care-l efectuează.

În cazul ciclului Carnot ireversibil se pornește de la inegalitatea lui Clausius. Se ajunge, după un raționament asemănător cu cel de mai sus, la concluzia că:

$$\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} < 0 \quad (5.64)$$

Atunci randamentul ciclului ireversibil rezultă a fi mai mic decât în cazul ciclului reversibil:

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} < 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (5.65)$$

5.4 Aplicații ale principiului I

5.4.1 Capacități calorice și călduri latente

Conform principiului I al termodinamicii:

$$dU = \delta Q + \sum_k A_k da_k \quad (5.66)$$

În expresia de mai sus energia internă U și parametri de forță A_k depind de temperatură și de parametri externi.

Deoarece energia internă este o funcție de stare ea este o diferențială totală.

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{a_k} dT + \sum_k \left(\frac{\partial U}{\partial a_k} \right)_{T, a_{j \neq k}} da_k \quad (5.67)$$

Din relațiile 5.66 și 5.67 se obține:

$$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{a_k} dT + \sum_k \left[\left(\frac{\partial U}{\partial a_k} \right)_{T, a_{j \neq k}} - A_k \right] da_k \quad (5.68)$$

Se vor discuta următoarele cazuri:

a) *temperatura este constantă*

Atunci:

$$\delta Q = \sum_k \left[\left(\frac{\partial U}{\partial a_k} \right)_{T, a_j \neq k} - A_k \right] da_k \quad (5.69)$$

Mărimile:

$$\lambda_k = \left(\frac{\partial U}{\partial a_k} \right)_{T, a_j \neq k} - A_k \quad (5.70)$$

sunt căldurile latente asociate coordonatelor generalizate a_k . Aceste mărimi se utilizează pentru a calcula cantitatea de căldură schimbată de sistem cu mediul extern când sistemul își modifică un parametru de poziție fără ca el să-și modifice temperatura.

b) *parametri externi sunt constanți*

Deoarece $da_i = 0$:

$$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{a_k} dT \quad (5.71)$$

Se definește capacitatea calorică când coordonatele generalizate sunt constante prin relația:

$$C_{a_k} = \left(\frac{\delta Q}{\partial T} \right)_{a_k} = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{a_k} \quad (5.72)$$

Se pot defini căldurile molare la parametri externi constanți:

$$C_{\mu, \{a_k\}} = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\delta Q}{\partial T} \right)_{a_k} = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{a_k} \quad (5.73)$$

5.4.2 Entalpia

Dacă se alege ca parametri independenți temperatura și parametri de forță pornind de la expresia primului principiu al termodinamicii (5.66) se poate scrie:

$$\delta Q = dU - \sum_k A_k da_k = d \left(U - \sum_k A_k a_k \right) + \sum_k a_k dA_k \quad (5.74)$$

Mărima

$$H = U - \sum_k A_k a_k \quad (5.75)$$

se numește *entalpie*. Aceasta este o funcție de temperatură și de parametri de forță $H(T, A_k)$. Ea este o diferențială totală exactă.

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_{A_k} dT + \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial A_k} \right)_{T, A_{i \neq k}} dA_k \quad (5.76)$$

Atunci:

$$\delta Q = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_{A_k} dT + \sum_k \left[\left(\frac{\partial H}{\partial A_k} \right)_{T, A_{i \neq k}} + a_k \right] dA_k \quad (5.77)$$

Astfel se poate defini capacitatea calorică a sistemului la parametri de forță constanți:

$$C_{A_k} = \left(\frac{\delta Q}{\partial T} \right)_{A_k} = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_{A_k} \quad (5.78)$$

și căldura molară la parametri de forță constanți :

$$C_{\mu, \{A_k\}} = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_{A_k} \quad (5.79)$$

Se pot defini și căldurile latente asociate parametrilor de forță A_k :

$$\Lambda_k = \left(\frac{\delta Q}{\partial A_k} \right)_{T, A_{i \neq k}} = \left(\frac{\partial H}{\partial A_k} \right)_{T, A_{i \neq k}} + a_k \quad (5.80)$$

Ele caracterizează schimburile de căldură dintre sistem și mediu atunci când un parametru de forță variază iar temperatura este constantă.

Dacă parametri de forță sunt constanți ($dA_k = 0$) din relația 5.74 rezultă că:

$$\delta Q = dH \quad (5.81)$$

5.4.3 Aplicații în cazul fluidelor

O importantă particularizare o prezintă fluidele pentru care forța generalizată este $A = -p$ iar coordonata generalizată $a = V$. Aceasta înseamnă că energia internă și presiunea pot fi exprimate în funcție de volum și temperatură:

$$U = U(V, T) \quad (5.82)$$

$$p = p(V, T) \quad (5.83)$$

În acest caz:

$$\begin{aligned} \delta Q = dU - \delta L &= \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV + p dV \\ \delta Q &= \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] dV \end{aligned} \quad (5.84)$$

Se definește capacitatea calorică a sistemului la volum constant:

$$C_V = \left(\frac{\delta Q}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad (5.85)$$

și căldura latentă asociată volumului:

$$\lambda = \left(\frac{\delta Q}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \quad (5.86)$$

Astfel pentru expresia căldurii schimbate de sistem cu mediul extern se obține:

$$\delta Q = C_V dT + \lambda dV \quad (5.87)$$

Dacă se consideră ca parametri independenți temperatura și presiunea

$$\delta Q = dU + p dV = dU + d(pV) - V dp \quad (5.88)$$

$$\delta Q = d(U + pV) - V dp \quad (5.89)$$

Cum:

$$H = U + pV \quad (5.90)$$

relația 5.89 se mai poate scrie:

$$\delta Q = dH - V dp \quad (5.91)$$

Deoarece:

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T dp \quad (5.92)$$

relația 5.91 devine:

$$\delta Q = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT + \left[\left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T - V \right] dp \quad (5.93)$$

Astfel capacitatea calorică la presiune constantă este:

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p \quad (5.94)$$

iar căldura latentă asociată presiunii este:

$$\Lambda_p = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T - V \quad (5.95)$$

Cazul gazului ideal

Prin gaz ideal se înțelege un gaz a cărui energie internă nu depinde decât de temperatură (în afară de masă).

$$U = U(T) \quad (5.96)$$

În cazul gazului ideal pentru o cantitate egală cu un kmol ecuația de stare este:

$$pV = RT \quad (5.97)$$

În acest caz:

$$\delta Q = dU + p dV = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + p dV = C_{\mu V} dT + p dV \quad (5.98)$$

Se utilizează notația $C_{\mu V}$ pentru a specifica faptul că este vorba de căldura molară la volum constant.

Deoarece $H = U + pV = U + RT$ se observă că entalpia este în acest caz o funcție numai de temperatură. Atunci:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = 0 \quad (5.99)$$

iar relația 5.93 devine:

$$\delta Q = C_{\mu p} dT - V dp \quad (5.100)$$

Din relația 5.98 rezultă:

$$\left(\frac{\delta Q}{\partial T}\right)_p = C_{\mu V} + p \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad (5.101)$$

Din (5.101) rezultă relația lui Robert Mayer

$$C_{\mu p} = C_{\mu V} + p \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{RT}{p}\right) = C_{\mu V} + R \quad (5.102)$$

5.4.4 Procese cuasistatice reversibile fundamentale

Discuția acestor procese va fi limitată la cazul unui fluid și se vor particulariza rezultatele obținute pentru gazul ideal.

Procesul politrop

Procesul politrop este procesul în care capacitatea calorică este constantă.

Atunci cantitatea de căldură schimbată cu mediul în cazul unui proces infinitezimal se poate scrie:

$$\delta Q = C dT$$

Cum:

$$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV$$

Atunci:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \frac{dV}{dT}$$

astfel încât:

$$C = C_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \frac{dV}{dT} \quad (5.103)$$

În cazul în care $p = \text{const}$ ecuația de mai sus devine:

$$C_p = C_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (5.104)$$

Din relația 5.103 rezultă:

$$C - C_V = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \frac{dV}{dT}$$

iar din 5.104

$$C_p - C_V = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

Se face raportul ultimelor două relații și se obține:

$$\frac{C - C_V}{C_p - C_V} = \frac{dV}{dT} \frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p}$$

de unde rezultă:

$$dT + \left(\frac{C_p - C_V}{C_V - C} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p dV = 0 \quad (5.105)$$

Deoarece $T = T(p, V)$

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_V dp + \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p dV \quad (5.106)$$

relația 5.105 devine:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_V dp + \left(\frac{C_p - C_V}{C_V - C} + 1 \right) \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p dV = 0 \quad (5.107)$$

sau:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V dp + \left(\frac{C_p - C}{C_V - C}\right) \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV = 0 \quad (5.108)$$

Notăm:

$$n = \frac{C_p - C}{C_V - C} \quad (5.109)$$

Acest raport poartă numele de indice politropic. Atunci ecuația 5.108 se poate scrie:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V dp + n \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV = 0 \quad (5.110)$$

În cazul gazului perfect pentru 1 kmol de gaz se aplică ecuația de stare dată de 5.97 și rezultă:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = \frac{V}{R} \quad (5.111)$$

De asemenea

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = \frac{p}{R} \quad (5.112)$$

Atunci relația 5.110 devine:

$$\frac{dp}{p} + n \frac{dV}{V} = 0 \quad (5.113)$$

Prin integrare se obține ecuația transformării politrope:

$$pV^n = \text{const} \quad (5.114)$$

Din relația 5.109 se poate exprima capacitatea calorică a procesului politrop în funcție de n :

$$C = \frac{n - \gamma}{n - 1} C_V \quad (5.115)$$

Lucrul mecanic în procesele politrope se poate calcula pornind de la ecuația acestuia. Considerând că sistemul evoluează din starea 1 în starea 2:

$$pV^n = p_1 V_1^n = p_2 V_2^n \quad (5.116)$$

Atunci:

$$L = - \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1^n}{V^n} dV = \frac{p_1 V_1^n (V_2^{-n+1} - V_1^{-n+1})}{n-1} \quad (5.117)$$

$$L = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{n-1} = \frac{\nu R T_2 - \nu R T_1}{n-1} \quad (5.118)$$

Procese izentropice

Procese izentropice sunt procesele adiabatic reversibile. În aceste procese capacitatea calorică este nulă deoarece ele se desfășoară fără schimb de căldură. Atunci din relația 5.109 se obține:

$$n = \frac{C_p}{C_V} = \gamma \quad (5.119)$$

Ecuția procesului pentru gazul ideal este:

$$pV^\gamma = \text{const} \quad (5.120)$$

Lucrul mecanic se calculează ca în cazul procesului politrop. Din acest motiv expresia acestuia este analoagă cu cea a procesului politrop în care n se înlocuiește cu γ . Raportul C_p/C_V numit exponent adiabatic are valoarea 5/3 pentru gazele monoatomice.

Procese izoterme

Acestea sunt procesele în care $T = \text{const}$, ($dT = 0$); rezultă $C = \infty$. În ceea ce privește indicele politropic trebuie remarcat că din ecuația proceselor izoterme:

$$pV = \text{const} \quad (5.121)$$

rezultă $n = 1$.

Se aplică primul principiu și se ține seama că $dU = 0$; rezultă:

$$\delta Q = -\delta L$$

Lucrul mecanic în acest proces este:

$$L = - \int_1^2 p dV = - \int_1^2 \nu RT \frac{dV}{V} = \nu RT \ln \frac{V_1}{V_2} = \nu RT \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (5.122)$$

Procese izobare

Acestea sunt procesele în care presiunea este constantă. Rezultă $n = 0$.

Procele izocore

Acestea sunt procesele în care $V = \text{const.}$ Dacă nu există altă coordonată generalizată în afară de volum, lucrul mecanic este nul; astfel $dU = \delta Q$ iar indicele politropic este

$$n = \frac{C_p - C}{C_V - C} = \infty \quad (5.123)$$

deoarece $C = C_V$.

5.5 Funcții caracteristice

5.5.1 Funcții caracteristice

Se numește funcție caracteristică o funcție cu ajutorul căreia se poate determina starea de echilibru a sistemului termodinamic.

Referindu-ne la stările de echilibru acestea sunt bine determinate dacă se cunosc valorile pe care le iau parametri externi (coordonatele generalizate) și temperatura. Ecuatiile caracteristice ale sistemului ?? și ?? dau parametri de forță și energia internă în funcție de temperatură și parametri externi.

Totuși o astfel de reprezentare nu este suficientă deoarece de multe ori ca variabile independente pot să intervină și parametri de forță. Acest lucru trebuie luat în considerare căci anumite procese termodinamice se desfășoară în condiții în care sistemul este în contact cu anumite rezervoare care fac ca anumiți parametri intensivi să fie menținuți constanți (temperatura, presiunea).

Energia internă

Din ecuația fundamentală a termodinamicii (5.54) rezultă că energia internă poate fi exprimată în funcție de entropie și coordonatele generalizate ale sistemului:

$$U = U(S, a_k) \quad (5.124)$$

Ecuația 5.124 poartă numele de ecuație fundamentală energetică. Diferențind rezultă:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{a_i} dS + \sum_k \left(\frac{\partial U}{\partial a_k} \right)_{a_i \neq k, S} da_k \quad (5.125)$$

Se identifică expresiile 5.54 și 5.125 și rezultă:

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{a_i} \quad (5.126)$$

$$A_k = \left(\frac{\partial U}{\partial a_k} \right)_{a_i \neq k, S} \quad (5.127)$$

Folosirea funcției U ca funcție caracteristică este incomodă deoarece pentru a scrie o relație de forma 5.124 este necesar să se cunoască dependența lui U de S , entropia fiind o mărime ce nu poate fi măsurată direct.

Entropia

Din egalitatea fundamentală a termodinamicii rezultă:

$$dS = \frac{dU - \sum_k A_k da_k}{T} \quad (5.128)$$

Ecuația 5.128 sugerează alegerea variabilelor U și a_k ca variabile independente pentru precizarea stărilor de echilibru. Atunci:

$$S = S(U, a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (5.129)$$

Ecuația 5.129 poartă numele de ecuație fundamentală entropică.

Astfel:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{a_i} dU + \sum_k \left(\frac{\partial S}{\partial a_k} \right)_{a_i \neq k, U} da_k \quad (5.130)$$

Se compară expresia 5.128 cu 5.130 și rezultă:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{a_k} \quad (5.131)$$

$$-\frac{A_k}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial a_k} \right)_{a_{i \neq k}, U} \quad (5.132)$$

Prima relație este ecuația calorică de stare, iar relațiile 5.132 reprezintă ecuațiile termice de stare.

Energia liberă

Pentru a avea ca variabile independente temperatura și coordonatele generalizate se introduce funcția caracteristică denumită energie liberă.

$$F = U - TS \quad (5.133)$$

Rezultă:

$$dF = -SdT + \sum_k A_k da_k \quad (5.134)$$

Cum

$$F = F(T, a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (5.135)$$

Se diferențiază

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{a_i} dT + \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial a_k} \right)_{T, a_{i \neq k}} da_k \quad (5.136)$$

și se identifică coeficienții diferențialelor din 5.134 și 5.136:

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{a_i} \quad (5.137)$$

$$A_k = \left(\frac{\partial F}{\partial a_k} \right)_{T, a_{i \neq k}} \quad (5.138)$$

În plus se observă că:

$$U = F + TS = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{a_i} \quad (5.139)$$

Relația 5.139 este cunoscută sub denumirea de ecuația lui Gibbs-Helmholtz.

Entalpia

Dacă se aleg ca parametri independenți entropia și parametri de forță, entalpia este dată de expresia:

$$H = U - \sum_k A_k a_k \quad (5.140)$$

Atunci:

$$dH = TdS - \sum_k a_k dA_k \quad (5.141)$$

Deoarece $H = H(S, A_k)$:

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_{A_i} dS + \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial A_k} \right)_{S, A_{i \neq k}} dA_k \quad (5.142)$$

Din 5.141 și 5.142 rezultă:

$$T = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_{A_i} \quad (5.143)$$

$$a_k = - \left(\frac{\partial H}{\partial A_k} \right)_{S, A_{i \neq k}} \quad (5.144)$$

Se ține cont de relațiile 5.140 și 5.144 și se obține:

$$U = H + \sum_k A_k a_k = H - \sum_k A_k \left(\frac{\partial H}{\partial A_k} \right)_{S, A_{i \neq k}} \quad (5.145)$$

Entalpia liberă

Când variabilele independente sunt temperatura și parametri de forță, se introduce funcția caracteristică entalpia liberă definită astfel:

$$G = H - TS \quad (5.146)$$

Atunci:

$$dG = -SdT - \sum_k a_k dA_k \quad (5.147)$$

Deoarece $G = G(T, A_k)$ atunci:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{A_i} dT + \sum_k \left(\frac{\partial G}{\partial A_k} \right)_{T, A_{i \neq k}} dA_k \quad (5.148)$$

Din 5.147 și 5.148 rezultă:

$$S = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{A_i} \quad (5.149)$$

$$a_k = - \left(\frac{\partial G}{\partial A_k} \right)_{T, A_{i \neq k}} \quad (5.150)$$

Se ține cont de relațiile 5.146 și 5.150 și se obține:

$$H = G + TS = G - T \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{A_i} \quad (5.151)$$

5.5.2 Relațiile lui Maxwell

Se consideră pentru exemplificare cazul unui fluid. Așa cum s-a mai precizat, în acest caz avem un singur parametru de poziție $a = V$ și unul de forță $A = -p$.

Astfel relația 5.54 se scrie:

$$dU = TdS - pdV \quad (5.152)$$

Cum dU este o diferențială totală exactă

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = - \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V \quad (5.153)$$

În același mod se obține diferențiala energiei libere:

$$dF = -SdT - pdV \quad (5.154)$$

Rezultă:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \quad (5.155)$$

Diferențiala entalpiei este:

$$dH = TdS + Vdp \quad (5.156)$$

Rezultă:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p \quad (5.157)$$

Diferențiala entalpiei libere este:

$$dG = -SdT + Vdp \quad (5.158)$$

Rezultă:

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad (5.159)$$

Relațiile 5.153, 5.155, 5.157, 5.159 poartă numele de relațiile lui Maxwell și sunt relații între diverse derivate parțiale ale parametrilor sistemului.

5.5.3 Aplicații ale relațiilor Maxwell

Din punct de vedere aplicativ este importantă cunoașterea relațiilor lui Maxwell care conțin derivatele parțiale ale unor parametri termodinamici. În cazul unui fluid toate aceste derivate pot fi exprimate pornind de la trei derivate parțiale de bază. Alegerea acestora depinde de posibilitățile de a fi măsurate experimental. Practic aceste derivate parțiale considerate de bază intervin prin intermediul coeficienților calorigici. Aceștia sunt:

a) Capacitatea calorică la presiune constantă:

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \quad (5.160)$$

b) Coeficientul de dilatare izobar:

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (5.161)$$

c) Coeficientul de compresibilitate izoterm:

$$K_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad (5.162)$$

Pentru exemplificare se vor considera o serie de procese care pot fi caracterizate cu ajutorul coeficienților calorici definiți mai sus.

Încălzire izocoră

În cursul acestui proces volumul se menține constant iar presiunea este mărită lent. Atunci variația de temperatură este dată de:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_V dp \quad (5.163)$$

Se ține cont că:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_V = -\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T}{\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p} \quad (5.164)$$

Pentru a exprima derivata parțială $(\partial V / \partial p)_T$ se consideră relația 5.162. Se utilizează și relația de definiție 5.161, iar 5.164 devine:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_V = \frac{K_T}{\alpha} \quad (5.165)$$

Astfel:

$$dT = \frac{K_T}{\alpha} dp \quad (5.166)$$

Compresie adiabatică

În cazul acestei transformări sistemul nu schimbă căldură cu mediul extern dar temperatura sa se modifică. Într-o transformare reversibilă entropia sistemului nu se schimbă. Deoarece $U = U(S, V)$:

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = T(S, p) \quad (5.167)$$

Atunci variația temperaturii, când entropia este constantă se scrie ca:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S dp \quad (5.168)$$

Cum:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S = - \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T}{\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p} \quad (5.169)$$

Pentru a evalua derivata parțială $(\partial S / \partial p)_T$ se ține cont de relația Maxwell 5.153 iar pentru derivata parțială $(\partial S / \partial T)_p$ de relația de definiție 5.160. Atunci:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_V = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p}{\frac{C_p}{T}} = \frac{\alpha VT}{C_p} \quad (5.170)$$

Rezultă:

$$dT = \frac{\alpha VT}{C_p} dp \quad (5.171)$$

Compresia izotermă

Fie un sistem menținut la o temperatură constantă și căruia i se modifică lent volumul. Se consideră că toți parametri pot fi exprimați în funcție de temperatură și presiune. Rezultă că și entropia este o funcție de temperatură și presiune $S = S(p, T)$.

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T dp \quad (5.172)$$

Se ține cont de relația Maxwell 5.159 și se obține:

$$dS = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dp = -\alpha V dp \quad (5.173)$$

De asemenea $U = U(p, T)$:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial p} \right)_p dp \quad (5.174)$$

Cum $dU = TdS - pdV$ relația 5.174 devine:

$$dU = \left[T \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T - p \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \right] dp$$

$$dU = [-\alpha VT + pV K_T] dp \quad (5.175)$$

Destinderea liberă

În cazul acestui proces volumul V este variat brusc de la valoarea V_i la V_f . Este esențial că energia internă nu variază. Cum $T = T(U, V)$, variația temperaturii este:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_U dV \quad (5.176)$$

Dar:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_U = - \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T}{\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V} = - \frac{T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T - p}{C_V} = - \frac{-p - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V}{C_V}$$

Rezultă:

$$dT = \left(\frac{p}{C_V} + \frac{T\alpha}{C_V K_T} \right) dV \quad (5.177)$$

5.5.4 Potențiale termodinamice

Unele funcții caracteristice sunt denumite potențiale termodinamice deoarece în stările de echilibru ajung să aibă valori minime. Pentru a defini aceste funcții se scrie lucrul mecanic astfel:

$$\delta L = \delta \tilde{L} - p dV \quad (5.178)$$

unde $\delta \tilde{L}$ este lucrul mecanic efectuat de alte forțe generalizate în afară de cele de presiune.

Potențial termodinamic este orice funcție caracteristică a cărei variație în procesele reversibile este egală cu $\delta \tilde{L}$.

Energia internă

Din expresia variației energiei interne ca funcție caracteristică $U(S, a_k)$

$$dU = TdS + \delta\tilde{L} - pdV$$

rezultă că energia internă este un potențial termodinamic când entropia și volumul sunt constante.

Energia liberă

Variația energiei libere se pune sub următoarea formă:

$$dF = dU - TdS - SdT = \delta L - SdT = \delta\tilde{L} - pdV - SdT \quad (5.179)$$

Rezultă că energia liberă este un potențial termodinamic când temperatura și volumul sunt constante.

Entalpia

Se observă că:

$$dU = TdS + \delta\tilde{L} - p dV \quad (5.180)$$

Atunci:

$$\delta\tilde{L} = d(U + pV) - TdS - Vdp = dH - TdS - Vdp \quad (5.181)$$

Entalpia este un potențial termodinamic când entropia și presiunea sunt constante.

Entalpia liberă

Din 5.180 se obține după câteva operații:

$$\delta\tilde{L} = d(U + pV - TS) - Vdp + SdT \quad (5.182)$$

sau

$$\delta\tilde{L} = dG - Vdp + SdT \quad (5.183)$$

Rezultă că entalpia liberă este un potențial termodinamic când presiunea și temperatura sunt constante.

5.5.5 Condiții de echilibru

Creșterea entropiei

Pentru studiul condițiilor de echilibru ale sistemelor termodinamice se pornește de la inegalitatea fundamentală a termodinamicii

$$\int \frac{\delta Q}{T} \leq S_f - S_i$$

Trebuie remarcat că temperatura T nu este temperatura sistemului ci temperatura termostatului cu care sistemul este în contact (este posibil ca în cursul unui proces ireversibil temperatura sistemului să nu poată fi definită deoarece stările intermediare nu sunt stări de echilibru). Dacă sistemul este izolat:

$$S_i \leq S_f \quad (5.184)$$

Această inegalitate arată că în cursul proceselor ireversibile entropia sistemului crește.

Din inegalitatea 5.184 se poate deduce afirmația: starea finală de echilibru este realizată atunci când entropia are valoare maximă.

Principiul minimului energiei interne

Condiția de maxim a entropiei într-o stare de echilibru este echivalentă cu condiția de minim a energiei interne.

Să presupunem că atunci când entropia este maximă energia internă nu ar fi minimă. Atunci se poate extrage energie din sistem sub formă de lucru mecanic, situație în care entropia nu ar varia. Dând apoi sistemului energie sub formă de căldură, pentru a aduce sistemul în aceeași stare energetică, rezultă că entropia ar crește fapt ce ar contrazice afirmația că în starea inițială energia nu ar fi minimă.

Rezultă că în starea de echilibru energia internă este minimă.

Din punct de vedere matematic minimul energiei se exprimă prin condițiile:

$$dU = 0 ; d^2U > 0$$

Procese în care sistemul este în contact termic cu un termostat

În acest caz energia internă a sistemului se modifică prin schimbarea doar de căldură cu un termostat.

Pentru a se determina condițiile matematice satisfăcute în starea de echilibru se impun condițiile de echilibru pentru sistemul compus din sistemul propriu zis și termostat.

$$d(U + U_r) = 0, \quad d^2(U + U_r) > 0$$

unde indicele r se referă la termostat.

În plus, în starea de echilibru:

$$d(S + S_r) = 0 \quad ; \quad dS_r = -dS$$

Deoarece sistemul este în contact cu termostatul variația energiei termostatlui se datorează schimbului de căldură cu sistemul. Astfel:

$$dU_r = T_r dS_r$$

Cum $dU = -dU_r$ atunci:

$$dU - T_r dS = 0$$

Deoarece temperatura termostatlui este constantă

$$d(U - T_r S) = 0 \tag{5.185}$$

Cum sistemul se află în echilibru cu termostatul, temperatura sistemului este egală cu temperatura termostatlui:

$$T_r = T$$

Astfel relația 5.185 devine:

$$d(U - TS) = 0$$

sau:

$$dF = 0 \tag{5.186}$$

Se va arăta în continuare că starea de echilibru a unui astfel de sistem este una în care energia liberă este minimă, deoarece condiția 5.186 arată doar că

în aceasta energia liberă atinge un extrem. Pentru aceasta se pornește de la relația:

$$d^2(U + U_r) = d^2U + d^2U_r > 0$$

Dar

$$dU_r = T_r dS_r$$

și cum $T = T_r = \text{const}$

$$d^2U_r = T d^2S_r$$

atunci:

$$d^2U + T d^2S_r > 0 \quad (5.187)$$

Sistemul plus termostatul fiind într-o stare de echilibru valoarea entropiei acestui ansamblu este maximă:

$$d^2(S_r + S) < 0 \quad ; \quad d^2S_r < -d^2S$$

Atunci din relația 5.187 se obține:

$$d^2U - T d^2S = d^2(U - TS) = d^2F > 0 \quad (5.188)$$

Rezultă că în starea de echilibru energia liberă a sistemului este minimă

Deoarece temperatura este constantă în cazul unei transformări suferite de sistem

$$\frac{1}{T} \int_i^f \delta Q \leq S_f - S_i \quad (5.189)$$

sau

$$\int_i^f \delta Q \leq TS_f - TS_i \quad (5.190)$$

Primul termen din (5.190) fiind căldura schimbată de sistem în cursul transformării aplicând primul principiu se obține:

$$Q = U_f - U_i - L \leq TS_f - TS_i$$

sau

$$-L \leq (U_i - TS_i) - (U_f - TS_f)$$

de unde

$$-L \leq F_i - F_f = -(F_f - F_i) = -\Delta F \quad (5.191)$$

Cum lucrul mecanic efectuat de sistem este $\mathcal{L} = -L$ atunci:

$$\mathcal{L} \leq F_i - F_f$$

Inegalitatea arată că lucrul mecanic cedat de sistem mediului extern nu poate depăși o valoare maximă dată de diferența dintre energia liberă a stării inițiale și finale. Dacă coordonatele generalizate sunt constante, lucrul mecanic este nul și rezultă că:

$$F_f \leq F_i \quad (5.192)$$

În condițiile în care temperatura este constantă iar variațiile variabilelor de poziție sunt nule, energia liberă atinge un minim atunci când sistemul atinge echilibrul.

Procese în care presiunea este constantă

Acest proces se realizează când sistemul este în contact cu un rezervor ce are presiunea constantă. În acest proces energia sistemului se modifică doar datorită efectuării de lucru mecanic de către sistem asupra rezervorului sau a rezervorului asupra sistemului. Din acest motiv variația energiei interne a rezervorului se datorează variației volumului:

$$dU_r = -p_r dV_r$$

Se pune condiția de minim a energiei interne pentru ansamblul format din sistem și rezervor:

$$d(U + U_r) = dU - p_r dV_r = 0 \quad (5.193)$$

Cum variația volumului rezervorului este egală dar de semn contrar cu variația volumului sistemului:

$$dV_r = -dV$$

relația 5.193 devine:

$$d(U + p_r V) = 0 \quad (5.194)$$

Sistemul fiind în echilibru cu rezervorul considerat $p_r = p$. Atunci:

$$d(U + pV) = 0$$

adică:

$$dH = 0 \quad (5.195)$$

Pentru a vedea natura punctului de extrem al entalpiei vom porni de la condiția:

$$d^2(U + U_r) = d^2U + d^2U_r > 0$$

Dar

$$dU_r = -p_r dV_r = p dV.$$

Cum presiunea este un parametru constant atunci:

$$d^2U_r = p d^2V$$

Astfel

$$d^2U + p d^2V = d^2(U + pV) > 0$$

Rezultă că pentru un sistem în care presiunea e menținută constantă și care nu schimbă cu mediul extern căldură, la echilibru entalpia este minimă.

Procese în care sistemul este în contact cu un rezervor de temperatură și presiune

Sistemul fiind în contact cu acest rezervor poate schimba căldură și lucru mecanic cu acesta.

Se scrie condiția de echilibru pentru sistemul compus din sistem și rezervor

$$d(U + U_r) = dU + T_r dS_r - p_r dV_r = 0$$

Cum $dS_r = -dS$ și $dV_r = -dV$, atunci:

$$d(U + U_r) = dU - T_r dS + p_r dV = 0$$

Sistemul fiind în echilibru cu rezervorul considerat $T_r = T$ și $p_r = p$.
Rezultă:

$$d(U - TS + pV) = 0$$

sau:

$$dG = 0 \quad (5.196)$$

Pentru a arăta că în această stare entalpia liberă este minimă vom porni de la condiția de minim a energiei interne a ansamblului format din sistem și termostat:

$$d^2(U + U_r) = d^2U + d^2U_r > 0$$

De aici rezultă:

$$d^2U > -d^2U_r \quad (5.197)$$

Deoarece sistemul schimbă căldură și lucru mecanic cu rezervorul atunci variația energiei interne a rezervorului este:

$$dU_r = T_r dS_r - p_r dV_r$$

Deoarece $T_r = T = \text{const}$, $p_r = p = \text{const}$ și $dV_r = -dV$ rezultă:

$$dU_r = T dS_r + p dV$$

și

$$d^2U_r = T d^2S_r + p d^2V \quad (5.198)$$

Atunci ținând cont de relația 5.197 se obține:

$$dU^2 > -T d^2S_r - p d^2V \quad (5.199)$$

$$dU^2 + T d^2S_r + p d^2V > 0 \quad (5.200)$$

Deoarece la echilibru

$$d^2(S + S_r) < 0$$

$$d^2 S_r < -d^2 S$$

relația 5.200 devine:

$$d^2 U - T d^2 S + p d^2 V > 0$$

Atunci:

$$d^2(U - TS + p dV) = dG^2 > 0$$

Rezultă că dacă sistemul este menținut la presiune și temperatură constantă entalpia liberă este minimă în starea de echilibru.

Dacă sistemul fizic efectuează un lucru mecanic δL are loc o variație a energiei totale a sistemului și a rezervorului

$$\delta L = d(U + U_r) = dU + T_r dS_r - p_r dV_r \quad (5.201)$$

sau

$$\delta L = dU + T dS_r - p dV_r \quad (5.202)$$

deoarece $T_r = T$ și $p_r = p$

Cum într-o transformare

$$d(S + S_r) \geq 0 \quad (5.203)$$

iar $dV_r = -dV$ atunci:

$$\delta L \geq dU - T dS + p dV \quad (5.204)$$

$$-\delta L \leq -d(U - TS + pV) = -dG \quad (5.205)$$

Notând cu $\mathcal{L} = -L$ lucrul mecanic efectuat de sistem, din relația 5.205 rezultă:

$$\mathcal{L} = -L \leq -(G_f - G_i) \quad (5.206)$$

Aceasta înseamnă că lucrul mecanic efectuat de un sistem în care temperatura și presiunea sunt constante este mai mic sau cel mult egal cu minus variația entalpiei libere.

5.6 Dependența mărimilor termodinamice de masă

Există o serie de cazuri în care masa sistemului variază în cursul procesului respectiv.

Pentru simplificarea prezentării se admite situația în care există o singură variabilă de poziție (volumul V) și o singură variabilă de forță (presiunea - p), iar ca funcție caracteristica entropia:

$$S = S(U, V, M) \quad (5.207)$$

În relația de mai sus apar numai mărimi extensive. Se împarte sistemul în n părți identice. Atunci, pentru fiecare parte energia internă este U/n , volumul V/n , masa M/n , și entropia S/n . Dacă reunim m din cele n părți pentru noul sistem obținut entropia devine mS/n , energia internă mU/n , volumul mV/n și masa mM/n .

Rezultă

$$S\left(\frac{m}{n}U, \frac{m}{n}V, \frac{m}{n}M\right) = \frac{m}{n}S(U, V, M) \quad (5.208)$$

Notând cu $k = m/n$ atunci:

$$S(kU, kV, kM) = kS(U, V, M) \quad (5.209)$$

Se obține o condiție pe care o satisface o funcție omogenă de gradul I.

Derivând relația de mai sus în raport cu k se obține:

$$S(U, V, M) = \frac{\partial S}{\partial(kU)}U + \frac{\partial S}{\partial(kV)}V + \frac{\partial S}{\partial(kM)}M \quad (5.210)$$

Punând $k = 1$ relația 5.210 devine:

$$S(U, V, M) = \frac{\partial S}{\partial U}U + \frac{\partial S}{\partial V}V + \frac{\partial S}{\partial M}M \quad (5.211)$$

Se derivează relația 5.209 în raport cu volumul V și se obține:

$$k \frac{\partial S(kU, kV, kM)}{\partial(kV)} = k \frac{\partial S(U, V, M)}{\partial V} \quad (5.212)$$

Relația 5.212 arată că derivata în raport cu volumul este o mărime intensivă, deoarece are aceiași valoare când sistemul este fracționat. Un raționament similar se poate face și pentru derivatele entropiei în raport cu U sau $\dot{M}$.

Diferențiala relației 5.207 este:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial U} dU + \frac{\partial S}{\partial V} dV + \frac{\partial S}{\partial M} dM \quad (5.213)$$

Expresiile $\partial S/\partial U$ și $\partial S/\partial V$ se pot obține din relația 5.129 în care unul din parametrii de forță este presiunea; ele au fost obținute în condițiile în care masa este constantă.

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T} \quad (5.214)$$

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{p}{T} \quad (5.215)$$

Să revenim la cazul când masa este variabilă; ținând cont că derivata entropiei în raport cu masa este o mărime intensivă se poate scrie:

$$\frac{\partial S}{\partial M} = -\frac{\mu}{T} \quad (5.216)$$

unde μ poartă numele de potențial chimic.

Faptul că derivatele parțiale ale entropiei sunt mărimi intensive duce la concluzia că mărimile T , p , μ sunt mărimi intensive. Folosind relațiile 5.214, 5.215, 5.216 relația 5.213 devine:

$$dS = \frac{dU + pdV - \mu dM}{T} \quad (5.217)$$

De aici

$$dU = TdS - pdV + \mu dM \quad (5.218)$$

Rezultă că în cazul sistemelor deschise (în care masa este variabilă) schimbul de masă determină modificarea energiei interne.

Folosind 5.214, 5.215, 5.216 relația 5.211 devine:

$$S = \frac{U}{T} + \frac{pV}{T} - \frac{\mu M}{T} \quad (5.219)$$

Din această relație se poate deduce potențialul chimic

$$\mu = \frac{U + pV - TS}{M} = \frac{G}{M} = g(p, T) \quad (5.220)$$

Se observă că potențialul chimic este entalpia liberă a unității de masă.

5.7 Echilibre și tranziții de fază

5.7.1 Echilibru de fază

Până acum discuția s-a axat asupra unor sisteme omogene, adică asupra unor sisteme în care proprietățile sunt aceleași în diverse puncte ale sistemului.

În continuare ne vom referi la sisteme eterogene. Acestea sunt formate din mai multe subsisteme omogene sau faze.

Prin fază înțelegem orice parte fizic distinctă separată de celelalte părți ale sistemului de o suprafață bine definită, pe care diverse mărimi suferă discontinuități.

Un sistem format dintr-o singură fază poartă numele de sistem monofazic, iar dacă în el există două faze sistemul se numește bifazic.

De exemplu un sistem monofazic poate fi un gaz ideal, un lichid pur, o soluție omogenă.

Ca exemple de sisteme bifazice se pot menționa: sistemul apă-vapori de apă, sarea solidă în contact cu o soluție concentrată de sare, suspensii coloidale lichide în alte lichide.

Condițiile de echilibru a două faze sunt:

a) Cele două faze trebuie să fie în echilibru termic adică temperaturile celor două faze să fie egale: $T_1 = T_2$.

b) A doua condiție care trebuie îndeplinită este aceea de egalitate a presiunilor, deoarece cele două faze trebuie să exercite forțe egale și de sensuri contrare pe suprafața de contact.

c) Pentru ca starea să fie o stare de echilibru este necesar ca entropia acesteia să fie maximă. Se presupune că sistemul compus este închis astfel încât schimbul de substanță să aibă loc doar între cele două faze. Atunci:

$$M_1 + M_2 = \text{const}$$

și

$$dM_1 = -dM_2 \quad (5.221)$$

Entropia fiind o funcție aditivă:

$$S = S_1 + S_2 \quad (5.222)$$

Condiția de maxim a entropiei este:

$$\frac{\partial S}{\partial M_1} = \frac{\partial S_1}{\partial M_1} + \frac{\partial S_2}{\partial M_1} = \frac{\partial S_1}{\partial M_1} + \frac{\partial S_2}{\partial M_2} \frac{dM_2}{dM_1} = 0 \quad (5.223)$$

Cum

$$\frac{dM_2}{dM_1} = -1$$

rezultă:

$$\frac{\partial S}{\partial M_1} = \frac{\partial S_1}{\partial M_1} - \frac{\partial S_2}{\partial M_2} = 0$$

sau:

$$\frac{\partial S_1}{\partial M_1} = \frac{\partial S_2}{\partial M_2}$$

adică

$$\frac{\mu_1}{T_1} = \frac{\mu_2}{T_2}$$

Deoarece cele două temperaturi sunt egale rezultă:

$$\mu_1 = \mu_2 \quad (5.224)$$

Relația de mai sus reprezintă condiția de echilibru chimic: egalitatea potențialelor chimice.

Astfel echilibrul termodinamic este realizat atunci când sunt îndeplinite cele trei echilibre: termic, mecanic și chimic.

Deoarece pentru o substanță pură potențialul chimic este egal cu entalpia unității de masă atunci:

$$g_1(p, T) = g_2(p, T) \quad (5.225)$$

$g_1 = g_1(p, T)$ reprezintă o suprafață în coordonate g, p , și T . $g_2 = g_2(p, T)$ reprezintă o altă suprafață în aceleași coordonate. Cele două suprafețe se intersectează după o curbă a cărei proiecție în planul (p, T) curba de echilibru a fazelor.

Pentru a scrie relația 5.225 s-a presupus că echilibrele termic și mecanic sunt satisfăcute.

Din relația 5.225 rezultă că presiunea și temperatura fazelor în echilibru pot fi exprimate una în funcție de cealaltă.

Reprezentând grafic presiunea în funcție de temperatură, se obține o curbă denumită curbă de echilibru a fazelor. Regiunile aflate de o parte și de alta a acestei curbe reprezintă stări omogene.

În cazul a trei faze, echilibrul de fază se exprimă prin egalitățile:

$$p_1 = p_2 = p_3 = p$$

$$T_1 = T_2 = T_3 = T$$

$$g_1(p, T) = g_2(p, T) = g_3(p, T) \quad (5.226)$$

În acest caz, condiția 5.226 este satisfăcută pentru valori bine determinate ale presiunii și temperaturii. Astfel de stări în care coexistă simultan cele trei faze, sunt reprezentate în diagrama $p - T$ printr-un punct numit punct triplu care corespunde intersecției curbelor de echilibru a câte două din cele trei faze (Fig. 5.6).

5.7.2 Tranziții de fază

Trecerea dintr-o fază în altă fază poartă numele de tranziție de fază. În cazul substanțelor pure menționăm: topirea, vaporizarea, sublimarea.

Trebuie observat că noțiunea de stare de agregare nu corespunde întotdeauna cu cea de fază. Astfel numeroase corpuri există sub diverse forme cristaline care corespund aceleiași stări de agregare. Fenomenul este cunoscut sub numele de polimorfism pentru corpurile compuse și alotropism pentru corpurile simple. Un exemplu extrem de cunoscut este fierul care la temperatura $T_1 = 1183$ K trece din structura cristalină cubică cu volum centrat în structura cubică cu fețe centrate iar la $T_2 = 1663$ K trece din nou în structura cubică cu volum centrat.

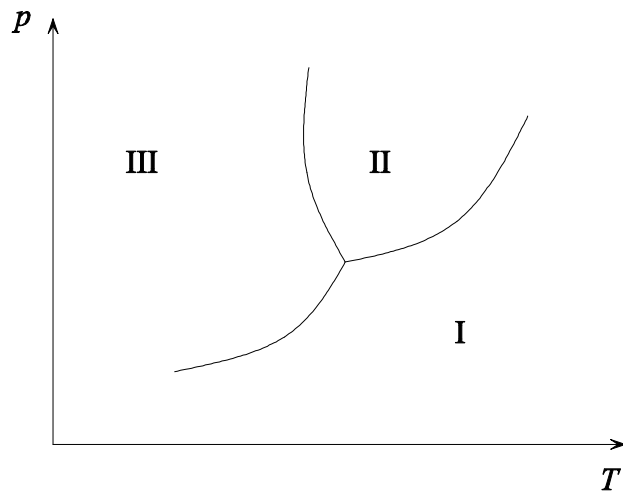


Figura 5.6: Echilibru de faze pentru un sistem trifazic

Trecerea de la o fază la alta se caracterizează printr-o discontinuitate a entropiei. Acest fapt determină existența unei călduri latente de transformare. Astfel de transformări poartă numele de tranziții de fază de speța întâi.

În afara acestui tip de tranziție există și un alt tip de tranziții de fază care au loc fără căldură latentă.

Exemplul cel mai cunoscut este cel al tranziției feromagnetic - paramagnetic care are loc la o temperatură critică T_C . Când $T < T_C$ există un parametru de tip extensiv magnetizarea care este diferit de zero; când $T > T_C$ magnetizarea este nulă.

Tranziții de fază de ordinul întâi

Prin tranziții de ordinul întâi se înțeleg acele tranziții care au loc prin discontinuitatea entropiei și care se produc cu existența unei călduri latente.

Referindu-ne la un sistem cu un singur component, astfel de tranziții sunt schimbările stărilor de agregare (topire - solidificare, vaporizare-condensare, sublimare-desublimare), sau schimbări alotropice (tranziția staniului alb cu rețea tetragonală în staniu cenușiu cu rețea cristalină cubică și reciproc).

Pentru a explica aceste fenomene se consideră condiția de echilibru a celor două faze în punctele de tranziție:

$$g_1(p, T) = g_2(p, T) \quad (5.227)$$

Se derivează în raport cu temperatura ambii membri ai ecuației 5.227 și se ține cont că presiunea nu este o variabilă independentă ci depinde de temperatură. Atunci:

$$\left(\frac{\partial g_1}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial g_1}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dT} = \left(\frac{\partial g_2}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial g_2}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dT} \quad (5.228)$$

Dar cum

$$\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_p = -s \quad (5.229)$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)_T = v \quad (5.230)$$

unde cu s și cu v s-a notat entropia unității de masă, respectiv volumul unității de masă, rezultă:

$$-s_1 + v_1 \frac{dp}{dT} = -s_2 + v_2 \frac{dp}{dT} \quad (5.231)$$

de unde:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_1 - s_2}{v_1 - v_2} \quad (5.232)$$

Variația de entropie poate fi calculată utilizând egalitatea fundamentală a principiului II pentru procese reversibile:

$$s_1 - s_2 = \int_1^2 \frac{\delta q}{T} = \frac{\lambda_{2 \rightarrow 1}}{T} \quad (5.233)$$

unde prin $\lambda_{2 \rightarrow 1}$ s-a notat căldura necesară pentru ca unitatea de masă să treacă din stare 2 în starea 1 (căldura latentă specifică). Se introduce în 5.232 relația 5.233 și se obține:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T} \frac{\lambda_{2 \rightarrow 1}}{(v_1 - v_2)} \quad (5.234)$$

Relația 5.234 indică modul în care variază presiunea la tranziția dintre cele două faze în funcție de temperatură. Relația inversă este:

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T(v_1 - v_2)}{\lambda_{2 \rightarrow 1}} \quad (5.235)$$

Să considerăm cazul unui lichid în echilibru cu vaporii săi saturați. Relația 5.234 determină variația presiunii vaporilor saturați funcție de temperatură.

Ca aplicație se consideră apa ca substanță pură, faza 2 fiind faza lichidă, iar faza 1 cea gazoasă.

În acest caz $\lambda_{2 \rightarrow 1}$ este pozitiv iar $v_1 \gg v_2$ deoarece volumul unității de masă în stare gazoasă este mult mai mare decât cel în stare lichidă. Atunci $\frac{dT}{dp} > 0$ adică presiunea și temperatura variază în același sens. Din motivele arătate mai sus în relația 5.234 se neglijează v_2 . Se obține:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T} \frac{\lambda_{2 \rightarrow 1}}{v_1} \quad (5.236)$$

Considerând vaporii ca fiind un gaz ideal

$$v_1 = \frac{RT}{\mu p} \quad (5.237)$$

relația 5.236 se poate scrie:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T^2} \frac{\lambda_{2 \rightarrow 1} \mu p}{R} \quad (5.238)$$

Se notează cu $A = (\lambda_{2 \rightarrow 1} \mu) / R$ și se obține:

$$\frac{dp}{p} = A \frac{dT}{T^2} \quad (5.239)$$

Se integrează 5.239 și se obține legea de variație a presiunii vaporilor saturați.

$$p \sim \exp \left(-\frac{A}{T} \right) \quad (5.240)$$

La trecerea din starea solidă (2) în cea lichidă (1) în general $\lambda_{2 \rightarrow 1} > 0$ și $v_1 > v_2$, astfel că $\frac{dp}{dT} > 0$. Există însă și unele excepții, cea mai cunoscută fiind a apei care prin topire își micșorează volumul iar $\frac{dp}{dT} < 0$.

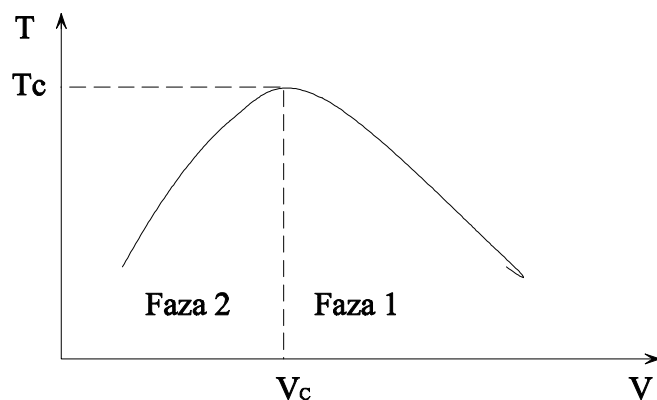


Figura 5.7: Variația volumelor specifice a două faze în apropierea punctului critic

Așa cum arată experiența, curba de tranziție gaz-lichid se termină întotdeauna într-un punct de coordonate T_c și p_c numit punct critic. Coordonatele punctului critic sunt temperatura critică și presiunea critică. Pentru temperaturi mai mari decât temperatura critică și presiuni mai mari decât presiunea critică nu există alte faze și corpul este omogen (în cazul nostru apa se află sub formă de vapori).

În Fig. 5.7 este prezentată diagrama variației volumelor specifice (volumele unităților de masă) în funcție de temperatură.

Pe măsura ce temperatura se apropie de temperatura critică, volumele specifice a celor două faze care se află în echilibru, se apropie, iar în punctul critic coincid. În punctul critic trecerea între cele două faze ale substanței poate avea loc în mod continuu și în nici un mod nu se poate produce separarea celor două faze. În punctul critic noțiunea de fază devine convențională.

Trebuie observat că punctul critic nu poate exista decât pentru acele faze a căror diferență este de natură pur cantitativă. Astfel cele două faze a căror curbă de echilibru se termină în punctul critic sunt cea lichidă și cea gazoasă; ele se deosebesc una de alta doar prin mărimea forțelor de interacție dintre molecule. În cazul solidelor și lichidelor diferența este de natură calitativă deoarece simetria lor internă este diferită (în starea lichidă în general nu avem elemente de simetrie în timp ce, în solidul cristalin, în funcție de natura rețelei cristaline apar diverse elemente de simetrie).

În apropierea punctului critic volumele specifice ale lichidului și vaporilor

sunt aproximativ egale. Se notează aceste volume cu v și $v + \delta v$. Atunci scriem condiția de egalitatea presiunilor:

$$p(v, T) = p(v + \delta v, T)$$

Se dezvoltă în serie după δv membrul drept al egalității și se obține:

$$p(v, T) = p(v, T) + \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T \delta v + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_T (\delta v)^2 + \dots$$

Rezultă că:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_T \delta v = 0$$

unde δv este foarte mic. Cum $\delta v \rightarrow 0$ atunci în punctul critic

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = 0$$

5.7.3 Tranziții de fază de speța a doua

O tranziție de fază poartă numele de tranziție de speța a doua dacă în afară de continuitatea entropiei specifice are loc și continuitatea derivatelor parțiale de ordinul întâi ale acesteia, derivatele parțiale de ordin doi fiind discontinue.

Unul din cele mai cunoscute exemple este tranziția conductor normal-supraconductor.

Deoarece potențiale chimice sunt egale:

$$g_1 = g_2$$

Se derivează în raport cu presiunea, și se obține:

$$\frac{\partial g_1}{\partial p} = \frac{\partial g_2}{\partial p}$$

sau

$$v_1 = v_2 \quad (5.241)$$

Deoarece:

$$\frac{\partial g_1}{\partial T} = \frac{\partial g_2}{\partial T} \quad (5.242)$$

rezultă și egalitatea entropiilor specifice:

$$s_1 = s_2 \quad (5.243)$$

Diferențiind relațiile 5.241 și 5.243 se obține:

$$\frac{\partial v_1}{\partial p} dp + \frac{\partial v_1}{\partial T} dT = \frac{\partial v_2}{\partial p} dp + \frac{\partial v_2}{\partial T} dT \quad (5.244)$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial p} dp + \frac{\partial s_1}{\partial T} dT = \frac{\partial s_2}{\partial p} dp + \frac{\partial s_2}{\partial T} dT \quad (5.245)$$

Din aceste relații rezultă:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{-\frac{\partial v_2}{\partial T} + \frac{\partial v_1}{\partial T}}{-\frac{\partial v_1}{\partial p} + \frac{\partial v_2}{\partial p}} \quad (5.246)$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{-\frac{\partial s_2}{\partial T} + \frac{\partial s_1}{\partial T}}{-\frac{\partial s_1}{\partial p} + \frac{\partial s_2}{\partial p}} \quad (5.247)$$

Cum

$$\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial T} = \alpha \quad (5.248)$$

unde α este coeficientul de dilatare izobar, și

$$\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial p} = -\chi \quad (5.249)$$

unde χ este coeficientul de compresibilitate izoterm, relația 5.246 devine:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{-\alpha_1 + \alpha_2}{-\chi_1 + \chi_2} \quad (5.250)$$

Deoarece

$$\frac{\partial s}{\partial p} = -\frac{\partial v}{\partial T} = -v\alpha \quad (5.251)$$

$$\frac{\partial s}{\partial T} = \frac{C_p}{T} \quad (5.252)$$

relația 5.247 devine:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{(C_{p1} - C_{p2})}{Tv(\alpha_1 - \alpha_2)} \quad (5.253)$$

Se notează $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, $\Delta C_p = C_{p1} - C_{p2}$, $\Delta\chi = \chi_1 - \chi_2$ și dacă se ține cont de relațiile 5.250 și 5.253 se obține:

$$Tv(\Delta\alpha)^2 = (\Delta C_p)(\Delta\chi) \quad (5.254)$$

Relația de mai sus poartă numele de relația lui Ehrenfest.

5.8 Principiul al III-lea al termodinamicii

5.8.1 Formulări ale principiului III

Principiul al doilea introduce funcția de stare numită entropia și care, pentru procesele reversibile, este:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad (5.255)$$

Integrând:

$$S = \int \frac{\delta Q}{T} + \text{const} \quad (5.256)$$

Rezultă că entropia este o mărime definită până la o constantă aditivă. Deoarece valoarea ei absolută intervine într-o serie de măsurători experimentale, ea trebuie determinată exact. W. Nernst a studiat o serie de procese chimice și a constatat că pe măsură ce temperatura scade, variațiile entropiei sunt din ce în ce mai mici. Acest fapt l-a condus pe Nernst la următoarea constatare:

La temperatura de zero absolut entropia unui corp chimic pur are o valoare constantă independentă de variațiile altor parametri.

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = S_0 \quad (5.257)$$

Ulterior Planck a pornit de la considerente de mecanică statistică și a arătat că la temperatura de zero absolut S_0 are valoare nulă. Astfel Planck a enunțat principiul al III - lea în modul următor:

Când temperatura tinde spre zero absolut entropia oricărui corp chimic pur tinde către zero.

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0$$

5.8.2 Comportarea căldurilor specifice la temperaturi joase

Fie un sistem ale cărui stări se reprezintă într-o diagrama $V - T$. Atunci:

$$\delta Q = C_V dT + \lambda dV \quad (5.258)$$

unde

$$\frac{\partial C_V}{\partial V} = T \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \quad (5.259)$$

$$\lambda = T \frac{\partial p}{\partial T} \quad (5.260)$$

Pentru a găsi valoarea entropiei într-o stare oarecare reprezentată printr-un punct din diagrama dată se integrează expresia $\delta Q/T$ pe un drum arbitrar de la starea de entropie zero la starea dată. Cum pentru $T = 0$ indiferent de volum $S = 0$, se face integrarea presupunând că volumul este constant

$$S(T, V) = \int_0^T \frac{C_V(\theta, V)}{\theta} d\theta \quad (5.261)$$

unde θ , variabila de integrare are semnificația unei temperaturi.

De aici rezultă că $C_V \rightarrow 0$ când $T \rightarrow 0$.

În cazul în care $C_v = \text{const}$, integrala nu ar mai avea sens. Numitorul tinde spre zero iar integrala devine infinită. Rezultă

$$\lim_{T \rightarrow 0} C_V(T, V) = 0 \quad (5.262)$$

În mod analog se demonstrează că:

$$\lim_{T \rightarrow 0} C_p(T, V) = 0 \quad (5.263)$$

Rezultă că în vecinătatea temperaturii de zero absolut capacitățile calorice ale solidelor tind la zero, deoarece la temperaturi scăzute toate gazele se solidifică.

5.8.3 Comportarea coeficienților termici la temperaturi joase

Coeficientul de compresibilitate izobară, precum și coeficientul termic al presiunii tind la zero.

Ținând cont de relațiile Maxwell coeficienții termici se exprimă astfel:

a) coeficientul de dilatare izobară:

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T \quad (5.264)$$

b) coeficientul termic al presiunii:

$$\beta = -\frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = -\frac{1}{p} \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \quad (5.265)$$

Deoarece variația entropiei tinde la zero, în apropiere de zero absolut:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = 0 \quad (5.266)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = 0 \quad (5.267)$$

Aceasta înseamnă că în apropiere de zero absolut coeficienții termici tind la zero. Cum în apropierea acestei temperaturi substanțele devin solide, acestea nu mai sunt compresibile iar coeficientul termic al presiunii se anulează.

5.8.4 Imposibilitatea atingerii temperaturii de zero absolut

Pentru a demonstra imposibilitatea atingerii lui zero absolut se consideră răcirea unui gaz supus succesiv la compresi izoterme și destinderii izentropice (Fig.5.8) reprezentate într-o diagramă T, S .

În diagrama $T - S$ toate izocorele trebuie să treacă prin origine deoarece conform celui de-al treilea principiu $S(T, V) \rightarrow 0$ când $T \rightarrow 0$.

Se observă ca deși destinderea adiabatică are loc între aceleași volume V_1 și V_2 variația temperaturii este din ce în ce mai mică pe măsură ce temperatura descrește spre zero absolut. Acest fapt arată că temperatura de 0 K nu poate fi atinsă printr-un număr finit de astfel de procese. Astfel principiul al III-lea al termodinamicii interzice atingerea temperaturii de 0 K .

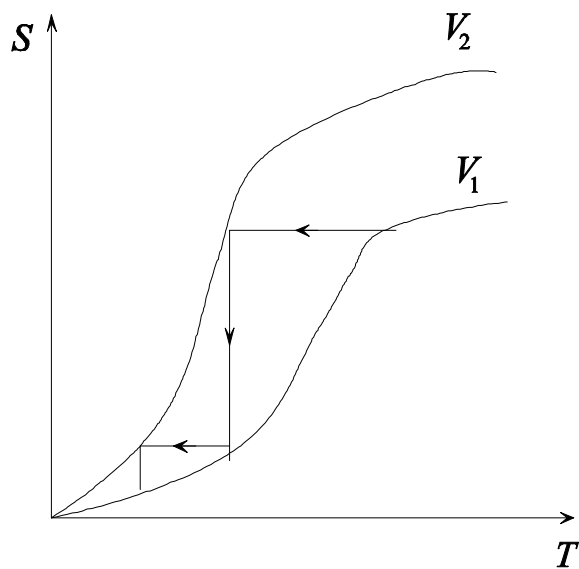


Figura 5.8: Imposibilitatea atingerii temperaturii de zero absolut

Capitolul 6

Elemente de fizică statistică

6.1 Introducere

Atunci când se studiază proprietățile unor corpuri macroscopice putem ține seama în mod explicit de structura acestora sau putem face abstracție de ea. Până la sfârșitul secolului trecut nu s-a ținut cont de această structură datorită faptului că fizica era puțin dezvoltată și nu se cunoștea structura materiei. Astfel s-a dezvoltat termodinamica fenomenologică, care așa cum s-a arătat în capitolul anterior, se bazează pe o serie de postulate. Dacă se cunoaște una din funcțiile caracteristice sistemului se pot determina proprietățile macrosocopice ale acestuia. Totuși termodinamica nu poate singură să-și furnizeze aceste funcții deoarece principiile termodinamicii sunt astfel formulate încât să fie independente de structura materiei.

Rezultă că pentru determinarea acestor funcții caracteristice este necesară o metodă de cercetare a corpurilor care să țină seama de structura lor. Există o dificultate esențială a acestei metode. În cazul termodinamicii când facem abstracție de structura corpurilor este nevoie de un număr mic de parametri pentru a caracteriza starea unui corp. Caracterizarea mișcării și aranjării tuturor constituenților (atomi și molecule) necesită cunoașterea unui număr imens de parametri. Dacă se consideră fiecare atom sau moleculă un punct material, pentru a cunoaște starea sistemului ar trebui cunoscute evoluția în timp a poziției și vitezelor acestora, lucru care nu este posibil.

Totuși, trebuie să remarcăm că între valorile parametrilor macroscopici și cei microscopici trebuie să existe anumite relații. Cunoașterea stării microscopice trebuie să determine cunoașterea stării macroscopice. Reciproc

cunoașterea stării macroscopice nu determină în mod unic cunoașterea stării microscopice în sensul că există o mulțime de stări microscopice compatibile cu starea macroscopică dată.

Presupunem că asupra unui anumit sistem termodinamic se efectuează o anumită experiență care-l aduce într-o anumită stare macroscopică dată. Starea microscopică însă nu este determinată și ea poate fi una din stările microscopice compatibile cu starea macroscopică dată. Dacă se repetă experiența nimic nu garantează că se ajunge în aceeași stare microscopică (deși starea macroscopică este aceeași). Rezultă că trebuie luate în considerare multitudinea stărilor microscopice compatibile cu starea macroscopică dată.

Totalitatea stărilor microscopice compatibile cu o stare macroscopică dată formează un colectiv de stări numit *colectiv statistic* sau *colectiv virtual*. Se poate privi colectivul statistic și ca o mulțime de sisteme termodinamice aflate în totalitatea stărilor microscopice ce sunt compatibile cu o stare macroscopică dată.

Se admite că sistemul pe care-l studiem este compus dintr-un număr foarte mare de particule (pot fi considerate particule și anumite conglomerate care în timpul evoluției sistemului nu se modifică și interacționează într-un mod specific). Se presupune cunoscute forțele care se exercită asupra fiecărei particule, atât interne cât și externe și că aceste forțe sunt conservative. Se consideră că întreaga energie a sistemului este de natură mecanică și înglobează energia cinetică a particulelor precum și energia potențială de interacție dintre particulele sistemului, iar legile după care are loc mișcarea sistemului sunt legile mecanicii clasice.

Pentru a formula problema fundamentală a statisticii clasice este necesar să se introducă noțiunea de spațiu al fazelor pe care-l vom mai defini încă o dată. Fie un sistem cu f grade de libertate. Notăm cu $q_1, q_2, \dots, q_f$ coordonatele generalizate și cu $p_1, p_2, \dots, p_f$ impulsurile generalizate. Starea sistemului la un moment dat este determinată de valorile celor f coordonate generalizate și a celor f impulsuri generalizate. Dacă se consideră un spațiu cu $2f$ dimensiuni având ca axe cele f coordonate generalizate și cele f impulsuri generalizate pe care-l numim spațiul fazelor, starea sistemului într-un astfel de spațiu este reprezentată de un punct. Când starea sistemului variază atunci punctul reprezentativ din spațiul fazelor descrie o anumită curbă, pe care o vom numi traiectorie de fază.

Dacă se cunoaște hamiltonianul sistemului atunci evoluția ulterioară a punctului reprezentativ este perfect determinată de ecuațiile canonice și condițiile inițiale $p(t_0), q(t_0)$.

În cazul sistemelor conservative:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0$$

adică energia este o integrală primă a mișcării ceea ce înseamnă că ea se conservă. Această lege admite o interpretare simplă. Să considerăm locul punctelor din spațiul fazelor ce corespund energiei $E = \text{const.}$ Cum energia este o funcție de coordonatele generalizate $q_1, q_2, \dots, q_f$ și impulsurile generalizate $p_1, p_2, \dots, p_f$

$$E(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f) = \text{const} \quad (6.1)$$

Această ecuație (în analogie cu cazul tridimensional) reprezintă o hiper-suprafață $2f - 1$ dimensională în spațiul fazelor. Rezultă că dacă energia sistemului nu se schimbă, traiectoria punctului va fi o curbă pe această suprafață. Vom considera o restricție și anume că punctele sistemelor fizice nu se pot depărta la infinit unele de altele (deoarece în acest caz am avea de-a face cu sisteme deschise). Aceasta înseamnă că suprafețele de energie constantă nu au pânze care să se extindă la infinit. O suprafață de energie constantă este o suprafață închisă deoarece constituie frontiera regiunii din spațiul fazelor în care se găsesc toate punctele care corespund unor valori a energiei mai mici sau egale cu valoarea dată.

Fie un sistem închis iar A o mărime a sistemului care depinde de coordonatele și impulsurile generalizate. Media temporală a mărimii respective este:

$$\langle A \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(p, q, t) dt \quad (6.2)$$

unde prin q se înțelege ansamblul variabilelor $q_1, q_2, \dots, q_f$ iar prin p se înțelege ansamblul variabilelor $p_1, p_2, \dots, p_f$.

Această medie presupune integrarea ecuațiilor de mișcare, lucru care practic este imposibil de realizat datorită numărului imens de particule pe care le au chiar și cele mai simple sisteme. Așa cum s-a discutat anterior chiar dacă starea macroscopică a sistemului este bine determinată, starea microscopică nu este determinată, adică poziția punctului reprezentativ în spațiul fazelor nu este univoc determinată.

Pentru o stare macroscopică dată numărul stărilor microscopice este foarte mare.

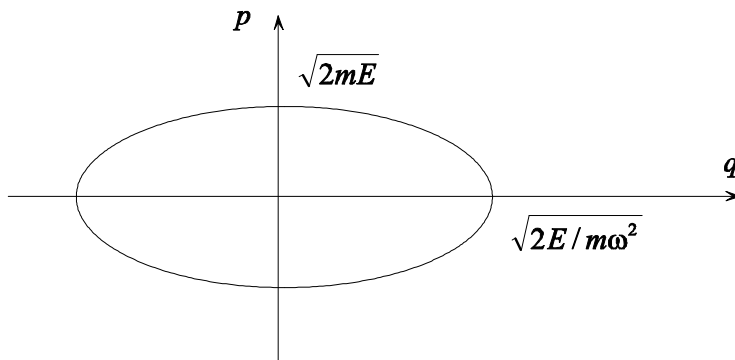


Figura 6.1: Traectoria generalizată în spațiul fazelor pentru un oscilator armonic

Să considerăm ca exemplu o particulă de masă m care oscilează cu pulsația ω . În acest caz spațiul fazelor este bidimensional. Fixând valoarea energiei E toate stările sistemului se află pe o elipsă (Fig. 6.1).

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/m\omega^2} = 1$$

Această elipsă reprezintă traectoria punctului reprezentativ în spațiul fazelor. Dacă am impune condiția ca $H \leq E$, atunci toate punctele din interiorul elipsei $H = E$ sunt compatibile cu restricția impusă. În acest caz trebuie remarcat că numărul de stări microscopice este o funcție de energie. Într-adevăr considerând numărul de stări proporțional cu aria elipsei atunci numărul acestora Ω este:

$$\Omega \sim \pi (2mE)^{1/2} \left(\frac{2E}{m\omega^2} \right)^{1/2} \sim E$$

Pentru un sistem de N oscilatori independenți cu hamiltonianul

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} m_i \omega_i^2 q_i^2 \right)$$

numărul de stări pentru care $H \leq E$ este:

$$\Omega \sim E^N$$

În acest caz numărul de stări este o funcție rapid crescătoare de E , deoarece pentru un sistem macroscopic $N \sim 10^{22}$.

Se notăm cu $\mathcal{V}(E)$, volumul din spațiul fazelor limitat de suprafața de energie constantă $H(p, q)$. Atunci:

$$\mathcal{V}(E) = \int \cdots \int_{H \leq E} dp dq \quad (6.3)$$

unde cu dp s-a notat $dp_1 dp_2 \dots dp_f$, iar cu dq s-a notat $dq_1 dq_2 \dots dq_f$.

Se observă că $\mathcal{V}(E)$ are dimensiunea unei acțiuni la o putere egală cu numărul gradelor de libertate al sistemului.

Pentru a calcula numărul de stări trebuie să ținem cont că din punct de vedere al mecanicii cuantice impulsul și coordonata satisfac relația de incertitudine:

$$\Delta q \Delta p \geq h \quad (6.4)$$

unde h este constanta lui Planck. În cazul unui sistem cu f grade de libertate

$$\Delta p_1 \Delta p_2 \dots \Delta p_f \Delta q_1 \Delta q_2 \dots \Delta q_f \geq h^f \quad (6.5)$$

Din acest motiv nu are sens să se discute localizarea unei stări mecanice într-un volum mai mic decât h^f . Astfel numărul de stări din volumul mărginit de suprafața de energie constantă E este:

$$\Omega(E) = \frac{1}{h^f} \int \cdots \int_{H \leq E} dp dq \quad (6.6)$$

Se poate astfel defini o densitate de probabilitate (sau o funcție de distribuție) $\rho(p, q)$ care permite exprimarea probabilității ca starea microscopică a sistemului să se afle într-un anumit volum din spațiul fazelor $dp dq$

$$dP = \frac{1}{h^f} \rho(p, q) dq dp = \rho(p, q) d\Omega \quad (6.7)$$

unde

$$d\Omega = \frac{dp dq}{h^f} \quad (6.8)$$

reprezintă numărul de stări din elementul de volum $dp dq$ din spațiul fazelor.

Probabilitatea ca punctul reprezentativ al sistemului să se găsească într-un domeniu D al spațiului fazelor se obține prin integrare pe tot domeniul D .

Deoarece punctul reprezentativ al sistemului se află undeva în spațiul fazelor evenimentul este o certitudine și are probabilitatea egală cu unitatea.

$$\int \cdots \int \rho(p, q) \frac{dp dq}{h^f} = \int \cdots \int \rho(p, q) d\Omega = 1$$

Relația reprezintă condiția de normare a probabilităților.

În continuare se va discuta situația unui sistem ce conține particule identice care au fiecare s grade de libertate. Dacă N este numărul de particule din sistem atunci numărul de grade de libertate al sistemului este:

$$f = Ns \quad (6.9)$$

În mecanica clasică deși particulele sunt discernabile trebuie remarcat că dacă se permută două particule identice între ele, cele două stări ale sistemului sunt identice, deși în spațiul fazelor le corespund puncte diferite. Atunci unei stări mecanice a sistemului i se asociază $N!$ stări mecanice echivalente care se obțin prin cele $N!$ permutări ale celor N particule. Astfel vom asocia acestor $N!$ stări mecanice echivalente o singură stare microscopică. În acest caz numărul de stări microscopice din elementul de volum $dq dp$ din spațiul fazelor este:

$$d\Omega = \frac{1}{N!} \frac{dp dq}{h^{Ns}} \quad (6.10)$$

iar probabilitatea de a găsi sistemul în elementul de volum $dq dp$ din spațiul fazelor se va scrie:

$$dP = \frac{1}{N! h^{Ns}} \rho(p, q) dp dq \quad (6.11)$$

Se observă că relațiile 6.8 și 6.11 din cele două cazuri considerate le putem scrie ca:

$$dP = \rho(p, q) d\Omega \quad (6.12)$$

unde $d\Omega$ este dat de relațiile 6.8 sau 6.10, dependent de situația studiată.

Trebuie subliniat că funcția de distribuție nu depinde de starea inițială a sistemului, influența acesteia fiind complet nesemnificativă în timpul evoluției sistemului.

Pentru a înțelege sensul celor discutate mai sus se presupune un sistem fizic care se aduce într-o stare fizică considerată. Se efectuează această experiență de M ori. De fiecare dată starea microscopică va fi alta, dar va fi compatibilă cu starea macroscopică dată. Fie M_D numărul de stări ale căror puncte reprezentative se află în domeniul D . Raportul M_D/M este frecvență relativă de realizare a stării respective. Când M este foarte mare această frecvență este egală cu probabilitatea de realizare a stării. Aceiași interpretare se obține dacă se lucrează cu un colectiv statistic și se face o experiență cu cele M sisteme. Dacă se cunoaște funcția de distribuție atunci se poate calcula valoarea medie a oricărei mărimi $A(p, q)$ prin înmulțirea valorilor sale cu probabilitatea corespunzătoare și integrând peste tot spațiul fazelor:

$$\langle A \rangle = \int \cdots \int A(p, q) \rho(q, p) d\Omega \quad (6.13)$$

O problemă importantă de rezolvat constă în a se găsi legătura între media temporală și media spațială. Atunci când se efectuează o mediere temporală, aceasta implică considerarea unei succesiuni de poziții ale punctului reprezentativ în timp. Pe de altă parte media spațială se face considerând punctele reprezentative ale ansamblului statistic la un moment dat.

Cele două sisteme de puncte din spațiul reprezentativ nu coincid astfel încât valorile medii nu ar trebui să coincidă. Pentru a depăși această dificultate a fost emisă ipoteza că media temporală coincide cu media spațială (această ipoteză este numită ipoteză ergodică).

La început s-a presupus că traiectoria punctului reprezentativ al sistemului trece prin toate punctele ansamblului virtual. Totuși această ipoteză este în contradicție din punct de vedere matematic cu proprietățile curbelor.

Ipoteza ergodică nu a putut să fie demonstrată decât în anumite situații particulare. O soluție a fost sugerată în 1938 de R. Tolman. El consideră că un ansamblu statistic căruia îi sunt precizați parametri macroscopici este caracterizat din punct de vedere dinamic doar parțial. Rezultă că atunci când se dorește cunoașterea modului de distribuție al punctelor reprezentative trebuie să se considere un nou principiu și anume acela al ipotezei probabilităților apriori egale pentru toate punctele din spațiul fazelor.

În concluzie problema fundamentală a statisticii constă în determinarea funcției de distribuție pentru sistemul considerat.

6.1.1 Teorema Liouville

Fie un domeniu D_0 din spațiul fazelor care corespunde unui ansamblu statistic la momentul inițial. Când are loc un fenomen fizic punctele ansamblului statistic evoluează în timp astfel că la momentul t acestea vor ocupa un nou domeniu D_1 . Teorema lui Liouville afirmă că *volumul în spațiul fazelor a domeniului D_1 este egal cu volumul lui D_0 , sau într-o altă formulare volumul din spațiul fazelor este un invariant al mișcării*. Acest fapt se exprimă prin egalitatea:

$$dpdq = \frac{\partial(p, q)}{\partial(p_0, q_0)} dp_0 dq_0 \quad (6.14)$$

unde $p = p(t)$, $q = q(t)$, $p_0 = p(0)$, $q_0 = q(0)$, iar $\partial(p, q) / \partial(p_0, q_0)$ este Jacobianul transformării.

Pentru a demonstra teorema lui Liouville trebuie arătat că Jacobianul transformării este egal cu unitatea.

Fie $A(p, q)$ o mărime ce nu depinde explicit de timp.

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = -iLA \quad (6.15)$$

unde :

$$L = i \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \quad (6.16)$$

este operatorul lui Liouville. Soluția formală a ecuației 6.15 este:

$$A(t) = [\exp(-iLt)] A_0 \quad (6.17)$$

În particular:

$$p(t) = [\exp(-iLt)] p_0 \quad (6.18)$$

$$q(t) = [\exp(-iLt)] q_0 \quad (6.19)$$

Atunci:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(p, q)}{\partial(p_0, q_0)} &= \frac{\partial(e^{-iLt}p_0, e^{-iLt}q_0)}{\partial(p_0, q_0)} \\ \frac{\partial(p, q)}{\partial(p_0, q_0)} &= \begin{pmatrix} e^{-iLt}1 & 0 \\ 0 & e^{-iLt}1 \end{pmatrix} = 1\end{aligned}\quad (6.20)$$

În expresia 6.20 s-a ținut seama că pentru orice constantă:

$$e^{-iLt}\alpha = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-iLt)^n}{n!} \right] \alpha = \alpha$$

6.1.2 Ecuația Liouville

Vom arăta că funcția de distribuție $\rho(p, q, t)$ satisface ecuația:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \{H, \rho\} \quad (6.21)$$

unde :

$$\{H, \rho\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \rho}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \right) \quad (6.22)$$

Pentru a demonstra această teoremă se observă că pentru un domeniu infinit de mic există o egalitate între frecvența relativă dM/M de a găsi punctele reprezentative ale colectivului statistic în volumul $dpdq$ din spațiul fazelor (dM reprezintă numărul de puncte care se găsesc în volumul considerat, iar M este numărul total de puncte al colectivului virtual) și probabilitatea $\rho(p, q) d\Omega$ ca un punct să se găsească în volumul $dpdq$. În timp, cele dM puncte reprezentative se deplasează în spațiul fazelor și vor ocupa la momentul t' volumul $dp'dq'$. Atunci:

$$\frac{dM}{M} = \rho(p, q) d\Omega = \rho(p', q') d\Omega' \quad (6.23)$$

Conform teoremei lui Liouville volumul din spațiul fazelor rămâne invariant. Atunci:

$$\rho(p, q) = \rho(p', q') \quad (6.24)$$

Considerând t' un moment de timp infinit de apropiat de t , adică $t' = t + dt$ se poate scrie:

$$p' = p(t') = p(t + dt) = p(t) + \dot{p}dt \quad (6.25)$$

$$q' = q(t') = q(t + dt) = q(t) + \dot{q}dt \quad (6.26)$$

Egalitatea 6.24 devine:

$$\begin{aligned} \rho(p, q, t) &= \rho[p(t) + \dot{p}dt, q(t) + \dot{q}dt, t] \\ \rho(p, q, t) &= \rho(p, q, t) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i dt + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i dt + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \\ \rho(p, q, t) &= \rho(p, q, t) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} dt - \sum_{i=1}^N \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} dt + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (6.27)$$

de unde rezultă egalitatea 6.21.

6.1.3 Fluctuații

În fizica microscopică mărimile ce caracterizează un sistem aflat în stările de echilibru sunt perfect determinate. Totuși din punct de vedere al structurii corpurilor mărimile respective sunt mărimi aleatorii deoarece pentru calcularea lor se face o mediere în spațiul fazelor. Această contradicție duce la concluzia că legile statisticii sunt de așa natură încât abaterile mari de la valoarea medie sunt extrem de puțin probabile. Dacă se măsoară cu precizie mărimile macroscopice se pot pune în evidență mici abateri de la valoarea medie, denumite fluctuații. Matematic vom defini abaterea de la valoarea medie a mărimii respective ca $A(p, q) - \langle A \rangle$. Dacă se face pur și simplu o medie a acestei mărimi rezultatul este nul. Din acest motiv se calculează o medie a pătratelor abaterilor. Această medie se numește abatere pătratică medie și este o măsură a mărimii fluctuațiilor mărimii respective. Ținând seama de 6.13 rezultă:

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \int \cdots \int [A(p, q) - \langle A \rangle]^2 \rho(p, q) d\Omega \quad (6.28)$$

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle = \int \cdots \int A^2(p, q) d\Omega - 2 \langle A \rangle \int \cdots \int A(p, q) d\Omega + \langle A \rangle^2 \int \cdots \int d\Omega$$

sau

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - 2 \langle A \rangle^2 + \langle A \rangle^2$$

și în final

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \quad (6.29)$$

S-a ales medierea în spațiul fazelor deoarece conform ipotezei lui Gibbs o mediere temporală se poate înlocui cu o mediere spațială.

6.1.4 Stările de echilibru

Așa cum s-a discutat anterior problema mecanicii statistice constă în găsirea funcției de distribuție $\rho(p, q)$ la momentul când sunt specificate condițiile în care se află sistemul. Nu există reguli generale pentru aflarea acestei funcții însă există un caz în care se poate soluționa problema. Acesta este cazul echilibrului termodinamic în care starea persistă atâta timp cât condițiile exterioare nu se schimbă. În termodinamică proprietățile sistemului aflat în starea de echilibru se pot obține dacă se cunosc ecuațiile de stare. Există două posibilități de obținere a ecuațiilor de stare: fie pe cale experimentală, fie pe baza unor considerente de fizică statistică (în cadrul căreia obținerea mărimilor se face pornindu-se de la un anumit model al structurii sistemului considerat).

În stările de echilibru valorile mărimilor macroscopice nu variază în timp. Aceasta înseamnă că funcția de distribuție nu depinde explicit de timp, adică $\partial \rho / \partial t = 0$. Atunci din ecuația Liouville rezultă:

$$\{H, \rho\} = 0 \quad (6.30)$$

Această ecuație arată că la echilibru funcția de distribuție depinde numai de integralele prime ale mișcării (este ea însăși o integrală primă a mișcării).

Deoarece mediile calculate trebuie să se bucure de proprietatea de aditivitate, integralele prime de care depinde funcția de distribuție trebuie să fie aditive. Pentru un sistem izolat constantele de mișcare care se bucură de această proprietate sunt: hamiltonianul (care coincide cu energia în cazul

sistemelor conservative), impulsul și momentul cinetic. Deoarece se poate alege un sistem de referință în care impulsul și momentul cinetic să fie nule atunci *funcția de distribuție nu depinde decât de hamiltonian* (și evident de numărul de particule).

Faptul că funcția de distribuție depinde numai de hamiltonianul sistemului apare ca o ipoteză și se încadrează în teoria ergodică.

6.2 Distribuția microcanonică

6.2.1 Expresia distribuției microcanonice

Așa cum s-a discutat în paragraful anterior funcția de distribuție depinde de H (hamiltonianul sistemului) care în cazul sistemelor în care forțele sunt conservative este chiar energia sistemului.

Se consideră pentru început un sistem izolat care se află în echilibru termodinamic. Acestui sistem îi corespunde un colectiv statistic numit ansamblu microcanonic. Sistemul este caracterizat prin numărul de particule N și volumul V . Atunci energia sistemului este bine determinată și $H = E$.

Din acest motiv funcția de distribuție are un caracter singular fiind nulă în tot spațiul fazelor cu excepția punctelor de pe hipersuprafața $H(p, q) = E$. Pe de altă parte ea trebuie să satisfacă condiția de normare.

$$\int \dots \int \rho(p, q) d\Omega = 1 \quad (6.31)$$

Pentru a nu lucra cu funcții singulare se admite că energia este determinată până la o abatere foarte mică:

$$\Delta E \ll E \quad (6.32)$$

Deoarece sistemul este izolat, este plauzibil să presupunem că toate stările microscopice compatibile cu condițiile date au posibilități egale de realizare, adică ele se realizează cu aceiași probabilitate. Atunci:

$$\rho(p, q) = \rho(H) = \begin{cases} C & E \leq H \leq E + \Delta E \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (6.33)$$

Valoarea constantei C se determină din condiția de normare. În acest caz singura contribuție diferită de zero este cea dată de regiunea cuprinsă între

suprafețele de energii E și $E + \Delta E$. Pentru a simplifica notațiile se introduce funcția:

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \Delta E \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (6.34)$$

Astfel condiția de normare devine:

$$C \int \cdots \int_{E < H \leq E + \Delta E} d\Omega = 1 \quad (6.35)$$

Deoarece constanta C iese de sub semnul integralei trebuie calculat numărul de stări ale sistemului al cărui punct reprezentativ se află în spațiul fazelor cuprins între cele două suprafețe de energie constantă. Se notează cu $\Omega(E)$ numărul de stări din interiorul volumului mărginit de suprafața de energie constantă E .

$$\int \cdots \int_{E < H \leq E + \Delta E} d\Omega = \Omega(E + \Delta E) - \Omega(E) \quad (6.36)$$

Cum ΔE este foarte mic:

$$\Omega(E + \Delta E) - \Omega(E) \cong \frac{\partial \Omega(E)}{\partial E} \Delta E \quad (6.37)$$

Se notează de asemenea

$$\Omega'(E) = \frac{\partial \Omega(E)}{\partial E} \quad (6.38)$$

Din relația 6.35 rezultă:

$$C = \frac{1}{\Omega'(E) \Delta E} \quad (6.39)$$

Astfel funcția de distribuție are forma:

$$\rho(H) = \frac{1}{\Omega'(E) \Delta E} \Delta(H - E) \quad (6.40)$$

Această expresie poartă denumirea de funcție de distribuție microcanonică clasică.

Cu ajutorul funcției de distribuție se poate calcula valoarea medie pe ansamblul virtual a oricărei variabile dinamice a sistemului:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\Omega'(E) \Delta E} \int \cdots \int_{E < H \leq E + \Delta E} A d\Omega \quad (6.41)$$

sau

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\Omega'(E) \Delta E} \left[\int \cdots \int_{H \leq E + \Delta E} A d\Omega - \int \cdots \int_{H \leq E} A d\Omega \right] \quad (6.42)$$

$$\langle A \rangle = \frac{\Delta E}{\Omega'(E) \Delta E} \frac{\partial}{\partial E} \int \cdots \int_{H \leq E} A d\Omega = \frac{1}{\Omega'(E)} \frac{\partial}{\partial E} \int \cdots \int_{H \leq E} A d\Omega \quad (6.43)$$

Se observă că în această expresie ΔE nu mai apare așa încât valoarea medie corespunde cazului când ΔE tinde la zero.

6.2.2 Interpretarea statistică a entropiei

Pentru a stabili legătura cu termodinamica se consideră două sisteme în contact direct. Peretele separator este rigid și nu permite trecerea particulelor dintr-o parte în alta. În plus ansamblul celor două sisteme este izolat de exterior.

Hamiltonianul celor două sisteme este:

$$H = H_1 + H_2 + H_{12} \quad (6.44)$$

unde H_{12} este hamiltonianul de interacție dintre cele două sisteme. Presupunem că H_{12} este extrem de mic și poate fi neglijat în calcule. Totuși el există și este absolut necesar pentru stabilirea echilibrului dintre cele două sisteme.

În termodinamică dacă se ajunge la echilibru, H_1 și H_2 au valori bine determinate. În fizica statistică ele sunt însă mărimi aleatorii, deoarece starea de echilibru nu este o stare statică în care mărimile nu mai variază în timp. Trebuie remarcat că pentru H_1 și H_2 există anumite valori extrem de probabile și că orice abatere de la ele este puțin probabilă. Vor trebui determinate funcțiile de distribuție pentru mărimile H_1 și H_2 . Cum în condiții de echilibru

$$H = H_1 + H_2 = \text{const} \quad (6.45)$$

putem să ne fixăm atenția asupra lui H_1 . Presupunem ca și în cazul anterior că energia sistemului reunit poate lua valori în intervalul E , $E + \Delta E$. Atunci densitatea de probabilitate pentru sistemul total are expresia dată de relația 6.33, iar probabilitatea ca punctul respectiv să fie în intervalul delimitat de cele două suprafețe de energie constantă este:

$$dP = C d\Omega = C d\Omega_1 d\Omega_2 \quad (6.46)$$

unde $d\Omega_1$ este numărul de stări corespunzător primului sistem iar $d\Omega_2$ este numărul de stări al celui de-al doilea sistem. Ne interesează în continuare probabilitatea ca starea primului sistem să se găsească în elementul de volum $d\Omega_1$ indiferent de starea sistemului al doilea. Pentru aceasta se integrează peste toate elementele de volum $d\Omega_2$. Cum energia primului sistem o considerăm fixată atunci:

$$E - E_1 \leq E_2 \leq E + \Delta E - E_1 \quad (6.47)$$

iar probabilitatea considerată este:

$$dP = C d\Omega_1 \int \dots \int d\Omega_2 \quad (6.48)$$

$$dP = C d\Omega_1 \frac{\partial \Omega_2 (E - E_1)}{\partial E} \Delta E \quad (6.49)$$

Cum valoarea constantei de normare este data de relația 6.39 rezultă:

$$dP = \frac{1}{\Omega'(E)} \frac{\partial \Omega_2 (E - E_1)}{\partial E} d\Omega_1 \quad (6.50)$$

Pentru a determina probabilitatea ca energia primului sistem să fie cuprinsă între valorile E_1 și $E_1 + dE_1$ se integrează expresia de mai sus pe toate elementele de volum $d\Omega_1$ pentru care energia variază în intervalul E_1 și $E_1 + dE_1$. Se ține cont că:

$$\int \dots \int_{E_1 \leq E \leq E_1 + dE_1} d\Omega_1 = \frac{\partial \Omega_1}{\partial E_1} dE_1 \quad (6.51)$$

Această probabilitate o vom nota cu dP_1 și este dată de:

$$dP_1 = \frac{1}{\Omega'(E)} \frac{\partial \Omega_2 (E - E_1)}{\partial E} \frac{\partial \Omega_1 (E_1)}{\partial E_1} dE_1 \quad (6.52)$$

Se face ipoteza că sistemele considerate sunt sisteme cu un mare număr de grade de libertate. Atunci funcțiile $\partial\Omega_2/\partial E$ și $\partial\Omega_1/\partial E_1$ sunt funcții rapid variabile. Când $\partial\Omega_1/\partial E_1$ crește, $\partial\Omega_2/\partial E$ scade și invers. Prin urmare produsul

$$\frac{\partial\Omega_2(E - E_1)}{\partial E} \frac{\partial\Omega_1}{\partial E_1} = \Omega'_1 \Omega'_2$$

are un maxim foarte pronunțat pentru o anumită valoare a lui E_1 . Maximul se obține anulând derivata logaritmului acestei expresii:

$$\frac{d}{dE_1} \ln(\Omega'_1 \Omega'_2) = 0 \quad (6.53)$$

În 6.53 notația cu prim indică prima derivată în raport cu energia. Obținem:

$$\frac{d \ln \Omega'_1}{dE_1} + \frac{d \ln \Omega'_2}{dE_1} = 0 \quad (6.54)$$

dar

$$\frac{d \ln \Omega'_2}{dE_1} = \frac{d \ln \Omega'_2}{dE_2} \frac{dE_2}{dE_1} = - \frac{d \ln \Omega'_2}{dE_2} \quad (6.55)$$

deoarece $E_2 = E - E_1$.

Atunci:

$$\frac{d \ln \Omega'_1}{dE_1} - \frac{d \ln \Omega'_2}{dE_2} = 0 \quad (6.56)$$

sau:

$$\frac{d \ln \Omega'_1}{dE_1} = \frac{d \ln \Omega'_2}{dE_2} \quad (6.57)$$

Deoarece

$$d\Omega_1 = \frac{d\Omega_1}{dE_1} dE_1 \quad (6.58)$$

expresia $d\Omega_1/dE_1$ poate fi interpretată ca o densitate de stări microscopice.

Relația 6.57 arată că derivata în raport cu energia a logaritmului densității de stări este aceeași pentru toate sistemele care sunt în contact. Deoarece numărul de particule a celor două sisteme nu se modifică se deduce că la

echilibru această derivată trebuie să fie o funcție numai de temperatura absolută a sistemului, temperatura fiind mărimea care caracterizează echilibrul termic. Atunci:

$$\frac{d \ln \Omega'}{dE} = \beta(T) \quad (6.59)$$

sau:

$$d \ln \Omega' = \beta(T) dE \quad (6.60)$$

Deoarece s-a presupus că peretele separator este diaterm atunci dE are semnificația unei cantități de caldură, adică:

$$dE = \delta Q \quad (6.61)$$

Rezultă:

$$d \ln \Omega' = \beta(T) \delta Q \quad (6.62)$$

Din această ultimă relație rezultă ca $\beta(T)$ este un factor integrant al cantității de căldură elementare. Acest factor integrant este până la o constantă egal cu $1/T$. Se admite că:

$$\beta(T) = \frac{1}{k_B T} \quad (6.63)$$

unde k_B este constanta lui Boltzmann.

Pe baza acestor considerații se poate introduce entropia sistemului ca fiind dată de:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{d \ln \Omega'}{T \beta(T)} T = k_B d \ln \Omega' \quad (6.64)$$

Se integrează și rezultă:

$$S = k_B \ln \Omega'(E) + \text{const} \quad (6.65)$$

6.2.3 Aplicații ale distribuției microcanonice la gazul ideal monoatomic

Se asimilează gazul ideal monoatomic cu un sistem de N puncte materiale care se află într-un volum V între care nu se exercită forțe de interacțiune.

Aceasta înseamnă că moleculele nu se pot mișca complet liber în sensul că pereții acționează cu forțe repulsive când moleculele vin în contact cu aceștia.

Deoarece nu există forțe de interacție între molecule energia potențială de interacție este nulă.

Se aleg ca variabile canonice q_i și p_i coordonatele și impulsurile carteziene. Atunci hamiltonianul acestui sistem este:

$$H = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} \quad (6.66)$$

unde m este masa unei molecule.

Pentru a determina entropia sistemului trebuie să se calculeze numărul de stări din interiorul hipersuprafeței de energie E din spațiul fazelor.

$$\Omega = \int \cdots \int \frac{dp_1 dp_2 \dots dp_{3N} dq_1 dq_2 \dots dq_{3N}}{N! h^{3N}} \quad (6.67)$$

deoarece orice particulă are trei grade de libertate de translație.

Integrarea asupra elementului de volum $dq_1 dq_2 dq_3$ dă chiar volumul V , deoarece acestea sunt coordonatele carteziene ale primei particule. Se procedează în același mod și cu coordonatele carteziene ale celorlalte particule. Relația 6.67 devine:

$$\Omega = \frac{V^N}{N! h^{3N}} \int \cdots \int dp_1 dp_2 \dots dp_{3N} \quad (6.68)$$

Integrarea după impulsuri se efectuează pentru valorile ce îndeplinesc condiția

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} \leq E \quad (6.69)$$

sau

$$\sum_{i=1}^{3N} p_i^2 \leq 2mE \quad (6.70)$$

În spațiul impulsurilor, aceste puncte sunt situate la o distanță de origine cel mult egală cu $\sqrt{2mE}$, adică ocupă volumul unei sfere de rază $\sqrt{2mE}$. Nu se va calcula explicit acest volum ci va fi evaluat făcând următoarele considerații. Deoarece aria unui cerc este proporțională cu pătratul razei,

volumul sferei este proporțional cu puterea a treia, atunci într-un spațiu $3N$ dimensional volumul sferei este proporțional cu R^{3N} . Atunci:

$$\Omega = \frac{C_1 V^N (2mE)^{\frac{3N}{2}}}{N! h^{3N}} = \frac{C V^N E^{\frac{3N}{2}}}{N! h^{3N}} \quad (6.71)$$

Derivând:

$$\Omega' = \frac{\partial \Omega}{\partial E} = \frac{3N}{2N! h^{3N}} C V^N E^{\frac{3N}{2}-1} \quad (6.72)$$

Rezultă:

$$S = k_B \ln \Omega' = k_B \ln \frac{3C}{2} + N k_B \ln \frac{V}{h^3} + k_B \left(\frac{3N}{2} - 1 \right) \ln E - \ln (N-1)! \quad (6.73)$$

Cum numărul de molecule este foarte mare se poate scrie:

$$\frac{3N}{2} - 1 \approx \frac{3N}{2} \quad ; \quad N - 1 \approx N \quad (6.74)$$

Utilizând formula lui Stirling

$$\ln N! \approx N \ln \frac{N}{e} \quad (6.75)$$

relația 6.73 se scrie:

$$S = k_B \ln \frac{3C}{2} + k_B N \ln \frac{V}{h^{3N}} + \frac{3N k_B}{2} \ln E - N \ln \frac{N}{e} \quad (6.76)$$

Din această relație se pot deduce proprietățile sistemului:

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T} = \frac{3N k_B}{2E} \quad (6.77)$$

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{p}{T} = \frac{k_B N}{V} \quad (6.78)$$

În relația de mai sus E este de fapt energia internă U din termodinamică, deoarece gazul ideal are doar energie cinetică de translație.

Astfel se obțin ecuațiile de stare:

$$E = \frac{3}{2} k_B N T \quad (6.79)$$

și

$$pV = k_B NT \quad (6.80)$$

6.3 Distribuția canonică

6.3.1 Expresia distribuției canonice

Utilizarea distribuției microcanonice este destul de incomodă deoarece obținerea numărului de microstări este extrem de anevoioasă pentru diferite sisteme. Această distribuție se folosește pentru deducerea relațiilor de bază din fizica statistică. La distribuția microcanonică s-a ajuns admitând că la echilibru sistemul are o energie bine determinată fapt care este valabil pentru sistemele izolate. Studiul făcut arată ca subsistemele 1 și 2 care nu sunt izolate ci doar în contact termic unul cu altul ating o stare de echilibru în care energiile E_1 și E_2 nu mai au valori bine determinate și pot admite fluctuații extrem de mici. Aceasta conduce la ideea de a studia starea de echilibru a unui sistem în contact cu un termostat (rezervor termic). Se consideră că sistemul 1 este sistemul pe care-l vom studia iar sistemul 2 este termostatul. Probabilitatea pentru ca punctul reprezentativ al sistemul 1 să se găsească în elementul de volum $dq_1 dp_1$ din spațiul fazelor indiferent de starea în care se găsește termostatul 2 este dată de expresia:

$$dP = C \Omega'_2 (E - E_1) d\Omega_1 = \rho d\Omega_1 \quad (6.81)$$

unde C este o constantă.

Dar din ecuația:

$$S_2 = k_B \ln \Omega'_2 (E - E_1) \quad (6.82)$$

rezultă:

$$\Omega'_2 (E - E_1) = \exp \left[\frac{S_2 (E - E_1)}{k_B} \right] \quad (6.83)$$

unde E este energia totală a sistemului format din sistem și termostat. Deoarece termostatul este un rezervor foarte mare de energie $E_1 \ll E$ (energia sistemului 1 este foarte mică în raport cu energia termostatului) se poate scrie:

$$S_2(E - E_1) = S_2(E) - \frac{\partial S_2(E)}{\partial E} E_1 \quad (6.84)$$

unde

$$\frac{\partial S_2(E)}{\partial E} = \frac{1}{T} \quad (6.85)$$

iar T este temperatura termostatului. Dacă se ține cont de relațiile 6.81, 6.84 și 6.85 se poate exprima funcția de distribuție astfel:

$$\rho = C \exp \left[\frac{S_2(E)}{k_B} \right] \exp \left(-\frac{E_1}{k_B T} \right) \quad (6.86)$$

Expresia de mai sus capătă o formă mai simplă dacă înglobăm factorul $\exp[S_2(E)/k_B]$ în constantă, deoarece aceasta se referă la termostat. Se exprimă E_1 în funcție de variabilele canonice și se notează $E_1 = H(p, q)$. Atunci funcția de distribuție devine:

$$\rho = C \exp \left[-\frac{H(p, q)}{k_B T} \right] \quad (6.87)$$

unde constanta se determină din condiția de normare. Rezultă:

$$C = \frac{1}{\int \cdots \int \exp \left[-\frac{H(p, q)}{k_B T} \right] d\Omega} \quad (6.88)$$

Deoarece sistemul se află la T , V , N fixați, constanta de normare va depinde de acești parametri. Inversa ei se notează cu $Z(T, V, N)$:

$$Z(T, V, N) = \int \cdots \int \exp \left[-\frac{H(p, q)}{k_B T} \right] d\Omega \quad (6.89)$$

Ea poartă numele de sumă de stare, sau funcție de partiție. Atunci funcția de distribuție este:

$$\rho = \frac{1}{Z(T, V, N)} \exp \left[-\frac{H(p, q)}{k_B T} \right] \quad (6.90)$$

Aceasta este funcție de distribuție canonică iar ansamblul respectiv poartă numele de ansamblu canonic.

Discuția de până acum a fost făcută în ipoteza că energia sistemului variază continuu. Atunci probabilitatea ca sistemul să se găsească într-o regiune din spațiul fazelor este:

$$dP = C \exp \left[-\frac{H(p, q)}{k_B T} \right] d\Omega \quad (6.91)$$

unde $d\Omega$ este dat de una din expresiile 6.8 sau 6.10.

Vom considera situația în care sistemul poate exista doar în stările discrete de energie $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$. În acest caz probabilitatea ca sistemul să se afle în starea de energie E_n este:

$$P_n = C \exp \left(-\frac{E_n}{k_B T} \right) \quad (6.92)$$

Constanta de normare se determină din condiția de normare:

$$\sum_n P_n = 1 \quad (6.93)$$

Atunci funcția de partiție este:

$$Z = \sum_n \exp \left(-\frac{E_n}{k_B T} \right) \quad (6.94)$$

6.3.2 Interpretarea mărimilor termodinamice

Odată determinată funcția de distribuție se pot deduce proprietățile sistemelor deoarece se pot calcula valorile medii ale mărimilor caracteristice. Ca exemplu se consideră energia sistemelor conservative: aceasta este dată chiar de hamiltonianul sistemului. Energia internă a sistemului se calculează astfel:

$$U = \langle H \rangle = \frac{1}{Z} \int \cdots \int H \exp \left(-\frac{H}{k_B T} \right) d\Omega \quad (6.95)$$

Parametrii de forță sunt definiți prin relațiile:

$$A_i = \left\langle \frac{\partial H}{\partial a_i} \right\rangle = \frac{1}{Z} \int \cdots \int \frac{\partial H}{\partial a_i} \exp \left(-\frac{H}{k_B T} \right) d\Omega \quad (6.96)$$

Notând

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \quad (6.97)$$

se poate scrie funcția de partiție astfel:

$$Z = Z(\beta, T) = \int \cdots \int \exp(-\beta H) d\Omega \quad (6.98)$$

Atunci:

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = - \int \cdots \int H \exp(-\beta H) d\Omega \quad (6.99)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial a_i} = -\beta \int \cdots \int \frac{\partial H}{\partial a_i} \exp(-\beta H) d\Omega \quad (6.100)$$

Energia internă, parametrii de poziție și entropia sistemului se exprimă cu ajutorul funcției de partiție a sistemului:

Din 6.95 și 6.99 rezultă:

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = - \int \cdots \int H \exp(-\beta H) d\Omega = -ZU \quad (6.101)$$

sau

$$U = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \quad (6.102)$$

iar din relațiile 6.96 și 6.100:

$$A_i = -\frac{1}{\beta Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial a_i} \right) \quad (6.103)$$

Astfel:

$$A_i = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial a_i} \ln Z \quad (6.104)$$

Entropia sistemului se deduce considerând $\ln Z = \ln Z(\beta, a_i)$; prin diferențiere:

$$d \ln Z = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} d\beta + \sum_i \frac{\partial \ln Z}{\partial a_i} da_i \quad (6.105)$$

sau

$$d \ln Z = -U d\beta - \sum_i \beta A_i da_i \quad (6.106)$$

dar:

$$d \ln Z = -U d\beta - \beta \delta L = -d(U\beta) + \beta (dU - \delta L) \quad (6.107)$$

de unde:

$$d \ln Z = -d \left(\frac{U}{k_B T} \right) + \frac{\delta Q}{k_B T} \quad (6.108)$$

De aici rezultă:

$$S = k_B \ln Z + \frac{U}{T} \quad (6.109)$$

sau

$$\ln Z = -\frac{U - TS}{k_B T} = -\frac{F}{k_B T} \quad (6.110)$$

Relația de mai sus leagă energia liberă de funcția de partiție. Relația se mai poate scrie:

$$Z = \exp \left(-\frac{F}{k_B T} \right) \quad (6.111)$$

Atunci funcția de distribuție este:

$$\rho = \frac{1}{Z} \exp \left(-\frac{H}{k_B T} \right) = \exp \left(\frac{F - H}{k_B T} \right) \quad (6.112)$$

De aici:

$$\ln \rho = \frac{F - H}{k_B T} \quad (6.113)$$

Se observă că relația de mai sus conține mărimi microscopice și macroscopice. Mediind 6.113 se obține:

$$\langle \ln \rho \rangle = \frac{F - \langle H \rangle}{k_B T} = \frac{F - U}{k_B T} = -\frac{S}{k_B} \quad (6.114)$$

de unde rezultă:

$$S = -k_B \langle \ln \rho \rangle \quad (6.115)$$

sau:

$$S = -k \int \cdots \int \rho \ln \rho d\Omega \quad (6.116)$$

În cazul în care energia sistemului ia valori discrete probabilitatea ca sistemul să se afle în starea de energie E este:

$$P = \frac{1}{Z} \exp \left(-\frac{E}{k_B T} \right) = \exp \left(\frac{F - E}{k_B T} \right) \quad (6.117)$$

Logaritmând:

$$\ln P = \frac{F - E}{k_B T} \quad (6.118)$$

și mediind:

$$\langle \ln P \rangle = \frac{F - \langle E \rangle}{k_B T} = \frac{F - U}{k_B T} = -\frac{S}{k_B} \quad (6.119)$$

rezultă relația lui Boltzmann:

$$S = -k_B \langle \ln P \rangle \quad (6.120)$$

Relația lui Boltzmann arată că entropia este proporțională cu logaritmul probabilității de realizare a stării respective.

6.3.3 Fluctuația energiei

Se definește fluctuația mărimii A ca fiind rădăcina pătrată din abaterea pătratică medie:

$$\sqrt{\langle (\Delta A)^2 \rangle} = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle^{1/2} = (\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2)^{1/2} \quad (6.121)$$

Pentru a calcula fluctuațiile energiei se observă că:

$$\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2 \quad (6.122)$$

Dar:

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = - \int \cdots \int H \exp(-\beta H) d\Omega = \left[-\frac{1}{Z} \int \cdots \int H \exp(-\beta H) d\Omega \right] Z \quad (6.123)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\langle H \rangle \quad (6.124)$$

sau

$$U = \langle H \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \quad (6.125)$$

Derivând încă o dată relația 6.123 se obține:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = \int \cdots \int H^2 \exp(-\beta H) d\Omega = Z \langle H^2 \rangle \quad (6.126)$$

Ținând cont de relațiile 6.124 și 6.126 relația 6.122 devine:

$$\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = \langle (\Delta H)^2 \rangle \quad (6.127)$$

Pe de altă parte din relația 6.110 rezultă $\ln Z = -\beta F$ iar prin derivare de două ori în raport cu β se obține:

$$\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} (-\beta F) = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-F - \beta \frac{\partial F}{\partial \beta} \right) \quad (6.128)$$

Se observă că:

$$\beta \frac{\partial F}{\partial \beta} = \frac{1}{k_B T} \frac{\partial F}{\partial \beta} = \frac{1}{k_B T} \frac{\partial F}{\partial T} \frac{1}{\partial \beta / \partial T} = -T \frac{\partial F}{\partial T} \quad (6.129)$$

Cum:

$$\frac{\partial F}{\partial T} = S$$

rezultă:

$$\beta \frac{\partial F}{\partial \beta} = -TS \quad (6.130)$$

Atunci :

$$\langle (\Delta H)^2 \rangle = \frac{\partial}{\partial \beta} (-F - TS) = \frac{\partial (-U)}{\partial \beta} = k_B T^2 \frac{\partial U}{\partial T} = k_B T^2 C_V \quad (6.131)$$

unde C_V este capacitatea calorică a sistemului la volum constant. Rezultă că fluctuația relativă este:

$$\sqrt{\langle (\Delta H)^2 \rangle} = \sqrt{k_B T^2 C_V} \quad (6.132)$$

$$\frac{\sqrt{\langle (\Delta H)^2 \rangle}}{\langle H \rangle} = \frac{\sqrt{k_B T^2 C_V}}{\langle H \rangle} \quad (6.133)$$

Cum pentru un sistem termodinamic alcătuit din N particule $C_V \sim N$ și $\langle H \rangle \sim N$, atunci:

$$\frac{\sqrt{\langle (\Delta H)^2 \rangle}}{\langle H \rangle} = \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (6.134)$$

De exemplu numărul de molecule de gaz la presiune normală dintr-un centrimetru cub este de ordinul 10^{18} . Atunci $\Delta H / \langle H \rangle \sim 10^{-9}$.

Se observă că în sistemele macroscopice fluctuația relativă a energiei este neglijabilă, adică energia variază insesizabil în jurul valorii energiei medii.

6.3.4 Aplicații ale distribuției canonice la gazul ideal

Gazul ideal este alcătuit din particule care nu interacționează (datorită unui grad înalt de rarefiere) așa încât hamiltonianul sistemului este:

$$H = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} \quad (6.135)$$

iar numărul de grade de libertate este $f = 3N$

Atunci:

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{N! h^{3N}} \int \cdots \int \exp(-\beta H) dp dq \quad (6.136)$$

Se integrează după variabilele de poziție și se obține V^N . Atunci:

$$Z(T, V, N) = \frac{V^N}{N!h^{3N}} \left[\sum_{i=1}^{3N} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{p_i^2}{2mk_B T}\right) dp_i \right] \quad (6.137)$$

sau

$$Z(T, V, N) = \frac{V^N}{N!h^{3N}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{p^2}{2mk_B T}\right) dp \right]^{3N} \quad (6.138)$$

Rezultă:

$$Z = \frac{V^N (2\pi mk_B T)^{\frac{3N}{2}}}{N!h^{3N}} \quad (6.139)$$

Energia liberă este:

$$F(T, V, N) = -k_B T \ln Z \quad (6.140)$$

Se ține cont de formula lui Stirling și rezultă:

$$F = -Nk_B T \ln \left[\left(\frac{2\pi mk_B T}{h^2} \right)^{3/2} \frac{eV}{N} \right] \quad (6.141)$$

Dacă se cunoaște energia liberă se pot determina toate proprietățile sistemului. Astfel, entropia sistemului este dată de:

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = Nk_B \ln \left[\left(\frac{2\pi mk_B T}{h^2} \right)^{3/2} \frac{eV}{N} \right] + \frac{3}{2} Nk_B \quad (6.142)$$

Din 6.141 și 6.142 rezultă energia internă a gazului perfect:

$$U = F + TS = \frac{3}{2} Nk_B T \quad (6.143)$$

Presiunea se obține prin derivarea energiei libere în raport cu volumul:

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = \frac{Nk_B T}{V} \quad (6.144)$$

Aceasta este o ecuație termică de stare, cunoscută și sub denumirea de legea gazelor perfecte.

6.3.5 Legea de distribuție Maxwell - Boltzmann

Fie un sistem de N particule care nu interacționează între ele însă care interacționează cu diverse câmpuri externe. Atunci hamiltonianul sistemului conține pe lângă termenii datorati energiei cinetice a particulelor și energia potențială de interacție.

$$H = \sum_{i=1}^N E_{ci} + \sum_{i=1}^N E_{pi} \quad (6.145)$$

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_{xi}^2 + p_{yi}^2 + p_{zi}^2}{2m} \right) + \sum_{i=1}^N E_{pi} = \sum_{i=1}^N H_i \quad (6.146)$$

În conformitate cu distribuția canonică funcția de distribuție a sistemului este:

$$\rho = C \exp \left(-\frac{H}{k_B T} \right) \quad (6.147)$$

unde C este o constantă.

Astfel probabilitatea ca particulele să aibă componentele impulsului în intervalele $(p_{xi}, p_{xi} + dp_{xi})$, $(p_{yi}, p_{yi} + dp_{yi})$, $(p_{zi}, p_{zi} + dp_{zi})$ și să fie localizate în elementele de volum: $dx_i dy_i dz_i$ este:

$$dP = C \exp \left(-\frac{H}{k_B T} \right) \prod_{i=1}^N dx_i dy_i dz_i \prod_{i=1}^N dp_{xi} dp_{yi} dp_{zi} \quad (6.148)$$

Din această formulă se observă că probabilitatea de a găsi particula o particulă i în elementul de volum din spațiul fazelor $dx_i dy_i dz_i dp_{xi} dp_{yi} dp_{zi}$ este independentă de pozițiile și impulsurile celorlalte particule. Pentru aceasta se integrează după coordonatele carteziene și după componentele impulsurilor celorlalte particule din sistem. Renunțând la indicele i se obține probabilitatea ca o particulă să se găsească în volumul $dx dy dz dp_x dp_y dp_z$ din spațiul fazelor. Se introduce rezultatul integrării într-o constantă, și se obține legea de distribuție Maxwell Boltzmann:

$$dP = C \exp \left(-\frac{H}{k_B T} \right) dx dy dz dp_x dp_y dp_z \quad (6.149)$$

unde H este hamiltonianul unei singure particule:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + E_p(x, y, z) \quad (6.150)$$

Legea de distribuție Boltzmann se obține atunci când interesează probabilitatea de localizare a particulei indiferent de impulsul ei. Se integrează ?? după impulsuri și se obține pentru probabilitatea de localizare expresia:

$$dP = C \exp\left(-\frac{E_p}{k_B T}\right) dx dy dz \quad (6.151)$$

Trebuie remarcat că prin integrare se obțin alte constante care împreună cu constanta inițială dau o nouă constantă. Noua constantă se poate determina exact dacă se aplică condiția de normare.

$$C = \frac{1}{\iiint_V \exp\left(-\frac{E_p}{k_B T}\right) dx dy dz} \quad (6.152)$$

unde V este volumul sistemului.

Atunci probabilitatea corespunzătoare este:

$$dP = \frac{\exp\left(-\frac{E_p}{k_B T}\right) dx dy dz}{\iiint_V \exp\left(-\frac{E_p}{k_B T}\right) dx dy dz} \quad (6.153)$$

O aplicație utilă a acestei distribuții este determinarea în funcție de poziție a concentrației de molecule a unui gaz perfect în câmp gravitațional. Pentru a o deduce, se consideră un cilindru cu aria bazei egală cu S . Energia potențială a unei molecule în câmpul gravitațional este:

$$E_p = mgz \quad (6.154)$$

unde am considerat axa Oz ca axă verticală. Atunci probabilitatea ca particula să se afle în elementul de volum $dx dy dz$ este:

$$dP = C \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right) dx dy dz \quad (6.155)$$

Se integrează după $dx dy$ și se obține ca rezultat suprafața S . Probabilitatea ca particula să se afle între cotele z și $z + dz$ este:

$$dP = C \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right) dz \quad (6.156)$$

Numerele de particule care se află la înălțimea z_1 în intervalul $z_1, z_1 + dz_1$ și la înălțimea z_2 în intervalul $z_2, z_2 + dz_2$ sunt proporționale cu probabilitățile de localizare respective.

$$N(z_1) = C \exp\left(-\frac{mgz_1}{k_B T}\right) \quad (6.157)$$

$$N(z_2) = C \exp\left(-\frac{mgz_2}{k_B T}\right) \quad (6.158)$$

unde C este o constantă. Atunci:

$$\frac{N(z_1)}{N(z_2)} = \exp\left[-\frac{mg(z_1 - z_2)}{k_B T}\right] \quad (6.159)$$

Această relație o vom transforma pentru a obține o relație între concentrațiile moleculelor la înălțimile respective $n(z_1)$ și $n(z_2)$:

$$\begin{aligned} \frac{N(z_1)}{V} \frac{V}{N(z_2)} &= \exp\left[-\frac{mg(z_1 - z_2)}{k_B T}\right] \\ \frac{n(z_1)}{n(z_2)} &= \exp\left[-\frac{mg(z_1 - z_2)}{k_B T}\right] \end{aligned} \quad (6.160)$$

Pentru $z = 0$ se obține concentrația de molecule de la suprafața pământului. Atunci concentrația de molecule variază cu înălțimea după legea:

$$n(z) = n(0) \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right) \quad (6.161)$$

Presupunând că temperatura nu variază cu înălțimea și cunoscând faptul că $p = nk_B T$ rezultă:

$$p(z) = p(0) \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right) \quad (6.162)$$

unde $p(0)$ este presiunea la suprafața pământului.

Legea de distribuție Maxwell se referă la distribuția după viteze a moleculelor unui gaz. Pentru a obține această lege se integrează 6.149 după variabilele de poziție și rezultă probabilitatea ca particula să aibă componentele impulsului în intervalele $(p_x, p_x + dp_x), (p_y, p_y + dp_y), (p_z, p_z + dp_z)$.

$$dP = C \exp \left(-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mk_B T} \right) dp_x dp_y dp_z \quad (6.163)$$

Cum $p_x = mv_x$, $p_y = mv_y$, $p_z = mv_z$, probabilitatea ca viteza particulei să aibă componentele în intervalele $(v_x, v_x + dv_x)$, $(v_y, v_y + dv_y)$, și $(v_z, v_z + dv_z)$ este:

$$dP = C \exp \left[-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2k_B T} \right] dv_x dv_y dv_z \quad (6.164)$$

Aceasta este legea de distribuție a lui Maxwell. Constanta de integrare se deduce din condiția de normare:

$$\int dP = C \iiint \exp \left[-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2k_B T} \right] dv_x dv_y dv_z = 1 \quad (6.165)$$

Această integrală se face calculând trei integrale de tipul:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) dv = \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m}} \quad (6.166)$$

Atunci relația 6.165 devine:

$$C \left(\frac{2\pi k_B T}{m} \right)^{3/2} = 1 \quad (6.167)$$

de unde :

$$C = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (6.168)$$

Astfel expresia 6.164 este:

$$dP = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2k_B T} \right] dv_x dv_y dv_z \quad (6.169)$$

Se poate exprima această probabilitate folosind coordonate polare, în care viteza particulei este caracterizată prin modulul ei, prin unghiul θ pe care îl

face cu axa Oz și unghiul φ pe care îl face proiecția vitezei în planul xOy cu axa Ox. Atunci:

$$dv_x dv_y dv_z = v^2 \sin \theta d\theta d\varphi dv \quad (6.170)$$

Se obține:

$$dP = C \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) v^2 \sin \theta d\theta d\varphi dv \quad (6.171)$$

Dacă interesează doar probabilitatea ca viteza particulei să fie cuprinsă între v , $v + dv$ indiferent de orientare, relația 6.171 se integrează după variabilele θ și φ . Deoarece:

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \quad (6.172)$$

se obține:

$$dP = 4\pi C \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) v^2 dv \quad (6.173)$$

Constanta C se determină ca și în cazul anterior din condiția de normare:

$$4\pi C \int_0^\infty \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) v^2 dv = 1 \quad (6.174)$$

Se obține:

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (6.175)$$

Atunci relația 6.174 devine:

$$dP = 2\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) v^2 dv \quad (6.176)$$

Din această expresie rezultă funcția de distribuție după viteze:

$$\rho(v) = 2\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) \quad (6.177)$$

Funcția are un maxim pentru o anumită viteză denumită viteza cea mai probabilă.

$$v_p = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (6.178)$$

Putem calcula viteza medie precum și viteza pătratică medie:

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^\infty v \rho(v) dv}{\int_0^\infty \rho(v) dv} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \quad (6.179)$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty v^2 \rho(v) dv}{\int_0^\infty \rho(v) dv} = \frac{3k_B T}{2\pi m} \quad (6.180)$$

6.3.6 Teorema echipartiției energiei

Teorema echipartiției energiei arată că valoarea medie a unui produs de forma $p_i (\partial H / \partial p_i)$ sau $q_i (\partial H / \partial q_i)$ este totdeauna egală cu $k_B T$.

Vom face această demonstrație pentru produsul $p_i (\partial H / \partial p_i)$

$$\left\langle p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \right\rangle = \frac{1}{Z} \int \cdots \int p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \exp \left(-\frac{H}{k_B T} \right) d\Omega$$

unde:

$$d\Omega = \frac{dp_1 \cdots dp_i \cdots dp_f dq_1 \cdots dq_i \cdots dq_f}{h^f}$$

Integrând prin părți rezultă:

$$\begin{aligned} \left\langle p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \right\rangle &= \frac{k_B T}{Z} \int \cdots \int \exp \left(-\frac{H}{k_B T} \right) d\Omega \\ &\quad - \frac{1}{Z} \int \cdots \int \frac{\partial}{\partial p_i} \left[p_i \exp \left(-\frac{H}{k_B T} \right) \right] d\Omega \end{aligned} \quad (6.181)$$

Cea de-a doua integrală din 6.181 va fi efectuată după p_i .

$$\int \frac{\partial}{\partial p_i} \left[p_i \exp \left(-\frac{H}{k_B T} \right) \right] dp_i = p_i \exp \left(-\frac{H}{k_B T} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad (6.182)$$

Rezultatul integrării este nul deoarece exponențiala tinde mai repede la zero decât p_i . Atunci:

$$\left\langle p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \right\rangle = \frac{k_B T}{Z} Z = k_B T \quad (6.183)$$

Într-un mod asemănător se demonstrează că:

$$\left\langle q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\rangle = k_B T \quad (6.184)$$

Dacă presupunem că p_i reprezintă componenta carteziană a impulsului unei particule a sistemului

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m} p_i$$

Cum:

$$p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i^2}{m} = 2 \frac{p_i^2}{2m}$$

$$\left\langle p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \right\rangle = 2 \frac{\langle p_i^2 \rangle}{2m} = k_B T$$

Atunci:

$$\frac{\langle p_i^2 \rangle}{2m} = \frac{k_B T}{2} \quad (6.185)$$

Prin urmare contribuția fiecărui grad de libertate la energia cinetică este $k_B T/2$. Aceasta justifică denumirea de teoremă a echipartiției energiei:

Fiecare grad de libertate contribuie la energia totală cu $k_B T/2$.

În cazul gazului ideal format din N particule numărul gradelor de libertate este $3N$. Cum în cazul acesta nu avem interacție între molecule, energia internă este datorată numai energiei cinetice a particulelor.

$$U = 3N \frac{k_B T}{2} \quad (6.186)$$

Considerând $N = N_A$ (numărul lui Avogadro) căldura molară la volum constant este:

$$C_{\mu V} = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{3k_B N}{2} = \frac{3R}{2} \quad (6.187)$$

Dacă sistemul este format din particule ce oscilează în jurul unei poziții de echilibru și ne limităm la proiecția acestei mișcări de-a lungul unei axe de coordonate, energia potențială este proporțională cu pătratul coordonatei particulei care în acest caz reprezintă elongația de la poziția de echilibru.

$$U = cq_i^2$$

unde c este o constantă.

Atunci

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 2cq_i$$

$$\left\langle q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\rangle = \langle 2cq_i^2 \rangle = k_B T \quad (6.188)$$

Astfel:

$$\langle cq_i^2 \rangle = \frac{k_B T}{2} \quad (6.189)$$

Prin urmare contribuția acestui termen la energia potențială este $k_B T/2$

Pentru mișcarea completă în spațiu energia potențială medie a fiecărei particule este $3k_B T/2$. O astfel de situație o întâlnim în cazul corpurilor solide. Dacă numărul de atomi conținut de corp este N energia potențială a întregului ansamblu este $3Nk_B T/2$. La această energie se adăugă energia datorată mișcării atomilor, care are tot valoarea $3Nk_B T/2$.

Dacă se consideră un kmol de substanță energia internă totală a acestuia este:

$$U = 3N_A k_B T \quad (6.190)$$

Căldura molară a corpului solid este:

$$C_{\mu V} = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 3R \quad (6.191)$$

Rezultatul este cunoscut sub denumirea de legea Dulong-Petit care este confirmată experimental la temperaturi mari.

6.4 Distribuția macrocanonică

6.4.1 Expresia distribuției macrocanonice

Atunci când a fost dedusă distribuția microcanonică s-a considerat că sistemul este complet izolat de mediul extern.

O astfel de situație este una idealizată, în general un sistem poate schimba energie sau substanță cu mediul extern. Distribuția canonică ia în considerare faptul că sistemul se poate afla în contact termic cu un termostat și poate schimba energie cu acesta. Acest lucru trebuie privit prin prisma imposibilității izolării complete a unui sistem. Totuși există o limitare importantă în cazul utilizării acestei distribuții și anume aceea că numărul de particule din sistem este constant.

Din acest motiv trebuie considerată și o distribuție pentru sistemele ce schimbă atât energie cât și particule cu mediul extern. Aceasta este distribuția macrocanonică.

Se presupune că sistemul $\mathcal{S}$ este în contact cu un alt sistem $\mathcal{R}$ care este în același timp și termostat și rezervor de particule. În plus ambele sisteme conțin un singur fel de particule și cum cele două sisteme sunt în echilibru potențialul chimic este același.

Se observă că energia și numărul de particule al sistemului considerat nu sunt fixate. Atunci se poate vorbi numai de valorile lor medii în condițiile date; ele sunt mărimi care prezintă fluctuații.

Din cele două sisteme se formează un sistem compus a cărui energie este:

$$E = E_1 + E_2 + E_{12} \quad (6.192)$$

E_1 fiind energia sistemului $\mathcal{S}$, E_2 este energia rezervorului $\mathcal{R}$ și E_{12} este energia de interacție dintre cele două sisteme. Considerând energia de interacție neglijabilă atunci:

$$E = E_1 + E_2 \quad (6.193)$$

În sistemul compus numărul total de particule este constant.
Deoarece sistemul $\mathcal{R}$ este un rezervor

$$E_2 \gg E_1$$

$$N_2 \gg N_1$$

Se aplică sistemului compus izolat distribuția microcanonică. Probabilitatea ca punctul reprezentativ al sistemului $\mathcal{S}$ să se găsească în elementul de volum $dp_1 dq_1$ din spațiul fazelor, indiferent de starea în care se găsește rezervorul $\mathcal{R}$ este:

$$dP = C\Omega'_2(E_2, N_2) d\Omega_1 = C\Omega'_2(E - E_1, N - N_1) d\Omega_1 \quad (6.194)$$

Deoarece

$$S_2 = k_B \ln \Omega'_2 \quad (6.195)$$

rezultă

$$\Omega'_2(E - E_1, N - N_1) = \exp \left[\frac{S_2(E - E_1, N - N_1)}{k_B} \right] \quad (6.196)$$

Având în vedere relațiile 6.195 și 6.196 entropia S_2 se exprimă astfel:

$$S_2(E - E_1, N - N_1) = S_2(E, N) + \frac{\partial S_2}{\partial E_1} E_1 + \frac{\partial S_2}{\partial N_1} N_1 \quad (6.197)$$

Deoarece entropia depinde de numărul de particule $\frac{\partial S}{\partial N}$ va fi exprimată în funcție de potențialul chimic al unei particule

$$\frac{\partial S}{\partial N} = \frac{\partial S}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial N} = -\frac{\mu}{T} \frac{\partial (Nm_0)}{\partial N} = -\frac{m_0\mu}{T} = -\frac{\mu_0}{T}$$

În relația de mai sus m_0 este masa unei particule, iar $\mu_0 = m_0\mu$ este potențialul chimic al unei particule.

Dar

$$\frac{\partial S_2}{\partial E_1} = -\frac{\partial S_2}{\partial (E - E_1)} = -\frac{\partial S_2}{\partial E_2} = -\frac{1}{T} \quad (6.198)$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial N_1} = \frac{\partial S_2}{\partial (N - N_1)} \frac{\partial (N - N_1)}{\partial N_1} = -\frac{\partial S_2}{\partial N_2} = \frac{\mu_0}{T} \quad (6.199)$$

unde T este temperatura de echilibru.

$$S_2(E - E_1, N - N_1) = S_2(E, N) - \frac{E_1}{T} + \frac{\mu_0 N_1}{T} \quad (6.200)$$

Se exprimă E_1 în funcție de variabilele canonice și se utilizează notația

$$E_1 = H(p, q) \quad (6.201)$$

Relația 6.194 devine:

$$dP = C \exp\left(\frac{S_2}{k_B}\right) \exp\left(-\frac{H - \mu_0 N_1}{k_B T}\right) d\Omega_1 \quad (6.202)$$

Prin introducerea primului termen exponențial în constantă, funcția de distribuție devine:

$$\rho = C \exp\left(-\frac{H - \mu_0 N_1}{k_B T}\right)$$

Renunțând la indicele 1, densitatea de probabilitate a unui sistem în contact cu un termostat și un rezervor de particule are forma:

$$\rho = C \exp\left(-\frac{H - \mu_0 N}{k_B T}\right) \quad (6.203)$$

Constanta de normare se determină din condiția de normare:

$$C \sum_{N=0}^{\infty} \int \cdots \int \exp\left(-\frac{H - \mu_0 N}{k_B T}\right) d\Omega = 1 \quad (6.204)$$

Sumarea se face de la zero (zero particule în sistem) până la infinit deoarece toate particulele din rezervor pot în principiu să treacă în sistem, rezervorul fiind un sistem cu un număr foarte mare de particule:

Ca și în cazul distribuției canonice inversa acestei constante este funcția de partiție

$$Z = C^{-1} = \sum_{N=0}^{\infty} \int \cdots \int \exp\left(-\frac{H - \mu_0 N}{k_B T}\right) d\Omega \quad (6.205)$$

Cu aceasta, funcția de distribuție macrocanonică se scrie:

$$\rho = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{H - \mu_0 N}{k_B T}\right) \quad (6.206)$$

6.4.2 Interpretarea mărimilor termodinamice

Se utilizează relația (dedusă în cazul distribuției canonice)

$$S = -k_B \langle \ln \rho \rangle = -k_B \sum_{N=0}^{\infty} \int \cdots \int \rho \ln \rho d\Omega \quad (6.207)$$

Din relația 6.206 rezultă:

$$\ln \rho = -\frac{H - \mu_0 N}{k_B T} - \ln Z \quad (6.208)$$

astfel că 6.207 devine:

$$S = k_B \ln Z \sum_{N=0}^{\infty} \int \cdots \int \rho d\Omega - \frac{k_B \mu_0}{T} \sum_{N=0}^{\infty} \int \cdots \int \rho N d\Omega + \sum_{N=0}^{\infty} \int \cdots \int H \rho d\Omega \quad (6.209)$$

Cum:

$$\begin{aligned} \sum_{N=0}^{\infty} \int \cdots \int H \rho d\Omega &= \langle H \rangle = U \\ \sum_{N=0}^{\infty} \int \cdots \int \rho N d\Omega &= \langle N \rangle \\ \sum_{N=0}^{\infty} \int \cdots \int \rho d\Omega &= 1 \end{aligned}$$

entropia se scrie:

$$S = k_B U - \frac{k_B \mu_0}{T} \langle N \rangle + k_B \ln Z \quad (6.210)$$

sau

$$-k_B T \ln Z = U - \mu_0 \langle N \rangle - TS \quad (6.211)$$

Se notează cu Ω_m potențialul macrocanonic. Indicele m a fost pus pentru a-l deosebi de Ω - numărul de stări din spațiul fazelor.

$$\Omega_m = U - \mu_0 \langle N \rangle - TS \quad (6.212)$$

$$\Omega_m = -k_B T \ln Z \quad (6.213)$$

Prin diferențierea relației 6.212 se obține:

$$d\Omega_m = dU - \mu_0 d\langle N \rangle - \langle N \rangle d\mu_0 - TdS - SdT \quad (6.214)$$

Cum:

$$dU = TdS - pdV - \mu_0 d\langle N \rangle$$

$$d\Omega_m = -SdT - \langle N \rangle d\mu_0 - pdV \quad (6.215)$$

Atunci:

$$S = - \left(\frac{\partial \Omega_m}{\partial T} \right)_{V, \langle N \rangle} \quad (6.216)$$

$$p = - \left(\frac{\partial \Omega_m}{\partial V} \right)_{T, \langle N \rangle} \quad (6.217)$$

$$\langle N \rangle = - \left(\frac{\partial \Omega_m}{\partial \mu_0} \right)_{T, V} \quad (6.218)$$

Cum potențialul macrocanonic se exprimă în funcție de funcția de partiție, atunci din cunoașterea acestuia se pot determina entropia, presiunea și numărul mediu de particule al sistemului considerat.

Se va calcula în continuare fluctuația numărului mediu de particule și se va exprima în funcție de mărimi ce pot fi determinate în mod experimental. Pentru aceasta se derivează funcția de partiție dată de relația 6.205 la potențialul chimic. Atunci:

$$\frac{\partial Z}{\partial \mu} = \frac{1}{k_B T} \sum_{N=0}^{\infty} \int \cdots \int N \exp \left(-\frac{H - \mu_0 N}{k_B T} \right) d\Omega = \frac{Z}{k_B T} \langle N \rangle \quad (6.219)$$

Rezultă

$$\langle N \rangle = \frac{k_B T}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \mu_0} \quad (6.220)$$

Derivând încă o dată relația 6.219 se obține:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \mu_0^2} = \frac{1}{k_B^2 T^2} \sum_{N=0}^{\infty} \int \cdots \int N^2 \exp \left(-\frac{H - \mu_0 N}{k_B T} \right) d\Omega = \frac{Z}{k_B^2 T^2} \langle N^2 \rangle \quad (6.221)$$

Rezultă:

$$\langle N^2 \rangle = \frac{k_B^2 T^2}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \mu_0^2} \quad (6.222)$$

Fluctuația numărului mediu de particule din sistem este:

$$\sqrt{\langle (\Delta N)^2 \rangle} = \sqrt{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2} \quad (6.223)$$

Se ține cont de relațiile 6.220 și 6.222. Relația 6.223 devine:

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle (\Delta N)^2 \rangle} &= \sqrt{\frac{k_B^2 T^2}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \mu_0^2} - \left(\frac{\partial Z}{\partial \mu_0} \right)^2} \\ \sqrt{\langle (\Delta N)^2 \rangle} &= k_B \left[-\frac{1}{Z^2} \left(\frac{\partial Z}{\partial (\mu_0/T)} \right)^2 + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial (\mu_0/T)^2} \right]^{\frac{1}{2}} = k_B \left[\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial (\mu_0/T)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (6.224)$$

Dar cum din relația 6.220

$$\langle N \rangle = \frac{\partial \ln Z}{\partial (\mu_0/T)}$$

atunci:

$$\sqrt{\langle (\Delta N)^2 \rangle} = k_B \left[\frac{\partial \langle N \rangle}{\partial (\mu_0/T)} \right]^{\frac{1}{2}} = k_B \left[T \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \mu_0} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.225)$$

Pentru a putea exprima această expresie în funcție de anumiți parametri cunoscuți se vor face câteva considerații termodinamice.

Având în vedere modul în care am definit potențialul chimic se poate scrie:

$$\mu_0 = m_0 \mu = m_0 \frac{U + pV - TS}{M} = \frac{U + pV - TS}{\langle N \rangle} \quad (6.226)$$

energia internă a unui sistem deschis se exprimă că

$$U = \mu_0 \langle N \rangle - pV + TS \quad (6.227)$$

Atunci:

$$\Omega_m = U - \mu_0 \langle N \rangle - TS = -pV \quad (6.228)$$

De aici

$$d\Omega_m = -pdV - Vdp \quad (6.229)$$

Se compară relația aceasta cu 6.215 și rezultă:

$$d\mu_0 = \frac{V}{\langle N \rangle} dp - \frac{S}{\langle N \rangle} dT \quad (6.230)$$

Se notează $\xi = V/\langle N \rangle$.

$$d\mu_0 = \xi dp - \frac{Sv}{V} dT \quad (6.231)$$

Din această relație rezultă:

$$\left(\frac{\partial \mu_0}{\partial \xi} \right)_T = \xi \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_T \quad (6.232)$$

Dar:

$$\left(\frac{\partial \mu_0}{\partial \xi} \right) = \left(\frac{\partial \mu_0}{\partial \langle N \rangle} \right) \left(\frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \xi} \right) = -\frac{V}{\xi^2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \langle N \rangle} \right) = -\frac{\langle N \rangle^2}{V} \left(\frac{\partial \mu_0}{\partial \langle N \rangle} \right) \quad (6.233)$$

Din relațiile 6.232 și 6.233 se obține:

$$-\frac{\langle N \rangle^2}{V} \left(\frac{\partial \mu_0}{\partial \langle N \rangle} \right)_T = \xi \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_T = V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T$$

Deoarece coeficientul de compresibilitate izotermă este:

$$k_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad (6.234)$$

atunci:

$$\left(\frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \mu_0}\right)_T = -\frac{\langle N \rangle^2}{V^2} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \frac{\langle N \rangle^2}{V} k_T \quad (6.235)$$

Relația 6.225 devine:

Rezultă:

$$\sqrt{\langle (\Delta N)^2 \rangle} = k_B \sqrt{\frac{T}{V}} k_T \langle N \rangle \quad (6.236)$$

Atunci:

$$\frac{\sqrt{\langle (\Delta N)^2 \rangle}}{\langle N \rangle} = k_B \sqrt{\frac{T}{V}} k_T \quad (6.237)$$

Rezultă că fluctuația relativă a numărului mediu de particule într-o stare de echilibru este foarte mică.

Există unele excepții ca de exemplu în cazul transformărilor de fază. În acest caz compresibilitatea sistemului devine extrem de mare. Astfel în cazul acestor tranziții, în special în apropierea punctelor critice ne așteptăm la variații mari ale numărului de particule al uneia dintre faze. Atunci trebuie lucrat cu formalismul macrocanonic și nu cu cel canonic în care numărul de particule nu variază.

Capitolul 7

Electromagnetism

7.1 Electrostatică

7.1.1 Sarcina electrică

Sarcina electrică este o mărime scalară care măsoară starea de electrizare a corpurilor. S-a demonstrat experimental că există două tipuri de sarcină, una a electronilor (sarcină negativă) și una a protonilor (sarcină pozitivă). Sarcina este discretă, electronii au o sarcină $-e = -1,6 \times 10^{-19}$ C iar protonii $+e = 1,6 \times 10^{-19}$ C. Ea este un invariant scalar și satisface o lege de conservare. Un corp electrizat de dimensiuni neglijabile față de distanțele la care se găsesc corpurile cu care interacționează poate fi considerat punctiform iar sarcina este punctiformă. Starea de încărcare a corpurilor poate fi descrisă prin mărimea ρ numită densitate de sarcină. Astfel se poate exprima sarcina dq dintr-un volum dV ca fiind $dq = \rho dV$. Aici prin dV se înțelege un element de volum foarte mic la scară macroscopică, dar suficient de mare la scară microscopică încât să conțină mulți atomi și molecule. Numai în acest fel se poate trata densitatea de sarcină ca fiind continuă de la punct la punct. În cazul în care sarcina este distribuită pe o suprafață se poate introduce o densitate superficială de sarcină σ astfel încât sarcina de pe o suprafață elementară dS este $dq = \sigma dS$.



Figura 7.1: Forța cu care sarcina q_2 acționează asupra sarcinii q_1 în cazul în care semnele celor două sarcini coincid

7.1.2 Legea lui Coulomb

Legea introdusă de Coulomb se bazează pe următoarele fapte experimentale referitoare la interacția dintre două particule încărcate:

- a) dacă sarcinile sunt de același fel ele se resping, dacă sunt de semne contrare ele se atrag;
- b) forța acționează de-a lungul liniei ce unește cele două particule;
- c) forța este invers proporțională cu pătratul distanței dintre sarcini;
- d) forța este proporțională cu mărimea fiecărei sarcini.

Forma matematică a legii lui Coulomb în sistemul de unități internațional SI este:

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} \quad (7.1)$$

$\vec{F}_{21}$ reprezintă forța cu care sarcina q_2 acționează asupra sarcinii q_1 (Fig. 7.1). Se observă că ecuația pune în evidență caracterul atractiv sau repulsiv al forței dacă semnele sarcinilor sunt incluse în q_1 și q_2 . Când $q_1 q_2 > 0$ (adică ambele sarcini au același semn) $\vec{F}_{21}$ are sensul vectorului $\vec{r}_{21}$ și forța este repulsivă, iar dacă $q_1 q_2 < 0$ (sarcinile au semne contrare) $\vec{F}_{21}$ are sens contrar lui $\vec{r}_{21}$ și forța este atractivă. Sarcinile se măsoară în coulombi, distanța în metri iar forța în newtoni. Factorul $1/4\pi$ este o constantă de proporționalitate introdusă pentru a simplifica anumite ecuații iar $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ este o constantă numită permitivitatea vidului.

În cazul unui sistem de sarcini forța totală care se exercită asupra uneia dintre ele este egală cu suma forțelor exercitate de celelalte particule asupra ei. Astfel forța $\vec{F}_j$ care se exercită asupra sarcinii q_j datorată celorlalte sarcini este:

$$\vec{F}_j = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \quad (7.2)$$

Dacă se notează cu $\vec{r}_i$ vectorul de poziție al sarcinii i atunci:

$$\vec{r}_{ij} = |\vec{r}_j - \vec{r}_i| \quad (7.3)$$

iar 7.2 devine:

$$\vec{F}_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \quad (7.4)$$

7.1.3 Câmpul electric

S-a văzut că forța totală ce se exercită asupra unei particule încărcate este egală cu suma forțelor exercitate de celelalte particule încărcate. În natură există un număr enorm de particule și când se consideră forța ce acționează asupra uneia din ele este util să ne referim la multitudinea de surse ce contribuie la această forță prin introducerea conceptului de câmp electric. Astfel dacă se consideră un corp de probă cu sarcina q (foarte mică) iar asupra lui acționează o forță $\vec{F}$, atunci raportul $\vec{F}/q$ este intensitatea câmpului electric în punctul în care sarcina este localizată.

Referitor la interacția dintre sarcini trebuie remarcat că ea se realizează în două etape:

- în prima etapă sarcina sursă determină apariția în spațiul din jurul său a unei stări speciale, care conferă spațiului proprietăți diferite de cele ale spațiului vid.

- în a doua etapă orice sarcină adusă în spațiul în care s-a realizat această stare specială suferă acțiunea unei forțe. De fapt această stare specială, în care fiecare sarcină este acționată de o forță, poartă numele de câmp electric.

Considerând în punctul P o sarcină de probă q iar în jurul ei o serie de sarcini q_i unde $i = 1, 2, \dots, n$ forța care acționează asupra sarcinii din punctul P este:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i q}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (7.5)$$

Se observă că:

$$\frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (7.6)$$

nu mai depinde de sarcina q , care poate fi făcută oricât de mică încât prezența ei să nu modifice poziția celorlalte sarcini. Astfel se poate defini intensitatea câmpului electric în punctul P creat de sarcinile q_i :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (7.7)$$

Dacă sistemul ar avea doar sarcina q_i intensitatea câmpului creat de aceasta ar fi:

$$\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (7.8)$$

Astfel:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \quad (7.9)$$

Cu alte cuvinte intensitatea câmpului electric este suma intensităților câmpurilor electrice datorate fiecărei sarcini în parte. Acesta este așa numitul principiu al superpoziției.

Pentru a obține o reprezentare a câmpului electric se pot defini liniile de câmp ca fiind curbele la care în fiecare punct vectorul intensitate câmp electric este tangent. Ele au sensul lui $\vec{E}$. Astfel în cazul unei sarcini pozitive (Fig. 7.2) sensul liniei de câmp este dinspre sarcină iar în cazul unei sarcini negative sensul este înspre sarcina respectivă. Trebuie remarcat că liniile de câmp sunt continue, pornesc de pe sarcinile încărcate pozitiv și se termină pe cele negative. Ele nu se intersectează deoarece în orice punct câmpul electric trebuie să fie univoc determinat.

7.1.4 Câmp electric în medii substanțiale

S-a considerat câmpul electric generat de particule care sunt în repaus și încărcate electric. Această imagine nu este cea mai potrivită atunci când se consideră câmpul electric în interiorul unui atom, deoarece electronul în acest caz nu este o sarcină electrică în repaus. Mai mult, în mecanica cuantică se arată că poziția electronului nu poate fi determinată. În loc să se imagineze

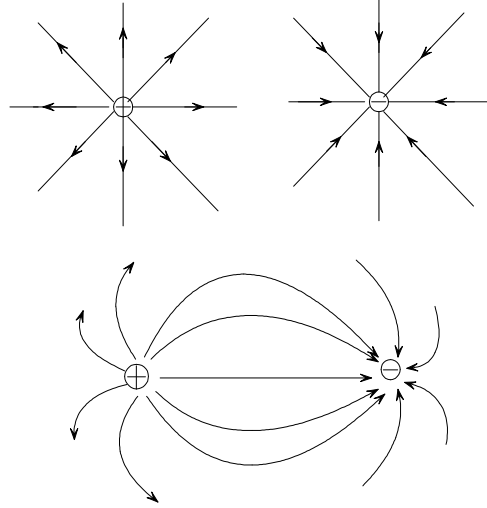


Figura 7.2: Linii de câmp

electronul ca o sarcină punctiformă este de preferat ca sarcina lui să fie privită ca fiind împrăștiată în spațiu în așa numitul *nor electronic* aflat în jurul nucleului. Se consideră că $\rho_{el}(\vec{r}) d\tau$ este sarcina conținută în elementul de volum $d\tau$ determinat de vectorul de poziție $\vec{r}$ într-un sistem de referință care are ca origine, de exemplu nucleul, iar $\rho_{el}(\vec{r})$ este densitatea de sarcină a norului electronic. Atunci sarcina totală a electronului este egală cu suma tuturor sarcinilor din elementele de volum $d\tau$ din norul electronic. Putem exprima sarcina electronului ca o integrală pe volumul norului electronic. Deoarece acest volum nu poate fi cu exactitate definit¹ integrala se extinde în tot spațiul.

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} \rho_{el}(\vec{r}) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{el}(\vec{r}) dx dy dz \quad (7.10)$$

În atomii complecși norii electronici ai diferiților electroni se pot suprapune și într-o porțiune poate exista o sarcină provenită de la mai mulți electroni.

Sarcina cu care este încărcat nucleul poate fi reprezentată printr-o densitate de sarcină, chiar dacă nucleul este mult mai mic în comparație cu întreg

¹Prin aceasta nu se introduce nici o eroare deoarece probabilitatea de a găsi electronul la distanțe mari de nucleu este foarte mică.

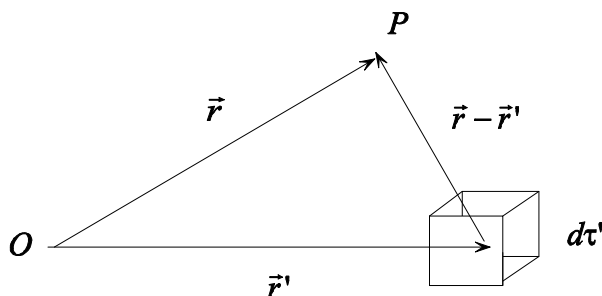


Figura 7.3: Sarcina din fiecare volum $d\tau'$ contribuie la câmpul creat în punctul P

atomul.

Se poate defini o densitate de sarcină atomică $\rho_{at}(\vec{r})$ care să ia în considerație și sarcina pozitivă a nucleului. Această densitate este pozitivă în regiunea nucleului și negativă în regiunile unde se găsesc norii electronici. Integrala densității de sarcină atomică pe întreg volumul atomului este nulă deoarece atomii sunt neutri din punct de vedere electric.

Pentru determinarea câmpului produs de densitatea atomică de sarcină se generalizează formula 7.8 înlocuind suma printr-o integrală. Astfel câmpul electric într-un punct P (Fig. 7.3) este:

$$\vec{E}_{at}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\infty} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \rho_{at}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau' \quad (7.11)$$

Relația de mai sus nu este foarte utilă deoarece în general nu se cunoaște densitatea de sarcină atomică. Nu numai că această densitate nu este cunoscută dar și atomii sunt într-o continuă mișcare de agitație termică. Aceasta face ca $\rho_{at}(\vec{r})$ și $\vec{E}_{at}(\vec{r})$ să fie într-o continuă schimbare. În interiorul atomilor câmpul electric, numit câmp electric intern este foarte mare în apropierea nucleului. Peste acest câmp se suprapune și câmpul provenit de la atomii și moleculele din jurul atomului considerat. Trebuie remarcat că nu numai atomii și moleculele încărcate generează câmp electric ci și atomii și moleculele neutre. Aceste câmpuri sunt extrem de puternice pe distanțe de câteva diametre atomice. Astfel molecula de HCl este neutră din punct de vedere electric dar în cadrul legăturii chimice care ține cei doi atomi împreună o parte a norului electronic al atomului de hidrogen este transferat către atomul de clor. Atunci atomul de hidrogen rămâne cu un exces de sarcină pozitivă în

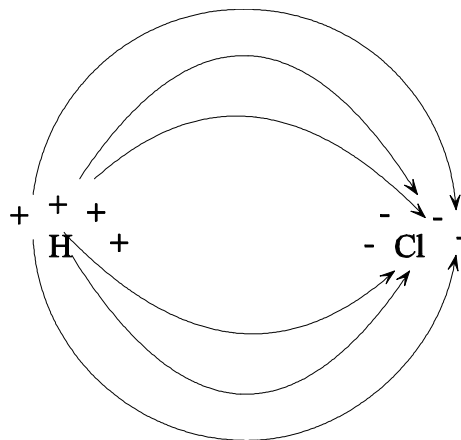


Figura 7.4: Liniile de câmp din jurul moleculei de HCl . Hidrogenul a pierdut o parte din norul electronic astfel că în regiunea respectivă apare un exces de sarcină pozitivă

timp ce cel de clor rămâne cu un exces de sarcină negativă. Astfel liniile de câmp pleacă de la atomul de hidrogen la cel de clor și ies în afara moleculei (Fig. 7.4)

7.1.5 Câmpul macroscopic

În cazul unor sisteme macroscopice, detaliile câmpului atomic nu mai au nici o importanță și ceea ce este important este câmpul mediu. Valoarea medie a câmpului electric estimată pe o regiune mult mai mare decât a unui singur atom, dar încă foarte mică față de dimensiunea întregului sistem poartă numele de câmp electric macroscopic.

În comparație cu câmpurile atomice mari din apropierea nucleelor, câmpurile macroscopice sunt mici. În izolatori, precum porțelanul, electronii sunt ținuti strâns legați de atomi iar excesul de sarcină pozitivă și negativă poate rămâne mult timp, menținând un câmp macroscopic. Sarcina netă a izolatorului poate fi distribuită în volum sau pe suprafață. În cazul metalelor conductoare precum cuprul, sarcinile în exces se distribuie doar pe suprafață. În cazul conductorilor anumiți electroni de valență și electronii de conducție sunt liberi să se miște în interiorul conductorului în prezența unui câmp electric macroscopic. Atunci când un corp conductor este plasat într-un câmp

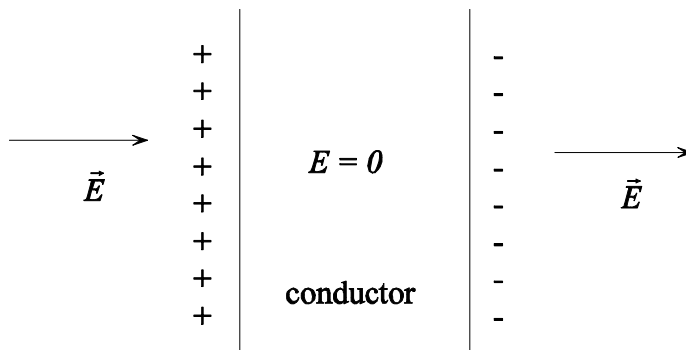


Figura 7.5: Sarcini induse care apar pe suprafața unui conductor aflat în câmp electric

extern electronii de conducție se deplasează sub influența câmpului astfel că pe suprafețele conductorului apar sarcini ca în Fig. 7.5.

Sarcinile care apar pe suprafața conductorului în acest mod, datorită prezenței unui câmp electric se numesc sarcini induse.

În continuare vom studia legătura dintre câmpul macroscopic și cel microscopic. Să considerăm un volum δV mic în comparație cu volumul sistemului, dar suficient de mare pentru a conține suficienți atomi. Sarcina netă din δV este:

$$\iiint_{\delta V} \rho_{at}(\vec{r}') d\tau'$$

Atunci putem defini o densitate macroscopică de sarcină

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{\delta V} \iiint_{\delta V} \rho_{at}(\vec{r}') d\tau' \quad (7.12)$$

ca fiind sarcina pe unitatea de volum δV centrată pe $\vec{r}$. Densitatea de sarcină astfel definită $\rho(\vec{r})$ este o funcție ce variază continuu în interiorul corpurilor cu excepția frontierelor, unde densitatea de sarcină se schimbă în mod discontinuu.

Pe suprafețe pot fi concentrații mari de sarcină. Sarcina de suprafață ocupă un strat subțire având grosimea de câteva diametre atomice. De aceea se poate reprezenta această sarcină ca un strat de grosime infinitezimală. Densitatea superficială de sarcină poate fi definită ca și cea de volum. Să

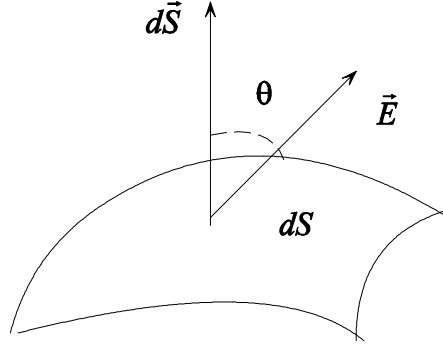


Figura 7.6: Fluxul câmpului electric printr-o suprafață

considerăm o porțiune δV din stratul subțire având sarcina de pe suprafața δS centrată pe vectorul de poziție $\vec{r}$. Densitatea superficială de sarcină este:

$$\sigma(\vec{r}) = \frac{1}{\delta S} \iiint_{\delta V} \rho_{at}(\vec{r}') d\tau' \quad (7.13)$$

Câmpul macroscopic satisface principiul superpoziției. Pentru a găsi un câmp electric într-un punct al cărui vector de poziție este $\vec{r}$ este necesar să se însumeze contribuția sarcinii nete $\rho(\vec{r}') d\tau'$ din toate elementele de volum și contribuția sarcinilor de suprafață $\sigma(\vec{r}') dS'$ de pe toate elementele de suprafață. Rezultă:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \sigma(\vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (7.14)$$

7.1.6 Legea lui Gauss

Se definește fluxul câmpului electric printr-o suprafață $d\vec{S}$ (Fig. 7.6) ca fiind:

$$d\Phi = \vec{E} d\vec{S} \quad (7.15)$$

unde $d\vec{S} = \vec{n} dS$, iar $\vec{n}$ este normal la suprafață în punctul considerat. Atunci:

$$d\Phi = E dS \cos \theta \quad (7.16)$$

unde θ este unghiul format de vectorii $\vec{n}$ și $\vec{E}$.

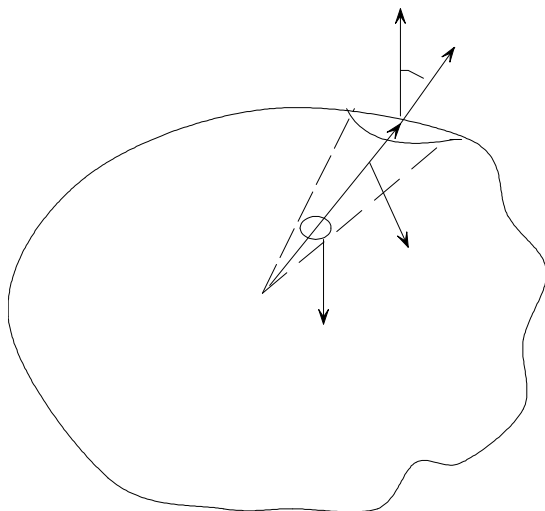


Figura 7.7: Legea lui Gauss. În cazul că sarcina este în interiorul suprafeței, unghiul total sub care se vede suprafața din q este 4π

Pentru a determina forma legii lui Gauss se consideră o sarcină q în interiorul unei suprafețe închise S (Fig. 7.7). Atunci fluxul prin suprafața considerată este:

$$\Phi = \iint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\vec{r} d\vec{S}}{r^3} \quad (7.17)$$

Se observă că:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} d\vec{S} = \frac{1}{r^2} dS \cos \theta = \frac{dS_n}{r^2} \quad (7.18)$$

unde dS_n este proiecția suprafeței $d\vec{S}$ pe un plan perpendicular pe $\vec{r}$. Cum:

$$\frac{dS_n}{r^2} = d\Omega \quad (7.19)$$

atunci:

$$\Phi = \iint_s \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (7.20)$$

Dacă sarcina este aleasă în exteriorul suprafeței rezultă că fluxul total al câmpului electric este nul.

Dacă în locul unei singure sarcini, în interiorul suprafeței S există un sistem de sarcini atunci în locul lui q se află o sumă de sarcini.

$$\Phi = \iint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^n q}{\varepsilon_0} \quad (7.21)$$

Relația 7.20 rămâne adevărată și în cazul în care sarcina q este distribuită în mod continuu în volumul V . Atunci se poate exprima sarcina q în funcție de densitatea volumică de sarcină astfel:

$$q = \iiint_V \rho(\vec{r}) dV \quad (7.22)$$

unde V este volumul închis de suprafața S . Relația ?? devine:

$$\iint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{r}) dV \quad (7.23)$$

care este forma integrală a legii lui Gauss în vid.

Dar integrala de suprafață se poate transforma într-una de volum:

$$\iint_S \vec{E} d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dV \quad (7.24)$$

unde ∇ este operatorul divergență.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (7.25)$$

Atunci:

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{r}) dV \quad (7.26)$$

Astfel se ajunge la forma diferențială a legii lui Gauss pentru sarcini în vid:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \quad (7.27)$$

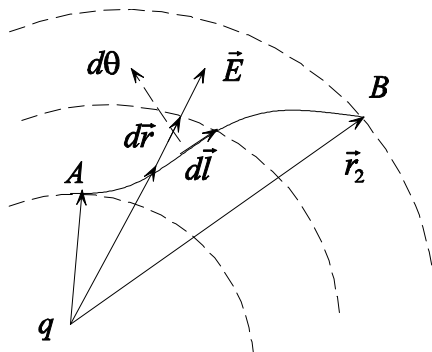


Figura 7.8: Lucrul mecanic efectuat la deplasarea unei sarcini de-a lungul curbei AB

7.1.7 Potentialul electric

Se demonstrează în continuare că forțele electrostatice sunt forțe conservative. Pentru aceasta se arată că lucrul mecanic efectuat de forța datorată câmpului electric al unei sarcini Q ce acționează asupra sarcinii q care este deplasată între două puncte, nu depinde de drum ci doar de poziția inițială și finală. Se consideră situația arătată în Fig. 7.8, unde sarcina q este deplasată între punctele A și B .

Lucrul mecanic elementar este:

$$\delta L = \vec{F}_e d\vec{l} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r} d\vec{l} \quad (7.28)$$

Cum:

$$\frac{\vec{r}}{r} d\vec{l} = dl \cos \theta = dr \quad (7.29)$$

atunci lucrul mecanic total va fi:

$$L = \int_{r_A}^{r_B} \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad (7.30)$$

și se constată că el nu depinde de drum.

Se obține același rezultat dacă corpul cu sarcina q este deplasat în câmpul produs de o distribuție continuă de sarcini.

Să considerăm două puncte A și B într-un câmp electrostatic (Fig. 7.9).

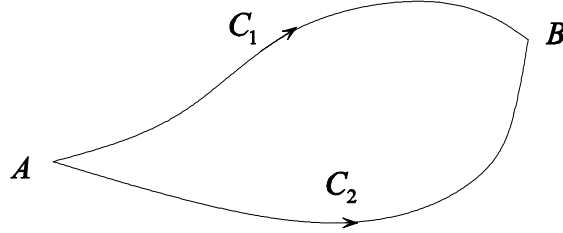


Figura 7.9: Lucrul mecanic al câmpului electric asupra unei sarcini calculat pe două drumuri între două puncte este același

Din faptul că lucrul mecanic nu depinde de drum rezultă:

$$q \int_{A(C_1)}^B \vec{E} d\vec{l} = q \int_{A(C_2)}^B \vec{E} d\vec{l} = -q \int_{B(C_2)}^A \vec{E} d\vec{l} \quad (7.31)$$

Atunci:

$$q \int_{A(C_1)}^B \vec{E} d\vec{l} + q \int_{B(C_2)}^A \vec{E} d\vec{l} = \oint_C \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad (7.32)$$

Prin urmare pentru un câmp electrostatic conservativ circulația vectorului respectiv pe orice curbă închisă este nulă.

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad (7.33)$$

Ecuția 7.33 poate fi folosită ca criteriu de conservativitate pentru orice câmp vectorial pentru care este îndeplinită o relație de tipul de mai sus.

Utilizând teorema lui Stokes care permite trecerea de la integrala pe un contur la o integrală pe o suprafață ce se sprijină pe conturul respectiv, se obține:

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) d\vec{S} = 0 \quad (7.34)$$

Pentru ca o astfel de integrală să fie nulă indiferent de suprafața aleasă este necesar ca rotorul intensității câmpului electric să fie nul:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (7.35)$$

În coordonate carteziane ecuația 7.35 se scrie:

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z = 0 \quad (7.36)$$

Aceasta este forma diferențială a condiției de conservativitate a câmpului electric.

Într-un câmp conservativ se poate introduce o energie potențială astfel că lucrul mecanic efectuat la deplasarea unui corp dintr-un punct în altul să fie egal cu diferența dintre energiile potențiale pe care corpul le are în cele două puncte:

$$E_P(\vec{r}_B) - E_P(\vec{r}_A) = -L_{AB} \quad (7.37)$$

În cazul unei sarcini punctiforme q ce se deplasează în câmpul creat de o altă sarcină punctiformă Q :

$$E_P(\vec{r}_B) - E_P(\vec{r}_A) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad (7.38)$$

Atunci energia potențială de interacție dintre cele două sarcini este:

$$E_P = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{const}$$

unde constanta este determinată de modul de alegere al punctului în care energia potențială este nulă. Trebuie remarcat că relația 7.38 definește doar diferența dintre energiile potențiale. Alegerea punctului în care energia potențială este nulă se face de obicei astfel încât forma energiei potențiale să fie cât mai simplă. Din acest motiv în cazul sistemului format din două sarcini se poate considera că la o distanță infinită dintre ele energia potențială este nulă. Rezultă:

$$E_P = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (7.39)$$

Se introduce noțiunea de potențial electric ca raportul dintre energia potențială a unui corp de probă și valoarea sarcinii acelui corp:

$$V = \frac{E_P}{q} \quad (7.40)$$

Pentru un câmp produs de o sarcină punctiformă forma acestuia este:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (7.41)$$

Se determină în continuare relația dintre intensitatea câmpului electric și potențial. Să considerăm încă o dată lucrul mecanic efectuat de câmpul electric la deplasarea unei sarcini între două puncte.

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} d\vec{l} = q \int_A^B \vec{E} d\vec{l}$$

Atunci:

$$E_p(\vec{r}_B) - E_p(\vec{r}_A) = -L_{AB} = -q \int_A^B \vec{E} d\vec{l}$$

dar:

$$\frac{E_p(\vec{r}_B)}{q} - \frac{E_p(\vec{r}_A)}{q} = - \int_A^B \vec{E} d\vec{l}$$

Rezultă:

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} d\vec{l} \quad (7.42)$$

Ecuția de mai sus poate fi privită ca una de definiție pentru potențial, însă ca și în cazul anterior, potențialul este definit până la o constantă arbitrară. Cum

$$\int_A^B \vec{E} d\vec{l} = \frac{1}{q} L_{AB} \quad (7.43)$$

atunci:

$$V_B - V_A = -\frac{1}{q}L_{AB} = \frac{1}{q}L_{BA} \quad (7.44)$$

Se alege un punct de referință în care se consideră potențialul nul (de exemplu punctul A). Rezultă:

$$V_B = \frac{1}{q}L_{BA} = \frac{1}{q}L_{BR} \quad (7.45)$$

Aceasta înseamnă că potențialul într-un punct este egal cu raportul dintre lucrul mecanic efectuat de forțele câmpului la deplasarea unei sarcini din acel punct într-un punct de referință și valoarea sarcinii respective.

Să considerăm diferența de potențial între două puncte aflate la distanța $\delta\vec{r}$ care este suficient de mică pentru ca $\vec{E}$ să poată fi considerat constant pe acest interval. Atunci:

$$\delta V = V(\vec{r} + \delta\vec{r}) - V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}}^{\vec{r} + \delta\vec{r}} \vec{E} d\vec{l} = -\vec{E}\delta\vec{r}$$

În coordonate carteziene :

$$\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z = -E_x\delta x - E_y\delta y - E_z\delta z$$

Rezultă:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad , \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

sau

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (7.46)$$

Se pornește de la relația anterioară și se ține cont de faptul că:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (7.47)$$

Se obține:

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2 V = -\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (7.48)$$

Operatorul

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}$$

este operatorul Laplace

Relația

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (7.49)$$

poartă denumirea de ecuația lui Poisson. Dacă în regiunea din spațiu considerată nu există sarcini libere atunci:

$$\Delta V = 0 \quad (7.50)$$

Ecuația 7.50 poartă numele de ecuația lui Laplace.

Trebuie remarcat că noțiunea de potențial, precum și relația $\nabla \times \vec{E} = 0$ pot fi deduse pornind de la forma generală a legii lui Coulomb 7.14 în care se consideră numai termenul de volum (deoarece termenul de suprafață provine practic tot dintr-o distribuție volumică cu o grosime foarte mică). Câmpul produs de o distribuție continuă este:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (7.51)$$

Factorul vectorial al integrantului poate fi privit ca o funcție de $\vec{r}$ și este gradientul cu semn schimbat al scalarului $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$. Într-adevăr:

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (7.52)$$

Relația de mai sus se poate verifica prin calcul direct.

Deoarece gradientul se aplică coordonatelor x, y, z iar integrarea se referă la coordonatele x', y', z' operatorul gradient poate fi scos în afara integralei:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \iiint \frac{\rho(\vec{r}') d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (7.53)$$

Din ecuația de mai sus se observă că intensitatea câmpului electric este generată de un scalar V numit potențial:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (7.54)$$

Potențialul poate fie exprimat în funcție de densitatea de sarcină astfel:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}') d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (7.55)$$

Deoarece rotorul gradientului oricărei funcții scalare este nul rezultă:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (7.56)$$

7.1.8 Momentul de dipol

Momentul electric

Prin definiție momentul electric al unei sarcini punctiforme este:

$$\vec{p}_q = q\vec{r} \quad (7.57)$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție al sarcinii electrice.

În cazul când există mai multe sarcini punctiforme $q_1, q_2, \dots, q_n$ plasate față de origine la distanțele $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ momentul electric al acestei distribuții este:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}_i \quad (7.58)$$

Dipolul electric

Dipolul electric este un sistem de două sarcini egale și semne contrare q și $-q$ aflate la distanța $\vec{l}$ una de alta (Fig. 7.10).

Momentul electric al dipolului este:

$$\vec{p} = q\vec{r}_1 - q\vec{r}_2 = q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = q\vec{l} \quad (7.59)$$

În continuare se calculează potențialul creat de un dipol electric la o distanță mult mai mare decât distanța dintre sarcinile dipolului. Se presupune că sarcinile sunt situate pe axa Oz. Potențialul în punctul P va fi (Fig. 7.11):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (7.60)$$

unde:

$$r_2^2 = r^2 + \frac{1}{4}l^2 - lr \cos \theta = r^2 \left(1 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{l}{r} \cos \theta \right)$$

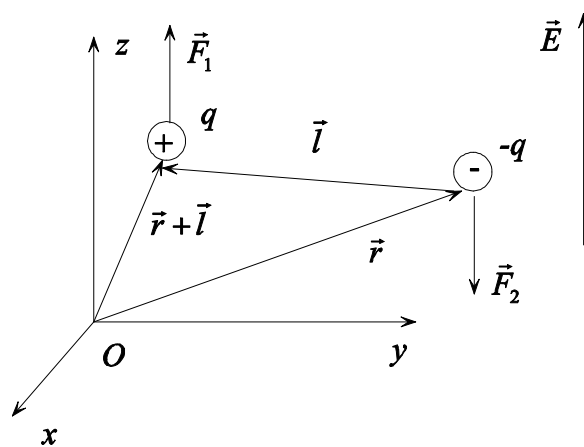


Figura 7.10: Dipolul electric

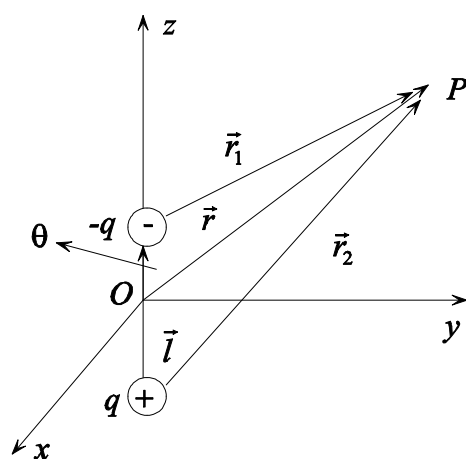


Figura 7.11: Calculul potențialului creat de un dipol

$$r_1^2 = r^2 + \frac{1}{4}l^2 + lr \cos \theta = r^2 \left(1 + \frac{l^2}{r^2} + \frac{l}{r} \cos \theta \right)$$

Deoarece s-a presupus că $r \gg l$ atunci:

$$\frac{1}{r_2} = (r_2^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{l}{r} \cos \theta \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{l}{2r} \cos \theta + \dots \right)$$

$$\frac{1}{r_1} = (r_1^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{l^2}{r^2} + \frac{l}{r} \cos \theta \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{l}{2r} \cos \theta + \dots \right)$$

Rezultă:

$$V = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (7.61)$$

Se observă că $\vec{p}\vec{r} = pr \cos \theta = qlr \cos \theta$. Relația 7.61 se mai scrie:

$$V = \frac{\vec{p}\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (7.62)$$

Câmpul electric creat de această distribuție de sarcină se calculează utilizând relația 7.46

$$\vec{E} = -\nabla V = -\nabla \left(\frac{\vec{r}\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{\vec{r}\vec{p}}{r^3} \right)$$

Dar:

$$\nabla \left(\frac{\vec{r}\vec{p}}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} \nabla (\vec{r}) + (\vec{r}\vec{p}) \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right)$$

Considerând că momentul de dipol este un vector constant:

$$\nabla (\vec{r}\vec{p}) = \vec{p}; \quad \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3\vec{r}}{r^5}$$

Câmpul creat de un dipol la o distanță mult mai mare decât cea dintre sarcinile sale este:

$$\vec{E} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{3(\vec{r}\vec{p})\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^5} \quad (7.63)$$

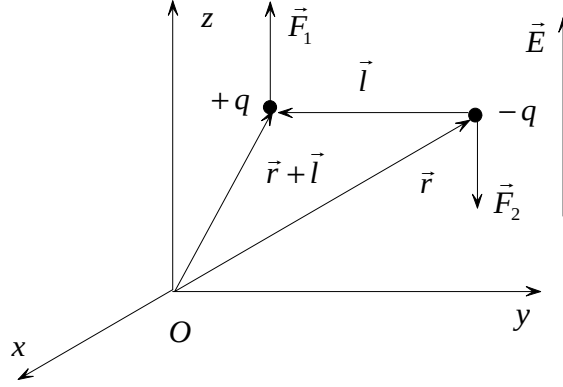


Figura 7.12: Dipol în câmp electric

7.1.9 Dipolul în câmp electrostatic

Se consideră un dipol într-un câmp electrostatic $\vec{E}$ (Fig. 7.12).

Asupra fiecărei sarcini va acționa câte o forță, rezultanta acestora fiind:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) \quad (7.64)$$

unde $\vec{E}_1$ și $\vec{E}_2$ sunt intensitățile câmpului în punctele în care este plasată sarcina pozitivă respectiv sarcina negativă. Expresia 7.64 mai poate fi scrisă:

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r} + \vec{l}) - q\vec{E}(\vec{r})$$

sau

$$\begin{aligned} \vec{F} = & q \left[E_x(\vec{r} + \vec{l}) - E_x(\vec{r}) \right] \vec{e}_x + \\ & q \left[E_y(\vec{r} + \vec{l}) - E_y(\vec{r}) \right] \vec{e}_y + \\ & q \left[E_z(\vec{r} + \vec{l}) - E_z(\vec{r}) \right] \vec{e}_z + \end{aligned} \quad (7.65)$$

Cum:

$$E_x(\vec{r} + \vec{l}) - E_x(\vec{r}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} l_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} l_y + \frac{\partial E_x}{\partial z} l_z = \vec{l} \cdot \nabla E_x$$

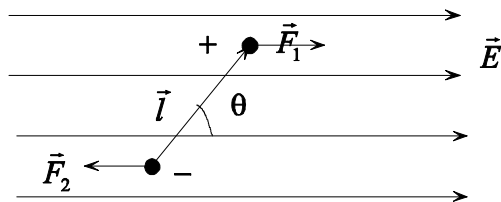


Figura 7.13: Dipol în câmp electric uniform

$$E_y(\vec{r} + \vec{l}) - E_y(\vec{r}) = \frac{\partial E_y}{\partial x} l_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} l_y + \frac{\partial E_y}{\partial z} l_z = \vec{l} \cdot \nabla E_y$$

$$E_z(\vec{r} + \vec{l}) - E_z(\vec{r}) = \frac{\partial E_z}{\partial x} l_x + \frac{\partial E_z}{\partial y} l_y + \frac{\partial E_z}{\partial z} l_z = \vec{l} \cdot \nabla E_z$$

Rezultă:

$$\vec{F} = q(\vec{l} \cdot \nabla E_x) \vec{e}_x + q(\vec{l} \cdot \nabla E_y) \vec{e}_y + q(\vec{l} \cdot \nabla E_z) \vec{e}_z = q(\vec{l} \cdot \nabla) \vec{E} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} \quad (7.66)$$

Dacă dipolul se află într-un câmp electric uniform, rezultanta forței ce acționează asupra sa este nulă. Se observă că numai în câmpuri electrice neomogene, asupra dipolului acționează o forță diferită de zero.

Trebuie remarcat că în câmp electric omogen asupra dipolului acționează un cuplu de forțe care în raport cu centrul dipolului este:

$$\vec{M} = \vec{l} \times q\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (7.67)$$

Când dipolul este orientat de-a lungul liniilor de câmp adică atunci când vectorii $\vec{p}$ și $\vec{E}$ au aceeași direcție cuplul se anulează (Fig. 7.13).

Prin urmare această poziție corespunde energiei potențiale minime a dipolului în câmp electric.

Calculul energiei potențiale a dipolului în câmp electric se face pornind de la faptul că lucrul mecanic efectuat la rotația dipolului cu un unghi $d\theta$ este egal cu variația energiei potențiale.

$$dE_p = -\delta L = -M d\theta$$

sau

$$dE_p = -pE \sin \theta d\theta$$

Se integrează:

$$\Delta E_p = -pE \cos \theta \quad (7.68)$$

De aici rezultă că:

$$E_p = -pE \cos \theta + \text{const} \quad (7.69)$$

Deoarece atunci când dipolul se așează de-a lungul liniilor de câmp energia este minimă, ar trebui ca această poziție să se aleagă ca poziție de zero pentru energia potențială.

Totuși, de obicei, se alege poziția de zero a energiei potențiale când $\theta = \pi/2$, adică atunci când dipolul este perpendicular pe liniile de câmp. În acest caz cele două sarcini ale dipolului se află în același plan echipotențial.

Punând $E_p = 0$ când $\theta = \pi/2$ rezultă că $\text{const} = 0$ astfel că:

$$E_p = -pE \cos \theta = -\vec{p}\vec{E} \quad (7.70)$$

7.1.10 Energia potențială a unui sistem de sarcini

Să considerăm o sarcină punctiformă izolată q_1 . Când sarcina q_2 este adusă la distanța $\vec{r}_{12}$ față de prima sarcină energia potențială a sistemului de sarcini este:

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

Când o altă sarcină q_3 este adusă în apropierea celor două, energia potențială adițională este:

$$\frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right)$$

Pentru un ansamblu de n sarcini, energia totală este:

$$E_p = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right] + \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{r_{14}} + \frac{q_2}{r_{24}} + \frac{q_3}{r_{34}} \right] + \dots$$

sau:

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \sum_{j,j < i} \frac{q_j}{r_{ij}} \quad (7.71)$$

Restricția $j < i$ este impusă pentru ca fiecare interacție să fie luată doar o singură dată.

Se poate exprima energia potențială considerând fiecare interacție de două ori și apoi să împărțim la 2:

$$E_p = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \sum_{j,j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i \quad (7.72)$$

unde

$$V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j,j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}} \quad (7.73)$$

este potențialul în punctul în care se află sarcina q_i .

Pentru o distribuție de sarcină continuă energia potențială capătă forma

$$E_p = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int \dots \int \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv dv' \quad (7.74)$$

Se observă că:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

Atunci energia potențială se poate exprima astfel:

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) dv \quad (7.75)$$

Ecuțiile 7.72 , 7.74 și 7.75 exprimă energia potențială electrostatică în funcție de poziția sarcinilor și relevă interacțiunile dintre acestea prin forțe coulumbiene.

O altă abordare este aceea care pune în evidență câmpul electric și care interpretează energia sistemului de sarcini ca fiind energia câmpului electric generat de sarcinile electrice. Pentru aceasta se utilizează ecuația Poisson pentru o densitate de sarcină:

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Rezultă:

$$E_p = -\frac{1}{2} \iiint \varepsilon_0 V \Delta V dv \quad (7.76)$$

Această integrală care se extinde în tot spațiul se va integra prin părți; rezultă:

$$E_p = -\frac{\varepsilon_0}{2} \iiint \nabla (V \nabla V) dv + \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint |\nabla V|^2 dv \quad (7.77)$$

Prima integrală este nulă deoarece la infinit valoarea potențialului tinde către zero. Atunci:

$$E_p = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint |\nabla V|^2 dv = \frac{1}{2} \iiint \varepsilon_0 E^2 dv \quad (7.78)$$

Se observă că în această formulare orice referire explicită la sarcina electrică a dispărut. Se poate considera că integrantul din 7.78

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2} |E|^2 \quad (7.79)$$

este o densitate de energie.

Trebuie remarcat că densitatea de energie a câmpului este o mărime pozitivă. Din acest motiv integrala care dă energia câmpului este tot o mărime pozitivă. Aceasta pare a contrazice formula 7.72 deoarece în cazul a două sarcini opuse această energie este negativă. Explicația constă în faptul că relația 7.79 și relația 7.75 conțin și contribuțiile "energiei proprii" la densitatea de energie.

7.1.11 Conductori în echilibru electrostatic

Proprietatea esențială a unui conductor este conferită de mobilitatea sarcinilor (de regulă electroni) în interiorul său.

În cazul echilibrului electrostatic câmpul electric este egal cu zero în interiorul conductorului iar potențialul este constant.

Pentru a demonstra prima parte a acestei afirmații se consideră că intensitatea câmpului electric în conductori este diferită de zero. Atunci electronii liberi vor fi puși în mișcare, fapt ce ar însemna că nu ne găsim în condiții de echilibru electrostatic așa cum am presupus. Rezultă că în conductori câmpul

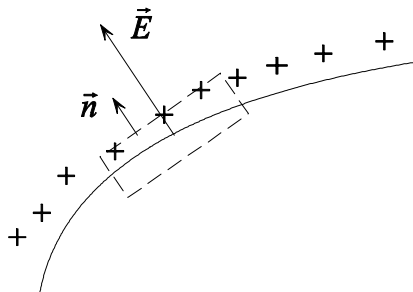


Figura 7.14: Câmpul electric la suprafața unui conductor

este nul. Datorită acestui fapt conform ecuației 7.54 rezultă că potențialul este constant în toate punctele din interiorul conductorului.

Sarcina electrică netă este repartizată în întregime pe suprafața conductorilor și nu în interiorul lor.

Pentru a arăta acest lucru imaginăm o suprafață închisă S în interiorul conductorului pentru care aplicăm legea lui Gauss. Deoarece în interiorul conductorilor și deci și pe suprafața S intensitatea câmpului electric este nulă:

$$\iint_S \vec{E} d\vec{S} = 0 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

De aici rezultă că sarcina Q_{int} din interiorul suprafeței este nulă. Cum suprafața considerată poate lua orice formă, aceasta poate fi făcută să tindă spre suprafața conductorului care închide tot volumul său. Rezultă că sarcina din interiorul conductorului va fi nulă. Sarcina se distribuie pe suprafața conductorului.

La suprafața conductorilor în echilibru electrostatic câmpul electric este orientat totdeauna normal la suprafața acestora, iar suprafața conductorilor este o suprafață echipotențială.

Dacă intensitatea câmpului electric nu este normală la suprafața conductorului, atunci ar exista o componentă tangențială a câmpului electric. Cum sarcina este dispusă pe suprafața conductorului rezultă că această sarcină ar fi pusă în mișcare și conductorul nu ar mai fi în echilibru electrostatic.

Se va calcula în continuare valoarea câmpului electric la suprafața conductorilor cunoscând densitatea de sarcină. În Fig. 7.14 este reprezentată o porțiune din suprafața unui conductor pe care densitatea superficială de sarcină este $+\sigma$. Se consideră o suprafață foarte mică sub formă de cilindru

cu o bază aflată în interiorul conductorului iar o altă în afară. Bazele se aleg suficient de mici pentru ca pe întreaga lor arie câmpul electric să fie normal la suprafața conductorului și să fie constant. Se aplică legea lui Gauss pentru această suprafață și se observă că numai integrala prin baza situată în vid aduce o contribuție diferită de zero la fluxul câmpului (în interiorul conductorului $\vec{E} = 0$ iar pe fețele laterale $\vec{E} \perp \vec{n}$). Atunci:

$$\iint_S \vec{E} d\vec{S} = E \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0} \quad (7.80)$$

unde $\sigma \Delta S$ este sarcina totală din interiorul suprafeței considerate. Din 7.80 rezultă câmpul la suprafața conductorului:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (7.81)$$

7.1.12 Energia stocată de un sistem de conductori încărcăți electric

Fie un ansamblu de conductori 1, 2, ... la potențialele $V_1, V_2, \dots$ pe care densitățile de sarcină sunt: $\sigma_1, \sigma_2, \dots$. Un astfel de sistem este prezentat în Fig. 7.15. Densitatea de sarcină nu este aceeași pe fiecare conductor. Se înconjoară sistemul cu o suprafață S_0 care să includă toate corpurile considerate dar care să fie la o distanță suficient de mare încât câmpurile să fie neglijabile pe aceasta. Atunci energia unui astfel de ansamblu este:

$$E_p = \frac{1}{2} \iint_{S_1} \sigma_1 V_1 dS_1 + \frac{1}{2} \iint_{S_2} \sigma_2 V_2 dS_2 + \dots \quad (7.82)$$

Cum la suprafața conductorilor $\sigma = \varepsilon_0 E$ iar normalele la suprafețe sunt îndreptate spre interiorul acestora relația de mai sus se scrie:

$$E_p = -\frac{1}{2} \iint_{S_1} \varepsilon_0 V_1 \vec{E}_1 d\vec{S}_1 - \frac{1}{2} \iint_{S_2} \varepsilon_0 V_2 \vec{E}_2 d\vec{S}_2 - \dots \quad (7.83)$$

Dacă se înlocuiește suma acestor integrale de suprafață cu o singură integrală pe suprafața $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \dots$ se poate exprima energia potențială cu ajutorul unei integrale de volum.

$$E_p = -\frac{1}{2} \iint_S \varepsilon_0 V \vec{E} d\vec{S} = -\frac{1}{2} \iiint_V \varepsilon_0 \nabla \cdot (V \vec{E}) dv \quad (7.84)$$

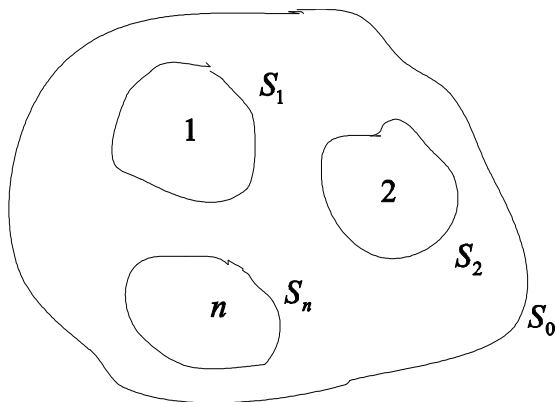


Figura 7.15: Sistem de conductoare încărcate electric

Se observă că:

$$\nabla (V \vec{E}) = V \nabla \vec{E} + \vec{E} \nabla V = V \nabla \vec{E} - \vec{E}^2$$

Deoarece conductoarele sunt în vid, nu avem sarcini electrice în volumul exterior corpurilor, astfel încât $\nabla \vec{E} = 0$; atunci 7.84 capătă forma mai simplă:

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint_V \varepsilon_0 E^2 dv = \frac{1}{2} \iiint_V \varepsilon_0 (\nabla V)^2 dv \quad (7.85)$$

care indică dependența energiei potențiale de potențialul electric.

7.2 Dielectrics

Dielectrics are media in which no electric current appears in the presence of an external electric field, but they modify the state under the action of electric fields and thereby also modify the interaction between bodies with electric charge. The fundamental electric property of dielectrics is the appearance of the effect of polarization under the action of an electrostatic field. The phenomenon is determined by the orientation of dipoles in the electric field. There are three mechanisms by which a dielectric can be polarized:

a) *Polarizarea electronică* se datorează electronilor din dielectrics alcătuiți din moleculele simetrice, atomii sau ionii în care centrul sarcinilor pozitive coincide cu centrul sarcinilor negative. În prezența unui câmp electric are loc

o deplasare relativă a centrului sarcinilor negative față de nucleu încât întreg ansamblul atomic sau ionic se manifestă ca un dipol electric. Polarizarea electronică nu depinde de agitația termică, deoarece în acest caz avem de-a face cu procese atomice.

b) *Polarizarea de orientare dipolară* este prezentă în dielectrici constituiți din molecule nesimetrice (molecule polare) în care centrul sarcinilor pozitive nu coincide cu centrul sarcinilor negative. Un exemplu îl constituie oxidul de carbon în care moleculele posedă un moment dipolar permanent. Din cauza agitației termice dipoli sunt orientați haotic. În prezența unui câmp electric ei tind să se orienteze în direcția acestuia.

c) *Polarizarea ionică* apare prin deplasarea ionilor din pozițiile de echilibru sub acțiunea unui câmp electric. Este caracteristică cristalelor ionice. Toate substanțele prezintă polarizare electronică. Unele substanțe prezintă și polarizare ionică iar altele și polarizare orientatională.

7.2.1 Dipoli electrici

Dipoli electrici induși

Câmpul electric generat de o distribuție de sarcini poate fi estimat aplicând principiul superpoziției. În practică însă acest lucru este extrem de dificil de realizat deoarece sarcinile electrice nu sunt fixe. Astfel într-un metal electronii de conducție se deplasează până ce câmpul macroscopic devine zero în interiorul metalului. Într-un izolator, electronii sunt legați de atomi dar un câmp electric extern deplasează ușor electronii în interiorul fiecărui atom. Rezultatul deplasării constă în apariția unor sarcini induse care micșorează câmpul în izolator fără să-l anuleze.

Astfel dacă se consideră un atom neutru care are Z electroni, în absența unui câmp electric extern, nucleul se află în centrul norului electronic acolo unde nu se exercită forțe electrice. Nucleul se găsește într-o poziție de echilibru stabil, astfel încât dacă el se deplasează apar forțe care tind să-l readucă în poziția inițială.

Dacă atomul este introdus într-un câmp electric atunci nucleul este deplasat în sensul câmpului iar norul electronic în sens contrar până se ajunge din nou într-o stare de echilibru stabil. Distorsiunea este extrem de mică. În noua poziție de echilibru se spune că atomul este polarizat. Dacă se notează cu $\vec{d}$ distanța dintre centrul sarcinilor negative și al celor pozitive vectorul

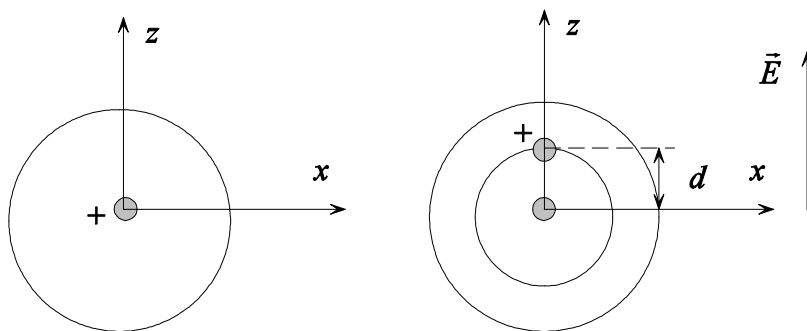


Figura 7.16: Dipolul indus în atomul de hidrogen

$$\vec{p} = Ze\vec{d} \quad (7.86)$$

poartă numele de moment de dipol al atomului considerat. Un astfel de atom care prezintă un moment electric de dipol se denumește atom polarizat, iar dipolul asociat dipol indus.

Se evaluează în continuare mărimea acestui moment electric dipolar pentru atomul de hidrogen folosind un model simplificat. Presupunem că în absența unui câmp electric sarcina electrică negativă este uniform repartizată în volumul unei sfere de rază r_0 , al cărui centru coincide cu poziția nucleului. Se consideră că în prezență câmpului electric exterior distribuția își păstrează forma sferică și dimensiunea, dar se deplasează din poziția ei inițială în sens contrar sensului în care se deplasează nucleul (Fig. 7.16). Se notează cu d distanță dintre centrul sferei ce reprezintă norul electronic și nucleu. La echilibru forța $e\vec{E}$ cu care câmpul electric acționează asupra nucleului trebuie să fie egală cu forța cu care norul electronic acționează asupra nucleului. Pentru a stabili valoarea acestei forțe se utilizează legea lui Gauss. Conform acestei legi câmpul electric din regiunea nucleului este determinat numai de sarcinile din interiorul sferei de rază d așa cum este arătat în Fig. 7.16. Prin urmare:

$$\iint_S \vec{E}_d d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V_d} \rho dv \quad (7.87)$$

Integrând se obține:

Atom	H	He	Ne	Ar	C	Li	Na	K
$\alpha \times 10^{-41} \text{F/m}$	7,34	2,34	4,45	17,80	16,68	134,4	300,40	378

Tabelul 7.1: Polarizabilități

$$E_d 4\pi d^2 = \frac{e}{\varepsilon_0} \frac{d^3}{r_0^3}$$

Valoarea câmpului electric ce acționează asupra nucleului este:

$$E_d = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d}{r_0^3} \quad (7.88)$$

și este orientat în sens invers sensului câmpului electric exterior. Se egalează cele două forțe

$$eE = eE_d$$

Rezultă:

$$E = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d}{r_0^3}$$

Momentul electric dipolar se poate exprima ca

$$p = ed = 4\pi\varepsilon_0 r_0^3 E = \alpha E \quad (7.89)$$

sau vectorial

$$\vec{p} = \alpha \vec{E} \quad (7.90)$$

Mărimea α poartă denumirea de polarizabilitate.

Proporționalitatea între momentul electric de dipol indus și câmpul electric este valabilă doar pentru câmpuri mici. Proprietatea atomilor de a dobândi un moment electric de dipol când sunt introduși în câmp exterior poartă numele de polarizație electrică. Coeficientul de proporționalitate poartă numele de polarizabilitate atomică. În Tabelul 7.1 sunt prezentate câteva valori ale acestui coeficient pentru câteva substanțe.

Se observă că pentru gazele rare valorile polarizabilității sunt foarte mici deoarece electronii sunt foarte puternic legați de atomi.

Cunoscând efectul de polarizare în câmp electric uniform asupra atomilor, putem să imaginăm ce se va întâmpla cu un dielectric constituit din asemenea atomi asupra cărora acționează un câmp electric exterior. Vor fi induse momentele de dipol ale acestor atomi care se vor alinia aproximativ paralel cu direcția câmpului electric exterior deoarece asupra fiecărui dipol va acționa și un câmp rezultat din compunerea câmpurilor electrice create de dipoli vecini. În general cele două câmpuri nu sunt paralele. În plus în sistemul de atomi procesul este afectat și de vibrațiile rețelei cristaline.

Dipoli electrici induși în molecule

Să considerăm inițial moleculele în care, în absența unui câmp exterior centrele distribuțiilor sarcinilor pozitive și negative nu coincid. Există două tipuri de molecule: cele cu simetrie sferică și cele cu o simetrie mai joasă. În cazul moleculelor cu simetrie sferică ca de exemplu CH_4 sau BCl_3 valoarea momentului dipolar în primă aproximație nu depinde de direcția câmpului exterior și este valabilă relația 7.90 cu observația că polarizabilitatea moleculei nu este suma polarizabilităților atomilor constituenți.

În cazul unor molecule care nu au o simetrie sferică polarizarea moleculei depinde de direcția câmpului electric exterior.

Astfel în cazul moleculei de dioxid de carbon un câmp electric aplicat de-a lungul moleculei va induce un dipol mai mare decât în cazul când acesta este aplicat perpendicular. Această diferență rezultă din faptul că molecula este mai ușor deformabilă în lungul axei proprii decât într-o direcție perpendiculară. Se notează cele două polarizabilități cu $\alpha_{\perp}$ și $\alpha_{\parallel}$. Câmpul $\vec{E}$ se descompune după cele două direcții (Fig. 7.17):

$$E_y = E \cos \theta \quad ; \quad E_z = E \sin \theta$$

Atunci momentele de dipol induse pe cele două direcții sunt:

$$p_{\parallel} = \alpha_{\parallel} E \cos \theta$$

$$p_{\perp} = \alpha_{\perp} E \sin \theta$$

Momentul de dipol total este:

$$\vec{p} = E (\alpha_{\parallel} \cos \theta \vec{e}_x + \alpha_{\perp} \sin \theta \vec{e}_z) \quad (7.91)$$

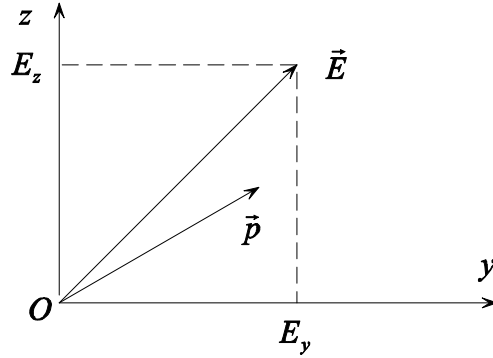


Figura 7.17: Polarizarea moleculei de dioxid de carbon

Rezultă că direcția vectorului $\vec{p}$ nu mai coincide cu direcția câmpului electric. În acest caz polarizabilitatea unei molecule nu mai este o mărime scalară ci tensorială (compusă dintr-un ansamblu de coeficienți ce exprimă o dependență liniară între componentele vectorului $\vec{p}$ și cele ale vectorului $\vec{E}$). În cazul general:

$$\begin{aligned} p_x &= \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z \\ p_y &= \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z \\ p_z &= \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z \end{aligned} \quad (7.92)$$

adică

$$\vec{p} = \bar{\alpha} \vec{E}$$

unde:

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \quad (7.93)$$

Valorile componentelor acestui tensor sunt funcții de modul de alegere al sistemului de referință. În plus tensorul este simetric, adică:

$$\alpha_{xy} = \alpha_{yx} \quad ; \quad \alpha_{yz} = \alpha_{zy} \quad ; \quad \alpha_{zx} = \alpha_{xz}$$

Atunci matricea asociată acestui tensor este simetrică și există un sistem de coordonate particular pentru care doar componentele diagonale ale tensorului sunt diferite de zero.

Momente dipolare permanente

Există unele molecule la care datorită structurii lor, chiar în absența câmpului electric exterior, centrele sarcinilor pozitive și negative nu coincid și în consecință ele posedă un moment dipolar permanent.

Orice moleculă biatomică, formată din atomi de natură diferită, posedă un asemenea moment dipolar. Această proprietate se datorează faptului că la formarea unor asemenea molecule, de exemplu a moleculelor de HCl, HBr și HI o parte din norul electronic al atomului de hidrogen se transferă atomilor de iod, brom sau clor. Rămâne un exces de sarcină pozitivă la extremitatea moleculei ce conține atomul de hidrogen și un exces de sarcină negativă la cealaltă extremitate.

7.2.2 Densitate de polarizare (materiale omogene)

Când un izolator este plasat într-un câmp electric atomii lui se polarizează. Pentru simplificare să considerăm un material dielectric care conține N atomi pe unitatea de volum. Într-un câmp electric uniform centrul sarcinilor negative al fiecărui atom se deplasează cu aceeași distanță față de nucleu în sens contrar câmpului electric. Fiecare atom va avea un moment de dipol $\vec{p}$ orientat în sensul câmpului. Se consideră o situație simplificată în sensul că nu vom lua în considerare interacția dintre momentele de dipol induse și nici câmpul electric produs de acestea. Deplasarea electronilor conduce la apariția unor sarcini la suprafața dielectricului. Având în vedere cele discutate mai sus, momentul de dipol ce poate fi asociat unui element de volum dv este $\vec{p}Ndv$. Câmpul electric creat de acest element de volum este echivalent cu cel creat de un dipol electric $\vec{p}Ndv$. Produsul $\vec{p}N$ se numește densitate de polarizare și se notează cu $\vec{P}$.

Vom încerca să asociem momentele de dipol de densitatea de sarcină de la suprafața dielectricului.

Pentru aceasta se consideră o porțiune de dielectric de grosime d având suprafața $dxdy$ (Fig.7.18). Deoarece s-a presupus dielectricul omogen și izotrop direcția vectorului de polarizare coincide cu direcția câmpului electric.

Unui element de volum din paralelipipedul considerat a cărui înălțime este egală cu dz i se poate asocia un moment de dipol:

$$\vec{P}dv = \vec{P}dxdydz \quad (7.94)$$

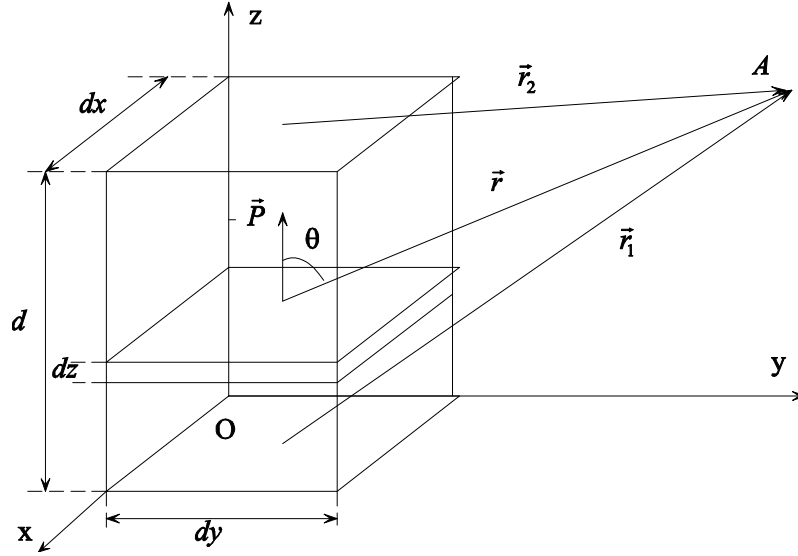


Figura 7.18: Câmpul electric creat de un volum paralelipipedic dintr-un dielectric polarizat.

Potențialul creat de acest element de volum în punctul A suficient de depărtat de acest volum este:

$$dV = \frac{P dx dy dz \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (7.95)$$

Se notează $dS = dx dy$ și integrând în raport cu z se obține:

$$V_A = \frac{PdS}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz \cos \theta}{r^2} = \frac{PdS}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{PdS}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (7.96)$$

Relația 7.96 este echivalentă cu expresia potențialului creat de două sarcini punctiforme egale și de semn contrar având valoarea PdS . Sarcina $+PdS$ este situată la capătul paralelipipedului care se găsește la distanța r_1 față de punctul A iar sarcina negativă $-PdS$ la celălalt capăt la distanța r_2 față de punctul A.

O placă dielectrică introdusă între plăcile unui condensator plan poate fi descompusă în paralelipipede de tipul anterior astfel încât pe baza celor discutate anterior ea poate fi înlocuită cu două distribuții de sarcini plan paralele a căror densități superficiale sunt $\sigma = +P$ și $\sigma = -P$.

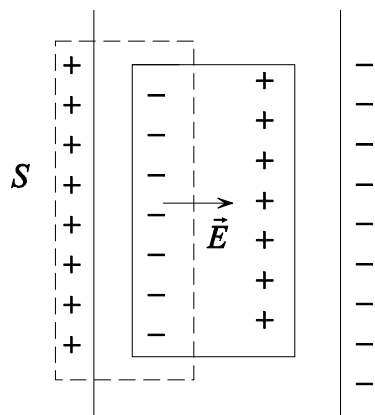


Figura 7.19: Dielectric între plăcile unui condensator încărcat

Dacă $\vec{P}$ nu este perpendicular pe suprafața dielectricului densitatea de sarcină de pe suprafața dielectricului este egală cu componenta normală a densității de polarizare. Atunci:

$$\sigma = P_n = P \cos \theta \quad (7.97)$$

unde θ este unghiul dintre $\vec{P}$ și normala la suprafață.

7.2.3 Permitivitatea relativă și susceptibilitatea electrică

Sarcinile induse pe suprafața materialului dielectric contribuie la câmpul electric macroscopic din interiorul materialului. Contribuțiile acestora poartă denumirea de câmp de depolarizare, deoarece câmpul creat de sarcinile induse la suprafață are sens contrar câmpul electric din exterior.

O consecință a câmpului de depolarizare este creșterea capacității unui condensator prin umplerea acestuia cu material dielectric.

Să considerăm un condensator plan paralel cu suprafața armăturilor S și distanța d dintre acestea. Pe armături se află o densitate de sarcină σ . Se introduce între plăcile condensatorului plan un material dielectric păstrând densitatea de sarcină inițială (Fig. 7.19). Aplicând legea lui Gauss pentru o suprafață S rezultă:

$$ES = \frac{1}{\varepsilon_0} (\sigma - P) S \quad (7.98)$$

Experimental se arată că și în cazul în care în interiorul condensatorului se introduce un dielectric se păstrează proporționalitatea dintre sarcina de pe condensator și diferența de potențial ce se aplică pe armăturile sale. Mai mult se constată că factorul ε_r cu care capacitatea crește depinde numai de natura dielectricului nu și de dimensiunile geometrice. Se notează cu C_0 capacitatea condensatorului în absența dielectricului și cu C capacitatea condensatorului cu dielectric. Relația dintre acestea este:

$$C = \varepsilon_r C_0 = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad (7.99)$$

Dar capacitatea condensatorului cu dielectric se poate scrie ținând cont de relația 7.98 astfel:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\sigma S}{Ed} = \left(1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}\right) \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad (7.100)$$

Din compararea relațiilor 7.99 și 7.100 rezultă că pentru materiale dielectrice omogene și izotrope:

$$\varepsilon_r = \left(1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}\right) \quad (7.101)$$

Constanta ε_r poartă numele de permitivitate relativă. Atunci din relația 7.101 se obține:

$$P = (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_0 E = \chi_e \varepsilon_0 E \quad (7.102)$$

unde

$$\chi_e = \varepsilon_r - 1 \quad (7.103)$$

poartă denumirea de susceptibilitate electrică.

În cazul unor dielectricsi cristalini sau al unor dielectricsi neomogeni permitivitate relativă și susceptibilitatea sunt mărimi tensoriale.

7.2.4 Câmpul local

Pentru dielectrici omogeni relația 7.102 se poate scrie vectorial astfel:

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \quad (7.104)$$

Deoarece densitatea de polarizare se poate exprima în funcție de momentul de dipol:

$$\vec{P} = N \vec{p} \quad (7.105)$$

rezultă

$$\vec{p} = \frac{\chi_e \varepsilon_0}{N} \vec{E} \quad (7.106)$$

Ecuția 7.106 stabilește legătura dintre momentul de dipol mediu al unei singure molecule și câmpul macroscopic. Totuși relația nu este corectă în totalitate deoarece câmpul macroscopic reprezintă o mediere pe o regiune mai mare și de cele mai multe ori nu coincide cu câmpul local în care se află de fapt molecula respectivă. Câmpul local este suma dintre câmpul extern și câmpul generat de celelalte molecule din jurul moleculei considerate. Relația 7.106 este corectă numai pentru gaze rarefiate, deoarece într-un astfel de sistem moleculele sunt foarte depărtate unele de altele iar câmpul local coincide cu cel macroscopic.

În lichide sau în solide se va considera în loc de 7.106 relația:

$$\vec{p} = \frac{\chi_e \varepsilon_0}{N} \vec{E}_{local} \quad (7.107)$$

7.2.5 Susceptibilitatea dielectricilor gazoși polari

În cazul moleculelor polare, câmpul electric poate induce în atomii constituenți dipoli electrici însă contribuția acestora este mai mică decât a dipolilor permanenți. În absența câmpului electric, moleculele polare dintr-un dielectric sunt orientate haotic astfel că momentul dipolar al unității de volum este nul. Datorită distanțelor mari dintre molecule (cazul dielectricilor gazoși) se poate neglija interacția dintre dipolii respectivi. Dacă se aplică un câmp electric apare o interacție între acesta și dipolii din gaz.

Energia potențială de interacție dintre moleculele polare și câmpul electric este:

$$E_p = -\vec{p}\vec{E} = pE \cos \theta \quad (7.108)$$

unde θ este unghiul dintre momentul de dipol și direcția câmpului electric.

Dacă asupra moleculelor nu ar acționa alte forțe, dipolii s-ar alinia paralel cu câmpul electric. Acest lucru nu se petrece deoarece moleculele sunt într-un proces continuu de agitație termică și acest fapt face ca dipolii moleculari să fie parțial aliniați în câmp electric. Se notează cu θ_i unghiul făcut de dipolul i cu direcția câmpului electric. Atunci densitatea de polarizare va fi egală cu:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N p \cos \theta_i = Np \langle \cos \theta \rangle \quad (7.109)$$

unde N este numărul de molecule din unitatea de volum iar $\langle \cos \theta \rangle$ este valoarea medie a cosinusurilor unghiurilor făcute de momentele de dipol cu direcția câmpului electric. Pentru calculul acestei medii se aplică statistica Boltzmann:

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\int \cos \theta \exp \left(-\frac{E_p}{k_B T} \right) d\Omega}{\int \exp \left(-\frac{E_p}{k_B T} \right) d\Omega} \quad (7.110)$$

unde $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$.

Trebuie remarcat că exponentul $-E_p/k_B T$ este foarte mic.

Pentru a evalua energia potențială se consideră că dipolul provine din transferarea unui electron de la un atom la un alt atom. Atunci $q = e = 1,6 \times 10^{-19}$ C iar distanța este de ordinul distanțelor atomice ($d = 10^{-10}$ m). Se consideră câmpul electric ca având valoarea $E = 10^6$ V/m, adică valoarea maximă permisă astfel încât să nu se producă o descărcare electrică în aer. Obținem astfel pentru energia potențială $E_p = edE \approx 10^{-4}$ eV. La temperaturi obișnuite (300 K) energia cinetică medie de translație $\bar{\epsilon}_c = 3k_B T/2$ are valoarea $\approx 10^{-2}$ eV.

Din acest motiv $k_B T \gg E_p$; se poate aproxima:

$$\exp \left(-\frac{E_p}{k_B T} \right) \simeq \left(1 - \frac{E_p}{k_B T} \right) \quad (7.111)$$

Cele două integrale care apar în expresia 7.110 au expresiile:

$$\int \cos \theta \exp \left(-\frac{E_p}{k_B T} \right) d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left(1 - \frac{pE \cos \theta}{k_B T} \right) \cos \theta \sin \theta d\theta$$

$$\int \cos \theta \exp \left(-\frac{E_p}{k_B T} \right) d\Omega = \frac{2pE}{3k_B T}$$

$$\int \exp \left(-\frac{E_p}{k_B T} \right) d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left(1 - \frac{pE \cos \theta}{k_B T} \right) \sin \theta d\theta = 4\pi$$

iar densitatea de polarizare este:

$$P = \frac{Np^2 E}{3k_B T} \quad (7.112)$$

Având în vedere modul de definire al susceptibilității electrice obținem pentru aceasta:

$$\chi_e = \frac{P}{\varepsilon_0 E} = \frac{Np^2}{3\varepsilon_0 k_B T} \quad (7.113)$$

Dacă se iau în considerare și momentele de dipol induse, care sunt în direcția câmpului, polarizarea este:

$$P = N \left(\alpha + \frac{p^2}{3k_B T} \right) E \quad (7.114)$$

De aici rezultă

$$\chi_e = \frac{N}{\varepsilon_0} \left(\alpha + \frac{p^2}{3k_B T} \right) \quad (7.115)$$

Această relație este importantă deoarece prin determinarea susceptibilității electrice la diverse temperaturi se pune în evidență existența sau inexistența moleculelor polare. Astfel, lipsa dependenței de temperatură a lui χ_e (cazul metanului) dovedește că substanța nu conține molecule polare.

7.2.6 Susceptibilitatea lichidelor nepolare

Moleculele din lichide și solide sunt atât de apropiate încât sunt afectate de câmpurile create de ceilalți dipoli. Atunci câmpul efectiv în care se află aceste molecule este câmpul local. Trebuie remarcat că polarizabilitatea α nu variază funcție de câmp deoarece depinde numai de structura moleculei. Atunci fiecare din moleculele respective în câmpul local va avea un moment dipolar $\alpha \vec{E}_{local}$. Dacă concentrația de molecule este N , momentul de dipol pe unitatea de volum este:

$$\vec{P} = N\alpha \vec{E}_{local} \quad (7.116)$$

În general este dificil de estimat câmpul local. Pentru calculul câmpului local se consideră un model simplificat. În acest model pe care-l vom considera pentru lichide nepolare, atomul sau molecula respectivă este înconjurată de vecini dispuși pe o suprafață sferică cu centrul în centrul moleculei considerate. Acest model este valabil pentru lichidele nepolare deoarece câmpurile generate de aceste molecule au rază mică de acțiune și nu sunt prea intense.

Să considerăm în interiorul dielectricului o cavitate sferică de rază r ; ne propunem să găsim valoarea câmpului creat în interiorul cavității (Fig.7.20). În interiorul cavității câmpul local este suma a doi termeni: $\vec{E}$ - câmpul creat de sarcinile libere și $\vec{E}_P$ câmpul creat de sarcinile de polarizare de pe suprafața sferei considerate.

Se calculează valoarea câmpului de polarizare de pe suprafața sferei. Densitatea de sarcină de pe suprafața interioară a sferei depinde de polarizare prin relația:

$$\sigma = -P \cos \theta \quad (7.117)$$

În relația 7.117 s-a considerat că densitatea de polarizare are direcția câmpului local iar θ este unghiul dintre direcția razei $\vec{r}$ și direcția lui $\vec{P}$. Se consideră o nouă rază $\vec{r}'$ foarte apropiată de prima cu care face unghiul $d\theta$ suficient de mic pentru ca să se poată admite că pe inelul de lățime $rd\theta$ densitatea de sarcină este constantă. Atunci un element de suprafață de pe acest inel cu lungimea dx este încărcat cu sarcina:

$$dq = \sigma dS = P \cos \theta r d\theta dx \quad (7.118)$$

Această sarcină crează un câmp electric în centrul sferei care poate fi descompus după o direcție paralelă cu $\vec{P}$ și una perpendiculară pe $\vec{P}$. Con-

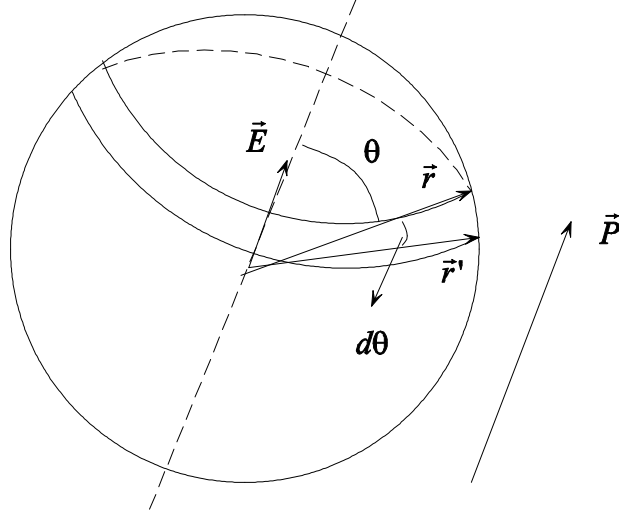


Figura 7.20: Modelul pentru calcularea câmpului în centrul unei cavități sferice

siderând un element simetric celui ales inițial, componentele perpendiculare ale câmpului se anulează astfel încât sunt efective doar componentele câmpului care sunt paralele cu densitatea de polarizare. Atunci:

$$dE_{ps} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} P \cos \theta (2\pi r \sin \theta) r d\theta \cos \theta$$

sau

$$dE_{ps} = -\frac{P \cos^2 \theta \sin \theta d\theta}{2\epsilon_0} \quad (7.119)$$

Integrând relația 7.119 pentru toate valorile pe care le poate lua unghiul θ se obține:

$$E_{ps} = -\int_0^\pi \frac{P \cos^2 \theta \sin \theta d\theta}{2\epsilon_0} = \frac{P}{3\epsilon_0} \quad (7.120)$$

Atunci:

$$\vec{E}_{local} = \vec{E} + \vec{E}_{ps} = \vec{E} + \frac{\chi_e \vec{E}}{3\epsilon_0} = \left(1 + \frac{\chi_e}{3}\right) \vec{E} \quad (7.121)$$

Se observă că acest câmp nu depinde de raza sferei și el este câmpul ce va determina efectiv polarizarea moleculei în centrul sferei considerate.

Ecuatia Clausius-Mossotti

Prin acțiunea câmpului electric local un atom sau moleculă situată în centrul sferei va avea un moment electric dipolar:

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}_{local} \quad (7.122)$$

Dar:

$$\vec{P} = N\vec{p} = N\alpha \vec{E}_{local} \quad (7.123)$$

Se ține cont de relația 7.121:

$$\varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = N\alpha \left(1 + \frac{\chi_e}{3}\right) \vec{E}$$

și se obține:

$$\chi_e = \frac{N\alpha}{\varepsilon_0 - N\alpha/3} \quad (7.124)$$

Cum $\varepsilon_r - 1 = \chi_e$ din relația 7.115 se obține:

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0} \quad (7.125)$$

Aceasta relație poartă numele de relația Claussius-Mossotti.

7.2.7 Densitatea de polarizare a materialelor neomogene

Deși considerațiile de până acum au fost făcute pentru cazul unei polarizări uniforme, este important să se considere și cazul în care polarizarea nu este uniformă. Acest lucru se datorează neuniformității dielectricului, sau variației câmpului electric în funcție de poziția din interiorul dielectricului. Pentru a putea determina polarizarea trebuie să ținem cont că în afara sarcinilor induse la suprafața dielectricului apar și sarcini induse în interiorul acestuia.

Să considerăm un cub în interiorul unui dielectric neutru cu volumul $\delta x \delta y \delta z$ (Fig.7.21). Cubul este mic la scară macroscopică, dar suficient de mare pentru a conține suficient de mulți atomi. Dacă aplicăm un câmp electric acesta se polarizează. Se presupune pentru simplificare că polarizarea

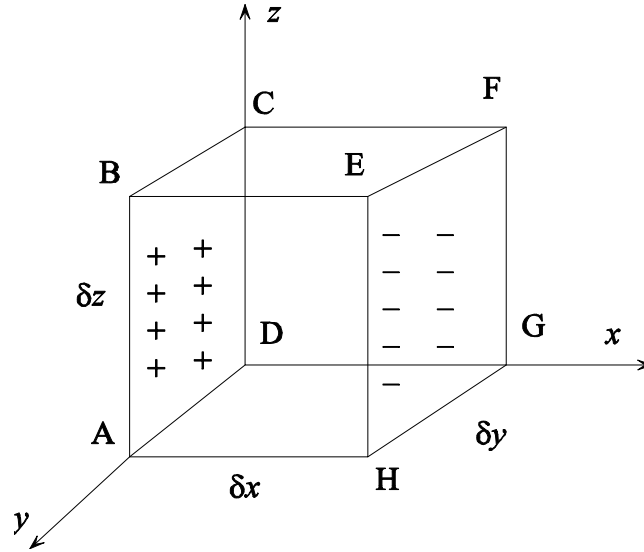


Figura 7.21: Polarizarea unei porțiuni cubice dintr-un dielectric

în interiorul cubului este diferită de zero în direcția Ox, că este dependentă de x și independentă de y și z . O consecință a polarizării este deplasarea electronilor în sens invers câmpului. Atunci sarcinile de pe fețele cubului sunt $+P_x(x) \delta y \delta z$ pe fața ABCD și $-P_x(x + \delta x) \delta y \delta z$ pe fața EFGH.

Contribuția la sarcina netă a cubului este:

$$- [P_x(x + \delta x) - P_x(x)] \delta y \delta z = -\frac{\partial P_x}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (7.126)$$

Generalizând putem afirma că există contribuții similare pentru toate componentele lui $\vec{P}$ din direcțiile Oy și Oz astfel încât sarcina totală δq din interiorul cubului este:

$$\delta q = - \left[\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z \quad (7.127)$$

Cu alte cuvinte sarcina macroscopică de polarizare este:

$$\rho_p = \frac{\delta q}{\delta x \delta y \delta z} = - \left[\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right] = -\nabla \cdot \vec{P} \quad (7.128)$$

7.2.8 Vectorul inducție a câmpului electric

Într-un dielectric pot exista și sarcini libere astfel că densitatea totală de sarcini este suma dintre densitatea sarcinilor libere ρ_l și densitatea de sarcini de polarizare ρ_p :

$$\rho = \rho_l + \rho_p \quad (7.129)$$

Câmpul macroscopic este legat de densitatea totală de sarcină:

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_l + \rho_p}{\varepsilon_0} \quad (7.130)$$

$$\nabla \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_l - \nabla \vec{P}) \quad (7.131)$$

sau

$$\varepsilon_0 \nabla \vec{E} + \nabla \vec{P} = \rho_l \quad (7.132)$$

Deoarece $\vec{P}$ depinde de $\vec{E}$, $\nabla \vec{P} \neq 0$ numai dacă $\rho_l \neq 0$. Există o densitate de sarcini de polarizare ρ_p numai în regiunile în care există sarcini libere. Din relația 7.132 rezultă:

$$\nabla (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_l \quad (7.133)$$

Se definește o nouă mărime vectorială, vectorul inducție a câmpului electric:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (7.134)$$

astfel încât:

$$\nabla \vec{D} = \rho_l \quad (7.135)$$

Cum $\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$ relația 7.134 devine:

$$\vec{D} = (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \quad (7.136)$$

Vom calcula fluxul inducției câmpului electric printr-o suprafață închisă. Aplicând teorema lui Gauss se obține:

$$\iint_S \vec{D} d\vec{S} = \iiint_V \nabla \vec{D} dV = \iiint_V \rho_l dV \quad (7.137)$$

Aceasta este legea lui Gauss în medii materiale: fluxul inducției câmpului electric printr-o suprafață închisă este egal cu sarcina liberă totală din interiorul acelei suprafețe.

7.2.9 Energia electrostatică în medii dielectrice

Așa cum am discutat anterior, energia unui sistem de sarcini este:

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint \rho(r) V(\vec{r}) dv$$

Acest rezultat nu poate fi folosit în descrierea mediilor dielectrice, deoarece distribuția finală de sarcină s-a obținut prin aducerea de la infinit a sarcinilor în câmpul electrostatic existent efectuându-se un lucru mecanic.

Într-un mediu dielectric se efectuează un lucru mecanic atât la aducerea sarciniilor cât și pentru polarizarea mediului.

Inițial nu vom face nici o presupunere asupra mediului dielectric (de liniaritate, omogenitate, etc.). Se consideră inițial o variație a energiei δE_p datorită unei modificări $\delta \rho$ a densității de sarcină în spațiu:

$$\delta E_p = \frac{1}{2} \iiint \delta \rho(r) V(\vec{r}) dv \quad (7.138)$$

În 7.138 integrala este considerată pe întreg spațiul.

Cum

$$\nabla \vec{D} = \rho$$

iar

$$\delta \rho = \nabla \delta \vec{D} \quad (7.139)$$

relația 7.138 devine prin integrarea pe tot spațiul:

$$\begin{aligned} \delta E_p &= \frac{1}{2} \iiint \nabla (\delta \vec{D}) V(\vec{r}) dv \\ \delta E_p &= \frac{1}{2} \iiint \nabla [\delta \vec{D} V(\vec{r})] dv - \frac{1}{2} \iiint \delta \vec{D} \nabla V(\vec{r}) dv \end{aligned} \quad (7.140)$$

Prima integrală se anulează la infinit dacă se presupune că $V(\vec{r}) = 0$ și cum $\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}$ obținem:

$$\delta E_p = \frac{1}{2} \iiint \vec{E} \delta \vec{D} dv \quad (7.141)$$

Energia electrostatică totală se calculează prin varierea lui δD de la 0 la D .

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint dv \int_0^D \vec{E} \delta D \quad (7.142)$$

Dacă mediul este liniar $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ atunci:

$$\vec{E} \delta \vec{D} = \vec{E} \delta (\varepsilon \vec{E}) = \varepsilon \frac{\delta \vec{E}^2}{2} = \frac{1}{2} \delta (\vec{E} \vec{D}) \quad (7.143)$$

astfel că energia electrostatică totală este:

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint \vec{E} \vec{D} dv \quad (7.144)$$

În relațiile anterioare ε este permitivitatea totală a mediului respectiv.

O altă problemă este aceea când un dielectric este adus într-un câmp electric ale cărui surse sunt fixe. Pentru aceasta se consideră câmpul $\vec{E}_1$ care este datorat unei distribuții de sarcini $\rho_0(\vec{r})$ și care există într-un mediu cu permitivitatea absolută $\varepsilon_1(\vec{r})$. Energia electrostatică inițială este:

$$E_{p1} = \frac{1}{2} \iiint \vec{E}_1 \vec{D}_1 dv \quad (7.145)$$

unde $\vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1$.

Se introduce în acest câmp un dielectric de volum V care modifică câmpul electric de la valoarea $\vec{E}_1$ la valoarea $\vec{E}_2$. Prezența acestui dielectric poate fi descrisă prin permitivitatea dielectrică absolută care are valoarea ε_2 în interiorul corpului și ε_1 în exterior. Se presupune că permitivitatea dielectricului variază lent în interiorul corpului de la valoarea ε_2 la valoarea ε_1 la marginea volumului V . În final energia are valoarea

$$E_{p2} = \frac{1}{2} \iiint \vec{E}_2 \vec{D}_2 dv \quad (7.146)$$

unde $\vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2$. Diferența dintre energiile în cele două cazuri este:

$$W = \frac{1}{2} \iiint (\vec{E}_2 \vec{D}_2 - \vec{E}_1 \vec{D}_1) dv \quad (7.147)$$

$$W = \frac{1}{2} \iiint (\vec{E}_2 \vec{D}_1 - \vec{D}_2 \vec{E}_1) dv + \frac{1}{2} \iiint (\vec{E}_2 + \vec{E}_1) (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) dv \quad (7.148)$$

Deoarece $\nabla \times (\vec{E}_2 + \vec{E}_1) = 0$ se poate scrie:

$$\vec{E}_2 + \vec{E}_1 = -\nabla \phi \quad (7.149)$$

unde ϕ este o funcție scalară ce depinde de poziție. Atunci a doua integrală din 7.148 devine:

$$I = -\frac{1}{2} \iiint (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \nabla \phi dv \quad (7.150)$$

Integrând prin părți:

$$I = -\frac{1}{2} \iiint \nabla [\phi (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)] dv + \frac{1}{2} \iiint \Phi \nabla (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) dv \quad (7.151)$$

Se observă că:

$$\iiint \nabla [\phi (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)] dv = \iint_S \phi (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) dS = 0$$

deoarece la marginea domeniului $\vec{D}_2 = \vec{D}_1$.

În cazul celei de-a doua integrale se observă că

$$\nabla \vec{D}_2 = \nabla \vec{D}_1 = \rho$$

deoarece prin aducerea dielectricului în regiunea considerată nu se modifică densitatea de sarcină liberă. Rezultă:

$$\iiint \Phi \nabla (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) dv = 0$$

Atunci relația 7.148 devine:

$$W = -\frac{1}{2} \iiint (\vec{E}_1 \vec{D}_2 - \vec{D}_1 \vec{E}_2) dv \quad (7.152)$$

Integrala se face pe tot spațiul dar practic ea se limitează doar la volumul corpului. Cum $D_1 = \varepsilon_1 E_1$ și $D_2 = \varepsilon_2 E_2$

$$W = -\frac{1}{2} \iiint (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \vec{E}_2 \vec{E}_1 dv \quad (7.153)$$

Dacă mediul în care se află corpul este vidul $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ și $\varepsilon_2 = \varepsilon_r \varepsilon_0$. Se notează $E_0 = E_1$. Atunci:

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \vec{E}_2 = (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_0 \vec{E}_2 = \vec{P} \quad (7.154)$$

iar relația 7.153 devine:

$$W = -\frac{1}{2} \iiint_{V_1} \vec{P} \vec{E}_0 dv \quad (7.155)$$

Această relația arată că densitatea de energie a unui dielectric aflat în câmpul $\vec{E}_0$ ale cărui surse sunt fixe este dată de relația:

$$w = -\frac{1}{2} \vec{P} \vec{E}_0 \quad (7.156)$$

7.3 Curentul electric continuu

Prin curent electric se înțelege deplasarea direcționată a electronilor în metale, sau a ionilor în unele lichide sau gaze sub acțiunea câmpului electric. Aceste particule poartă numele de purtători de sarcină. Un curent poate fi datorat mai multor tipuri de purtători de sarcină. De exemplu în gaze purtătorii de sarcină sunt atât electronii cât și ionii moleculari încărcăți pozitiv.

Pentru a exista curent electric în mediul respectiv trebuie să existe purtători de sarcină capabili să se deplaseze sub acțiunea unui câmp electric. De exemplu în cazul unui metal la o temperatură diferită de zero Kelvin electronii sunt într-o continuă stare de agitație termică. Prin aplicarea unui câmp electric, peste mișcarea de agitație termică se suprapune o mișcare dirijată în sens invers câmpului electric. Un astfel de mediu poartă numele de conductor.

Un mediu fără purtătorii de sarcină capabili să se deplaseze sub acțiunea unui câmp electric poartă numele de izolator.

7.3.1 Mărimi ce caracterizează curentul electric

Intensitatea curentului electric I. Aceasta este o mărime fizică scalară care reprezintă sarcina netă ce traversează în unitatea de timp suprafața transver-

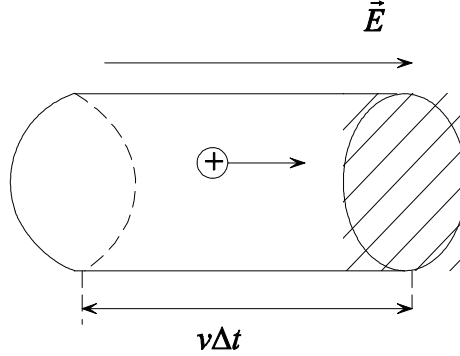


Figura 7.22: Mișcarea purtătorilor de sarcină în interiorul unui conductor

sală a conductorului.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (7.157)$$

În sistemul internațional de unități intensitatea curentului este o mărime fizică fundamentală iar unitatea sa de măsură este Amperul (A).

Densitatea de curent. Admitem că în conductorul omogen și izotrop care conține un singur tip de purtători de sarcină q densitatea acestora este n . Dacă în conductor este aplicat un câmp electric, sarcinilor li se imprimă o mișcare ordonată de transport în sensul câmpului dacă sarcinile sunt pozitive și în sens invers câmpului dacă sarcinile sunt negative. Se consideră că viteza medie a mișcării de transport este $\vec{v}$.

Pentru a defini densitatea de curent vom considera o porțiune de conductor a cărei secțiune transversală este S și în interiorul căreia există câmpul electric $\vec{E}$ (Fig. 7.22).

În intervalul de timp Δt toți purtătorii de sarcină din cilindru cu aria bazei S și generatoarea $v\Delta t$ se vor deplasa conform celor indicate în Fig. 7.22. Deoarece numărul de purtători de sarcină din cilindru este $N = nSv\Delta t$, sarcina ce trece prin aria bazei este $\Delta Q = Nq = nSvq\Delta t$. Atunci intensitatea curentului este:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nvqS \quad (7.158)$$

Densitatea de curent se definește ca fiind sarcina ce trece în unitatea de

timp prin unitatea de suprafață:

$$j = \frac{I}{S} = nqv \quad (7.159)$$

Densitatea de curent este însă o mărime vectorială (având în vedere caracterul vectorial al vitezei); atunci:

$$\vec{j} = nq\vec{v} \quad (7.160)$$

Acest rezultat poate fi generalizat în cazul în care în materialul respectiv există mai multe tipuri de purtători de sarcină cu concentrațiile n_i , vitezele medii v_i și sarcinile q_i .

$$\vec{j} = \sum_i \vec{j}_i = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i \quad (7.161)$$

Discuția anterioară a fost făcută pornind de la ipoteza că avem de-a face cu un conductor omogen. În conductorii neomogeni concentrația purtătorilor de sarcină depinde de poziție $n = n(x, y, z)$ astfel că și densitatea de curent este diferită de la punct la punct $\vec{j} = \vec{j}(x, y, z)$ și este o mărime ce caracterizează local curentul electric.

Pentru a calcula în acest caz intensitatea curentului printr-o secțiune se va considera elementul de arie:

$$d\vec{S} = \vec{n}dS \quad (7.162)$$

unde $\vec{n}$ este normala la această suprafață. Dacă direcția densității curentului nu este perpendiculară pe elementul de suprafață, la curentul ce trece prin această suprafață contribuie doar componenta normală a acestei densități de curent. Atunci:

$$dI = \vec{j}d\vec{S} \quad (7.163)$$

Printr-o suprafață finită intensitatea curentului este dată de integrala:

$$I = \iint_S dI = \iint_S \vec{j}d\vec{S} \quad (7.164)$$

Conform relației 7.164 intensitatea curentului poate fi considerată ca fiind fluxul densității de curent prin suprafața S .

7.3.2 Ecuația de continuitate

Fie o suprafață S închisă în interiorul unui conductor care cuprinde volumul V . Normala la suprafața închisă fiind îndreptată întotdeauna în exteriorul acesteia, integrala din $\vec{j}d\vec{S}$ reprezintă sarcina ce iese în unitatea de timp din volumul V prin suprafața S . Conform legii conservării sarcinii, sarcina ce iese din volumul V este egală cu variația sarcinii din acest volum în același interval de timp $(-dq/dt)$. Rezultă:

$$\iint_S \vec{j}d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} \quad (7.165)$$

Dacă se exprimă q în funcție de densitatea de sarcină $\rho = \rho(x, y, z)$

$$q = \iiint_V \rho(x, y, z) dv \quad (7.166)$$

relația 7.165 devine:

$$\iint_S \vec{j}d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dv = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad (7.167)$$

Utilizarea simbolului de derivată parțială sub integrală este impusă de faptul că densitatea de sarcină poate fi funcție și de componentele spațiale. Cum:

$$\iint_S \vec{j}d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{j} dv \quad (7.168)$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{j} dv = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad (7.169)$$

Egalitatea de mai sus este adevărată pentru orice volum V astfel că:

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (7.170)$$

Această relație poartă denumirea de *ecuația de continuitate*.

În regim staționar, densitatea volumică de sarcină nu depinde de timp și ecuația de continuitate capătă forma:

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (7.171)$$

7.3.3 Teoria clasică a conducției

Această teorie a fost elaborată în 1900 de Drude și a fost perfecționată de Lorentz în anul 1910. Teoria se bazează pe ipoteza existenței gazului electronic în metale, adică a existenței unor electroni liberi în interiorul acestora. Prin electroni liberi în metale se înțeleg electronii de valență care nu sunt legați de nici un atom al rețelei cristaline și care se pot deplasa în interiorul acestuia pe distanțe relativ mari.

Conform acestui model, în absența câmpului electric, electronii se mișcă haotic în toate direcțiile. Când se aplică un câmp electric electronii liberi sunt supuși unei forțe care le imprimă o mișcare direcționată. Dacă rețeaua ar fi rigidă și perfectă electronii s-ar mișca accelerat. Acest lucru nu este posibil deoarece în metale există imperfecțiuni ale rețelei și impurități, iar ionii rețelei cristaline execută mișcări de vibrație în jurul pozițiilor de echilibru. În mișcarea lor electronii suferă ciocniri cu ionii rețelei cristaline și cu defectele din rețea. Se admite ca o ipoteză simplificatoare că la fiecare ciocnire electronul pierde energia acumulată între două ciocniri succesive. Astfel, dacă timpul dintre două ciocniri este τ , viteza căpătată înainte de ciocnire este:

$$v = a\tau = \frac{eE}{m_e}\tau \quad (7.172)$$

în ipoteza că viteza inițială este zero. Rezultă că electronul parcurge drumul dintre două ciocniri succesive cu o viteză medie, care este chiar viteza de transport.

$$v_d = \frac{v}{2} = \frac{eE}{2m_e}\tau \quad (7.173)$$

Timpul mediu între două ciocniri este raportul dintre drumul liber mediu λ și viteza termică a electronului v_T . Viteza termică a electronilor poate fi estimată pornind de la formula obținută în cazul gazelor ideale:

$$v_T = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} \quad (7.174)$$

unde $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K, T temperatura absolută a metalului. Atunci:

$$j = nev_d = \frac{1}{2} \frac{ne^2}{m_e} \tau E = \frac{1}{2} \frac{ne^2}{m_e} \frac{\lambda}{v_T} E = \sigma E \quad (7.175)$$

unde:

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{ne^2}{m_e} \frac{\lambda}{v_T} \quad (7.176)$$

reprezintă conductivitatea conductorului, aceasta fiind o constantă de material. Valoarea inversă a conductivității reprezintă rezistivitatea.

7.3.4 Tensiunea electromotoare

Pentru menținerea curentului electric într-un circuit închis este necesar ca purtătorii de sarcină să fie acționați de forțe care să le asigure deplasarea acestora pe o durată de timp suficient de mare.

Așa cum a fost discutat în paragrafele precedente, sarcinile electrice transferă în mod continuu și ireversibil energia lor nodurilor rețelei cristaline prin efect Joule. Rezultă că sarcinilor trebuie să li se asigure o energie egală cu cea disipată în același interval de timp. Aceasta înseamnă că asupra sarcinilor trebuie să acționeze pe lângă forțele de natură electrostatică și forțe de natură neelectrostatică. Aceste forțe poartă denumirea de forțe imprimante. Acestora le corespunde un câmp electric numit imprimat.

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}_i}{q} \quad (7.177)$$

Forțele imprimante sunt generate în anumite puncte ale circuitelor în care se găsesc surse de tensiune electromotoare. Ca exemple de surse de tensiune electromotoare sunt: pilele electrice și acumulatorii care transformă energia liberă din diverse reacții chimice în energie electrică sau generatoarele convenționale care induc un câmp electric neconservativ prin varierea unui câmp magnetic.

Să considerăm circuitul din Fig. 7.23 în care G este un generator, R un rezistor și A un ampermetru. Lucrul mecanic efectuat asupra sarcinii q_0 între două puncte oarecare 1 și 2 de către câmpul imprimat și câmpul electrostatic este:

$$W_{12} = q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + q_0 \int_1^2 \vec{E}_i d\vec{l} \quad (7.178)$$

$$W_{12} = q_0 (V_1 - V_2) + q_0 \mathcal{E}_{12} \quad (7.179)$$

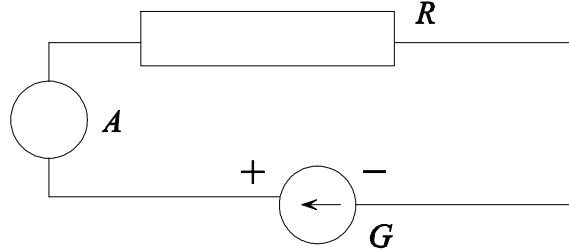


Figura 7.23: Schema de principiu a unui circuit electric

unde am notat cu $\mathcal{E}_{12} = q_0 \int_1^2 \vec{E}_i d\vec{l}$ tensiunea electromotoare dintre punctele 1 și 2.

Se definește căderea de tensiune pe această porțiune a circuitului ca:

$$U_{12} = \frac{W_{12}}{q} = (V_1 - V_2) + \mathcal{E}_{12} \quad (7.180)$$

Se observă că numai dacă tensiunea electromotoare este nulă căderea de tensiune este egală cu diferența de potențial. Dacă relația anterioară se extinde pe întreg circuitul se obține:

$$W = q \oint \vec{E} d\vec{l} + q_0 \oint \vec{E}_i d\vec{l} \quad (7.181)$$

Deoarece pentru un câmp electrostatic $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$, rezultă pentru tensiunea electromotoare pe întregul circuit expresia:

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q_0} = \oint \vec{E}_i d\vec{l} \quad (7.182)$$

Tensiunea electromotoare ce acționează într-un circuit este egală cu lucrul mecanic necesar pentru a deplasa unitatea de sarcină pe întreg circuitul.

7.3.5 Legea lui Ohm

În cazul metalelor, densitatea de curent este proporțională cu intensitatea câmpului electric.

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (7.183)$$

Aceasta este legea lui Ohm.

Să considerăm un conductor omogen cu secțiunea S prin care circulă curentul I .

$$I = \iint_S \vec{j} d\vec{S} = \iint_S \sigma \vec{E} d\vec{S} = \iint_S \sigma E dS \quad (7.184)$$

Dacă la capetele conductorului este menținută o tensiune U (iar de-a lungul acestuia nu există nici o sursă de tensiune electromotoare)

$$E = \frac{U}{l} \quad (7.185)$$

unde l este lungimea conductorului. Atunci:

$$I = \sigma \frac{U}{l} S \quad (7.186)$$

De aici:

$$\frac{U}{I} = \frac{l}{\sigma S} = \rho \frac{l}{S} = R \quad (7.187)$$

R poartă numele de rezistență și se măsoară în Ohmi (Ω). Relația 7.187 este o altă formă de exprimare a legii lui Ohm.

7.4 Magnetism

Constatarea proprietăților magnetice a fost făcută încă din antichitate, numele de magnet provenind de la numele unei regiuni din Asia mică ”Magnezia”, unde se găseau roci cu astfel de proprietăți.

În anul 1820 Oersted a descoperit că dacă printr-un conductor trece un curent electric iar dacă în apropierea acestuia se aduce un ac magnetic, asupra acului magnetic se exercită o forță. La puțin timp de la descoperirea lui Oersted, Ampère a arătat că între doi conductori străbătuți de curent electric se exercită forțe care sunt de atracție sau respingere în funcție de sensul curenților. În plus aceste forțe nu sunt forțe similare cu cele ce se manifestă între conductorii încărcăți. Dacă se introduce o placă metalică între cei doi conductori forța de interacție dintre cei doi conductori nu se modifică. În consecință s-a presupus că această forță trebuie să fie de același tip cu forța care apare între un conductor parcurs de curent electric și acul magnetic.

Pentru a găsi o corespondență între un ac magnetic și un conductor, Ampère a presupus ca acul magnetic conține un număr foarte mare de curenți microscopici pe care i-a numit curenți moleculari.

Ulterior Maxwell a afirmat că asemenea forțe se exercită între orice sarcini electrice aflate în mișcare. Aceste forțe pot fi atribuite existenței în jurul sarcinilor în mișcare a unui câmp, numit câmp magnetic. În consecință unui curent i se poate asocia un câmp magnetic care se manifestă în spațiul înconjurător. S-a verificat experimental că forța ce acționează asupra unei sarcini în mișcare este întotdeauna perpendiculară pe viteza particulei și proporțională cu această viteză. Ea este proporțională și cu mărimea sarcinii, iar sensul ei depinde de semnul sarcinii electrice.

Pentru a descrie câmpul magnetic se introduce în fiecare punct un vector $\vec{B}$ numit inducție a câmpului magnetic. Rezultatele experimentale arată că forța care se exercită asupra sarcinii q având viteza $\vec{v}$ este de forma:

$$\vec{f} = q \left(\vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (7.188)$$

Astfel se poate defini câmpul magnetic ca fiind câmpul material ce acționează asupra unei sarcini electrice în mișcare cu o forță a cărei expresie este 7.188. Această forță poartă numele de forță Lorentz.

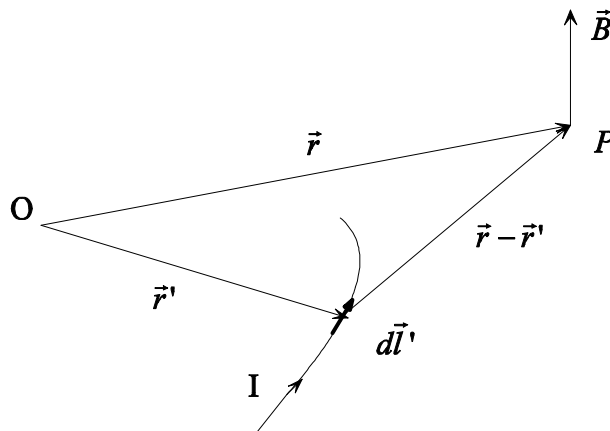


Figura 7.24: Calculul inducției câmpului magnetic

7.4.1 Legea Biot Savart

Această lege se referă la câmpul care apare în jurul curenților. Ea este analoagă celei ce permite calculul câmpului electrostatic determinat de o distribuție de sarcini. În conformitate cu aceasta câmpul magnetic într-un punct P se datorește unor contribuții $d\vec{B}$ provenite de la elementele de lungime $d\vec{l}'$ prin care trece curentul I . Contribuția fiecărui element este proporțională cu curentul și invers proporțională cu pătratul distanței la punctul P. Mărimea $d\vec{B}$ este perpendiculară pe planul determinat de $d\vec{l}'$ și $\vec{r} - \vec{r}'$ unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție al punctului P, iar $\vec{r}'$ este vectorul de poziție al porțiunii de circuit considerat (Fig. 7.24). Rezultă:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (7.189)$$

unde μ_0 este permeabilitatea magnetică a spațiului vid. Factorul $\mu_0/4\pi$ a fost introdus pentru a exprima relațiile în SI.

Câmpul total în punctul P este obținut integrând pe întregul circuit (care este o curbă închisă):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (7.190)$$

Vom exprima această relație într-un mod mai general. În acest sens se

ține seama de:

$$Id\vec{l}' = j Sd\vec{l}' = \vec{j}(\vec{r}') Sdl' = \vec{j}(\vec{r}') dv' \quad (7.191)$$

În relația 7.191 s-a ținut cont că sensul vectorul $d\vec{l}'$ este același cu sensul lui $\vec{j}$. Atunci inducția câmpului magnetic pentru o distribuție de densitate de curenți este:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad (7.192)$$

Aceasta este legea Biot Savart.

7.4.2 Legea lui Gauss pentru magnetism

Ca în cazul câmpului electric se definește fluxul câmpului magnetic printr-o suprafață printr-o relație de forma:

$$\Phi = \iint_S \vec{B} d\vec{S} \quad (7.193)$$

Deoarece câmpul magnetic nu este produs de sarcini magnetice este de așteptat ca fluxul inducției câmpului magnetic printr-o suprafață închisă să fie nul.

$$\iint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (7.194)$$

Vom demonstra acest lucru.

Dacă se ține cont de relația:

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (7.195)$$

se poate exprima inducția câmpului magnetic astfel:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{j}(\vec{r}') \times \left(\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv' \quad (7.196)$$

Considerând identitatea:

$$\vec{A} \times \nabla f = -\nabla \times (\vec{A}f) \quad (7.197)$$

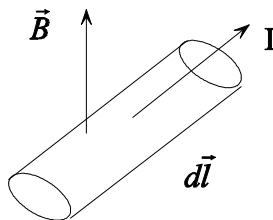


Figura 7.25: Element de curent în câmp magnetic

în care $\vec{A}$ este un vector constant, relația 7.196 devine:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \nabla \times \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv' \quad (7.198)$$

Deoarece operatorul rotor acționează asupra coordonatelor lui $\vec{r}$ se poate scrie:

$$\vec{B} = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right) \quad (7.199)$$

Rezultă:

$$\nabla \vec{B} = 0 \quad (7.200)$$

deoarece divergența unui rotor este nulă.

Dacă se consideră un volum V închis de suprafața S

$$\iiint_V \nabla \vec{B} dv = \iint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (7.201)$$

Relația 7.201 exprimă faptul că fluxul câmpului magnetic prin orice suprafață închisă este nul. Ea arată că nu există sarcini magnetice libere.

7.4.3 Forța electromagnetică

Fie un element de curent care străbate o porțiune de lungime dl având secțiunea S (Fig. 7.25).

Deoarece curentul este datorat deplasării unor sarcini electrice, iar asupra oricărei sarcini electrice în mișcare acționează o forță Lorentz, forța totală

ce se exercită asupra elementului de curent este rezultanta forțelor ce se exercită asupra tuturor sarcinilor care se deplasează. Dacă se notează cu n concentrația purtătorilor de sarcină, numărul acestora din elementul de volum considerat este $dN = nSdl$. Considerând că viteza de transport este v atunci forța rezultantă ce acționează asupra tuturor purtătorilor de sarcină este:

$$d\vec{F} = dN\vec{f}_l \quad (7.202)$$

unde $\vec{f}_l = q(\vec{v} \times \vec{B})$ este forța Lorentz ce acționează asupra fiecărei particule. Se obține:

$$d\vec{F} = nSq(\vec{v} \times \vec{B})dl \quad (7.203)$$

Cum $\vec{j} = nq\vec{v}$ relația 7.203 devine:

$$d\vec{F} = (\vec{j} \times \vec{B})Sdl = (\vec{j} \times \vec{B})dv \quad (7.204)$$

Rezultă că pentru o repartiție continuă a densității de curent forța totală care acționează asupra acesteia este:

$$\vec{F} = \iiint_V (\vec{j} \times \vec{B})dv \quad (7.205)$$

unde integrala se efectuează pe un volum suficient de mare care să conțină întreaga densitate de curent.

Revenind la situația considerată inițial se observă că:

$$\vec{j}dv = \vec{j}Sdl = jSd\vec{l} = Id\vec{l} \quad (7.206)$$

Atunci relația 7.204 devine:

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (7.207)$$

Considerând curentul de-a lungul unei curbe C atunci:

$$\vec{F} = \int_C I(d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (7.208)$$

Să considerăm interacția dintre două bucle de curenți (Fig. 7.26).

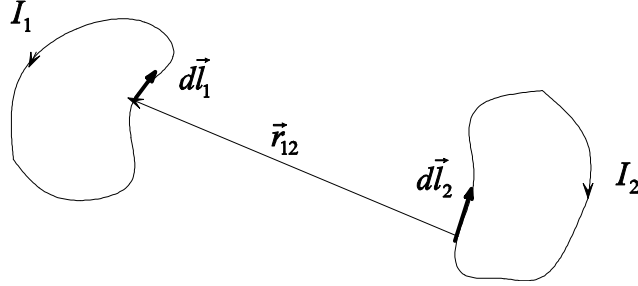


Figura 7.26: Interacția dintre două bucle de curenți

Se calculează forța cu care câmpul magnetic generat de bucla a doua acționează asupra primei bucle. Forța care acționează asupra elementului de curent $I d\vec{l}_1$ este:

$$d\vec{F} = I_1 \left(d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2 \right) = I_1 d\vec{l}_1 \times \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \int_2 \frac{d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3} \quad (7.209)$$

Forța totală care acționează asupra primei bucle este:

$$\vec{F} = I_1 \int_1 d\vec{l}_1 \times \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \int_2 \frac{d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}$$

sau

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_1 \int_2 \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12})}{|\vec{r}_{12}|^3} \quad (7.210)$$

7.4.4 Legea lui Ampère pentru curenți staționari

Legea se referă la valoarea circulației câmpului magnetic pe un contur închis în regiunea din spațiu în care există un câmp magnetic. Pentru obținerea acestei legi vom porni tot de la expresia legii Biot-Savart.

Se aplică operatorul rotor egalității 7.198.

Atunci:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\nabla \times \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right) \quad (7.211)$$

Dar cum

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

rezultă:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\nabla \left(\nabla \iiint \vec{j}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right) - \nabla^2 \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right] \\ \nabla \times \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\nabla \iiint \vec{j}(\vec{r}') \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv' - \iiint \nabla^2 \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv' \right] \end{aligned} \quad (7.212)$$

Se folosește faptul că

$$\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -\nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad (7.213)$$

unde semnul prim indică faptul că operatorul gradient acționează asupra variabilelor ce intervin în vectorul $\vec{r}'$.

Cum:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (7.214)$$

unde $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ este funcția delta (Dirac), relația 7.212 devine:

$$\nabla \times \vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \iiint \vec{j}(\vec{r}') \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' + \mu_0 \iiint \vec{j}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') dv' \quad (7.215)$$

Prima integrală din 7.215 se poate evalua astfel:

$$\iiint \vec{j}(\vec{r}') \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' = \iiint \nabla' \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv' - \iiint \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla' \cdot \vec{j}(\vec{r}') dv' \quad (7.216)$$

Prima integrală din relația 7.216 este nulă fiind extinsă pe un interval suficient de larg la marginea căruia densitatea de curent este nulă. Relația 7.215 devine:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \iiint \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla' \vec{j}(\vec{r}') dv' + \mu_0 \vec{j} \quad (7.217)$$

În cazul staționar $\nabla' \vec{j}(\vec{r}') = 0$; rezultă:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (7.218)$$

Aceasta este legea lui Ampère pentru curenți staționari sub formă locală. Dacă se consideră o suprafață S care se sprijină pe o curbă C

$$\iint_S (\nabla \times \vec{B}) d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} d\vec{S}$$

De aici rezultă

$$\oint_C \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 I \quad (7.219)$$

Indiferent de forma conturului pe care se sprijină suprafața S circulația vectorului $\vec{B}$ este proporțională cu curentul I care străbate suprafața.

7.4.5 Potențialul vector

Având în vedere că $\nabla \vec{B} = 0$ în orice punct, rezultă că $\vec{B}$ trebuie să fie rotorul unui câmp vectorial $\vec{A}(\vec{r})$ denumit potențial vector:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \quad (7.220)$$

Se observă că inducția câmpului magnetic sub această formă a fost exprimată în relația 7.199. Se poate alege pentru potențialul vector expresia:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' + \nabla \Psi \quad (7.221)$$

Se poate adăuga la $\vec{A}(\vec{r})$ un gradient al unei funcții scalare deoarece rotorul gradientului unei funcții scalare este nul. Prin introducerea gradientului unei funcții scalare rezultă că pentru o inducție magnetică dată $\vec{B}(\vec{r})$ potențialul vector poate fi transformat astfel:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla \Psi \quad (7.222)$$

O astfel de transformare se numește transformare de etalonare. Ea este posibilă deoarece precizează numai rotorul lui $\vec{A}$. Această libertate în alegerea potențialului vector permite să se utilizeze pentru $\vec{A}$ o formă convenabilă. Înlocuind 7.220 în 7.218 se obține:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} \quad (7.223)$$

Cum:

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (7.224)$$

dacă se utilizează etalonarea lui Coulomb, adică dacă alegem $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ potențialul vector satisface ecuația:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (7.225)$$

7.4.6 Momentul magnetic

Câmpul magnetic poate fi studiat cu ajutorul unor mici bucle de curenți. Există următoarele aspecte:

- a) câmpul magnetic generat de orice curent poate fi exprimat în funcție de câmpul datorat unor mici bucle de curent.
- b) mișcarea electronilor în atomi poate fi asimilată cu o buclă de curent.

Buclă de curent în câmp magnetic extern

Fie o buclă de curent într-un câmp magnetic extern (Fig.??).

Pe laturile SP și RQ acționează forțe care sunt egale și opuse ca sens. La fel sunt și forțele care acționează asupra laturilor SR și PQ. Rezultanta forțelor ce acționează asupra buclei este zero. Există însă un moment δM care tinde să rotească bucla în jurul axei verticale.

Deoarece forțele ce acționează asupra laturilor SR și PQ $F_1 = F_2 = F = IBL_1$ momentul cuplului acestor forțe față de axa A_1A_2 este:

$$M = FL_2 \cos \theta = L_1 L_2 B I \cos \theta = BIS \cos \theta \quad (7.226)$$

Relația poate fi scrisă vectorial astfel:

$$\vec{M} = I \vec{S} \times \vec{B} \quad (7.227)$$

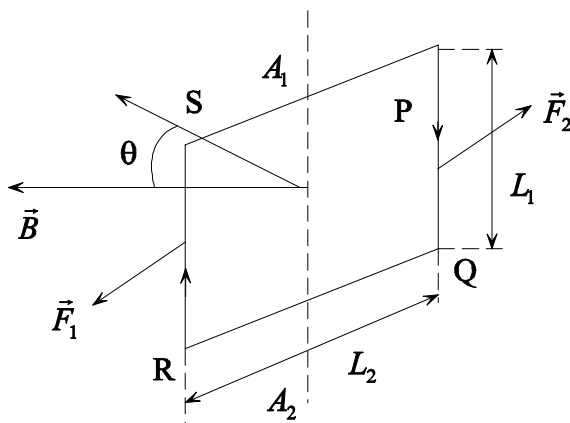


Figura 7.27: Buclă de curent în câmp magnetic

Am ajuns la concluzia că asupra unei mici bucle de curent acționează un cuplu de forțe care tinde să alinieze bucla perpendicular pe câmpul magnetic.

De aici rezultă că se poate defini o energie potențială a buclei în câmpul magnetic extern. Energia potențială este egală cu lucrul mecanic ce trebuie efectuat asupra buclei pentru a o roti cu o viteză unghiulară constantă dintr-o poziție perpendiculară într-o poziție paralelă cu câmpul. Dacă prin convenție se alege originea energiei când $\theta = \pi/2$ atunci:

$$E_p = \int_{\pi/2}^{\theta} M d\theta = \int_{\pi/2}^{\theta} ISB \sin \theta d\theta = -IBS \cos \theta \quad (7.228)$$

sau:

$$E_p = -I\vec{B}\vec{S} \quad (7.229)$$

Momentul de dipol magnetic

Făcând o analogie între rezultatul obținut pentru o buclă de curent și cel al dipolului electric, vom asocia unei bucle de curent un dipol magnetic al cărui moment $\vec{m}$ este definit astfel:

$$\vec{m} = I\vec{S} \quad (7.230)$$

unde $\vec{S}$ este un vector perpendicular pe suprafața buclei și a cărui mărime este egală cu suprafața buclei. Atunci momentul forței ce acționează asupra

unui dipol magnetic este:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (7.231)$$

iar energia sa potențială într-un câmp magnetic este:

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} \quad (7.232)$$

Ecuția de mai sus ne permite să calculăm forța ce acționează asupra buclei într-un câmp magnetic neuniform. Astfel:

$$\vec{F} = -\nabla E_p \quad (7.233)$$

$$\vec{F} = -\nabla (\vec{m} \cdot \vec{B}) = \nabla (m_x B_x + m_y B_y + m_z B_z) \quad (7.234)$$

Dacă câmpul magnetic este omogen forța exercitată asupra dipolului magnetic este nulă. Dacă câmpul magnetic este orientat de-a lungul lui Oz și dependent de coordonata z expresia forței ce acționează asupra dipolului magnetic devine:

$$\vec{F} = m_z \frac{\partial B}{\partial z} \vec{e}_z \quad (7.235)$$

În concluzie asupra unui dipol magnetic acționează atât un cuplu de forțe care tinde să-l orienteze paralel cu câmpul magnetic cât și o forță care are tendința să-l deplaseze în direcția gradientului câmpului magnetic.

Legătura dintre momentul de dipol magnetic și momentul cinetic

Ca orice buclă de curent, curentul produs de mișcarea orbitală a unui electron într-un atom este caracterizat prin momentul său magnetic $\vec{m}$.

Să considerăm un electron aflat pe o orbită circulară, perioada de rotație fiind T . Mișcarea circulară a electronului este echivalentă cu un curent

$$I = -\frac{e}{T} = -\frac{e\omega}{2\pi} = -\frac{ev}{2\pi r} \quad (7.236)$$

Semnul minus apare din cauză că sarcina electronului este negativă, sensul curentului datorat mișcării electronului fiind opus sensului mișcării acestuia.

Cum aria buclei considerate este πr^2 , momentul magnetic este:

$$m = -\frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = -\frac{evr}{2} \quad (7.237)$$

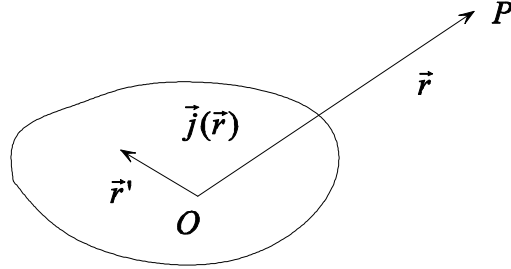


Figura 7.28: Distribuție de curent

Deoarece momentul cinetic orbital este

$$L = m_e v r \quad (7.238)$$

unde m_e este masa electronului, rezultă:

$$m = -\frac{e}{2m_e} L \quad (7.239)$$

Vectorial relația 7.239 se scrie:

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L} = -\gamma \vec{L} \quad (7.240)$$

Mărimea $\gamma = e/2m_e$ poartă numele de raport magnetomecanic orbital al electronului.

7.4.7 Câmpul magnetic al unei distribuții localizate de curent

Vom examina proprietățile unei distribuții de curent localizate într-o regiune din spațiu aflată la o distanță mare de punctul în care se dorește să se calculeze inducția câmpului magnetic (Fig. 7.28). Pentru aceasta se pornește de la expresia generală a potențialului vector

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (7.241)$$

Se dezvoltă în serie Taylor numitorul în raport cu $\vec{r}'$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}|^3} + \dots \quad (7.242)$$

și relația 7.241 devine:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{j}(\vec{r}') dv' + \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r}|^3} \iiint (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') dv' \dots \quad (7.243)$$

Mărimile ce intervin în 7.243 sunt mărimi vectoriale. Se consideră componentele:

$$A_i(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint j_i(\vec{r}') dv' + \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r}|^3} \iiint (\vec{r} \cdot \vec{r}') j_i(\vec{r}') dv' \dots \quad (7.244)$$

unde $i = x, y, z$.

În cazul staționar ($\nabla \cdot \vec{j} = 0$) este adevărată identitatea:

$$\iiint \left[f(\vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla' g(\vec{r}') + g(\vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla' f(\vec{r}') \right] dv' = 0 \quad (7.245)$$

unde f și g sunt două funcții arbitrare de $\vec{r}'$.

Dacă se alege $f = 1$ și $g = r'_i$ ($r'_i = x', y', z'$) rezultă:

$$\iiint j_i(\vec{r}') dv' = 0 \quad (7.246)$$

Pentru $f = r'_i$ și $g = r'_j$ rezultă:

$$\iiint [r'_i j_j(\vec{r}') + r'_j j_i(\vec{r}')] dv' = 0 \quad (7.247)$$

Se evaluează expresia

$$\begin{aligned} I &= \iiint (\vec{r} \cdot \vec{r}') j_i(\vec{r}) dv' = \sum_j r_j \iiint r'_j j_i dv' \\ I &= \frac{1}{2} \sum_j r_j \iiint r'_j j_i dv' + \frac{1}{2} \sum_j r_j \iiint r'_j j_i dv' \end{aligned}$$

Se ține cont de 7.247 :

$$I = \frac{1}{2} \sum_j r_j \iiint r'_j j_i dv' - \frac{1}{2} \sum_j r_j \iiint r'_i j_j dv'$$

$$I = -\frac{1}{2} \sum_j r_j \iiint (r'_i j_j - r'_j j_i) dv' = -\frac{1}{2} \left[\vec{r} \times \iiint (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) dv' \right]_i \quad (7.248)$$

Deoarece momentul de dipol magnetic al unei distribuții de curent se definește:

$$\vec{m} = \iiint (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) dv' \quad (7.249)$$

atunci:

$$I = -\frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{m})_i \quad (7.250)$$

Rezultă:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (7.251)$$

Acesta este termenul de ordinul cel mai mic din dezvoltarea potențialului vector care nu se anulează. Calculând rotorul lui $\vec{A}$ se obține câmpul magnetic produs de momentul de dipol al distribuției localizate de curent

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \frac{3\vec{n}(\vec{n}\vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{r}|^3} \quad (7.252)$$

unde $\vec{n} = \vec{r}/r$ este versorul direcției $\vec{r}$.

Se poate face o legătură între expresiile cu care este definit momentul magnetic (7.249 și 7.230). Expresia 7.249 se poate particulariza pentru o spiră circulară cu secțiune constantă s și rază r' străbătută de un curent a cărui densitate de curent este constantă, astfel:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint (\vec{r}' \times \vec{j}) dv'$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint (\vec{r}' \times \vec{j}) ds dl' = I \oint (\vec{r}' \times d\vec{l}') = I \vec{S} \quad (7.253)$$

unde $\vec{S}$ este un vector perpendicular pe suprafața spirei având modulul egal cu aria spirei.

Rezultă că momentul magnetic este perpendicular pe planul spirei.

7.4.8 Magnetizarea

Fie un corp de probă care este introdus în câmp magnetic. Experimental se constată că pentru majoritatea substanțelor asupra lui se exercită forțe extrem de mici. Dacă dimensiunea probelor este mică, forța care acționează asupra ei este direct proporțională cu gradientul inducției câmpului magnetic.

O altă constatare experimentală este aceea că pentru anumite substanțe forța ce acționează asupra acestora tinde să atragă substanța înspre regiunile cu câmp mai intens în timp ce pentru altele forța tinde să respingă substanța din câmp.

Având în vedere faptul că într-un câmp magnetic neuniform, asupra unui dipol magnetic se exercită o forță se ajunge la concluzia că în probă se induce un moment magnetic.

După comportarea substanțelor în câmp magnetic se poate face o clasificare a acestora.

Substanțele care sunt slab respinse de câmpul magnetic (care se magnetizează în sens invers câmpului), precum apa, clorura de sodiu, cuarțul, sunt numite diamagnetice. Majoritatea substanțelor anorganice și aproape toate substanțele organice sunt diamagnetice. Rezultă că diamagnetismul este o proprietate a fiecărui atom sau molecule. Când este observată o comportare diferită, aceasta se datorează faptului că diamagnetismul este mascat de efecte mai puternice.

Substanțele care sunt atrase către regiunile unde câmpul este mai intens (care se magnetizează în sensul câmpului) sunt numite substanțe paramagnetice. Există și aici două categorii de substanțe: unele care sunt atrase cu forțe slabe de același ordin de mărime ca și în cazul substanțelor diamagnetice (Na) și altele (CuCl_2) în care efectul paramagnetic este mult mai puternic. Unele substanțe prezintă un paramagnetism dependent de temperatură.

O a treia categorie de substanțe sunt cele care posedă moment magnetic propriu. Acestea poartă numele de substanțe feromagnetice. Singurele metale care prezintă feromagnetism sunt fierul, nichelul, cobaltul și gadoliniul; aliaje ale acestor metale pot fi de asemenea feromagnetice.

Existența momentelor magnetice se datorează mișcării orbitale a electronilor precum și spinului electronilor.

Mișcarea electronilor pe anumite "orbite" în jurul nucleului este echivalentă cu o buclă de curent care are un moment magnetic dipolar a cărui mărime este legată de momentul cinetic orbital prin relația:

$$\vec{m}_L = -\frac{e}{2m_e} \vec{L} \quad (7.254)$$

În expresia de mai sus, în afară de momentul cinetic $\vec{L}$ apar numai constante universale.

Considerațiile făcute până acum s-au situat în cadrul mecanicii clasice însă la nivelul atomului mișcarea electronilor este tratată riguros cu ajutorul mecanicii cuantice. Conform acestei teorii momentul cinetic orbital al electronului este o mărime care poate lua numai valori discrete:

$$|\vec{L}| = \hbar \sqrt{l(l+1)} \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (7.255)$$

În expresia de mai sus $\hbar = h/2\pi$ unde h este constanta lui Planck. Rezultă că și momentul magnetic asociat mișcării orbitale este cuantificat:

$$|\vec{m}_L| = \frac{e\hbar}{2m_e} \sqrt{l(l+1)} \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (7.256)$$

Mărimea $\mu_0 = e\hbar/2m_e = 9,29 \times 10^{-24} \text{ Am}^2$ poartă numele de magneton Bohr.

Spinul electronului este o mărime care nu are corespondent clasic și el reprezintă un moment cinetic propriu. Calculele și experiențele realizate au dus la concluzia că momentul cinetic de spin are valoarea

$$|\vec{S}| = \hbar \sqrt{s(s+1)} \quad (7.257)$$

unde $s = 1/2$.

Proiecția spinului pe o axă poate lua doar două valori $S_z = \hbar/2$ și $S_z = -\hbar/2$.

Electronul fiind o particulă încărcată cu sarcină electrică, momentului său cinetic îi corespunde un moment magnetic de spin. Relația dintre momentul cinetic și momentul magnetic trebuie să fie una analoagă cu cea care există în cazul mișcării orbitale. Experimental s-a constatat că:

$$\vec{m}_S = -\frac{e}{m_e} \vec{S} = -2\gamma \vec{S} \quad (7.258)$$

Faptul că raportul dintre momentul magnetic de spin și momentul cinetic de spin este de două ori mai mare decât același raport în cazul mișcării orbitale este cunoscut sub numele de anomalie giromagnetică.

Având în vedere cele discutate mai sus rezultă că proprietățile magnetice ale atomilor sunt legate de proprietățile magnetice ale electronilor acestor atomi.

Se poate calcula un moment cinetic total al electronilor din atom $\vec{J}$ care este suma momentelor cinetice orbitale și de spin a electronilor. Acestui moment cinetic i se poate asocia un moment magnetic total al electronilor respectivi. Este posibil ca acest moment magnetic să fie zero sau diferit de zero.

Există mai multe situații posibile:

a) Când se introduce o substanță în câmp magnetic electronii se rotesc în așa fel încât pot genera un câmp magnetic de sens contrar câmpului exterior.

b) În absența câmpului magnetic exterior atomii substanței respective posedă momente magnetice care sunt orientate în toate direcțiile cu probabilitate egală. Ca urmare a acestui fapt câmpul magnetic produs de acestea este nul. Plasând substanța în câmp magnetic asupra momentelor magnetice acționează un cuplu de forțe care tinde să le orienteze pe toate paralel cu direcția câmpului. Chiar dacă orientarea momentelor paralel cu câmpul nu este perfectă datorită agitației termice, există totuși o orientare preferențială a acestora. Ca urmare, suma vectorială a momentelor magnetice ale atomilor este diferită de zero, ceea ce face ca și câmpul magnetic generat să fie diferit de zero. Se spune că în câmp magnetic substanța se magnetizează.

Dacă în material există un mare număr de momente magnetice dipolare, toate orientate în același sens iar densitatea acestora este n atunci se poate defini vectorul densitate de magnetizare:

$$\vec{M} = n\vec{m} \quad (7.259)$$

Relații care au loc în materiale feromagnetice

a) *materiale omogene*

Să considerăm o probă dintr-un material în care momentele magnetice sunt uniform repartizate. Fie o folie din acest material cu fețele perpendiculare pe $\vec{M}$ și având o grosime foarte mică $??$.

Folia se poate diviza în elemente de volum $dv = dadz$, unde da este elementul de arie. Momentul magnetic al elementului de volum este:

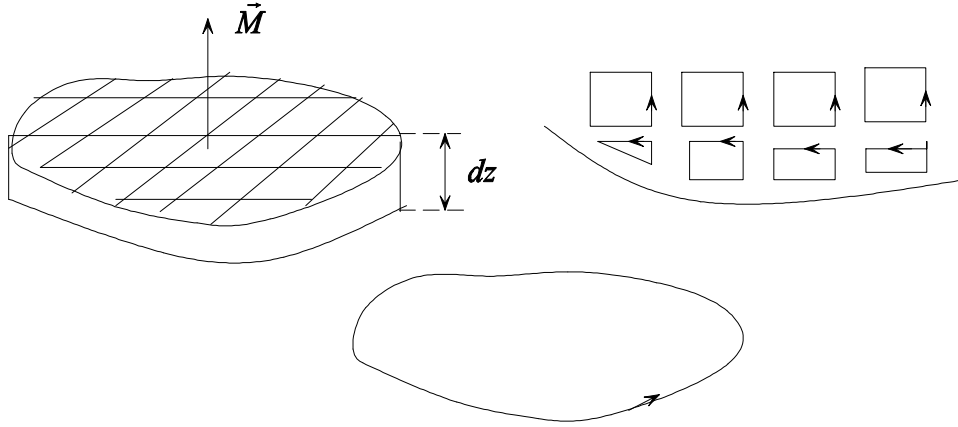


Figura 7.29: Material omogen în câmp magnetic

$$\vec{M} d\vec{a} dz$$

Dacă se admite că momentul magnetic este produs de un curent ce înconjoară porțiunea se consideră:

$$\vec{M} d\vec{a} dz = dI d\vec{a} \quad (7.260)$$

Cum $d\vec{a}$ este paralel cu $\vec{M}$:

$$dI = M dz \quad (7.261)$$

În acest mod se poate înlocui fiecare porțiune de material cu câte o buclă de curent de intensitate I care satisface relația 7.261. Din Figura ?? se vede că rămân necompensați curenții de la margine. Acum se poate refăce întregul bloc, care este echivalent cu o buclă de curent cu intensitatea

$$I = \int_0^z M dz = Mz \quad (7.262)$$

Acest curent poartă numele de curent superficial de magnetizare. El poate fi caracterizat printr-o densitate liniară de curent:

$$j_m(s) = \frac{I}{z} = M \quad (7.263)$$

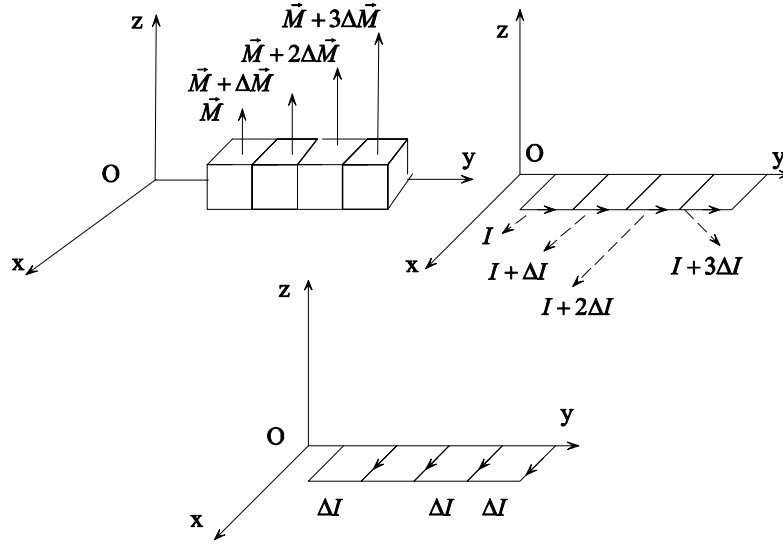


Figura 7.30: Material neomogen în câmp magnetic

b) *materiale neomogene*

În cazul materialelor neomogene $\vec{M}$ și prin urmare curenții corespunzători de magnetizare nu au aceeași valoare în toate regiunile corpului și nu se mai compensează reciproc (Fig. 7.30).

Se va considera un caz particular al unui material magnetizat în direcția Oz și a cărei magnetizare crește în funcție de y . Materialul se împarte în volume paralelipipedice de mărime $\Delta x \Delta y \Delta z$ a căror magnetizare este prezentată în Fig. 7.30. Fiecare element de volum poate fi înlocuit prin curentul superficial:

$$I = j_m \Delta z = M_z \Delta z \quad (7.264)$$

Cum magnetizarea crește liniar de la un element la alt element și intensitatea curenților va crește tot liniar. Ca urmare la limita de separație dintre două elemente de volum vecine, curenții de sens opus nu se anulează. Diferența dintre intensitățile curenților este:

$$\Delta I = [M_z(y + \Delta y) - M_z(y)] \Delta z = \frac{\partial M_z}{\partial y} \Delta y \Delta z \quad (7.265)$$

Se observă că pe fețele normale la Ox curenții se anulează reciproc. Den-

sitatea curentului în sensul axei Ox este:

$$j_{mx}^{(1)} = \frac{\Delta I}{\Delta y \Delta z} = \frac{\partial M_z}{\partial y} \quad (7.266)$$

Dacă se analizează cazul unei probe magnetizate în direcția Oy a cărei magnetizare are direcția axei Ox se obține:

$$j_{mx}^{(2)} = -\frac{\partial M_y}{\partial z} \quad (7.267)$$

Astfel:

$$j_{mx} = j_{mx}^{(1)} + j_{mx}^{(2)} = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} = \left(\nabla \times \vec{M} \right)_x \quad (7.268)$$

Generalizând și pentru celelalte direcții rezultă:

$$\vec{j}_m = \nabla \times \vec{M} \quad (7.269)$$

7.4.9 Curenții liberi și intensitatea câmpului magnetic

Așa cum s-a prezentat mai înainte, s-a ajuns la concluzia că în afară de curenții de conducție (datorați electronilor liberi), la generarea unui câmp magnetic contribuie și curenții atomici sau moleculari datorați electronilor.

Densitatea totală de curent se poate exprima astfel:

$$\vec{j}_{total} = \vec{j}_{liber} + \vec{j}_m \quad (7.270)$$

unde $\vec{j}_{liber}$, $\vec{j}_m$ sunt densitățile de curent corespunzătoare electronilor liberi, respectiv legați.

Deoarece $\vec{j}_m$ satisface relația 7.269, legea lui Ampère se poate scrie sub forma:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_{liber} + \vec{j}_m \right) = \mu_0 \left(\nabla \times \vec{M} + \vec{j}_{liber} \right) \quad (7.271)$$

de unde:

$$\vec{j}_{liber} = \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \quad (7.272)$$

Relația 7.272 sugerează faptul că se poate defini o altă mărime caracteristică câmpului magnetic a cărei surse sunt doar curenții liberi, denumită intensitatea câmpului magnetic.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (7.273)$$

Ea se măsoară în A/m. Rezultă:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{liber} \quad (7.274)$$

Integrând pe o suprafață care se sprijină pe un contur C:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{H}) d\vec{S} = \iint_S \vec{j}_{liber} d\vec{S} \quad (7.275)$$

Se aplică teorema lui Stokes și rezultă:

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = I_{liber} \quad (7.276)$$

Relația dintre $\vec{H}$ și $\vec{B}$ joacă un rol important în electromagnetism. Pentru substanțe izotrope paramagnetice sau diamagnetice există o relație de liniaritate:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \quad (7.277)$$

unde μ este permeabilitatea absolută a mediului respectiv iar μ_r este permeabilitatea relativă. Pentru astfel de substanțe μ_r diferă foarte puțin de unitate. Pentru substanțele paramagnetice $\mu_r > 1$, iar pentru substanțele diamagnetice $0 < \mu_r < 1$.

Pentru substanțele feromagnetice relația 7.277 trebuie înlocuită cu o relație neliniară:

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{H}) \quad (7.278)$$

Aceste substanțe prezintă fenomenul de histerezis fapt ce arată că $\vec{B}$ nu este o funcție univocă de $\vec{H}$ (Fig.7.31). Mai mult inducția magnetică depinde de istoria materialului. Permeabilitatea relativă μ_r în acest caz este definită ca derivata în raport cu H a raportului B/μ_0 când H are valori suficient de mici încât B și H să fie paraleli. Pentru anumite substanțe feromagnetice permeabilitatea relativă poate ajunge la valori de 10^6 .

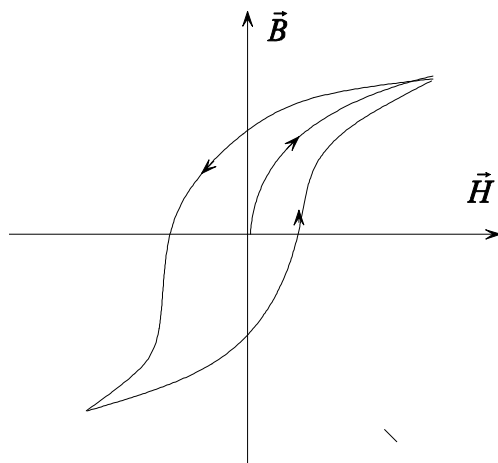


Figura 7.31: Curbă de histeresis

7.5 Inducția electromagnetică

Primele observații legate de câmpurile electrice și magnetice variabile în timp au fost realizate de Faraday în 1831. El a constatat că într-un circuit apare un curent când acesta este introdus sau scos din câmp magnetic.

În Figurile 7.32 și 7.33 sunt prezentate diferite moduri în care fenomenul se poate pune în evidență experimental. Astfel în cazul din Fig. 7.32 la închiderea comutatorului, în spira din circuitul care conține ampermetrul A se stabilește pentru scurt timp un curent care este înregistrat de acesta. Același lucru se petrece în cazul prezentat în Fig. 7.33 când magnetul este adus în apropierea spirei. Curent apare și atunci când magnetul este fix iar circuitul se rotește în câmpul creat de acesta.

Există mai multe posibilități de a obține o tensiune electromotoare indusă:

- a) prin plasarea unui circuit într-o regiune în care există un câmp magnetic variabil în timp.
- b) prin mișcarea unui circuit rigid într-un câmp magnetic.

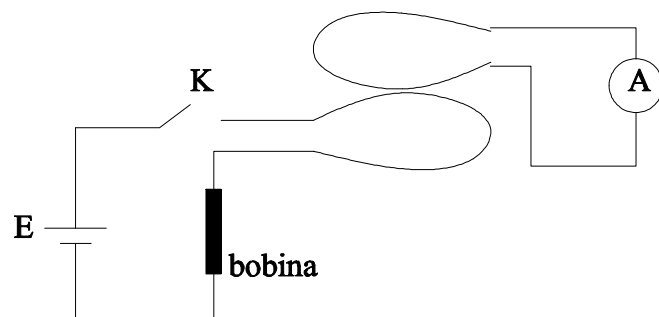


Figura 7.32: Fenomenul de inducție electromagnetică care apare la închiderea comutatorului **K**

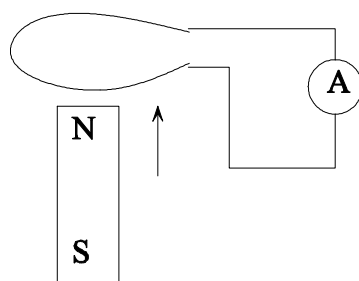


Figura 7.33: Fenomenul de inducție electromagnetică care apare la aducerea unui magnet în apropierea circuitului



Figura 7.34: Sarcină electrică în câmp magnetic

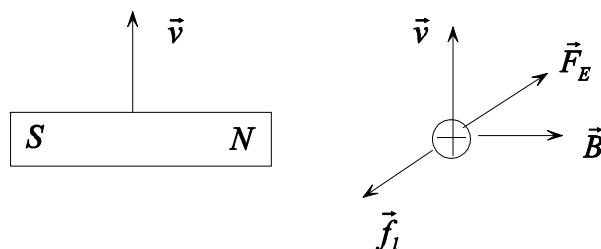


Figura 7.35: Sarcina electrică în mișcare în câmp magnetic

7.5.1 Câmpul electric generat prin mișcarea surselor câmpului magnetic

Se consideră o particulă cu sarcină electrică q care se găsește într-un câmp magnetic produs de un magnet (Fig. 7.34). Particula și magnetul sunt în repaus față de sistemul laboratorului (SL). Se constată că asupra particulei nu acționează nici o forță.

Să privim aceeași situație dintr-un sistem de referință care se deplasează cu viteza $-\vec{v}$ față de SL (ne vom limita la cazul vitezelor mici față de viteza luminii). Față de acest sistem de referință particula și magnetul se deplasează cu viteza $\vec{v}$.

Deoarece sarcina se deplasează într-un câmp magnetic (Fig. 7.35) cu viteza $\vec{v}$ ea va fi supusă unei forțe Lorentz $\vec{f}_l = q\vec{v} \times \vec{B}$. Dacă nu ar exista și alte forțe care să acționeze asupra particulei ea ar trebui să fie accelerată fapt ce ar intra în contradicție cu situația inițială. Acest paradox este eliminat dacă se consideră că în sistemul aflat în mișcare apare un câmp electric $\vec{E}$ astfel încât:

$$\vec{F}_E = -\vec{f}_l \quad (7.279)$$

Rezultă:

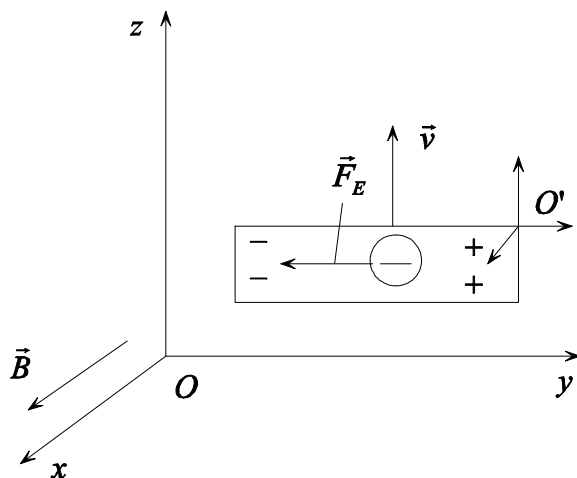


Figura 7.36: Bară conductoare în mișcare în câmp magnetic

$$q\vec{E} = -q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (7.280)$$

de unde:

$$\vec{E} = -(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (7.281)$$

În concluzie, când sursa unui câmp magnetic este în mișcare față de un observator, acesta va constata pe lângă câmpul magnetic și existența unui câmp electric.

7.5.2 Câmpul indus într-un conductor în mișcare într-un câmp magnetic uniform

Fie un conductor de lungime l ce se deplasează cu viteza $\vec{v}$ de-a lungul axei Oz într-un câmp magnetic uniform a cărui inducție magnetică este paralelă cu axa Ox (Fig. 7.36).

Un observator O' solidar legat de conductor constată că sursa câmpului magnetic se deplasează cu viteza $-\vec{v}$. Atunci în interiorul conductorului apare un câmp electric

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} \quad (7.282)$$

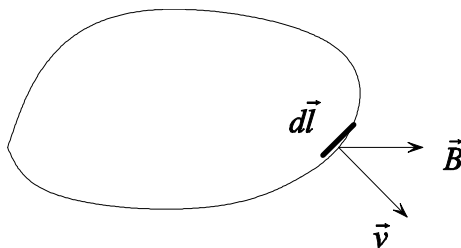


Figura 7.37: Spiră conductoare în câmp magnetic

Acest câmp este de natură neelectrostatică. Orice sarcină electrică va fi supusă unei forțe:

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (7.283)$$

Sub acțiunea acestei forțe, electronii se vor deplasa spre extremitatea din stânga a conductorului, iar la capătul din dreapta sa va produce o acumulare de sarcini pozitive. Aceste sarcini vor determina apariția unui câmp electric de natură electrostatică care va avea un sens contrar câmpului electric indus.

În această experiență imaginară capetele conductorului pot fi considerate ca cele două borne ale unei surse de t.e.m. a cărei valoare este:

$$\mathcal{E} = \int_0^l \vec{E} d\vec{l} = El = Blv \quad (7.284)$$

7.5.3 Tensiunea electromotoare indusă într-o spiră de curent ce se deplasează într-un câmp magnetic

Să considerăm o spiră realizată dintr-un conductor subțire care se deplasează în câmpul magnetic $\vec{B}$ cu viteza $\vec{v}$ ce face un unghi α cu $\vec{B}$ (Fig. 7.37).

Într-un element de buclă $d\vec{l}$ câmpul electric indus este:

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} \quad (7.285)$$

iar tensiunea electromotoare indusă este:

$$d\mathcal{E} = \vec{E} d\vec{l} = (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l} \quad (7.286)$$

Tensiunea electromotoare indusă în întreaga buclă este:

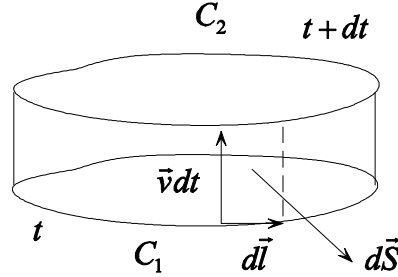


Figura 7.38: Spiră conductoare care se deplasează în câmp magnetic

$$\mathcal{E} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l} \quad (7.287)$$

În continuare se examinează mai detaliat această situație. Se consideră că în timpul deplasării circuitului forma acestuia se păstrează și atunci fiecare element al circuitului va fi caracterizat de o aceeași viteză de deplasare.

În cazul ilustrat în Fig.7.38 sunt reprezentate pozițiile buclei la momentele de timp t și $t + dt$. La momentul t fluxul câmpului magnetic prin buclă este:

$$\Phi(t) = \iint_S \vec{B} d\vec{S} \quad (7.288)$$

Pentru calculul fluxului prin suprafața circuitului la momentul $t + dt$ vom ține cont că fluxul unei mărimi vectoriale este același prin orice suprafață mărginită de un contur dat.

Pentru poziția C_2 a buclei la momentul $t + dt$ se alege următoarea suprafață: suprafața inițială S și suprafețele laterale S_l datorate mișcării buclei. Atunci:

$$\Phi(t + dt) = \iint_S \vec{B} d\vec{S} + \iint_{S_l} \vec{B} d\vec{S} = \Phi(t) + \iint_{S_l} \vec{B} (\vec{v} dt \times d\vec{l}) \quad (7.289)$$

Deoarece integrala de suprafață se poate transforma într-o integrală curbilinie:

$$\Phi(t + dt) = \Phi(t) + \left[\oint_C \vec{B} (\vec{v} \times d\vec{l}) \right] dt \quad (7.290)$$

rezultă

$$d\Phi = \Phi(t + dt) - \Phi(t) = \left[\oint_C \vec{B} (\vec{v} \times d\vec{l}) \right] dt \quad (7.291)$$

sau

$$\frac{d\Phi}{dt} = \oint_C \vec{B} (\vec{v} \times d\vec{l}) = - \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l} \quad (7.292)$$

Conform relației 7.287 ultima integrală este chiar tensiunea electromotoare indusă:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (7.293)$$

Rezultă că apariția unei t.e.m. induse într-un circuit este determinată de viteza de variație a fluxului inducției magnetice prin acel circuit.

7.5.4 Legea inducției electromagnetice

În paragraful precedent s-a arătat că variația fluxului magnetic ca urmare a deplasării circuitului în câmp magnetic determină o t.e.m. indusă. Un flux magnetic variabil se poate obține când câmpul magnetic variază în timp. Faptul că apare un curent în interiorul circuitului arată că și în acest caz se induce o t.e.m. iar asupra sarcinilor se exercită o forță de natură electrică. Relația 7.293 rămâne valabilă în orice situație în care există un câmp magnetic variabil în timp printr-un circuit. Deoarece:

$$\mathcal{E} = \oint_c \vec{E} d\vec{l} \quad (7.294)$$

și

$$\Phi = \iint \vec{B} d\vec{S} \quad (7.295)$$

atunci:

$$\oint_c \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} d\vec{S} \quad (7.296)$$

unde S este suprafața care se sprijină pe curba C .

Se remarcă faptul că, deoarece $\oint_c \vec{E} d\vec{l} \neq 0$ câmpul electric indus este neconservativ. Transformând integrala din membrul stâng al relației 7.296 într-o integrală pe suprafața S se obține:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{E}) d\vec{S} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \quad (7.297)$$

De aici se obține:

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (7.298)$$

Aceasta este forma diferențială a legii lui Faraday; ea stabilește că se pot produce câmpuri electrice prin variația în timp a câmpului magnetic. Trebuie remarcat că suprapunerea câmpului electric indus cu un câmp electrostatic nu modifică cu nimic relația de mai sus deoarece rotorul unui câmp potențial este nul.

În același timp liniile câmpului electrostatic pornesc de pe corpurile încărcate pozitiv și se termină pe corpurile încărcate negativ; în cazul în care este implicat un câmp electric indus liniile de câmp formează curbe închise.

7.5.5 Energia câmpului magnetic

Pentru studiul energiei câmpului magnetic se consideră că printr-un proces lent, cvasistaționar, se modifică densitatea curenților de la valoarea zero până la o valoare finală. În evaluarea schimburilor de energie trebuie să se țină cont că lucrul mecanic al forței Lorentz este nul astfel că transferul de energie de la și înspre câmpul magnetic nu poate fi asociat cu un lucru mecanic al forței Lorentz. În schimb orice variație a câmpului magnetic poate fi asociată cu un câmp electric indus $\vec{E}_{ind}$.

Fie un circuit prin care circulă curentul I . Dacă fluxul câmpului magnetic se schimbă atunci în circuit se induce o tensiune electromotoare $\mathcal{E}$. Pentru a menține curentul existent în circuit trebuie ca sursele să efectueze un lucru mecanic. Transferul de energie efectuat prin intermediul surselor în scopul compensării câmpului $\vec{E}_{ind}$ se evaluează considerând un câmp compensator $\vec{E}_c = -\vec{E}_{ind}$.

Vom considera inițial o particulă cu viteza $\vec{v}$ asupra căreia acționează o forță $\vec{F}$. Viteza de variație a energiei cinetice a acestei particule este:

$$\frac{dE_{cin}}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F} \quad (7.299)$$

Rezultă că energia furnizată de surse în unitatea de timp pentru a menține viteza particulei cu sarcina e este:

$$e\vec{v}\vec{E}_c$$

Pentru a calcula lucrul mecanic efectuat de surse în unitatea de timp asupra circuitului considerat se însumează contribuția acțiunii surselor asupra tuturor electronilor. Ținând cont că $\vec{j} = ne\vec{v}$ rezultă:

$$\frac{dW}{dt} = \sum e\vec{v}\vec{E}_c = \sum_{\Delta l} \Delta N e \frac{\vec{j}}{ne} \vec{E}_c \quad (7.300)$$

În expresia de mai sus se consideră suma contribuțiilor porțiunilor de circuit Δl în care numărul de electroni este ΔN . Notând cu S secțiunea conductorului și ținând cont că n este concentrația de electroni atunci $\Delta N/n = S\Delta l$. Relația 7.300 devine:

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{\Delta l} S\Delta l \vec{j}\vec{E}_c = \sum_{\Delta l} S j \Delta l \vec{E}_c = -I \sum_{\Delta l} \Delta \vec{l} \vec{E}_{ind} \quad (7.301)$$

Dar cum $\sum_{\Delta l} \Delta \vec{l} \vec{E}_{ind} = \mathcal{E}$ atunci:

$$\frac{dW}{dt} = -I\mathcal{E} = I \frac{d\Phi}{dt} \quad (7.302)$$

unde Φ este fluxul câmpului magnetic prin circuitul considerat.

Rezultă că dacă variația fluxului inducției magnetice printr-un circuit prin care trece curentul I este $\delta\Phi = S\delta B$, lucrul mecanic efectuat de surse pentru a menține neschimbată valoarea curentului este:

$$\delta W = I\delta\Phi = I \left(\vec{S} \delta \vec{B} \right) \quad (7.303)$$

În relația 7.303 s-a considerat că variația fluxului este datorată numai variației câmpului magnetic $\delta \vec{B}$.

Pentru evaluarea lucrului mecanic efectuat pentru stabilirea unei distribuții staționare de curenți și câmpuri se consideră că procesul decurge cu o viteză foarte mică astfel încât condiția $\Delta \vec{j} = 0$ să fie tot timpul îndeplinită. Atunci distribuția de curent poate fi împărțită într-o rețea de bucle elementare, o buclă elementară reprezentând un curent de secțiune $\Delta\sigma$ care urmărește o curbă închisă C ce delimitează o suprafață ΔS (Fig. 7.39).

Pentru a exprima lucrul mecanic efectuat împotriva forțelor de tensiune electromotoare induse datorită modificării inducției magnetice vom ține cont de relația 7.303. Pentru o buclă elementară lucrul mecanic are expresia:

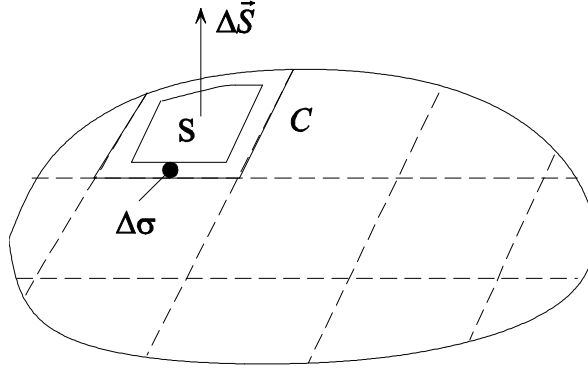


Figura 7.39: Distribuție de curent împărțită în mici bucle de curent

$$\Delta(\delta W) = I \iint_{\Delta S} \delta \vec{B} d\vec{S} \quad (7.304)$$

Se exprimă inducția magnetică în funcție de potențialul vector și curentul în funcție de densitatea de curent. Rezultă:

$$\Delta(\delta W) = j \Delta \sigma \iint_{\Delta S} \delta (\nabla \times \vec{A}) d\vec{S} \quad (7.305)$$

Aplicând teorema lui Stokes se poate scrie:

$$\Delta(\delta W) = j \Delta \sigma \oint_C (\delta \vec{A}) d\vec{l} \quad (7.306)$$

Cum $j \Delta \sigma d\vec{l} = \vec{j} dv$, $d\vec{l}$ fiind paralel cu $\vec{j}$ suma peste toate aceste bucle va fi o integrală de volum astfel încât lucrul mecanic pentru întreaga densitate de curent este:

$$\delta W = \iiint (\delta \vec{A}) \vec{j} dv \quad (7.307)$$

Pentru a obține o expresie a lucrului mecanic care să conțină în locul lui $\vec{j}$ și $\delta \vec{A}$ vectorii câmpului magnetic se folosește legea lui Ampère $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$. Relația 7.307 devine:

$$\delta W = \iiint \delta \vec{A} (\nabla \times \vec{H}) dv \quad (7.308)$$

Se ține cont de relația:

$$\nabla (\vec{H} \times \delta \vec{A}) = \delta \vec{A} (\nabla \times \vec{H}) - \vec{H} (\nabla \times \delta \vec{A})$$

Atunci:

$$\delta W = \iiint \left[\vec{H} (\nabla \times \delta \vec{A}) + \nabla (\vec{H} \times \delta \vec{A}) \right] dv \quad (7.309)$$

Al doilea termen din 7.309 se anulează la infinit deoarece $\vec{H}$ și $\vec{A}$ se presupun nule. Atunci lucrul mecanic este:

$$\delta W = \iiint \vec{H} \delta \vec{B} dv \quad (7.310)$$

Dacă presupunem medii liniare (neferomagnetice):

$$\vec{H} \delta \vec{B} = \frac{1}{2} \delta (\vec{H} \vec{B})$$

Când câmpul variază de la zero la o valoare finită se obține pentru energia câmpului magnetic formula:

$$W = \frac{1}{2} \iiint \vec{H} \vec{B} dv \quad (7.311)$$

Modificarea energiei magnetice atunci când un corp cu permeabilitatea μ_1 este plasat într-un mediu magnetic ale cărui surse sunt fixe se poate rezolva în analogie cu modificarea energiei câmpului electrostatic când într-un câmp ale cărui surse sunt fixe se aduce un corp dielectric.

Dacă în mediu inducția câmpului magnetic este $\vec{B}_0$, și intensitatea este $\vec{H}_0$ iar după introducerea corpului de permitivitate μ vectorii câmpului magnetic devin $\vec{B}$ și $\vec{H}$, modificarea energiei este dată de:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V (B H_0 - H B_0) dv \quad (7.312)$$

unde integrala se extinde peste volumul corpului.

7.6 Ecuațiile Maxwell

Ecuațiile Maxwell reprezintă formularea matematică a principalelor postulate ale electrodinamicii clasice. Ele sunt un sistem complet de ecuații în sensul

că determină univoc câmpul electromagnetic. Ele sunt valabile în anumite situații, și anume atunci când corpurile materiale sunt imobile iar constantele de material ε , μ , σ nu depind de timp sau de intensitatea câmpurilor. Se face abstracție de prezența unor materiale ce prezintă momente magnetice dipolare permanente. Nu se ia în considerare dependența constantelor de material de temperatură. Aceste ecuații se exprimă sub forma unor legi generale precum și a unor legi de material.

7.6.1 Legea fluxului electric

Este legea care ilustrează legătura dintre câmpul electric și sursele sale. Sub formă diferențială ea este dată de relația:

$$\nabla \vec{D} = \rho_l \quad (7.313)$$

unde ρ_l este densitatea de sarcini libere. Sub formă integrală această lege se scrie:

$$\iint_S \vec{D} d\vec{S} = \iiint_V \rho_l dv \quad (7.314)$$

unde S este suprafața ce mărginește volumul V .

În vid $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$. Rezultă:

$$\iint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dV \quad (7.315)$$

și

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (7.316)$$

7.6.2 Legea fluxului magnetic

Forma diferențială a legii este :

$$\nabla \vec{B} = 0 \quad (7.317)$$

iar forma integrală este:

$$\iint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (7.318)$$

unde S este o suprafață închisă. Ecuatiile de mai sus sunt o consecință a faptului că liniile de câmp sunt închise. Legea arată inexistența sarcinilor magnetice libere.

7.6.3 Legea inducției electromagnetice

Forma diferențială este:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (7.319)$$

iar forma integrală este

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} d\vec{S} \quad (7.320)$$

Curba închisă C mărginește suprafața S care nu este o suprafață închisă.

Această lege arată că un câmp magnetic variabil în timp produce un câmp electric. Sub formă integrală legea confirmă observațiile experimentale: tensiunea electromotoare indusă într-un circuit este egală cu viteza de variație a fluxului magnetic prin suprafața circuitului.

7.6.4 Legea circuitului magnetic. Curent de deplasare

Legea stabilește că câmpul magnetic poate fi produs de curenți electrici și de câmpuri electrice variabile în timp. Pentru curenți staționari această lege este:

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \iint_S \vec{j} d\vec{S} \quad (7.321)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} \quad (7.322)$$

Maxwell a fost primul care a sesizat unele dificultăți ridicate de ecuațiile de mai sus. Să aplicăm această lege succesiv pentru curbele C_1 , C_2 , ... a căror lungime tinde la zero (Fig. 7.40).

Atunci suprafețele S_1 , S_2 , ... mărginite de curbele C_1 , C_2 , ... tind către o suprafață închisă și finită iar:

$$\lim \oint_C \vec{H} d\vec{l} = 0 \quad (7.323)$$

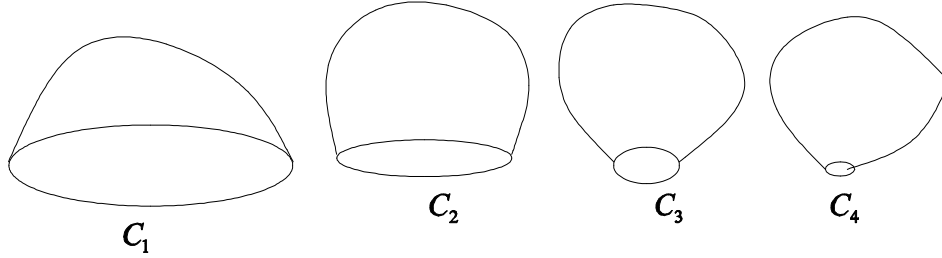


Figura 7.40: Curbe a căror lungime tinde la zero

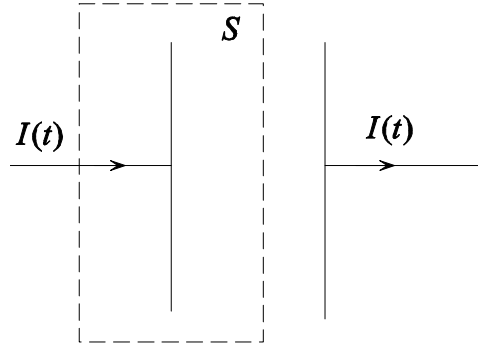


Figura 7.41: Încărcarea unui condensator

Rezultă că prin suprafață închisă S :

$$\iint_S \vec{j} d\vec{S} = 0 \quad (7.324)$$

Integrala de suprafață din relația 7.321 reprezintă curentul total ce iese din suprafața S . Egalitatea 7.324 arată că printr-o suprafață închisă curentul net este nul. Această situație este valabilă doar în cazul curenților staționari. Există și cazuri când acest lucru nu se petrece.

Să considerăm de exemplu încărcarea unui condensator (Fig. 7.41).

Fie o suprafață S închisă care înconjoară una din armături. Viteza cu care crește sarcina pe această armătură este:

$$\frac{dq}{dt} = i(t) \quad (7.325)$$

Atunci:

$$\iint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} \neq 0 \quad (7.326)$$

Deoarece curentul iese prin suprafață, integrala este negativă $\vec{j}$ fiind îndreptat înspre interiorul suprafeței iar $d\vec{S} = \vec{n}dS$ spre exterior. Cum

$$q = \iint_S \vec{D} d\vec{S} \quad (7.327)$$

rezultă:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} d\vec{S} \quad (7.328)$$

Atunci:

$$\iint_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} d\vec{S} = 0 \quad (7.329)$$

Termenul al doilea din relația 7.329 are dimensiune de curent și poartă numele de curent de deplasare.

Ecuția de mai sus este legea de conservare a sarcinii. O formulare mai generală a legii circuitului magnetic se obține dacă în relația 7.321 se înlocuiește $\iint_S \vec{j} d\vec{S}$ cu $\iint_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} d\vec{S}$. Se obține:

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \iint_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} d\vec{S} \quad (7.330)$$

sau scriind relația în formă diferențială:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \quad (7.331)$$

Aceste ultime două relații arată că un câmp magnetic poate fi generat de un curent electric și de un câmp electric variabil în timp.

Dacă se consideră situația din vid $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ și $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ ecuația 7.331 devine:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad (7.332)$$

iar ecuația 7.330 devine:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E} d\vec{S} \quad (7.333)$$

7.6.5 Legile de material

Experimental se constată existența unor relații între $\vec{P}$ și $\vec{E}$, $\vec{H}$ și $\vec{M}$ și între $\vec{j}$ și $\vec{E}$. Ele sunt determinate de starea mediului.

Legătura dintre $\vec{P}$ și $\vec{E}$

În general densitatea de polarizare $\vec{P}$ este o sumă formată din doi termeni:

$$\vec{P} = \vec{P}_p + \vec{P}_t \quad (7.334)$$

Termenul $\vec{P}_p$ este polarizarea permanentă și este independentă de existența câmpului electric (se poate obține o polarizare permanentă tensionând pe o anumită direcție un cristal piezoelectric).

Termenul $\vec{P}_t$ poartă numele de polarizare temporală și este determinat de acțiunea câmpului electric.

$$\vec{P}_t = \vec{P}_t(\vec{E}) \quad (7.335)$$

Astfel în mediile anizotrope dar liniare:

$$\begin{aligned} P_x &= \varepsilon_0 (\chi_{xx}^e E_x + \chi_{xy}^e E_y + \chi_{xz}^e E_z) \\ P_y &= \varepsilon_0 (\chi_{yx}^e E_x + \chi_{yy}^e E_y + \chi_{yz}^e E_z) \\ P_z &= \varepsilon_0 (\chi_{zx}^e E_x + \chi_{zy}^e E_y + \chi_{zz}^e E_z) \end{aligned} \quad (7.336)$$

Mărimile χ_{ij}^e unde $i, j = x, y, z$ sunt componentele unui tensor simetric, denumit tensorul susceptibilității electrice². Există un anumit sistem de referință în care tensorul respectiv are diferite de zero doar componentele pe diagonală. Relațiile 7.336 se pot scrie condensat:

$$\vec{P}_t = \varepsilon_0 \overline{\chi^e} \vec{E} \quad (7.337)$$

Într-un mediu omogen și izotrop mărimea tensorială $\overline{\chi^e}$ devine un scalar χ_e .

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (7.338)$$

²Tensorul este simetric $\chi_{ij}^e = \chi_{ji}^e$

În cazul în care nu există polarizare permanentă pentru mediile anizotrope liniare, inducția câmpului electric se scrie că:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \overline{\chi^e} \vec{E} = \varepsilon_0 \left(1 + \overline{\chi^e}\right) \vec{E} = \varepsilon_0 \overline{\varepsilon} \vec{E} \quad (7.339)$$

unde

$$\overline{\varepsilon} = 1 + \overline{\chi^e}$$

este tensorul permitivității relative a mediului respectiv.

În cazul mediilor izotrope fără polarizare permanentă

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \quad (7.340)$$

iar permitivitatea relativă este un scalar:

$$\varepsilon = 1 + \chi_e$$

Legătura dintre $\vec{H}$ și $\vec{M}$

Densitatea de magnetizare a unui material este dată de suma a doi termeni:

$$\vec{M} = \vec{M}_p + \vec{M}_t \quad (7.341)$$

unde $\vec{M}_p$ este magnetizarea permanentă, independentă de câmpul magnetic și $\vec{M}_t$ magnetizarea temporală, dependentă de câmpul magnetic. Corpurile feromagnetice prezintă magnetizare permanentă. Magnetizarea temporală se întâlnește la toate corpurile și în general are o valoare foarte mică:

$$\vec{M}_t = \vec{M}_t(\vec{H}) \quad (7.342)$$

În mediile anizotrope liniare fără magnetizare permanentă

$$\vec{M} = \vec{M}_t = \overline{\chi^m} \vec{H} \quad (7.343)$$

unde $\overline{\chi^m}$ este tensorul permeabilității magnetice. În cazul mediilor izotrope liniare tensorul degenează într-un scalar:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

În cazul mediilor anizotrope fără magnetizare permanentă inducția câmpului magnetic este:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \left(1 + \overline{\chi^m}\right) \vec{H} = \mu_0 \overline{\mu} \vec{H} \quad (7.344)$$

unde $\overline{\mu}$ este tensorul permeabilității relative.

În mediile izotrope liniare cei doi tensori devin scalari:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H} \quad (7.345)$$

7.6.6 Legătura dintre $\vec{j}$ și $\vec{E}$

În mediile anizotrope și liniare legătura dintre vectorii $\vec{j}$ și $\vec{E}$ este dată de legea lui Ohm a cărei formă generală este:

$$\vec{j} = \overline{\sigma} (\vec{E} + \vec{E}_i) \quad (7.346)$$

unde $\overline{\sigma}$ este tensorul conductivității, iar $\vec{E}_i$ este intensitatea câmpurilor electrice de origine neelectrostatică (produse datorită neomogenităților de material sau de temperatură). $\vec{E}_i$ se numește câmp electric imprimat.

7.7 Potențiale electromagnetice

Ecuatiile lui Maxwell sunt un sistem de ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi care leagă între ei vectorii câmpurilor electric și magnetic. Ecuatiile Maxwell împreună cu legile de material permit determinarea vectorilor câmpului electric și ai câmpului magnetic în funcție de ρ și $\vec{j}$.

Ecuatiile pot fi rezolvate ca atare pentru anumite situații simple. Uneori este convenabil să se introducă un potențial scalar sau un potențial vector.

Deoarece $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ indiferent dacă câmpul magnetic este static sau dinamic putem defini vectorul inducție câmp magnetic prin intermediul potențialului vector

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (7.347)$$

Introducând 7.347 în relația 7.319 obținem:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A})$$

sau

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (7.348)$$

Dacă rotorul unei mărimi se anulează atunci acea mărime poate fi scrisă ca un gradient al unei funcții scalare și anume al potențialului:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V \quad (7.349)$$

Rezultă:

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (7.350)$$

Prin definirea lui $\vec{B}$ și $\vec{E}$ în funcție de potențialele $\vec{A}$ și V (relațiile 7.347 și 7.350) cele două ecuații omogene ale lui Maxwell 7.317 și 7.319 sunt satisfăcute. Fie un mediu omogen și izotrop în care ε_r și μ_r sunt independente de intensitățile câmpului electromagnetic. Ne propunem să obținem ecuațiile satisfăcute de potențialul vector $\vec{A}$ și potențialul scalar V . Din relațiile 7.347 și 7.350 se poate scrie:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = -\varepsilon \left(\nabla V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (7.351)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{A}) \quad (7.352)$$

Aplicând relației 7.351 operatorul divergență și considerând 7.313 se obține:

$$\nabla \cdot \vec{D} = -\varepsilon \nabla \cdot \left(\nabla V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \rho \quad (7.353)$$

De aici rezultă:

$$\Delta V + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (7.354)$$

Aplicând relației 7.352 operatorul rotor și considerând 7.331 rezultă:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) = \vec{j} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

sau

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) + \varepsilon \mu \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu \vec{j} \quad (7.355)$$

Dar:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

rezultă

$$-\Delta \vec{A} + \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) + \varepsilon \mu \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu \vec{j}$$

sau

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu \vec{j} \quad (7.356)$$

Se obțin astfel ecuațiile 7.354 și 7.356 pe care le satisfac cele două potențiale, ecuații care sunt încă cuplate.

Decuplarea acestor două ecuații poate fi realizată ținând cont de faptul că există o nedeterminare în definirea potențialelor.

Astfel potențialul vector al câmpului magnetic nu este modificat de transformarea

$$\vec{A}' \rightarrow \vec{A} + \nabla \Psi \quad (7.357)$$

iar potențialul scalar de transformarea

$$V' \rightarrow V - \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (7.358)$$

Acestea se numesc transformări de etalonare iar invarianța câmpurilor în urma acestor transformări se numește condiție de etalonare.

Invarianța câmpurilor la transformarea de etalonare dă posibilitatea de a se lucra cu ecuații mai simple. O relație simplă este sugerată de forma ecuației 7.356 în care termenul:

$$\nabla \left(\nabla \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

poate fi anulat dacă se pune condiția:

$$\nabla \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (7.359)$$

Această condiție este numită condiția lui Lorentz iar etalonarea respectivă poartă numele de etalonare Lorentz. Atunci ecuația satisfăcută de potențialul vector este:

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j} \quad (7.360)$$

Din condiția de etalonare Lorentz obținem:

$$\nabla \vec{A} = -\varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t}$$

iar ecuația 7.354 devine:

$$\Delta V - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (7.361)$$

7.8 Condiții la limită

Suprafețele corpurilor constituie frontiere care separă medii ce au în general proprietăți diferite. Ne propunem să studiem câmpurile în vecinătatea unor astfel de suprafețe unde parametri ε , μ , și σ se schimbă brusc.

7.8.1 Condițiile la limită pentru componentele normale ale inducției câmpului electric și inducției câmpului magnetic

Fie S suprafața de separație dintre mediile 1 și 2. Se consideră din această suprafață un element ΔS suficient de mic. Se construiește un cilindru de înălțime Δh situat în cele două medii (Fig. 7.42).

Suprafața ΔS se alege suficient de mică astfel încât pe bazele cilindrului considerat vectorul inducție câmp magnetic să fie uniform.

Atunci aplicând legea lui Gauss se obține:

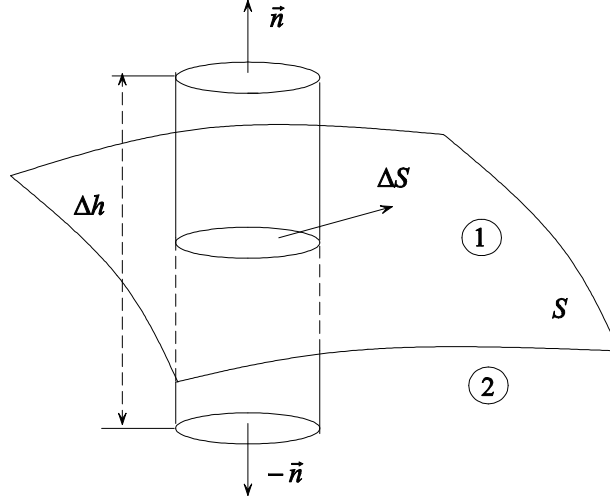


Figura 7.42: Construcție pentru demonstrarea relațiilor dintre componentele normale ale inducției câmpului electric și componentele normale ale inducției câmpului magnetic la suprafața de separație dintre două medii.

$$\vec{D}_1 \vec{n} \Delta S - \vec{D}_2 \vec{n} \Delta S + \Phi_{lat} = \Delta q \quad (7.362)$$

unde Φ_{lat} este fluxul inducției câmpului electric prin suprafața laterală a cilindrului iar sarcina Δq este sarcina din interiorul cilindrului.

Se face înălțimea cilindrului să tindă la zero $\Delta h \rightarrow 0$. Atunci $\Phi_{lat} = 0$. Dacă admitem că poate exista sarcină și pe suprafața ΔS atunci putem scrie:

$$\Delta q = \Delta q_v + \Delta q_s \quad (7.363)$$

unde Δq_s este sarcina de suprafață, iar Δq_v este sarcina din volumul cilindrului. Atunci când înălțimea tinde la zero și sarcina de volum Δq_v va tinde la zero. Relația 7.362 devine:

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \vec{n} \Delta S = \Delta q_s = \sigma \Delta S \quad (7.364)$$

unde σ este densitatea de sarcină de pe suprafață.

Rezultă:

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \vec{n} = \sigma \quad (7.365)$$

Deoarece

$$\begin{aligned}\vec{D}_1 \vec{n} &= D_{1n} \\ \vec{D}_2 \vec{n} &= D_{2n}\end{aligned}$$

sunt componentele normale la suprafața de separație dintre cele două medii relația 7.365 se mai poate scrie ca:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$

Dacă pe suprafața de separație dintre cele două medii nu există sarcini electrice atunci:

$$D_{1n} = D_{2n}$$

adică componenta normală a inducției câmpului electric este continuă.

Pentru componentele normale ale inducției câmpului magnetic vom utiliza tot teorema lui Gauss ca și în cazul anterior:

$$\vec{B}_1 \vec{n} \Delta S - \vec{B}_2 \vec{n} \Delta S + \Phi_{lat} = 0 \quad (7.366)$$

Se face înălțimea cilindrului să tindă la zero $\Delta h \rightarrow 0$. Atunci:

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \vec{n} = 0$$

Cum:

$$\vec{B}_1 \vec{n} = B_{1n} \quad ; \quad \vec{B}_2 \vec{n} = B_{2n}$$

unde B_{1n} și B_{2n} sunt componentele normale ale inducției câmpului magnetic, rezultă:

$$B_{1n} = B_{2n}$$

La suprafața de separație a două medii componenta normală a vectorului inducție câmp magnetic este continuă.

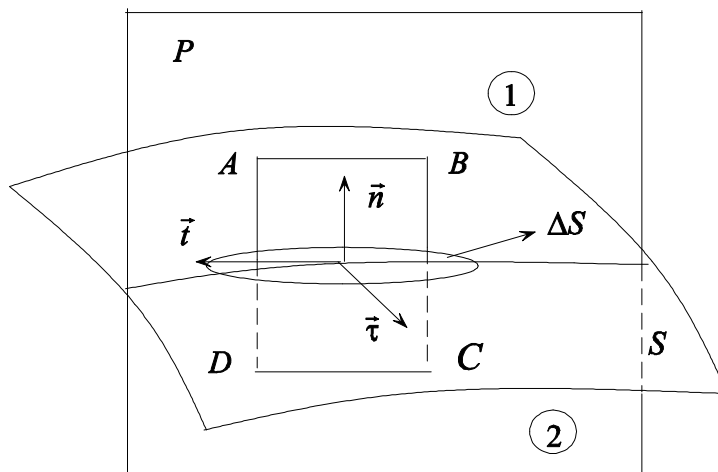


Figura 7.43: Construcție pentru demonstrarea relațiilor dintre componentele tangențiale ale intensității câmpului electric și componentele tangențiale ale intensității câmpului magnetic la suprafața de separație dintre două medii

7.8.2 Condiții la limită pentru componentele tangențiale ale intensității câmpului electric și intensității câmpului magnetic

Pentru a rezolva această problemă se face construcția indicată în Fig. 7.43.

Fie S suprafața de separație dintre cele două medii. Secționăm această suprafață cu un plan P care poate fi considerat perpendicular pe o porțiune mică ΔS din această suprafață. Construim în planul P un contur dreptunghiular $ABCD$ care intersectează suprafața S în interiorul porțiunii ΔS . Se consideră $AB=CD=\Delta l$ iar $AD=BC=\Delta h$ laturile laterale fiind paralele cu normala $\vec{n}$ la suprafața de separație. Vectorul unitar al tangentei la linia de intersecție dintre suprafața S și planul P o notăm cu $\vec{t}$. Orientarea sa este astfel aleasă încât să verifice relația:

$$\vec{t} = \vec{\tau} \times \vec{n} \quad (7.367)$$

unde $\vec{\tau}$ este un vector normal la planul P .

Condițiile la limită pentru componentele tangențiale ale intensității câmpului electric

Se consideră circulația vectorului $\vec{E}$ pe conturul ABCD

$$\vec{E}_1 \vec{t} \Delta l - \vec{E}_2 \vec{t} \Delta l + C_{lat} = -\frac{\partial B}{\partial t} \Delta l \Delta h \quad (7.368)$$

În relația de mai sus am împărțit circulația vectorului $\vec{E}$ în trei părți. Primii doi termeni corespund laturilor AB și CD iar al treilea termen corespunde laturilor BC și DA. Se micșorează înălțimea $\Delta h \rightarrow 0$, astfel încât laturile AB și CD se confundă pe suprafața de separație; termenul C_{lat} se anulează. Rezultă:

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \vec{t} = 0 \quad (7.369)$$

Pentru a interpreta această egalitate trebuie să ținem cont că orientarea lui $\vec{t}$ pe suprafața de separație este arbitrară în raport cu intensitatea câmpului electric, deoarece putem roti planul P în raport cu normala $\vec{n}$. De aceea putem considera că $\vec{t}$ coincide cu direcția proiecției vectorului $\vec{E}$ pe S. Atunci:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 \vec{t} &= E_{1t} \\ \vec{E}_2 \vec{t} &= E_{2t} \end{aligned}$$

unde E_{1t} și E_{2t} sunt componentele tangențiale ale câmpului electric în cele două medii. Rezultă:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (7.370)$$

adică componenta tangențială a vectorului intensitate câmp electric este continuă la suprafața de separație dintre două medii.

Egalitatea 7.369 poate fi pusă sub o altă formă ținând cont de relația 7.367. Rezultă:

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) (\vec{\tau} \times \vec{n}) = \left[\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \right] \vec{\tau} = 0$$

Această egalitate nu mai depinde de sensul vectorului $\vec{\tau}$ care indică orientarea lui P. Atunci:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (7.371)$$

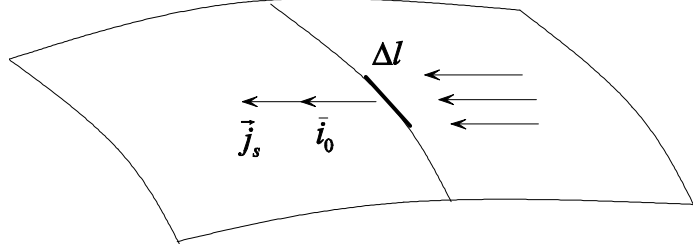


Figura 7.44: Densitatea curentului de suprafață

Formula 7.371 are avantajul de a include în ea un vector $\vec{n}$ perfect definit care nu depinde de sensul câmpului studiat.

Condițiile la limită pentru componentele tangențiale ale intensității câmpului magnetic.

Ca și în cazul precedent se scrie circulația vectorului $\vec{H}$ pe conturul ABCD

$$\vec{H}_1 \vec{t} \Delta l - \vec{H}_2 \vec{t} \Delta l + C_{lat} = - \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right) \vec{\tau} \Delta l \Delta h \quad (7.372)$$

unde C_{lat} este contribuția laturilor laterale la circulația lui $\vec{H}$. Ca și în cazurile anterioare se trece la limită ($\Delta h \rightarrow 0$), contribuția laturilor BC și DA la circulația vectorului $\vec{H}$ este nulă iar termenul $-\left(\partial \vec{D} / \partial t\right) \vec{\tau} \Delta l \Delta h$ se anulează. Termenul $\vec{j} \vec{\tau} \Delta l \Delta h$ se anulează dacă nu există curenți de suprafață. Un curent de suprafață se caracterizează prin densitatea superficială

$$\vec{j}_s = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \vec{i}_0 \frac{\Delta I}{\Delta l} \quad (7.373)$$

unde $\vec{i}_0$ este versorul ce indică sensul curentului, iar Δl este un element al liniei ce este perpendiculară pe ΔI (Fig. 7.44)

Atunci

$$\vec{j} \vec{\tau} \Delta l \Delta h = \vec{\tau} \Delta l \int_{x_1}^{x_2} \vec{j} dx \quad (7.374)$$

unde $x_2 - x_1 = \Delta h$.

Atunci când $\Delta h \rightarrow 0$ conturul se reduce la un element Δl dar integrala nu se anulează deoarece porțiunea Δl este traversată de totalitatea curentului superficial. Atunci:

$$\vec{\tau} \Delta l \int_{x_1}^{x_2} \vec{j} dx \rightarrow \vec{\tau} \vec{j}_s \Delta l \quad (7.375)$$

Rezultă:

$$\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right) \vec{\tau} = \vec{j}_s \vec{\tau} \quad (7.376)$$

Ținând cont de 7.367 relația 7.376 devine:

$$\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right) (\vec{\tau} \times \vec{n}) = \left[\vec{n} \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right) \right] \vec{\tau} = \vec{j}_s \vec{\tau}$$

Sau:

$$\vec{n} \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right) = \vec{j}_s \quad (7.377)$$

Rezultatul arată că în prezența unui curent pe suprafața de separație a două medii, vectorul intensitate câmp magnetic prezintă o discontinuitate. În absența curentului superficial componenta normală a intensității câmpului magnetic rămâne constantă:

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (7.378)$$

7.9 Teorema Poynting și conservarea energiei

7.9.1 Câmpul electromagnetic și transformarea energiei

Fie $W(t)$ energia câmpului electromagnetic dintr-un volum V . Aceasta poate varia în timp. Dacă:

$$a) \quad dW/dt < 0$$

energia câmpului electromagnetic se diminuează. Descreșterea energiei câmpului poate fi datorată absorbției acesteia de către mediu, transformării în alt tip de energie sau emisiei de radiații electromagnetice. Dacă:

$$b) \quad dW/dt > 0$$

are loc o creștere a energiei câmpului electromagnetic. Ea se poate realiza datorită existenței unor surse în domeniul considerat precum și datorită pătrunderii de radiații electromagnetice prin frontiera domeniului.

Pentru studiul energiei câmpului electromagnetic se va considera pentru început o sarcină pozitivă q într-un câmp electric $\vec{E}$. Asupra acesteia va acționa o forță $\vec{F} = q\vec{E}$. Lucrul mecanic efectuat de câmp când sarcina este deplasată pe distanța $d\vec{l}$ este:

$$\delta L = q\vec{E}d\vec{l} \quad (7.379)$$

iar puterea consumată de câmp este:

$$P = \frac{\delta L}{dt} = q\vec{E}\frac{d\vec{l}}{dt} = q\vec{v}\vec{E} \quad (7.380)$$

Dacă se consideră că sarcina q ocupă volumul ΔV foarte mic atunci se poate exprima sarcina ca fiind distribuită cu o densitate ρ .

$$q = \rho\Delta V \quad (7.381)$$

Putem exprima energia consumată de câmp în domeniul ΔV ca fiind:

$$\Delta P = \rho\vec{v}\vec{E}\Delta V \quad (7.382)$$

Se poate astfel defini o densitate de putere consumată:

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta V} = \rho\vec{v}\vec{E} = \vec{j}\vec{E} \quad (7.383)$$

Cum:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \quad (7.384)$$

atunci densitatea de putere se poate scrie:

$$p = \sigma\vec{E}^2 \quad (7.385)$$

Puterea disipată într-un volum V este:

$$P = \iiint_V \vec{j}\vec{E}dv = \iiint_V \sigma\vec{E}^2dv \quad (7.386)$$

Aceasta este legea lui Joule. Pentru a o exprima sub o formă mai cunoscută vom considera cazul unui domeniu sub formă cilindrică în care curentul curge de-a lungul axei sale. Atunci putem exprima puterea consumată astfel:

$$P = \int_l \int_S \vec{j} \vec{E} d\vec{l} d\vec{S} = (El) (jS) = UI \quad (7.387)$$

Pentru a considera acțiunea surselor, relația 7.384 se schimbă cu

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_i) \quad (7.388)$$

Aceasta înseamnă că alături de câmpul electrostatic $\vec{E}$ există și un câmp imprimat $\vec{E}_i$ care nu derivă dintr-un potențial. Există mai multe cazuri în care pot apărea câmpurile imprimate:

- a) câmpuri imprimate datorate neomogenităților de material și neomogenităților de temperatura care dau efectele termoelectrice.
- b) câmpuri electrice imprimate de natură electrochimică.
- c) câmpuri electrice imprimate care apar datorită fenomenului de inducție.

În acest caz densitatea de putere se poate scrie ca:

$$p = \vec{j} \vec{E} = \frac{\vec{j} (\vec{j} - \sigma \vec{E}_i)}{\sigma} = \sigma^{-1} \vec{j}^2 - \vec{j} \vec{E}_i \quad (7.389)$$

Rezultă că densitatea de putere poate fi pusă sub forma unei sume de doi termeni

$$p = p_p + p_s \quad (7.390)$$

Termenul $p_p = \sigma^{-1} \vec{j}^2$ este densitatea de putere pierdută de câmpul electromagnetic iar termenul $p_s = -\vec{j} \vec{E}_i$ reprezintă densitatea de putere care este câștigată de câmpul electromagnetic.

7.9.2 Ecuația de bilanț energetic

Din legea circuitului magnetic rezultă:

$$\vec{j} = \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (7.391)$$

Atunci:

$$\iiint_V \vec{j} \vec{E} dv = \iiint_V \left[\vec{E} (\nabla \times \vec{H}) - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] dv \quad (7.392)$$

Folosind identitatea vectorială:

$$\nabla (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} (\nabla \times \vec{H})$$

și legea lui Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

relația 7.392 devine:

$$\iiint_V \vec{j} \vec{E} dv = - \iiint_V \left[\nabla (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] dv \quad (7.393)$$

Ne vom limita în continuare discuția la mediile macroscopice care au proprietăți liniare. Admitem că expresiile densităților de energie ale câmpului electric și magnetic sunt valabile și pentru câmpuri variabile în timp.

Notăm densitatea totală de energie a câmpului electromagnetic cu

$$u = \frac{1}{2} (\vec{E} \vec{D} + \vec{B} \vec{H}) \quad (7.394)$$

Cum:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (7.395)$$

relația 7.393 se scrie:

$$\int_V \vec{j} \vec{E} dv = - \int_V \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla (\vec{E} \times \vec{H}) \right] dv$$

Ținând cont de 7.389

$$\iiint_V (\sigma^{-1} \vec{j}^2 - \vec{j} \vec{E}_i) dv = - \iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} dv - \iint_{\Sigma} (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{A}$$

sau

$$\frac{d}{dt} \iiint_V u dv = \iiint_V \vec{j} \vec{E}_i dv - \iiint_V \sigma^{-1} \vec{j}^2 dv - \iint_{\Sigma} (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{A} \quad (7.396)$$

unde Σ este suprafața care înconjoară volumul V iar $d\vec{A}$ este elementul de suprafață.

Rezultă că variația energiei câmpului în unitatea de timp $\iiint_V (\partial u / \partial t) dv$ este datorată transformării energiei neelectrice în energie a câmpului electromagnetic $\iiint_V \vec{j} \vec{E}_i dv$ pierderilor de energie prin efect Joule $\iiint_V \sigma^{-1} \vec{j}^2 dv$ și transferului de energie electromagnetică prin suprafața Σ dată de integrala

$$\iint_{\Sigma} (\vec{E} \times \vec{H}) dS.$$

Vectorul

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (7.397)$$

poartă numele de vector Poynting și el trebuie interpretat ca densitatea fluxului de putere transferată prin suprafața Σ . Deoarece energia dintr-un volum V este $W = \int_V u dv$ relația 7.396 se mai poate scrie:

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_V \vec{j} \vec{E}_i dv - \iiint_V \sigma^{-1} \vec{j}^2 dv - \iint_{\Sigma} \vec{S} d\vec{A} \quad (7.398)$$

Relația 7.398 poartă denumirea de Teorema Poynting.

Formula 7.398 mai poate fi scrisă sub formă diferențială astfel:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \vec{j} \vec{E}_i - \sigma^{-1} \vec{j}^2 - \nabla \vec{S} \quad (7.399)$$