Capitolul 7

Electromagnetism

7.1 Electrostatică

7.1.1 Sarcina electrică

Sarcina electrică este o mărime scalară care măsoară starea de electrizare a corpurilor. S-a demonstrat experimental că există două tipuri de sarcină, una a electronilor (sarcină negativă) şi una a protonilor (sarcină pozitivă). Sarcina este discretă, electronii au o sarcină $-e = -1,6 \times 10^{-19}$ C iar protonii $+e = 1,6 \times 10^{-19}$ C. Ea este un invariant scalar şi satisface o lege de conservare. Un corp electrizat de dimensiuni neglijabile faţă de distanţele la care se găsesc corpurile cu care interacţionează poate fi considerat punctiform iar sarcina este punctiformă. Starea de încărcare a corpurilor poate fi descrisă prin mărimea ρ numită densitate de sarcină. Astfel se poate exprima sarcina dq dintr-un volum dV ca fiind $dq = \rho dV$. Aici prin dV se înţelege un element de volum foarte mic la scară macroscopică, dar suficient de mare la scară microscopică încât să conţină mulţi atomi şi molecule. Numai în acest fel se poate trata densitatea de sarcină ca fiind continuă de la punct la punct. În cazul în care sarcina este distribuită pe o suprafaţă se poate introduce o densitate superficială de sarcină σ astfel încât sarcina de pe o suprafaţă elementară dS este $dq = \sigma dS$.

Figura 7.1: Forţa cu care sarcina q_2 acţionează asupra sarcinii q_1 în cazul în care semnele celor două sarcini coincid

7.1.2 Legea lui Coulomb

Legea introdusă de Coulomb se bazează pe următoarele fapte experimentale referitoare la interacţia dintre două particule încărcate:

a) dacă sarcinile sunt de acelaşi fel ele se resping, dacă sunt de semne contrare ele se atrag;

b) forţa acţionează de-a lungul liniei ce uneşte cele două particule;

c) forţa este invers proporţională cu pătratul distanţei dintre sarcini;

d) forţa este proporţională cu mărimea fiecărei sarcini.

Forma matematică a legii lui Coulomb în sistemul de unităţi internaţional SI este:

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} \tag{7.1}$$

$\vec{F}_{21}$ reprezintă forţa cu care sarcina q_2 acţionează asupra sarcinii q_1 (Fig. 7.1). Se observă că ecuaţia pune în evidenţă caracterul atractiv sau repulsiv al forţei dacă semnele sarcinilor sunt incluse în q_1 şi q_2. Când $q_1 q_2 > 0$ (adică ambele sarcini au acelaşi semn) $\vec{F}_{21}$ are sensul vectorului $\vec{r}_{21}$ şi forţa este repulsivă, iar dacă $q_1 q_2 < 0$ (sarcinile au semne contrare) $\vec{F}_{21}$ are sens contrar lui $\vec{r}_{21}$ şi forţa este atractivă. Sarcinile se măsoară în coulombi, distanţa în metri iar forţa în newtoni. Factorul $1/4\pi$ este o constantă de proporţionalitate introdusă pentru a simplifica anumite ecuaţii iar $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$ $\mathrm{C^2/Nm^2}$ este o constantă numită permitivitatea vidului.

În cazul unui sistem de sarcini forţa totală care se exercită asupra uneia dintre ele este egală cu suma forţelor exercitate de celelalte particule asupra ei. Astfel forţa $\vec{F}_j$ care se exercită asupra sarcinii q_j datorată celorlalte sarcini este:

$$\vec{F}_j = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \tag{7.2}$$

Dacă se notează cu $\vec{r}_i$ vectorul de poziţie al sarcinii i atunci:

$$\vec{r}_{ij} = |\vec{r}_j - \vec{r}_i| \tag{7.3}$$

iar 7.2 devine:

$$\vec{F}_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \tag{7.4}$$

7.1.3 Câmpul electric

S-a văzut că forţa totală ce se exercită asupra unei particule încărcate este egală cu suma forţelor exercitate de celelalte particule încărcate. În natură există un număr enorm de particule şi când se consideră forţa ce acţionează asupra uneia din ele este util să ne referim la multitudinea de surse ce contribuie la această forţă prin introducerea conceptului de câmp electric. Astfel dacă se consideră un corp de probă cu sarcina q (foarte mică) iar asupra lui acţionează o forţă $\vec{F}$, atunci raportul $\vec{F}/q$ este intensitatea câmpului electric în punctul în care sarcina este localizată.

Referitor la interacţia dintre sarcini trebuie remarcat că ea se realizează în două etape:

- în prima etapă sarcina sursă determină apariţia în spaţiul din jurul său a unei stări speciale, care conferă spaţiului proprietăţi diferite de cele ale spaţiului vid.

- în a doua etapă orice sarcină adusă in spaţiul în care s-a realizat această stare specială suferă actiunea unei forţe. De fapt această stare specială, în care fiecare sarcină este acţionată de o forţă, poartă numele de câmp electric.

Considerând în punctul P o sarcină de probă q iar in jurul ei o serie de sarcini q_i unde $i = 1, 2, ..., n$ forţa care acţionează asupra sarcinii din punctul P este:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i} \frac{q_i q}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \tag{7.5}$$

Se observă că:

$$\frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \tag{7.6}$$

nu mai depinde de sarcina q, care poate fi făcută oricât de mică încât prezenţa ei să nu modifice poziţia celorlalte sarcini. Astfel se poate defini intensitatea câmpului electric în punctul P creat de sarcinile q_i:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \tag{7.7}$$

Dacă sistemul ar avea doar sarcina q_i intensitatea câmpului creat de aceasta ar fi:

$$\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \tag{7.8}$$

Astfel:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \tag{7.9}$$

Cu alte cuvinte intensitatea câmpului electric este suma intensităţilor câmpurilor electrice datorate fiecărei sarcini în parte. Acesta este aşa numitul principiu al superpoziţiei.

Pentru a obţine o reprezentare a câmpului electric se pot defini liniile de câmp ca fiind curbele la care în fiecare punct vectorul intensitate câmp electric este tangent. Ele au sensul lui $\vec{E}$. Astfel în cazul unei sarcini pozitive (Fig. 7.2) sensul liniei de câmp este dinspre sarcină iar în cazul unei sarcini negative sensul este înspre sarcina respectivă. Trebuie remarcat că liniile de câmp sunt continue, pornesc de pe sarcinile încărcate pozitiv şi se termină pe cele negative. Ele nu se intersectează deoarece în orice punct câmpul electric trebuie să fie univoc determinat.

7.1.4 Câmp electric în medii substanţiale

S-a considerat câmpul electric generat de particule care sunt în repaus şi încărcate electric. Această imagine nu este cea mai potrivită atunci când se consideră câmpul electric în interiorul unui atom, deoarece electronul în acest caz nu este o sarcină electrică în repaus. Mai mult, în mecanica cuantică se arată că poziţia electronului nu poate fi determinată. În loc să se imagineze

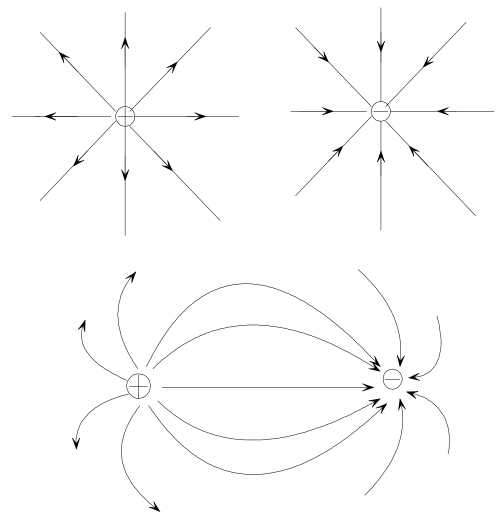

Figura 7.2: Linii de câmp

electronul ca o sarcină punctiformă este de preferat ca sarcina lui să fie privită ca fiind împrăştiată în spaţiu în aşa numitul *nor electronic* aflat în jurul nucleului. Se consideră că $\rho_{el}\left(\vec{r}\right)d\tau$ este sarcina conţinută în elementul de volum $d\tau$ determinat de vectorul de poziţie $\vec{r}$ într-un sistem de referinţă care are ca origine, de exemplu nucleul, iar $\rho_{el}\left(\vec{r}\right)$ este densitatea de sarcină a norului electronic. Atunci sarcina totală a electronului este egală cu suma tuturor sarcinilor din elementele de volum $d\tau$ din norul electronic. Putem exprima sarcina electronului ca o integrală pe volumul norului electronic. Deoarece acest volum nu poate fi cu exactitate definit[1] integrala se extinde în tot spaţiul.

$$\iiint_{\infty} \rho_{el}\left(\vec{r}\right)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{el}\left(\vec{r}\right)dxdydz \tag{7.10}$$

În atomii complecşi norii electronici ai diferiţilor electroni se pot suprapune şi într-o porţiune poate exista o sarcină provenită de la mai mulţi electroni.

Sarcina cu care este încărcat nucleul poate fi reprezentată printr-o densitate de sarcină, chiar dacă nucleul este mult mai mic în comparaţie cu întreg

[1] Prin aceasta nu se introduce nici o eroare deoarece probabilitatea de a găsi electronul la distanţe mari de nucleu este foarte mică.

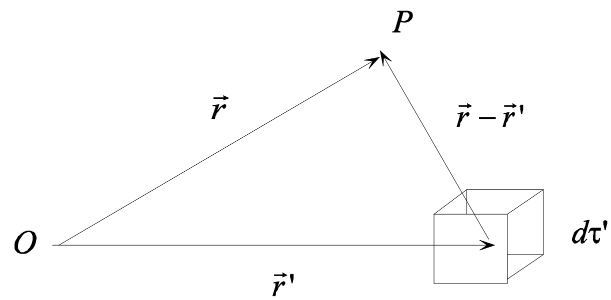

Figura 7.3: Sarcina din fiecare volum $d\tau'$ contribuie la câmpul creat în punctul P

atomul.

Se poate defini o densitate de sarcină atomică $\rho_{at}(\vec{r})$ care să ia în consideraţie şi sarcina pozitivă a nucleului. Această densitate este pozitivă în regiunea nucleului şi negativă în regiunile unde se găsesc norii electronici. Integrala densităţii de sarcină atomică pe întreg volumul atomului este nulă deoarece atomii sunt neutri din punct de vedere electric.

Pentru determinarea câmpului produs de densitatea atomică de sarcină se generalizează formula 7.8 înlocuind suma printr-o integrală. Astfel câmpul electric într-un punct P (Fig. 7.3) este:

$$\vec{E}_{at}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\infty}\frac{(\vec{r}-\vec{r}')\,\rho_{at}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}d\tau' \tag{7.11}$$

Relaţia de mai sus nu este foarte utilă deoarece în general nu se cunoaşte densitatea de sarcină atomică. Nu numai că această densitate nu este cunoscută dar şi atomii sunt într-o continuă mişcare de agitaţie termică. Aceasta face ca $\rho_{at}(\vec{r})$ şi $\vec{E}_{at}(\vec{r})$ să fie într-o continuă schimbare. În interiorul atomilor câmpul electric, numit câmp electric intern este foarte mare în apropierea nucleului. Peste acest câmp se suprapune şi câmpul provenit de la atomii şi moleculele din jurul atomului considerat. Trebuie remarcat că nu numai atomii şi moleculele încărcate generează câmp electric ci şi atomii şi moleculele neutre. Aceste câmpuri sunt extrem de puternice pe distanţe de câteva diametre atomice. Astfel molecula de HCl este neutră din punct de vedere electric dar în cadrul legăturii chimice care ţine cei doi atomi împreună o parte a norului electronic al atomului de hidrogen este transferat către atomul de clor. Atunci atomul de hidrogen rămâne cu un exces de sarcină pozitivă în

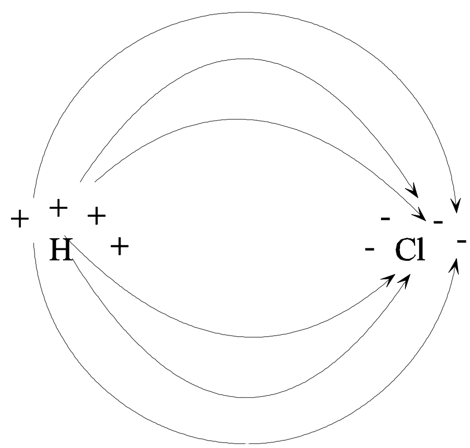

Figura 7.4: Liniile de câmp din jurul moleculei de HCl . Hidrogenul a pierdut o parte din norul electronic astfel că în regiunea respectivă apare un exces de sarcină pozitivă

timp ce cel de clor rămâne cu un exces de sarcină negativă. Astfel liniile de câmp pleacă de la atomul de hidrogen la cel de clor şi ies în afara moleculei (Fig. 7.4)

7.1.5 Câmpul macroscopic

În cazul unor sisteme macroscopice, detaliile câmpului atomic nu mai au nici o importanţă şi ceea ce este important este câmpul mediu. Valoarea medie a câmpului electric estimată pe o regiune mult mai mare decât a unui singur atom, dar încă foarte mică faţă de dimensiunea întregului sistem poartă numele de câmp electric macroscopic.

În comparaţie cu câmpurile atomice mari din apropierea nucleelor, câmpurile macroscopice sunt mici. În izolatori, precum porţelanul, electronii sunt ţinuţi strâns legaţi de atomi iar excesul de sarcină pozitivă şi negativă poate rămâne mult timp, menţinând un câmp macroscopic. Sarcina netă a izolatorului poate fi distribuită în volum sau pe suprafaţă. În cazul metalelor conductoare precum cuprul, sarcinile în exces se distribuie doar pe suprafaţă. În cazul conductorilor anumiţi electroni de valenţă şi electronii de conducţie sunt liberi să se mişte în interiorul conductorului în prezenţa unui câmp electric macroscopic. Atunci când un corp conductor este plasat într-un câmp

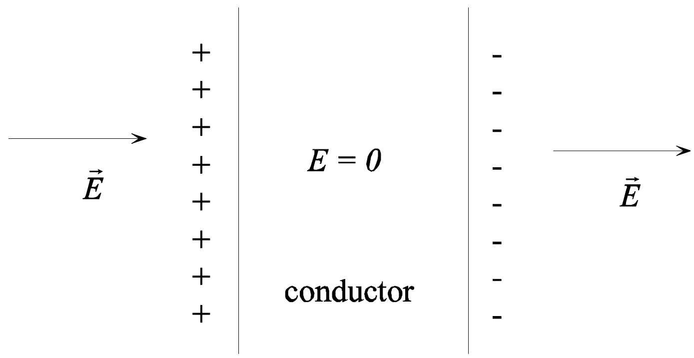

Figura 7.5: Sarcini induse care apar pe suprafaţa unui conductor aflat în câmp electric

extern electronii de conducţie se deplasează sub influenţa câmpului astfel că pe suprafeţele conductorului apar sarcini ca în Fig. 7.5.

Sarcinile care apar pe suprafaţa conductorului în acest mod, datorită prezenţei unui câmp electric se numesc sarcini induse.

În continuare vom studia legătura dintre câmpul macroscopic şi cel microscopic. Să considerăm un volum δV mic în comparaţie cu volumul sistemului, dar suficient de mare pentru a conţine suficienţi atomi. Sarcina netă din δV este:

$$\iiint_{\delta V} \rho_{at}\left(\vec{r}\,'\right) d\tau'$$

Atunci putem defini o densitate macroscopică de sarcină

$$\rho\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{\delta V} \iiint_{\delta V} \rho_{at}\left(\vec{r}\,'\right) d\tau' \tag{7.12}$$

ca fiind sarcina pe unitatea de volum δV centrată pe $\vec{r}$. Densitatea de sarcină astfel definită $\rho\left(\vec{r}\right)$ este o funcţie ce variază continuu în interiorul corpurilor cu excepţia frontierelor, unde densitatea de sarcină se schimbă în mod discontinuu.

Pe suprafeţe pot fi concentraţii mari de sarcină. Sarcina de suprafaţă ocupă un strat subţire având grosimea de câteva diametre atomice. De aceea se poate reprezenta această sarcină ca un strat de grosime infinitezimală. Densitatea superficială de sarcină poate fi definită ca şi cea de volum. Să

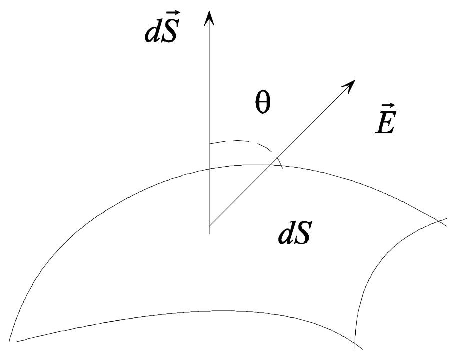

Figura 7.6: Fluxul câmpului electric printr-o suprafaţă

considerăm o porţine δV din stratul subţire având sarcina de pe suprafaţa δS centrată pe vectorul de poziţie $\vec{r}$. Densitatea superficială de sarcină este:

$$\sigma\left(\vec{r}\,\right) = \frac{1}{\delta S}\iiint_{\delta V} \rho_{at}\left(\vec{r}\,'\right) d\tau' \tag{7.13}$$

Câmpul macroscopic satisface principiul superpoziţiei. Pentru a găsi un câmp electric într-un punct al cărui vector de poziţie este $\vec{r}$ este necesar să se însumeze contribuţia sarcinii nete $\rho\left(\vec{r}\,'\right) d\tau'$ din toate elementele de volum şi contribuţia sarcinilor de suprafaţă $\sigma\left(\vec{r}\,'\right) dS'$ de pe toate elementele de suprafaţă. Rezultă:

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\left(\vec{r} - \vec{r}\,'\right)\rho\left(\vec{r}\,'\right) d\tau'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\left(\vec{r} - \vec{r}\,'\right)\sigma\left(\vec{r}\,'\right) dS'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} \tag{7.14}$$

7.1.6 Legea lui Gauss

Se defineşte fluxul câmpului electric printr-o suprafaţă $d\vec{S}$ (Fig. 7.6) ca fiind:

$$d\Phi = \vec{E} d\vec{S} \tag{7.15}$$

unde $d\vec{S} = \vec{n} dS$, iar $\vec{n}$ este normal la suprafaţă în punctul considerat. Atunci:

$$d\Phi = E dS \cos\theta \tag{7.16}$$

unde θ este unghiul format de vectorii $\vec{n}$ şi $\vec{E}$.

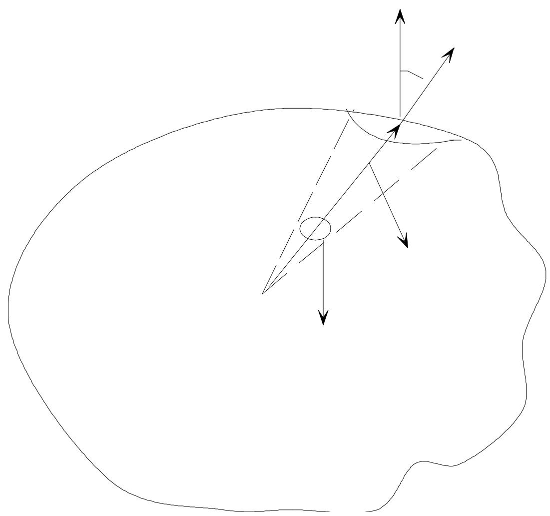

Figura 7.7: Legea lui Gauss. În cazul că sarcina este în interiorul suprafeţei, unghiul total sub care se vede suprafaţa din q este 4π

Pentru a determina forma legii lui Gauss se consideră o sarcină q în interiorul unei suprafeţe închise S (Fig. 7.7). Atunci fluxul prin suprafaţa considerată este:

$$\Phi = \iint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \iint \frac{\vec{r} d\vec{S}}{r^3} \tag{7.17}$$

Se observă că:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} d\vec{S} = \frac{1}{r^2} dS \cos\theta = \frac{dS_n}{r^2} \tag{7.18}$$

unde dS_n este proiecţia suprafeţei $d\vec{S}$ pe un plan perpendicular pe $\vec{r}$. Cum:

$$\frac{dS_n}{r^2} = d\Omega \tag{7.19}$$

atunci:

$$\Phi = \iint_s \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \iint d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{7.20}$$

Dacă sarcina este aleasă în exteriorul suprafeţei rezultă că fluxul total al câmpului electric este nul.

Dacă în locul unei singure sarcini, în interiorul suprafeţei S există un sistem de sarcini atunci în locul lui q se află o sumă de sarcini.

$$\Phi = \iint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q}{\varepsilon_0} \tag{7.21}$$

Relaţia 7.20 rămâne adevărată şi în cazul în care sarcina q este distribuită în mod continuu în volumul V. Atunci se poate exprima sarcina q în funcţie de densitatea volumică de sarcină astfel:

$$q = \iiint_V \rho\left(\vec{r}\right) dV \tag{7.22}$$

unde V este volumul închis de suprafaţa S. Relaţia **??** devine:

$$\iint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho\left(\vec{r}\right) dV \tag{7.23}$$

care este forma integrală a legii lui Gauss în vid.

Dar integrala de suprafaţă se poate transforma într-una de volum:

$$\iint_S \vec{E} d\vec{S} = \iiint_V \nabla \vec{E} dV \tag{7.24}$$

unde ∇ este operatorul divergenţă.

$$\nabla \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{7.25}$$

Atunci:

$$\iiint_V \nabla \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho\left(\vec{r}\right) dV \tag{7.26}$$

Astfel se ajunge la forma diferenţială a legii lui Gauss pentru sarcini în vid:

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho\left(\vec{r}\right)}{\varepsilon_0} \tag{7.27}$$

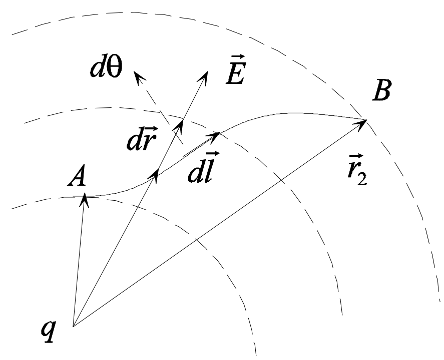

Figura 7.8: Lucrul mecanic efectuat la deplasarea unei sarcini de-a lungul curbei AB

7.1.7 Potentialul electric

Se demonstrează în continuare că forţele electrostatice sunt forţe conservative. Pentru aceasta se arată că lucrul mecanic efectuat de forţa datorată câmpului electric al unei sarcini Q ce acţionează asupra sarcinii q care este deplasată între două puncte, nu depinde de drum ci doar de poziţia iniţială şi finală. Se consideră situaţia arătată în Fig. 7.8, unde sarcina q este deplasată între punctele A şi B.

Lucrul mecanic elementar este:

$$\delta L = \vec{F}_e d\vec{l} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}d\vec{l} \tag{7.28}$$

Cum:

$$\frac{\vec{r}}{r}d\vec{l} = dl\cos\theta = dr \tag{7.29}$$

atunci lucrul mecanic total va fi:

$$L = \int_{r_A}^{r_B} \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \tag{7.30}$$

şi se constată că el nu depinde de drum.

Se obţine acelaşi rezultat dacă corpul cu sarcina q este deplasat în câmpul produs de o distribuţie continuă de sarcini.

Să considerăm două puncte A şi B într-un câmp electrostatic (Fig. 7.9).

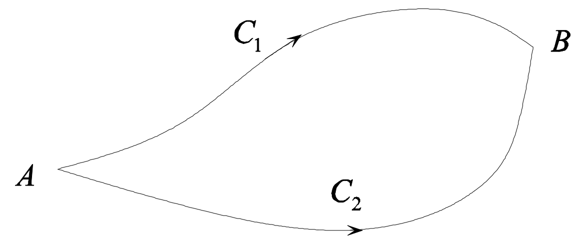

Figura 7.9: Lucrul mecanic al câmpului electric asupra unei sarcini calculat pe două drumuri între două puncte este acelaşi

Din faptul că lucrul mecanic nu depinde de drum rezultă:

$$q\int_{A(C_1)}^{B}\vec{E}d\vec{l} = q\int_{A(C_2)}^{B}\vec{E}d\vec{l} = -q\int_{B(C_2)}^{A}\vec{E}d\vec{l} \tag{7.31}$$

Atunci:

$$q\int_{A(C_1)}^{B}\vec{E}d\vec{l} + q\int_{B(C_2)}^{A}\vec{E}d\vec{l} = \oint_{C}\vec{E}d\vec{l} = 0 \tag{7.32}$$

Prin urmare pentru un câmp electrostatic conservativ circulaţia vectorului respectiv pe orice curbă închisă este nulă.

$$\oint_{C}\vec{E}d\vec{l} = 0 \tag{7.33}$$

Ecuaţia 7.33 poate fi folosită ca criteriu de conservativitate pentru orice câmp vectorial pentru care este îndeplinită o relaţie de tipul de mai sus.

Utilizând teorema lui Stokes care permite trecerea de la integrala pe un contur la o integrală pe o suprafaţă ce se spijină pe conturul respectiv, se obţine:

$$\oint_{C}\vec{E}d\vec{l} = \iint_{S}\left(\nabla\times\vec{E}\right)d\vec{S} = 0 \tag{7.34}$$

Pentru ca o astfel de integrală să fie nulă indiferent de suprafaţa aleasă este necesar ca rotorul intensităţii câmpului electric să fie nul:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{7.35}$$

În coordonate carteziene ecuaţia 7.35 se scrie:

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z = 0 \tag{7.36}$$

Aceasta este forma diferenţială a condiţiei de conservativitate a câmpului electric.

Într-un câmp conservativ se poate introduce o energie potenţială astfel că lucrul mecanic efectuat la deplasarea unui corp dintr-un punct în altul să fie egal cu diferenţa dintre energiile potenţiale pe care corpul le are în cele două puncte:

$$E_P\left(\vec{r}_B\right) - E_P\left(\vec{r}_A\right) = -L_{AB} \tag{7.37}$$

În cazul unei sarcini punctiforme q ce se deplasează în câmpul creat de o altă sarcină punctiformă Q:

$$E_P\left(\vec{r}_B\right) - E_P\left(\vec{r}_A\right) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \tag{7.38}$$

Atunci energia potenţială de interacţie dintre cele două sarcini este:

$$E_P = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{const}$$

unde constanta este determinată de modul de alegere al punctului în care energia potenţială este nulă. Trebuie remarcat că relaţia 7.38 defineşte doar diferenţa dintre energiile potenţiale. Alegerea punctului în care energia potenţială este nulă se face de obicei astfel încât forma energiei potenţiale să fie cât mai simplă. Din acest motiv în cazul sistemului format din două sarcini se poate considera că la o distanţă infinită dintre ele energia potenţială este nulă. Rezultă:

$$E_P = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{7.39}$$

Se introduce noţiunea de potenţial electric ca raportul dintre energia potenţială a unui corp de probă şi valoarea sarcinii acelui corp:

$$V = \frac{E_P}{q} \tag{7.40}$$

Pentru un câmp produs de o sarcină punctiformă forma acestuia este:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{7.41}$$

Se determină în continuare relaţia dintre intensitatea câmpului electric şi potenţial. Să considerăm încă o dată lucrul mecanic efectuat de câmpul electric la deplasarea unei sarcini între două puncte.

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} d\vec{l} = q \int_A^B \vec{E} d\vec{l}$$

Atunci:

$$E_p(\vec{r}_B) - E_p(\vec{r}_A) = -L_{AB} = -q \int_A^B \vec{E} d\vec{l}$$

dar:

$$\frac{E_p(\vec{r}_B)}{q} - \frac{E_p(\vec{r}_A)}{q} = -\int_A^B \vec{E} d\vec{l}$$

Rezultă:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} d\vec{l} \tag{7.42}$$

Ecuaţia de mai sus poate fi privită ca una de definiţie pentru potenţial, însă ca şi în cazul anterior, potenţialul este definit până la o constantă arbitrară. Cum

$$\int_A^B \vec{E} d\vec{l} = \frac{1}{q} L_{AB} \tag{7.43}$$

atunci:

$$V_B - V_A = -\frac{1}{q}L_{AB} = \frac{1}{q}L_{BA} \tag{7.44}$$

Se alege un punct de referinţă în care se consideră potenţialul nul (de exemplu punctul A). Rezultă:

$$V_B = \frac{1}{q}L_{BA} = \frac{1}{q}L_{BR} \tag{7.45}$$

Aceasta înseamnă că potenţialul într-un punct este egal cu raportul dintre lucrul mecanic efectuat de forţele câmpului la deplasarea unei sarcini din acel punct într-un punct de referinţă şi valoarea sarcinii respective.

Să considerăm diferenţa de potenţial între două puncte aflate la distanţa $\delta\vec{r}$ care este suficient de mică pentru ca $\vec{E}$ să poată fi considerat constant pe acest interval. Atunci:

$$\delta V = V\left(\vec{r} + \delta\vec{r}\,\right) - V\left(\vec{r}\,\right) = -\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+\delta\vec{r}} \vec{E}d\vec{l} = -\vec{E}\delta\vec{r}$$

În coordonate carteziene :

$$\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z = -E_x\delta x - E_y\delta y - E_z\delta z$$

Rezultă:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad , \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad , \qquad E_z = -\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

sau

$$\vec{E} = -\nabla V \tag{7.46}$$

Se porneşte de la relaţia anterioară şi se ţine cont de faptul că:

$$\nabla\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{7.47}$$

Se obţine:

$$\nabla\vec{E} = -\nabla^2 V = -\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{7.48}$$

Operatorul

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}$$

este operatorul Laplace

Relaţia

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_o} \tag{7.49}$$

poartă denumirea de ecuaţia lui Poisson. Dacă în regiunea din spaţiu considerată nu există sarcini libere atunci:

$$\Delta V = 0 \tag{7.50}$$

Ecuaţia 7.50 poartă numele de ecuaţia lui Laplace.

Trebuie remarcat că noţiunea de potenţial, precum şi relaţia $\nabla \times \vec{E} = 0$ pot fi deduse pornind de la forma generală a legii lui Coulomb 7.14 în care se consideră numai termenul de volum (deoarece termenul de suprafaţă provine practic tot dintr-o distribuţie volumică cu o grosime foarte mică). Câmpul produs de o distribuţie continuă este:

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')\,\rho\,(\vec{r}\,')\,d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \tag{7.51}$$

Factorul vectorial al integrantului poate fi privit ca o funcţie de $\vec{r}$ şi este gradientul cu semn schimbat al scalarului $1/|\vec{r} - \vec{r}\,'|$. Într-adevăr:

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{7.52}$$

Relaţia de mai sus se poate verifica prin calcul direct.

Deoarece gradientul se aplică coordonatelor x, y, z iar integrarea se referă la coordonatele x', y', z' operatorul gradient poate fi scos în afara integralei:

$$\bar{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \iiint \frac{\rho\,(\vec{r}\,')\,d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{7.53}$$

Din ecuaţia de mai sus se observă că intensitatea câmpului electric este generată de un scalar V numit potenţial:

$$\vec{E} = -\nabla V \tag{7.54}$$

Potenţialul poate fie exprimat în funcţie de densitatea de sarcină astfel:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho\left(\vec{r}\,'\right) d\tau'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} \tag{7.55}$$

Deoarece rotorul gradientului oricărei funcţii scalare este nul rezultă:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{7.56}$$

7.1.8 Momentul de dipol

Momentul electric

Prin definiţie momentul electric al unei sarcini punctiforme este:

$$\vec{p}_q = q\vec{r} \tag{7.57}$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziţie al sarcinii electrice.

În cazul când există mai multe sarcini punctiforme q_1 , q_2 , ..., q_n plasate faţă de origine la distanţele $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ..., $\vec{r}_n$ momentul electric al acestei distribuţii este:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} q_i \vec{r}_i \tag{7.58}$$

Dipolul electric

Dipolul electric este un sistem de două sarcini egale şi semne contrare q şi $-q$ aflate la distanţa $\vec{l}$ una de alta (Fig. 7.10).

Momentul electric al dipolului este:

$$\vec{p} = q\vec{r}_1 - q\vec{r}_2 = q\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = q\vec{l} \tag{7.59}$$

În continuare se calculează potenţialul creat de un dipol electric la o distanţă mult mai mare decât distanţa dintre sarcinile dipolului. Se presupune că sarcinile sunt situate pe axa Oz. Potenţialul în punctul P va fi (Fig. 7.11):

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \tag{7.60}$$

unde:

$$r_2^2 = r^2 + \frac{1}{4}l^2 - lr\cos\theta = r^2\left(1 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{l}{r}\cos\theta\right)$$

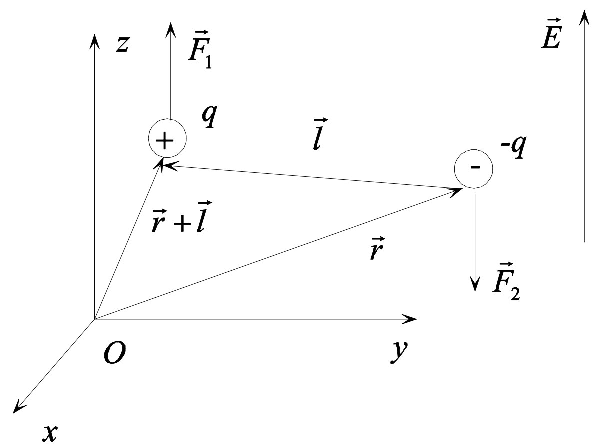

Figura 7.10: Dipolul electric

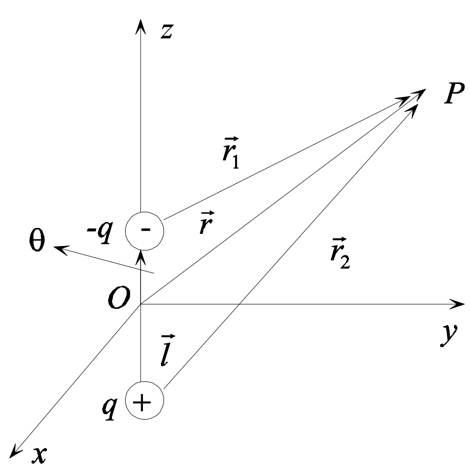

Figura 7.11: Calculul potenţialului creat de un dipol

$$r_1^2 = r^2 + \frac{1}{4}l^2 + lr\cos\theta = r^2\left(1 + \frac{l^2}{r^2} + \frac{l}{r}\cos\theta\right)$$

Deoarece s-a presupus că $r \gg l$ atunci:

$$\frac{1}{r_2} = \left(r_2^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{l}{r}\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{l}{2r}\cos\theta + ...\right)$$

$$\frac{1}{r_1} = \left(r_1^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{l^2}{r^2} + \frac{l}{r}\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{l}{2r}\cos\theta + ...\right)$$

Rezultă:

$$V = \frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{7.61}$$

Se observă că $\vec{p}\,\vec{r} = p\,r\cos\theta = qlr\cos\theta$. Relaţia 7.61 se mai scrie:

$$V = \frac{\vec{p}\,\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{7.62}$$

Câmpul electric creat de această distribuţie de sarcină se calculează utilizând relaţia 7.46

$$\vec{E} = -\nabla V = -\nabla\left(\frac{\vec{r}\,\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{\vec{r}\,\vec{p}}{r^3}\right)$$

Dar:

$$\nabla\left(\frac{\vec{r}\vec{p}}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3}\nabla\left(\vec{r}\right) + \left(\vec{r}\,\vec{p}\right)\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

Considerând că momentul de dipol este un vector constant:

$$\nabla\left(\vec{r}\,\vec{p}\right) = \vec{p}\;;\;\; \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3\vec{r}}{r^5}$$

Câmpul creat de un dipol la o distanţă mult mai mare decât cea dintre sarcinile sale este:

$$\vec{E} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{3\left(\vec{r}\,\vec{p}\right)\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^5} \tag{7.63}$$

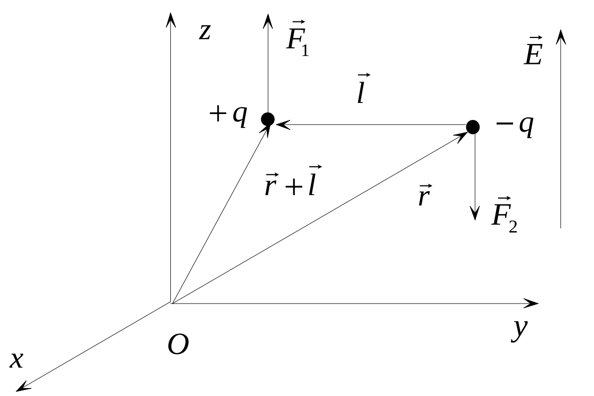

Figura 7.12: Dipol în câmp electric

7.1.9 Dipolul în câmp electrostatic

Se consideră un dipol într-un câmp electrostatic $\vec{E}$ (Fig. 7.12).

Asupra fiecărei sarcini va acţiona câte o forţă, rezultanta acestora fiind:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) \tag{7.64}$$

unde $\vec{E}_1$ şi $\vec{E}_2$ sunt intensităţile câmpului în punctele în care este plasată sarcina pozitivă respectiv sarcina negativă. Expresia 7.64 mai poate fi scrisă:

$$\vec{F} = q\vec{E}\left(\vec{r} + \vec{l}\right) - q\vec{E}\left(\vec{r}\right)$$

sau

$$\begin{aligned} \vec{F} \quad = \quad & q\left[E_x\left(\vec{r}+\vec{l}\right) - E_x\left(\vec{r}\right)\right]\vec{e}_x + \\ & q\left[E_y\left(\vec{r}+\vec{l}\right) - E_y\left(\vec{r}\right)\right]\vec{e}_y + \\ & q\left[E_z\left(\vec{r}+\vec{l}\right) - E_z\left(\vec{r}\right)\right]\vec{e}_z + \end{aligned} \tag{7.65}$$

Cum:

$$E_x\left(\vec{r}+\vec{l}\right) - E_x\left(\vec{r}\right) = \frac{\partial E_x}{\partial x} l_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} l_y + \frac{\partial E_x}{\partial z} l_z = \vec{l}\,\nabla E_x$$

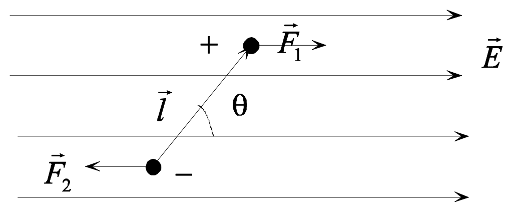

Figura 7.13: Dipol în câmp electric uniform

$$E_y\left(\vec{r}+\vec{l}\,\right)-E_y\left(\vec{r}\,\right)=\frac{\partial E_y}{\partial x}l_x+\frac{\partial E_y}{\partial y}l_y+\frac{\partial E_y}{\partial z}l_z=\vec{l}\;\nabla E_y$$

$$E_z\left(\vec{r}+\vec{l}\,\right)-E_z\left(\vec{r}\right)=\frac{\partial E_z}{\partial x}l_x+\frac{\partial E_z}{\partial y}l_y+\frac{\partial E_z}{\partial z}l_z=\vec{l}\,\nabla E_z$$

Rezultă:

$$\vec{F}=q\left(\vec{l}\,\nabla E_x\right)\vec{e}_x+q\left(\vec{l}\,\nabla E_y\right)\vec{e}_y+q\left(\vec{l}\,\nabla E_z\right)\vec{e}_z=q\left(\vec{l}\,\nabla\right)\vec{E}=\left(\vec{p}\nabla\right)\vec{E} \tag{7.66}$$

Dacă dipolul se află într-un câmp electric uniform, rezultanta forţei ce acţionează asupra sa este nulă. Se observă că numai în câmpuri electrice neomogene, asupra dipolului acţionează o forţă diferită de zero.

Trebuie remarcat că în câmp electric omogen asupra dipolului acţionează un cuplu de forţe care în raport cu centrul dipolului este:

$$\vec{M}=\vec{l}\times q\vec{E}=\vec{p}\times\vec{E} \tag{7.67}$$

Când dipolul este orientat de-a lungul liniilor de câmp adică atunci când vectorii $\vec{p}$ şi $\vec{E}$ au aceiaşi direcţie cuplul se anulează (Fig. 7.13).

Prin urmare această poziţie corespunde energiei potenţiale minime a dipolului în câmp electric.

Calculul energiei potenţiale a dipolului în câmp electric se face pornind de la faptul că lucrul mecanic efectuat la rotaţia dipolului cu un unghi $d\theta$ este egal cu variaţia energiei potenţiale.

$$dE_p=-\delta L=-Md\theta$$

sau

$$dE_p = -pE \sin\theta d\theta$$

Se integrează:

$$\Delta E_p = -pE \cos\theta \tag{7.68}$$

De aici rezultă că:

$$E_p = -pE \cos\theta + \text{const} \tag{7.69}$$

Deoarece atunci când dipolul se aşează de-a lungul liniilor de câmp energia este minimă, ar trebui ca această poziţie să se aleagă ca poziţie de zero pentru energia potenţială.

Totuşi, de obicei, se alege poziţia de zero a energiei potenţiale când $\theta = \pi/2$, adică atunci când dipolul este perpendicular pe liniile de câmp. În acest caz cele două sarcini ale dipolului se află în acelaşi plan echipotenţial.

Punând $E_p = 0$ când $\theta = \pi/2$ rezultă că const $= 0$ astfel că:

$$E_p = -pE \cos\theta = -\vec{p}\vec{E} \tag{7.70}$$

7.1.10 Energia potenţială a unui sistem de sarcini

Să considerăm o sarcină punctiformă izolată q_1. Când sarcina q_2 este adusă la distanţa $\vec{r}_{12}$ faţă de prima energia potenţială a sistemului de sarcini este:

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

Când o altă sarcină q_3 este adusă în apropierea celor două, energia potenţială adiţională este:

$$\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right)$$

Pentru un ansamblu de n sarcini, energia totală este:

$$E_p = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right] + \frac{q_4}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{r_{14}} + \frac{q_2}{r_{24}} + \frac{q_3}{r_{34}}\right] + ...$$

sau:

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i \sum_{j,j<i} \frac{q_j}{r_{ij}} \tag{7.71}$$

Restricţia $j < i$ este impusă pentru ca fiecare interacţie să fie luată doar o singură dată.

Se poate exprima energia potenţială considerând fiecare interacţie de două ori şi apoi să împărţim la 2:

$$E_p = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i \sum_{j,j\neq i} \frac{q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i \tag{7.72}$$

unde

$$V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j,j\neq i} \frac{q_j}{r_{ij}} \tag{7.73}$$

este potenţialul în punctul în care se află sarcina q_i.

Pentru o distribuţie de sarcină continuă energia potenţială capătă forma

$$E_p = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int\cdots\int \frac{\rho\left(\vec{r}\right)\rho\left(\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}dvdv' \tag{7.74}$$

Se observă că:

$$V\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho\left(\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}dv'$$

Atunci energia potenţială se poate exprima astfel:

$$E_p = \frac{1}{2}\iiint \rho\left(\vec{r}\right)V\left(\vec{r}\right)dv \tag{7.75}$$

Ecuaţiile 7.72 , 7.74 şi 7.75 exprimă energia potenţială electrostatică în funcţie de poziţia sarcinilor şi relevă interacţiunile dintre acestea prin forţe coulumbiene.

O altă abordare este aceea care pune în evidenţă câmpul electric şi care interpretează energia sistemului de sarcini ca fiind energia câmpului electric generat de sarcinile electrice. Pentru aceasta se utilizează ecuaţia Poisson pentru o densitate de sarcină:

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Rezultă:

$$E_p = -\frac{1}{2}\iiint \varepsilon_0 V \Delta V dv \tag{7.76}$$

Această integrală care se extinde în tot spaţiul se va integra prin părţi; rezultă:

$$E_p = -\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint \nabla\left(V\nabla V\right) dv + \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint \left|\nabla V\right|^2 dv \tag{7.77}$$

Prima integrală este nulă deoarece la infinit valoarea potenţialului tinde către zero. Atunci:

$$E_p = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint \left|\nabla V\right|^2 dv = \frac{1}{2}\iiint \varepsilon_0 E^2 dv \tag{7.78}$$

Se observă că în această formulare orice referire explicită la sarcina electrică a dispărut. Se poate considera că integrantul din 7.78

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2}\left|E\right|^2 \tag{7.79}$$

este o densitate de energie.

Trebuie remarcat că densitatea de energie a câmpului este o mărime pozitivă. Din acest motiv integrala care dă energia câmpului este tot o mărime pozitivă. Aceasta pare a contrazice formula 7.72 deoarece în cazul a două sarcini opuse această energie este negativă. Explicaţia constă în faptul că relaţia 7.79 şi relaţia 7.75 conţin şi contribuţiile "energiei proprii" la densitatea de energie.

7.1.11 Conductori în echilibru electrostatic

Proprietatea esenţială a unui conductor este conferită de mobilitatea sarcinilor (de regulă electroni) în interiorul său.

În cazul echilibrului electrostatic câmpul electric este egal cu zero în interiorul conductorului iar potenţialul este constant.

Pentru a demonstra prima parte a acestei afirmaţii se consideră că intensitatea câmpului electric în conductori este diferită de zero. Atunci electronii liberi vor fi puşi în mişcare, fapt ce ar însemna că nu ne găsim în condiţii de echilibru electrostatic aşa cum am presupus. Rezultă că în conductori câmpul

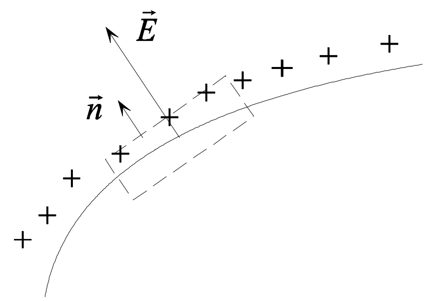

Figura 7.14: Câmpul electric la suprafaţa unui conductor

este nul. Datorită acestui fapt conform ecuaţiei 7.54 rezultă că potenţialul este constant în toate punctele din interiorul conductorului.

Sarcina electrică netă este repartizată în întregime pe suprafaţa conductorilor şi nu în interiorul lor.

Pentru a arăta acest lucru imaginăm o suprafaţă închisă S în interiorul conductorului pentru care aplicăm legea lui Gauss. Deoarece în interiorul conductorilor şi deci şi pe suprafaţa S intensitatea câmpul electric este nulă:

$$\iint_S \vec{E}d\vec{S} = 0 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

De aici rezultă că sarcina Q_{int} din interiorul suprafeţei este nulă. Cum suprafaţa considerată poate lua orice formă, aceasta poate fi făcută să tindă spre suprafaţa conductorului care închide tot volumul său. Rezultă că sarcina din interiorul conductorului va fi nulă. Sarcina se distribuie pe suprafaţa conductorului.

La suprafaţa conductorilor în echilibru electrostatic câmpul electric este orientat totdeauna normal la suprafaţa acestora, iar suprafaţa conductorilor este o suprafaţă echipotenţială.

Dacă intensitatea câmpului electric nu este normală la suprafaţa conductorului, atunci ar exista o componentă tangenţială a câmpului electric. Cum sarcina este dispusă pe suprafaţa conductorului rezultă că această sarcină ar fi pusă în mişcare şi conductorul nu ar mai fi în echilibru electrostatic.

Se va calcula în continuare valoarea câmpului electric la suprafaţa conductorilor cunoscând densitatea de sarcină. În Fig. 7.14 este reprezentată o porţiune din suprafaţa unui conductor pe care densitatea superficială de sarcină este $+\sigma$. Se consideră o suprafaţă foarte mică sub formă de cilindru cu o bază aflată în interiorul conductorului iar o alta în afară. Bazele se aleg suficient de mici pentru ca pe întreaga lor arie câmpul electric să fie normal la suprafaţa conductorului şi să fie constant. Se aplică legea lui Gauss pentru această suprafaţă şi se observă că numai integrala prin baza situată în vid aduce o contribuţie diferită de zero la fluxul câmpului (în interiorul conductorului $\vec{E} = 0$ iar pe feţele laterale $\vec{E} \perp \vec{n}$). Atunci:

$$\iint_S \vec{E} d\vec{S} = E\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0} \tag{7.80}$$

unde $\sigma\Delta S$ este sarcina totală din interiorul suprafeţei considerate. Din 7.80 rezultă câmpul la suprafaţa conductorului:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{7.81}$$

7.1.12 Energia stocată de un sistem de conductori încărcaţi electric

Fie un ansamblu de conductori 1 , 2 ,.. la potenţialele V_1 , V_2 ,... pe care densităţile de sarcină sunt: σ_1 , σ_2 ,.... . Un astfel de sistem este prezentat în Fig. 7.15. Densitatea de sarcină nu este aceiaşi pe fiecare conductor. Se înconjoară sistemul cu o suprafaţă S_0 care să includă toate corpurile considerate dar care să fie la o distanţă suficient de mare încât câmpurile să fie neglijabile pe aceasta. Atunci energia unui astfel de ansamblu este:

$$E_p = \frac{1}{2} \iint_{S_1} \sigma_1 V_1 dS_1 + \frac{1}{2} \iint_{S_2} \sigma_2 V_2 dS_2 + ... \tag{7.82}$$

Cum la suprafaţa conductorilor $\sigma = \varepsilon_0 E$ iar normalele la suprafeţe sunt îndreptate spre interiorul acestora relaţia de mai sus se scrie:

$$E_p = -\frac{1}{2} \iint_{S_1} \varepsilon_0 V_1 \vec{E}_1 d\vec{S}_1 - \frac{1}{2} \iint_{S_2} \varepsilon_0 V_2 \vec{E}_2 d\vec{S}_2 - ... \tag{7.83}$$

Dacă se înlocuieşte suma acestor integrale de suprafaţă cu o singură integrală pe suprafaţa $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2 ....$ se poate exprima energia potenţială cu ajutorul unei integrale de volum.

$$E_p = -\frac{1}{2} \iint_S \varepsilon_0 V \vec{E} d\vec{S} = -\frac{1}{2} \iiint_V \varepsilon_0 \nabla \left(V \vec{E} \right) dv \tag{7.84}$$

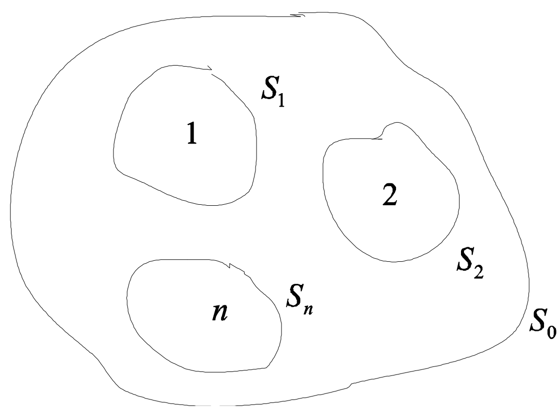

Figura 7.15: Sistem de conductoare încărcate electric

Se observă că:

$$\nabla\left(V\vec{E}\right)=V\nabla\vec{E}+\vec{E}\nabla V=V\nabla\vec{E}-\vec{E}^2$$

Deoarece conductoarele sunt în vid, nu avem sarcini electrice în volumul exterior corpurilor, astfel încât $\nabla\vec{E}=0$; atunci 7.84 capătă forma mai simplă:

$$E_p=\frac{1}{2}\iiint_V\varepsilon_0 E^2 dv=\frac{1}{2}\iiint_V\varepsilon_0\left(\nabla V\right)^2 dv \tag{7.85}$$

care indică dependenţa energiei potenţiale de potenţialul electric.

7.2 Dielectrici

Dielectricii sunt medii în care nu apare curent electric în prezenţa unui câmp electric extern, dar îşi modifică starea sub acţiunea câmpurilor electrice şi care la rândul lor modifică interacţiunea dintre corpurile cu sarcină electrică. Proprietatea electrică fundamentală a dielectricilor o constituie apariţia efectului de polarizare sub acţiunea unui câmp electrostatic. Fenomenul este determinat de orientarea dipolilor în câmp electric. Există trei mecanisme prin care un dielectric se poate polariza:

a) *Polarizarea electronică* se datorează electronilor din dielectricii alcătuiţi din moleculele simetrice, atomii sau ionii în care centrul sarcinilor pozitive coincide cu centrul sarcinilor negative. În prezenţa unui câmp electric are loc o deplasare relativă a centrului sarcinilor negative faţa de nucleu încât întreg ansamblul atomic sau ionic se manifestă ca un dipol electric. Polarizarea electronică nu depinde de agitaţia termică, deoarece în acest caz avem de-a face cu procese atomice.

b) *Polarizarea de orientare dipolară* este prezentă în dielectrici constituiţi din molecule nesimetrice (molecule polare) în care centrul sarcinilor pozitive nu coincide cu centrul sarcinilor negative. Un exemplu îl constituie oxidul de carbon în care moleculele posedă un moment dipolar permanent. Din cauza agitaţiei termice dipoli sunt orientaţi haotic. În prezenţa unui câmp electric ei tind să se orienteze în direcţia acestuia.

c) *Polarizarea ionică* apare prin deplasarea ionilor din poziţiile de echilibru sub acţiunea unui câmp electric. Este caracteristică cristalelor ionice. Toate substanţele prezintă polarizare electronică. Unele substanţe prezintă şi polarizare ionică iar altele şi polarizare orientaţională.

7.2.1 Dipoli electrici

Dipoli electrici induşi

Câmpul electric generat de o distribuţie de sarcini poate fi estimat aplicând principiul superpoziţiei. În practică însă acest lucru este extrem de dificil de realizat deoarece sarcinile electrice nu sunt fixe. Astfel într-un metal electronii de conducţie se deplasează până ce câmpul macroscopic devine zero în interiorul metalului. Într-un izolator, electronii sunt legaţi de atomi dar un câmp electric extern deplasează uşor electronii în interiorul fiecărui atom. Rezultatul deplasării constă în apariţia unor sarcini induse care micşorează câmpul în izolator fără să-l anuleaze.

Astfel dacă se consideră un atom neutru care are Z electroni, în absenţa unui câmp electric extern, nucleul se află în centrul norului electronic acolo unde nu se exercită forţe electrice. Nucleul se găseşte într-o poziţie de echilibru stabil, astfel încât dacă el se deplasează apar forţe care tind să-l readucă în poziţia iniţială.

Dacă atomul este introdus într-un câmp electric atunci nucleul este deplasat în sensul câmpului iar norul electronic în sens contrar până se ajunge din nou într-o stare de echilibru stabil. Distorsiunea este extrem de mică. În noua poziţie de echilibru se spune că atomul este polarizat. Dacă se notează cu $\vec{d}$ distanţa dintre centrul sarcinilor negative şi al celor pozitive vectorul

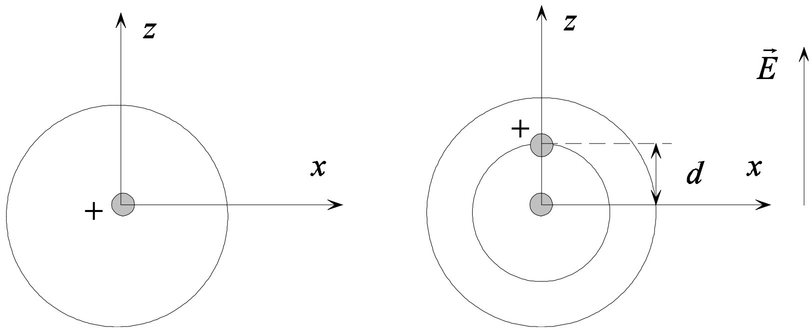

Figura 7.16: Dipolul indus în atomul de hidrogen

$$\vec{p} = Ze\vec{d} \tag{7.86}$$

poartă numele de moment de dipol al atomului considerat. Un astfel de atom care prezintă un moment electric de dipol se denumeşte atom polarizat, iar dipolul asociat dipol indus.

Se evaluează în contiunuare mărimea acestui moment electric dipolar pentru atomul de hidrogen folosind un model simplificat. Presupunem că în absenţa unui câmp electric sarcina electrică negativă este uniform repartizată în volumul unei sfere de rază r_0, al cărui centru coincide cu poziţia nucleului. Se consideră că în prezenţă câmpului electric exterior distribuţia îşi păstrează forma sferică şi dimensiunea, dar se deplasează din poziţia ei iniţială în sens contrar sensului în care se deplasează nucleul (Fig. 7.16). Se notează cu d distanţă dintre centrul sferei ce reprezintă norul electronic şi nucleu. La echilibru forţa $e\vec{E}$ cu care câmpul electric acţionează asupra nucleului trebuie să fie egală cu forta cu care norul electronic acţionează asupra nucleului. Pentru a stabili valoarea acestei forţe se utilizează legea lui Gauss. Conform acestei legi câmpul electric din regiunea nucleului este determinat numai de sarcinile din interiorul sferei de rază d aşa cum este arătat în Fig. 7.16. Prin urmare:

$$\iint_S \vec{E}_d d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{V_d} \rho dv \tag{7.87}$$

Integrând se obţine:

Atom	H	He	Ne	Ar	C	Li	Na	K
$\alpha \times 10^{-41}$F/m	7,34	2,34	4,45	17,80	16,68	134,4	300,40	378

Tabelul 7.1: Polarizabilităţi

$$E_d 4\pi d^2 = \frac{e}{\varepsilon_0}\frac{d^3}{r_0^3}$$

Valoarea câmpului electric ce acţionează asupra nucleului este:

$$E_d = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{r_0^3} \tag{7.88}$$

şi este orientat în sens invers sensului câmpului electric exterior. Se egalează cele două forţe

$$eE = eE_d$$

Rezultă:

$$E = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{r_0^3}$$

Momentul electric dipolar se poate exprima ca

$$p = ed = 4\pi\varepsilon_0 r_0^3 E = \alpha E \tag{7.89}$$

sau vectorial

$$\vec{p} = \alpha\vec{E} \tag{7.90}$$

Mărimea α poartă denumirea de polarizabilitate.

Proporţionalitatea între momentul electric de dipol indus şi câmpul electric este valabilă doar pentru câmpuri mici. Proprietatea atomilor de a dobândi un moment electric de dipol când sunt introduşi în câmp exterior poartă numele de polarizaţie electrică. Coeficientul de proporţionalitate poartă numele de polarizabilitate atomică. În Tabelul 7.1 sunt prezentate câteva valori ale acestui coeficient pentru câteva substanţe.

Se observă că pentru gazele rare valorile polarizabilităţii sunt foarte mici deoarece electronii sunt foarte puternic legaţi de atomi.

Cunoscând efectul de polarizare în câmp electric uniform asupra atomilor, putem să imaginăm ce se va întâmpla cu un dielectric constituit din asemenea atomi asupra căruia acţionează un câmp electric exterior. Vor fi induse momentele de dipol ale acestor atomi care se vor alinia aproximativ paralel cu direcţia câmpului electric exterior deoarece asupra fiecărui dipol va acţiona şi un câmp rezultat din compunerea câmpurilor electrice create de dipoli vecini. În general cele două câmpuri nu sunt paralele. În plus în sistemul de atomi procesul este afectat şi de vibraţiile reţelei cristaline.

Dipoli electrici induşi în molecule

Să considerăm iniţial moleculele în care, în absenţa unui câmp exterior centrele distribuţiilor sarcinilor pozitive şi negative nu coincid. Există două tipuri de molecule: cele cu simetrie sferică şi cele cu o simetrie mai joasă. În cazul moleculelor cu simetrie sferică ca de exemplu CH_4 sau BCl_3 valoarea momentului dipolar în primă aproximaţie nu depinde de direcţia câmpului exterior şi este valabilă relaţia 7.90 cu observaţia că polarizabilitatea moleculei nu este suma polarizabilităţilor atomilor constituenţi.

În cazul unor molecule care nu au o simetrie sferică polarizarea moleculei depinde de direcţia câmpului electric exterior.

Astfel în cazul moleculei de dioxid de carbon un câmp electric aplicat de-a lungul moleculei va induce un dipol mai mare decât în cazul când acesta este aplicat perpendicular. Această diferenţă rezultă din faptul că molecula este mai uşor deformabilă în lungul axei proprii decât într-o direcţie perpendiculară. Se notează cele două polarizabilităţi cu $\alpha_\perp$ şi $\alpha_\parallel$. Câmpul $\vec{E}$ se descompune după cele două direcţii (Fig. 7.17):

$$E_y = E\cos\theta \quad ; \quad E_z = E\sin\theta$$

Atunci momentele de dipol induse pe cele două direcţii sunt:

$$p_\parallel = \alpha_\parallel E\cos\theta$$

$$p_\perp = \alpha_\perp E\sin\theta$$

Momentul de dipol total este:

$$\vec{p} = E\left(\alpha_\parallel \cos\theta\ \vec{e}_x + \alpha_\perp \sin\theta\ \vec{e}_z\right) \tag{7.91}$$

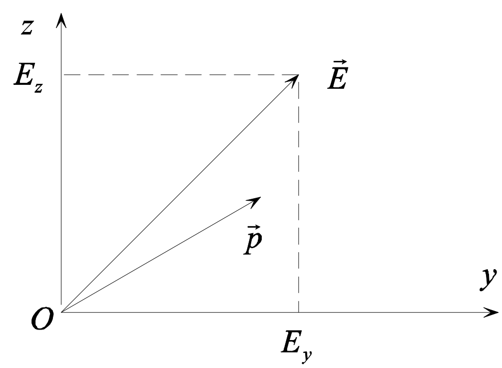

Figura 7.17: Polarizarea moleculei de dioxid de carbon

Rezultă că direcţia vectorului $\vec{p}$ nu mai coincide cu direcţia câmpului electric. În acest caz polarizabilitatea unei molecule nu mai este o mărime scalară ci tensorială (compusă dintr-un ansamblu de coeficienţi ce exprimă o dependenţă liniară între componentele vectorului $\vec{p}$ şi cele ale vectorului $\vec{E}$). În cazul general:

$$\begin{aligned} p_x &= \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z \\ p_y &= \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z \\ p_z &= \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z \end{aligned} \tag{7.92}$$

adică

$$\vec{p} = \overline{\overline{\alpha}}\vec{E}$$

unde:

$$\overline{\overline{\alpha}} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \tag{7.93}$$

Valorile componentelor acestui tensor sunt funcţii de modul de alegere al sistemului de referinţă. În plus tensorul este simetric, adică:

$$\alpha_{xy} = \alpha_{yx} \quad ; \quad \alpha_{yz} = \alpha_{zy} \quad ; \quad \alpha_{zx} = \alpha_{xz}$$

Atunci matricea asociată acestui tensor este simetrică şi există un sistem de coordonate particular pentru care doar componentele diagonale ale tensorului sunt diferite de zero.

Momente dipolare permanente

Există unele molecule la care datorită structurii lor, chiar în absenţa câmpului electric exterior, centrele sarcinilor pozitive şi negative nu coincid şi în consecinţă ele posedă un moment dipolar permanent.

Orice moleculă biatomică, formată din atomi de natură diferită, posedă un asemenea moment dipolar. Această proprietate se datorează faptului că la formarea unor asemenea molecule, de exemplu a moleculelor de HCl, HBr şi HI o parte din norul electronic al atomului de hidrogen se transferă atomilor de iod, brom sau clor. Rămâne un exces de sarcină pozitivă la extremitatea moleculei ce conţine atomul de hidrogen şi un exces de sarcină negativă la cealaltă extremitate.

7.2.2 Densitate de polarizare (materiale omogene)

Când un izolator este plasat într-un câmp electric atomii lui se polarizează. Pentru simplificare să considerăm un material dielectric care conţine N atomi pe unitatea de volum. Într-un câmp electric uniform centrul sarcinilor negative al fiecărui atom se deplasează cu aceiaşi distanţă faţă de nucleu în sens contrar câmpului electric. Fiecare atom va avea un moment de dipol $\vec{p}$ orientat în sensul câmpului. Se consideră o situaţie simplificată în sensul că nu vom lua în considerare interacţia dintre momentele de dipol induse şi nici câmpul electric produs de acestea. Deplasarea electronilor conduce la apariţia unor sarcini la suprafaţa dielectricului. Având în vedere cele discutate mai sus, momentul de dipol ce poate fi asociat unui element de volum dv este $\vec{p}Ndv$. Câmpul electric creat de acest element de volum este echivalent cu cel creat de un dipol electric $\vec{p}Ndv$. Produsul $\vec{p}N$ se numeşte densitate de polarizare şi se notează cu $\vec{P}$.

Vom încerca să asociem momentele de dipol de densitatea de sarcină de la suprafaţa dielectricului.

Pentru aceasta se consideră o porţiune de dielectric de grosime d având suprafaţa $dxdy$ (Fig.7.18). Deoarece s-a presupus dielectricul omogen şi izotrop direcţia vectorului de polarizare coincide cu direcţia câmpului electric.

Unui element de volum din paralelipipedul considerat a cărui înălţime este egală cu dz i se poate asocia un moment de dipol:

$$\vec{P}dv = \vec{P}dxdydz \tag{7.94}$$

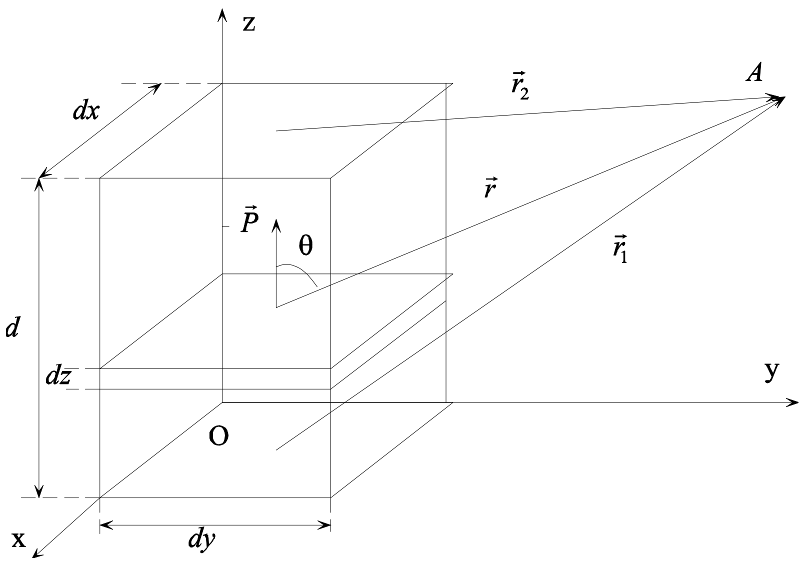

Figura 7.18: Câmpul electric creat de un volum paralelipipedic dintr-un dielectric polarizat.

Potenţialul creat de acest element de volum în punctul A suficient de depărtat de acest volum este:

$$dV = \frac{Pdxdydz\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{7.95}$$

Se notează $dS = dxdy$ şi integrând în raport cu z se obţine:

$$V_A = \frac{PdS}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz\cos\theta}{r^2} = \frac{PdS}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{PdS}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{7.96}$$

Relaţia 7.96 este echivalentă cu expresia potenţialului creat de două sarcini punctiforme egale şi de semn contrar având valoarea PdS. Sarcina $+PdS$ este situată la capătul paralelipipedului care se găseşte la distanţa r_1 faţă de punctul A iar sarcina negativă $-PdS$ la celălalt capăt la distanţa r_2 faţă de punctul A.

O placă dielectrică introdusă între plăcile unui condensator plan poate fi descompusă în paralelipipede de tipul anterior astfel încât pe baza celor discutate anterior ea poate fi înlocuită cu două distribuţii de sarcini plan paralele a căror densităţi superficiale sunt $\sigma = +P$ şi $\sigma = -P$.

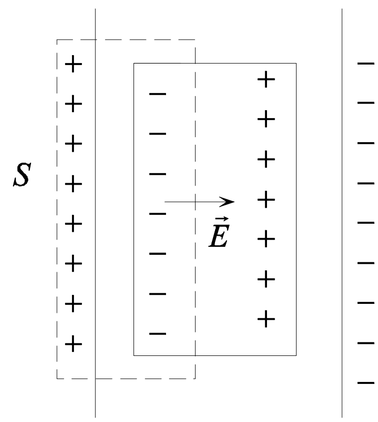

Figura 7.19: Dielectric între plăcile unui condensator încărcat

Dacă $\vec{P}$ nu este perpendicular pe suprafaţa dielectricului densitatea de sarcină de pe suprafaţa dielectricului este egală cu componenta normală a densităţii de polarizare. Atunci:

$$\sigma = P_n = P \cos\theta \tag{7.97}$$

unde θ este unghiul dintre $\vec{P}$ şi normala la suprafaţă.

7.2.3 Permitivitatea relativă şi susceptibilitatea electrică

Sarcinile induse pe suprafaţa materialului dielectric contribuie la câmpul electric macroscopic din interiorul materialului. Contribuţiile acestora poartă denumirea de câmp de depolarizare, deoarece câmpul creat de sarcinile induse la suprafaţă are sens contrar câmpul electric din exterior.

O consecinţa a câmpului de depolarizare este creşterea capacităţii unui condensator prin umplerea acestuia cu material dielectric.

Să considerăm un condensator plan paralel cu suprafaţa armăturilor S şi distanţa d dintre acestea. Pe armături se află o densitate de sarcină σ. Se introduce între plăcile condensatorului plan un material dielectric păstrând densitatea de sarcină iniţială (Fig. 7.19). Aplicând legea lui Gauss pentru o suprafaţă S rezultă:

$$ES = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma - P)\,S \tag{7.98}$$

Experimental se arată că şi în cazul în care în interiorul condensatorului se introduce un dielectric se păstrează proporţionalitatea dintre sarcina de pe condensator şi diferenţa de potenţial ce se aplică pe armăturile sale. Mai mult se constată că factorul ε_r cu care capacitatea creşte depinde numai de natura dielectricului nu şi de dimensiunile geometrice. Se notează cu C_0 capacitatea condensatorului în absenţa dielectricului şi cu C capacitatea condensatorului cu dielectric. Relaţia dintre acestea este:

$$C = \varepsilon_r C_0 = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 S}{d} \tag{7.99}$$

Dar capacitatea condensatorului cu dielectric se poate scrie ţinând cont de relaţia 7.98 astfel:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\sigma S}{Ed} = \left(1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}\right)\frac{\varepsilon_0 S}{d} \tag{7.100}$$

Din compararea relaţiilor 7.99 şi 7.100 rezultă că pentru materiale dielectrice omogene şi izotrope:

$$\varepsilon_r = \left(1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}\right) \tag{7.101}$$

Constanta ε_r poartă numele de permitivitate relativă. Atunci din relaţia 7.101 se obţine:

$$P = (\varepsilon_r - 1)\,\varepsilon_0 E = \chi_e \varepsilon_0 E \tag{7.102}$$

unde

$$\chi_e = \varepsilon_r - 1 \tag{7.103}$$

poartă denumirea de susceptibilitate electrică.

În cazul unor dielectrici cristalini sau al unor dielectrici neomogeni permitivitate relativă şi susceptibilitatea sunt mărimi tensoriale.

7.2.4 Câmpul local

Pentru dielectrici omogeni relaţia 7.102 se poate scrie vectorial astfel:

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \tag{7.104}$$

Deoarece densitatea de polarizare se poate exprima în funcţie de momentul de dipol:

$$\vec{P} = N\vec{p} \tag{7.105}$$

rezultă

$$\vec{p} = \frac{\chi_e \varepsilon_0}{N} \vec{E} \tag{7.106}$$

Ecuaţia 7.106 stabileşte legătura dintre momentul de dipol mediu al unei singure molecule şi câmpul macroscopic. Totuşi relaţia nu este corectă în totalitate deoarece câmpul macroscopic reprezintă o mediere pe o regiune mai mare şi de cele mai multe ori nu coincide cu câmpul local în care se află de fapt molecula respectivă. Câmpul local este suma dintre câmpul extern şi câmpul generat de celelalte molecule din jurul moleculei considerate. Relaţia 7.106 este corectă numai pentru gaze rarefiate, deoarece într-un astfel de sistem moleculele sunt foarte depărtate unele de altele iar câmpul local coincide cu cel macroscopic.

În lichide sau în solide se va considera în loc de 7.106 relaţia:

$$\vec{p} = \frac{\chi_e \varepsilon_0}{N} \vec{E}_{local} \tag{7.107}$$

7.2.5 Susceptibilitatea dielectricilor gazoşi polari

În cazul moleculelor polare, câmpul electric poate induce în atomii constituenţi dipoli electrici însă contribuţia acestora este mai mică decât a dipolilor permanenţi. În absenţa câmpului electric, moleculele polare dintr-un dielectric sunt orientate haotic astfel că momentul dipolar al unităţii de volum este nul. Datorită distanţelor mari dintre molecule (cazul dielectricilor gazoşi) se poate neglija interacţia dintre dipolii respectivi. Dacă se aplică un câmp electric apare o interacţie între acesta şi dipolii din gaz.

Energia potenţială de interacţie dintre moleculele polare şi câmpul electric este:

$$E_p = -\vec{p}\vec{E} = pE\cos\theta \tag{7.108}$$

unde θ este unghiul dintre momentul de dipol şi direcţia câmpului electric.

Dacă asupra moleculelor nu ar acţiona alte forţe, dipolii s-ar alinia paralel cu câmpul electric. Acest lucru nu se petrece deoarece moleculele sunt într-un proces continuu de agitaţie termică şi acest fapt face ca dipolii moleculari să fie parţial aliniaţi în câmp electric. Se notează cu θ_i unghiul făcut de dipolul i cu direcţia câmpului electric. Atunci densitatea de polarizare va fi egală cu:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} p\cos\theta_i = Np\langle\cos\theta\rangle \tag{7.109}$$

unde N este numărul de molecule din unitatea de volum iar $\langle\cos\theta\rangle$ este valoarea medie a cosinusurilor unghiurilor făcute de momentele de dipol cu directia câmpului electric. Pentru calculul acestei medii se aplică statistica Boltzmann:

$$\langle\cos\theta\rangle = \frac{\int \cos\theta \exp\left(-\frac{E_p}{k_B T}\right) d\Omega}{\int \exp\left(-\frac{E_p}{k_B T}\right) d\Omega} \tag{7.110}$$

unde $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$.

Trebuie remarcat că exponentul $-E_p/k_B T$ este foarte mic.

Pentru a evalua energia potenţială se consideră că dipolul provine din transferarea unui electron de la un atom la un alt atom. Atunci $q = e = 1,6 \times 10^{-19}$ C iar distanţa este de ordinul distanţelor atomice ($d = 10^{-10}$ m). Se consideră câmpul electric ca având valoarea $E = 10^6$ V/m, adică valoarea maximă permisă astfel încât să nu se producă o descărcare electrică în aer. Obţinem astfel pentru energia potenţială $E_p = edE \approx 10^{-4}$ eV. La temperaturi obişnuite (300 K) energia cinetică medie de translaţie $\bar{\varepsilon}_c = 3k_B T/2$ are valoarea $\approx 10^{-2}$ eV.

Din acest motiv $k_B T \gg E_p$; se poate aproxima:

$$\exp\left(-\frac{E_p}{k_B T}\right) \simeq \left(1 - \frac{E_p}{k_B T}\right) \tag{7.111}$$

Cele două integrale care apar în expresia 7.110 au expresiile:

$$\int \cos\theta \exp\left(-\frac{E_p}{k_B T}\right) d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_o^{\pi} \left(1 - \frac{pE\cos\theta}{k_B T}\right) \cos\theta \sin\theta d\theta$$

$$\int \cos\theta \exp\left(-\frac{E_p}{k_B T}\right) d\Omega = \frac{2pE}{3k_B T}$$

$$\int \exp\left(-\frac{E_p}{k_B T}\right) d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_o^{\pi} \left(1 - \frac{pE\cos\theta}{k_B T}\right) \sin\theta d\theta = 4\pi$$

iar densitatea de polarizare este:

$$P = \frac{Np^2 E}{3k_B T} \tag{7.112}$$

Având în vedere modul de definire al susceptibilităţii electrice obţinem pentru aceasta:

$$\chi_e = \frac{P}{\varepsilon_0 E} = \frac{Np^2}{3\varepsilon_0 k_B T} \tag{7.113}$$

Dacă se iau în considerare şi momentele de dipol induse, care sunt în direcţia câmpului, polarizarea este:

$$P = N\left(\alpha + \frac{p^2}{3k_B T}\right) E \tag{7.114}$$

De aici rezultă

$$\chi_e = \frac{N}{\varepsilon_0}\left(\alpha + \frac{p^2}{3k_B T}\right) \tag{7.115}$$

Această relaţie este importantă deoarece prin determinarea susceptibilităţii electrice la diverse temperaturi se pune în evidenţă existenţa sau inexistenţa moleculelor polare. Astfel, lipsa dependenţei de temperatură a lui χ_e (cazul metanului) dovedeşte că substanţa nu conţine molecule polare.

7.2.6 Susceptibilitatea lichidelor nepolare

Moleculele din lichide şi solide sunt atât de apropiate încât sunt afectate de câmpurile create de ceilalţi dipoli. Atunci câmpul efectiv în care se află aceste molecule este câmpul local. Trebuie remarcat că polarizabilitatea α nu variază funcţie de câmp deoarece depinde numai de structura moleculei. Atunci fiecare din moleculele respective în câmpul local va avea un moment dipolar $\alpha\vec{E}_{local}$. Dacă concentraţia de molecule este N, momentul de dipol pe unitatea de volum este:

$$\vec{P} = N\alpha\vec{E}_{local} \tag{7.116}$$

În general este dificil de estimat câmpul local. Pentru calculul câmpului local se consideră un model simplificat. În acest model pe care-l vom considera pentru lichide nepolare, atomul sau molecula respectivă este înconjurată de vecini dispuşi pe o suprafaţă sferică cu centrul în centrul moleculei considerate. Acest model este valabil pentru lichidele nepolare deoarece câmpurile generate de aceste molecule au rază mică de acţiune şi nu sunt prea intense.

Să considerăm în interiorul dielectricului o cavitate sferică de rază r; ne propunem să găsim valoarea câmpului creat în interiorul cavităţii (Fig.7.20). În interiorul cavităţii câmpul local este suma a doi termeni: $\vec{E}$ - câmpul creat de sarcinile libere şi $\vec{E}_P$ câmpul creat de sarcinile de polarizare de pe suprafaţa sferei considerate.

Se calculează valoarea câmpului de polarizare de pe suprafaţa sferei. Densitatea de sarcină de pe suprafaţa interioară a sferei depinde de polarizare prin relaţia:

$$\sigma = -P\cos\theta \tag{7.117}$$

În relaţia 7.117 s-a considerat că densitatea de polarizare are direcţia câmpului local iar θ este unghiul dintre direcţia razei $\vec{r}$ şi direcţia lui $\vec{P}$. Se consideră o nouă rază $\vec{r}'$ foarte apropiată de prima cu care face unghiul $d\theta$ suficient de mic pentru ca să se poată admite că pe inelul de lăţime $rd\theta$ densitatea de sarcină este constantă. Atunci un element de suprafaţă de pe acest inel cu lungimea dx este încărcat cu sarcina:

$$dq = \sigma dS = P\cos\theta\ rd\theta dx \tag{7.118}$$

Această sarcină crează un câmp electric în centrul sferei care poate fi descompus după o direcţie paralelă cu $\vec{P}$ şi una perpendiculară pe $\vec{P}$. Con-

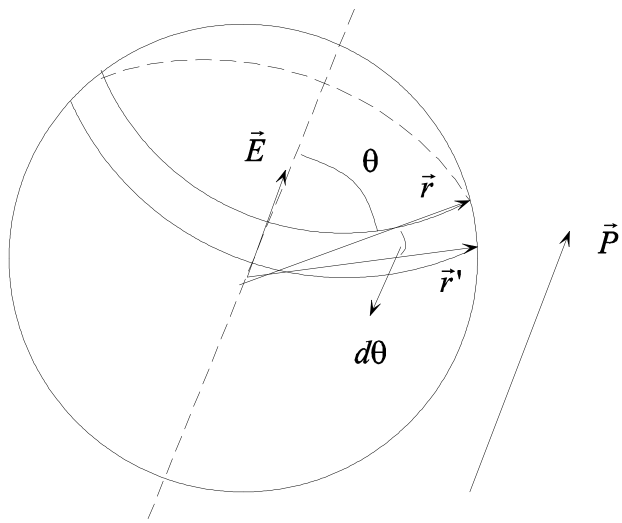

Figura 7.20: Modelul pentru calcularea câmpului în centrul unei cavităţi sferice

siderând un element simetric celui ales inţial, componentele perpendiculare ale câmpului se anulează astfel încât sunt efective doar componentele câmpului care sunt paralele cu densitatea de polarizare. Atunci:

$$dE_{ps} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} P\cos\theta(2\pi r\sin\theta) r d\theta\cos\theta$$

sau

$$dE_{ps} = -\frac{P\cos^2\theta\sin\theta d\theta}{2\varepsilon_0} \tag{7.119}$$

Integrând relaţia 7.119 pentru toate valorile pe care le poate lua unghiul θ se obţine:

$$E_{ps} = -\int_0^\pi \frac{P\cos^2\theta\sin\theta d\theta}{2\varepsilon_0} = \frac{P}{3\varepsilon_0} \tag{7.120}$$

Atunci:

$$\vec{E}_{local} = \vec{E} + \vec{E}_{ps} = \vec{E} + \frac{\chi_e\vec{E}}{3\varepsilon_0} = \left(1 + \frac{\chi_e}{3}\right)\vec{E} \tag{7.121}$$

Se observă că acest câmp nu depinde de raza sferei şi el este câmpul ce va determina efectiv polarizarea moleculei în centrul sferei considerate.

Ecuaţia Clausius-Mossotti

Prin acţiunea câmpului electric local un atom sau moleculă situată în centrul sferei va avea un moment electric dipolar:

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}_{local} \tag{7.122}$$

Dar:

$$\vec{P} = N\vec{p} = N\alpha \vec{E}_{local} \tag{7.123}$$

Se ţine cont de relaţia 7.121:

$$\varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = N\alpha \left(1 + \frac{\chi_e}{3}\right) \vec{E}$$

şi se obţine:

$$\chi_e = \frac{N\alpha}{\varepsilon_0 - N\alpha/3} \tag{7.124}$$

Cum $\varepsilon_r - 1 = \chi_e$ din relaţia 7.115 se obţine:

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0} \tag{7.125}$$

Aceasta relaţie poartă numele de relaţia Claussius-Mossotti.

7.2.7 Densitatea de polarizare a materialelor neomogene

Deşi consideraţiile de până acum au fost făcute pentru cazul unei polarizări uniforme, este important să se considere şi cazul în care polarizarea nu este uniformă. Acest lucru se datorează neuniformităţi dielectricului, sau variaţiei câmpului electric în funcţie de poziţia din interiorul dielectricului. Pentru a putea determina polarizarea trebuie să ţinem cont că în afara sarcinilor induse la suprafaţa dielectricului apar şi sarcini induse în interiorul acestuia.

Să considerăm un cub în interiorul unui dielectric neutru cu volumul $\delta x \delta y \delta z$ (Fig.7.21). Cubul este mic la scară macroscoapică, dar suficient de mare pentru a conţine suficient de mulţi atomi. Dacă aplicăm un câmp electric acesta se polarizează. Se presupune pentru simplificare că polarizarea

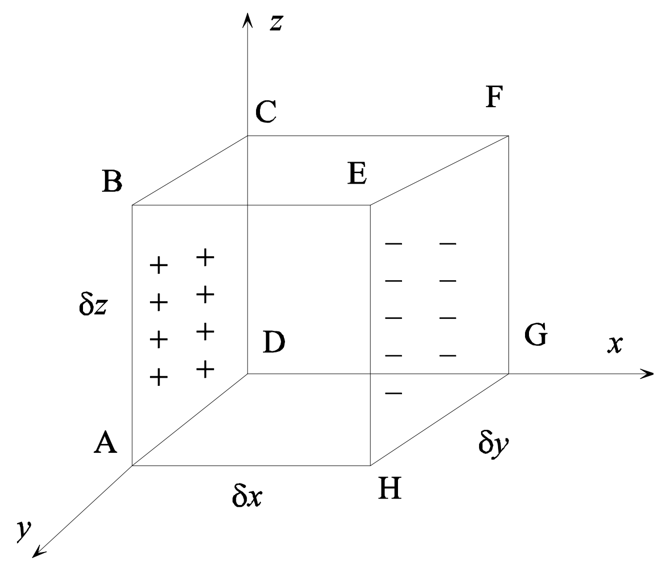

Figura 7.21: Polarizarea unei porţiuni cubice dintr-un dielectric

în interiorul cubului este diferită de zero în direcţia Ox, că este dependentă de x şi independentă de y şi z. O consecinţă a polarizării este deplasarea electronilor în sens invers câmpului. Atunci sarcinile de pe feţele cubului sunt $+P_x(x)\,\delta y\delta z$ pe faţa ABCD şi $-P_x(x+\delta x)\,\delta y\delta z$ pe faţa EFGH.

Contribuţia la sarcina netă a cubului este:

$$-\left[P_x(x+\delta x)-P_x(x)\right]\delta y\delta z=-\frac{\partial P_x}{\partial x}\delta x\delta y\delta z \tag{7.126}$$

Generalizând putem afirma că există contribuţii similare pentru toate componentele lui $\vec{P}$ din direcţiile Oy şi Oz astfel încât sarcina totală δq din interiorul cubului este:

$$\delta q=-\left[\frac{\partial P_x}{\partial x}+\frac{\partial P_y}{\partial y}+\frac{\partial P_z}{\partial z}\right]\delta x\delta y\delta z \tag{7.127}$$

Cu alte cuvinte sarcina macroscopică de polarizare este:

$$\rho_p=\frac{\delta q}{\delta x\delta y\delta z}=-\left[\frac{\partial P_x}{\partial x}+\frac{\partial P_y}{\partial y}+\frac{\partial P_z}{\partial z}\right]=-\nabla\vec{P} \tag{7.128}$$

7.2.8 Vectorul inducţie a câmpului electric

Într-un dielectric pot exista şi sarcini libere astfel că densitatea totală de sarcini este suma dintre densitatea sarcinilor libere ρ_l şi densitatea de sarcini de polarizare ρ_p:

$$\rho = \rho_l + \rho_p \tag{7.129}$$

Câmpul macroscopic este legat de densitatea totală de sarcină:

$$\nabla\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_l + \rho_p}{\varepsilon_0} \tag{7.130}$$

$$\nabla\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_l - \nabla\vec{P}\right) \tag{7.131}$$

sau

$$\varepsilon_0\nabla\vec{E} + \nabla\vec{P} = \rho_l \tag{7.132}$$

Deoarece $\vec{P}$ depinde de $\vec{E}$, $\nabla\vec{P} \neq 0$ numai dacă $\rho_l \neq 0$. Există o densitate de sarcini de polarizare ρ_p numai în regiunile în care există sarcini libere. Din relaţia 7.132 rezultă:

$$\nabla\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right) = \rho_l \tag{7.133}$$

Se defineşte o nouă mărime vectorială, vectorul inducţie a câmpului electric:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \tag{7.134}$$

astfel încât:

$$\nabla\vec{D} = \rho_l \tag{7.135}$$

Cum $\vec{P} = \chi_e\varepsilon_0\vec{E}$ relaţia 7.134 devine:

$$\vec{D} = (1 + \chi_e)\,\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E} \tag{7.136}$$

Vom calcula fluxul inducţiei câmpului electric printr-o suprafaţă închisă. Aplicând teorema lui Gauss se obţine:

$$\iint_S \vec{D}d\vec{S} = \iiint_V \nabla\vec{D}dV = \iiint_V \rho_l dV \tag{7.137}$$

Aceasta este legea lui Gauss în medii materiale: fluxul inducţiei câmpului electric printr-o suprafaţă închisă este egal cu sarcina liberă totală din interiorul acelei suprafeţe.

7.2.9 Energia electrostatică în medii dielectrice

Aşa cum am discutat anterior, energia unui sistem de sarcini este:

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint \rho\left(r\right) V\left(\vec{r}\right) dv$$

Acest rezultat nu poate fi folosit în descrierea mediilor dielectrice, deoarece distribuţia finală de sarcină s-a obţinut prin aducerea de la infinit a sarcinilor în câmpul electrostatic existent efectuându-se un lucru mecanic.

Într-un mediu dielectric se efectuează un lucru mecanic atât la aducerea sarciniilor cât şi pentru polarizarea mediului.

Iniţial nu vom face nici o presupunere asupra mediului dielectric (de liniaritate, omogenitate, etc.). Se consideră iniţial o variaţie a energiei δE_p datorită unei modificări $\delta\rho$ a densităţii de sarcină în spaţiu:

$$\delta E_p = \frac{1}{2} \iiint \delta\rho\left(r\right) V\left(\vec{r}\right) dv \tag{7.138}$$

În 7.138 integrala este considerată pe întreg spaţiul.

Cum

$$\nabla\vec{D} = \rho$$

iar

$$\delta\rho = \nabla\delta\vec{D} \tag{7.139}$$

relaţia 7.138 devine prin integrarea pe tot spaţiul:

$$\begin{aligned} \delta E_p &= \frac{1}{2} \iiint \nabla\left(\delta\vec{D}\right) V\left(\vec{r}\right) dv \qquad (7.140) \\ \delta E_p &= \frac{1}{2} \iiint \nabla\left[\delta\vec{D} V\left(\vec{r}\right)\right] dv - \frac{1}{2} \iiint \delta\vec{D}\nabla V\left(\vec{r}\right) dv \end{aligned}$$

Prima integrală se anulează la infinit dacă se presupune că $V\left(\vec{r}\right) = 0$ şi cum $\nabla V\left(\vec{r}\right) = -\vec{E}$ obţinem:

$$\delta E_p = \frac{1}{2}\iiint \vec{E}\delta\vec{D}dv \tag{7.141}$$

Energia electrostatică totală se calculează prin varierea lui δD de la 0 la D.

$$E_p = \frac{1}{2}\iiint dv \int_0^D \vec{E}\delta D \tag{7.142}$$

Dacă mediul este liniar $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ atunci:

$$\vec{E}\delta\vec{D} = \vec{E}\delta\left(\varepsilon\vec{E}\right) = \varepsilon\frac{\delta\vec{E}^2}{2} = \frac{1}{2}\delta\left(\vec{E}\vec{D}\right) \tag{7.143}$$

astfel că energia electrostatică totală este:

$$E_p = \frac{1}{2}\iiint \vec{E}\vec{D}dv \tag{7.144}$$

În relaţiile anterioare ε este permitivitatea totală a mediului respectiv.

O altă problemă este aceea când un dielectric este adus într-un câmp electric ale cărui surse sunt fixe. Pentru aceasta se consideră câmpul $\vec{E}_1$ care este datorat unei distribuţi de sarcini $\rho_0\left(\vec{r}\right)$ şi care există într-un mediu cu permitivitatea absolută $\varepsilon_1\left(\vec{r}\right)$. Energia electrostatică iniţială este:

$$E_{p1} = \frac{1}{2}\iiint \vec{E}_1\vec{D}_1dv \tag{7.145}$$

unde $\vec{D}_1 = \varepsilon_1\vec{E}_1$.

Se introduce în acest câmp un dielectric de volum V care modifică câmpul electric de la valoarea $\vec{E}_1$ la valoarea $\vec{E}_2$. Prezenţa acestui dielectric poate fi descrisă prin permitivitatea dielectrică absolută care are valoarea ε_2 în interiorul corpului şi ε_1 în exterior. Se presupune că permitivitatea dielectricului variază lent în interiorul corpului de la valoarea ε_2 la valoarea ε_1 la marginea volumului V. În final energia are valoarea

$$E_{p2} = \frac{1}{2}\iiint \vec{E}_2\vec{D}_2dv \tag{7.146}$$

unde $\vec{D}_2 = \varepsilon_2\vec{E}_2$. Diferenţa dintre energiile în cele două cazuri este:

$$W = \frac{1}{2}\iiint \left(\vec{E}_2\vec{D}_2 - \vec{E}_1\vec{D}_1\right)dv \tag{7.147}$$

$$W = \frac{1}{2}\iiint \left(\vec{E}_2\vec{D}_1 - \vec{D}_2\vec{E}_1\right) dv + \frac{1}{2}\iiint \left(\vec{E}_2 + \vec{E}_1\right)\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) dv \tag{7.148}$$

Deoarece $\nabla \times \left(\vec{E}_2 + \vec{E}_1\right) = 0$ se poate scrie:

$$\vec{E}_2 + \vec{E}_1 = -\nabla\phi \tag{7.149}$$

unde ϕ este o funcţie scalară ce depinde de poziţie. Atunci a doua integrală din 7.148 devine:

$$I = -\frac{1}{2}\iiint \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right)\nabla\phi dv \tag{7.150}$$

Integrând prin părţi:

$$I = -\frac{1}{2}\iiint \nabla\left[\phi\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right)\right] dv + \frac{1}{2}\iiint \Phi\nabla\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) dv \tag{7.151}$$

Se observă că:

$$\iiint \nabla\left[\phi\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right)\right] dv = \iint_S \phi\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) dS = 0$$

deoarece la marginea domeniului $\vec{D}_2 = \vec{D}_1$.

În cazul celei de-a doua integrale se observă că

$$\nabla\vec{D}_2 = \nabla\vec{D}_1 = \rho$$

deoarece prin aducerea dielectricului în regiunea considerată nu se modifică densitatea de sarcină liberă. Rezultă:

$$\iiint \Phi\nabla\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) dv = 0$$

Atunci relaţia 7.148 devine:

$$W = -\frac{1}{2}\iiint \left(\vec{E}_1\vec{D}_2 - \vec{D}_1\vec{E}_2\right) dv \tag{7.152}$$

Integrala se face pe tot spaţiul dar practic ea se limitează doar la volumul corpului. Cum $D_1 = \varepsilon_1 E_1$ şi $D_2 = \varepsilon_2 E_2$

$$W = -\frac{1}{2}\iiint (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\,\vec{E}_2\vec{E}_1 dv \tag{7.153}$$

Dacă mediul în care se află corpul este vidul $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ şi $\varepsilon_2 = \varepsilon_r\varepsilon_0$. Se notează $E_0 = E_1$. Atunci:

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\,\vec{E}_2 = (\varepsilon_r - 1)\,\varepsilon_0\vec{E}_2 = \vec{P} \tag{7.154}$$

iar relaţia 7.153 devine:

$$W = -\frac{1}{2}\iiint_{V_1} \vec{P}\vec{E}_0 dv \tag{7.155}$$

Această relaţia arată că densitatea de energie a unui dielectric aflat în câmpul $\vec{E}_0$ ale cărui surse sunt fixe este dată de relaţia:

$$w = -\frac{1}{2}\vec{P}\vec{E}_0 \tag{7.156}$$

7.3 Curentul electric continuu

Prin curent electric se înţelege deplasarea direcţionată a electronilor în metale, sau a ionilor în unele lichide sau gaze sub acţiunea câmpului electric. Aceste particule poartă numele de purtători de sarcină. Un curent poate fi datorat mai multor tipuri de purtători de sarcină. De exemplu în gaze purtătorii de sarcină sunt atât electronii cât şi ionii moleculari încărcaţi pozitiv.

Pentru a exista curent electric în mediul respectiv trebuie să existe purtători de sarcină capabili să se deplaseze sub acţiunea unui câmp electric. De exemplu în cazul unui metal la o temperatură diferită de zero Kelvin electronii sunt într-o continuă stare de agitaţie termică. Prin aplicarea unui câmp electric, peste mişcarea de agitaţie termică se suprapune o mişcare dirijată în sens invers câmpului electric. Un astfel de mediu poartă numele de conductor.

Un mediu fără purtătorii de sarcină capabili să se deplaseze sub acţiunea unui câmp electric poartă numele de izolator.

7.3.1 Mărimi ce caracterizează curentul electric

Intensitatea curentului electric I. Aceasta este o mărime fizică scalară care reprezintă sarcina netă ce traversează în unitatea de timp suprafaţa transver-

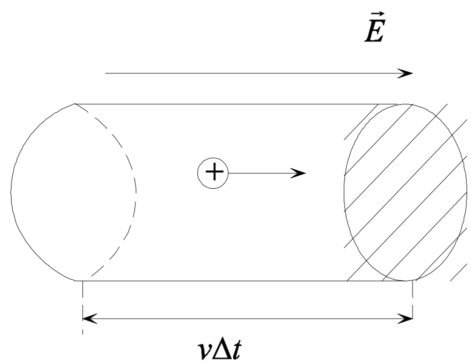

Figura 7.22: Mişcarea purtătorilor de sarcină în interiorul unui conductor

sală a conductorului.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{7.157}$$

În sistemul internaţional de unităţi intensitatea curentului este o mărime fizică fundamentală iar unitatea sa de măsură este Amperul (A).

Densitatea de curent. Admitem că în conductorul omogen şi izotrop care conţine un singur tip de purtători de sarcină q densitatea acestora este n. Dacă în conductor este aplicat un câmp electric, sarcinilor li se imprimă o mişcare ordonată de transport în sensul câmpului dacă sarcinile sunt pozitive şi în sens invers câmpului dacă sarcinile sunt negative. Se consideră că viteza medie a mişcării de transport este $\vec{v}$.

Pentru a defini densitatea de curent vom considera o porţiune de conductor a cărui secţiune transversală este S şi în interiorul căreia există câmpul electric $\vec{E}$ (Fig. 7.22).

În intervalul de timp Δt toţi purtătorii de sarcină din cilindrul cu aria bazei S şi generatoarea $v\Delta t$ se vor deplasa conform celor indicate în Fig. 7.22. Deoarece numărul de purtători de sarcină din cilindru este $N = nSv\Delta t$, sarcina ce trece prin aria bazei este $\Delta Q = Nq = nSvq\Delta t$. Atunci intensitatea curentului este:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nvqS \tag{7.158}$$

Densitatea de curent se defineşte ca fiind sarcina ce trece în unitatea de timp prin unitatea de suprafaţă:

$$j = \frac{I}{S} = nqv \tag{7.159}$$

Densitatea de curent este însă o mărime vectorială (având în vedere caracterul vectorial al vitezei); atunci:

$$\vec{j} = nq\vec{v} \tag{7.160}$$

Acest rezultat poate fi generalizat în cazul în care în materialul respectiv există mai multe tipuri de purtători de sarcină cu concentraţiile n_i, vitezele medii v_i şi sarcinile q_i.

$$\vec{j} = \sum_i \vec{j}_i = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i \tag{7.161}$$

Discuţia anterioară a fost făcută pornind de la ipoteza că avem de-a face cu un conductor omogen. În conductorii neomogeni concentraţia purtătorilor de sarcină depinde de poziţie $n = n(x\ ,\ y\ ,\ z)$ astfel că şi densitatea de curent este diferită de la punct la punct $\vec{j} = \vec{j}(x\ ,\ y\ ,\ z)$ şi este o mărime ce caracterizează local curentul electric.

Pentru a calcula în acest caz intensitatea curentului printr-o secţiune se va considera elementul de arie:

$$d\vec{S} = \vec{n}dS \tag{7.162}$$

unde $\vec{n}$ este normala la această suprafaţă. Dacă direcţia densităţii curentului nu este perpendiculară pe elementul de suprafaţă, la curentul ce trece prin această suprafaţă contribuie doar componenta normală a acestei densităţi de curent. Atunci:

$$dI = \vec{j}d\vec{S} \tag{7.163}$$

Printr-o suprafaţă finită intensitatea curentului este dată de integrala:

$$I = \iint_S dI = \iint_S \vec{j}d\vec{S} \tag{7.164}$$

Conform relaţiei 7.164 intensitatea curentului poate fi considerată ca fiind fluxul densităţii de curent prin suprafaţa S.

7.3.2 Ecuaţia de continuitate

Fie o suprafaţă S închisă în interiorul unui conductor care cuprinde volumul V. Normala la suprafaţa închisă fiind îndreptată întotdeauna în exteriorul acesteia, integrala din $\vec{j}d\vec{S}$ reprezintă sarcina ce iese în unitatea de timp din volumul V prin suprafaţa S. Conform legii conservării sarcinii, sarcina ce iese din volumul V este egală cu variaţia sarcinii din acest volum în acelaşi interval de timp $(-dq/dt)$. Rezultă:

$$\iint_S \vec{j}d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} \tag{7.165}$$

Dacă se exprimă q în funcţie de densitatea de sarcină $\rho = \rho\,(x\ ,\ y\ ,\ z)$

$$q = \iiint_V \rho\,(x\ ,\ y\ ,\ z)\,dv \tag{7.166}$$

relaţia 7.165 devine:

$$\iint_S \vec{j}d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dv = -\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dv \tag{7.167}$$

Utilizarea simbolului de derivată parţială sub integrală este impusă de faptul că densitatea de sarcină poate fi funcţie şi de componentele spaţiale. Cum:

$$\iint_S \vec{j}d\vec{S} = \iiint_V \nabla\vec{j}dv \tag{7.168}$$

$$\iiint_V \nabla\vec{j}dv = -\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dv \tag{7.169}$$

Egalitatea de mai sus este adevărată pentru orice volum V astfel că:

$$\nabla\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{7.170}$$

Această relaţie poartă denumirea de *ecuaţia de continuitate.*

În regim staţionar, densitatea volumică de sarcină nu depinde de timp şi ecuaţia de continuitate capătă forma:

$$\nabla\vec{j} = 0 \tag{7.171}$$

7.3.3 Teoria clasică a conducţiei

Această teorie a fost elaborată în 1900 de Drude şi a fost perfecţionată de Lorentz în anul 1910. Teoria se bazează pe ipoteza existenţei gazului electronic în metale, adică a existenţei unor electroni liberi în interiorul acestora. Prin electroni liberi în metale se înţeleg electronii de valenţă care nu sunt legaţi de nici un atom al reţelei cristaline şi care se pot deplasa în interiorul acestuia pe distanţe relativ mari.

Conform acestui model, în absenţa câmpului electric, electronii se mişcă haotic în toate direcţiile. Când se aplică un câmp electric electronii liberi sunt supuşi unei forţe care le imprimă o mişcare direcţionată. Dacă reţeaua ar fi rigidă şi perfectă electronii s-ar mişca accelerat. Acest lucru nu este posibil deoarece în metale există imperfecţiuni ale reţelei şi impurităţi, iar ionii reţelei cristaline execută mişcări de vibraţie în jurul poziţiilor de echilibru. În mişcarea lor electronii suferă ciocniri cu ionii reţelei cristaline şi cu defectele din reţea. Se admite ca o ipoteză simplificatoare că la fiecare ciocnire electronul pierde energia acumulată între două ciocniri succesive. Astfel, dacă timpul dintre două ciocniri este τ, viteza căpătată înainte de ciocnire este:

$$v = a\tau = \frac{eE}{m_e}\tau \tag{7.172}$$

în ipoteza că viteza iniţială este zero. Rezultă că electronul parcurge drumul dintre două ciocniri succesive cu o viteză medie, care este chiar viteza de transport.

$$v_d = \frac{v}{2} = \frac{eE}{2m_e}\tau \tag{7.173}$$

Timpul mediu între două ciocniri este raportul dintre drumul liber mediu λ şi viteza termică a electronului v_T. Viteza termică a electronilor poate fi estimată pornind de la formula obţinută în cazul gazelor ideale:

$$v_T = \sqrt{\frac{3k_BT}{m_e}} \tag{7.174}$$

unde $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K , T temperatura absolută a metalului. Atunci:

$$j = nev_d = \frac{1}{2}\frac{ne^2}{m_e}\tau E = \frac{1}{2}\frac{ne^2}{m_e}\frac{\lambda}{v_T}E = \sigma E \tag{7.175}$$

unde:

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{ne^2}{m_e}\frac{\lambda}{v_T} \tag{7.176}$$

reprezintă conductivitatea conductorului, aceasta fiind o constantă de material. Valoarea inversă a conductivităţii reprezintă rezistivitatea.

7.3.4 Tensiunea electromotoare

Pentru menţinerea curentului electric într-un circuit închis este necesar ca purtătorii de sarcină să fie acţionaţi de forţe care să le asigure deplasarea acestora pe o durată de timp suficient de mare.

Aşa cum a fost discutat în paragrafele precedente, sarcinile electrice transferă în mod continuu şi ireversibil energia lor nodurilor reţelei cristaline prin efect Joule. Rezultă că sarcinilor trebuie să li se asigure o energie egală cu cea disipată în acelaşi interval de timp. Aceasta înseamnă că asupra sarcinilor trebuie să acţioneze pe lângă forţele de natură electrostatică şi forţe de natură neelectrostatică. Acesta forţe poartă denumirea de forţe imprimate. Acestora le corespunde un câmp electric numit imprimat.

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}_i}{q} \tag{7.177}$$

Forţele imprimate sunt generate în anumite puncte ale circuitelor în care se găsesc surse de tensiune electromotoare. Ca exemple de surse de tensiune electromotoare sunt: pilele electrice şi acumulatoarele care transformă energia liberă din diverse reacţii chimice în energie electrică sau generatoarele convenţionale care induc un câmp electric neconservativ prin varierea unui câmp magnetic.

Să considerăm circuitul din Fig. 7.23 în care G este un generator, R un rezistor şi A un ampermetru. Lucrul mecanic efectuat asupra sarcinii q_0 între două puncte oarecare 1 şi 2 de către câmpul imprimat şi câmpul electrostatic este:

$$W_{12} = q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + q_0 \int_1^2 \vec{E}_i d\vec{l} \tag{7.178}$$

$$W_{12} = q_0 \left(V_1 - V_2\right) + q_0 \mathcal{E}_{12} \tag{7.179}$$

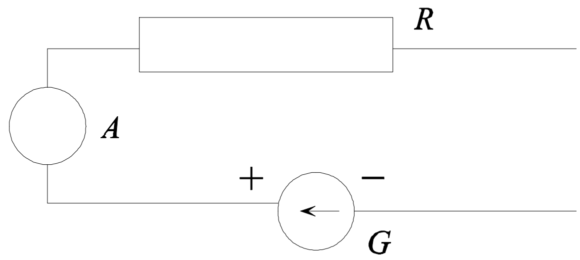

Figura 7.23: Schema de principiu a unui circuit electric

unde am notat cu $\mathcal{E}_{12} = q_0 \int_1^2 \vec{E}_i d\vec{l}$ tensiunea electromotoare dintre punctele 1 şi 2.

Se defineşte căderea de tensiune pe această porţiune a circuitului ca:

$$U_{12} = \frac{W_{12}}{q} = (V_1 - V_2) + \mathcal{E}_{12} \tag{7.180}$$

Se observă că numai dacă tensiunea electromotoare este nulă căderea de tensiune este egală cu diferenţa de potenţial. Dacă relaţia anterioară se extinde pe întreg circuitul se obţine:

$$W = q \oint \vec{E} d\vec{l} + q_0 \oint \vec{E}_i d\vec{l} \tag{7.181}$$

Deoarece pentru un câmp electrostatic $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$, rezultă pentru tensiunea electromotoare pe întregul circuit expresia:

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q_0} = \oint \vec{E}_i d\vec{l} \tag{7.182}$$

Tensiunea electromotoare ce acţionează într-un circuit este egală cu lucrul mecanic necesar pentru a deplasa unitatea de sarcină pe întreg circuitul.

7.3.5 Legea lui Ohm

În cazul metalelor, densitatea de curent este proporţională cu intensitatea câmpului electric.

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \tag{7.183}$$

Aceasta este legea lui Ohm.

Să considerăm un conductor omogen cu secţinea S prin care circulă curentul I.

$$I = \iint_S \vec{j} d\vec{S} = \iint_S \sigma \vec{E} d\vec{S} = \iint_S \sigma E dS \tag{7.184}$$

Dacă la capetele conductorului este menţinută o tensiune U (iar de-a lungul acestuia nu există nici o sursă de tensiune electromotoare)

$$E = \frac{U}{l} \tag{7.185}$$

unde l este lungimea conductorului. Atunci:

$$I = \sigma \frac{U}{l} S \tag{7.186}$$

De aici:

$$\frac{U}{I} = \frac{l}{\sigma S} = \rho \frac{l}{S} = R \tag{7.187}$$

R poartă numele de rezistenţă şi se măsoară în Ohmi (Ω). Relaţia 7.187 este o altă formă de exprimare a legii lui Ohm.

7.4 Magnetism

Constatarea proprietăţilor magnetice a fost făcută încă din antichitate, numele de magnet provenind de la numele unei regiuni din Asia mică "Magnesia", unde se găseau roci cu astfel de proprietăţi.

În anul 1820 Oersted a descoperit că dacă printr-un conductor trece un curent electric iar dacă în apropierea acestuia se aduce un ac magnetic, asupra acului magnetic se exercită o forţă. La puţin timp de la descoperirea lui Oersted, Ampère a arătat că între doi conductori străbătuţi de curent electric se exercită forţe care sunt de atracţie sau respingere în funcţie de sensul curenţilor. În plus aceste forţe nu sunt forţe similare cu cele ce se manifestă între conductorii încărcaţi. Dacă se introduce o placă metalică între cei doi conductori forţa de interacţie dintre cei doi conductori nu se modifică. În consecinţă s-a presupus că această forţă trebuie să fie de acelaşi tip cu forţa care apare între un conductor parcurs de curent electric şi acul magnetic.

Pentru a găsi o corespondenţă între un ac magnetic şi un conductor, Ampère a presupus ca acul magnetic conţine un număr foarte mare de curenţi microscopici pe care i-a numit curenţi moleculari.

Ulterior Maxwell a afirmat că asemenea forţe se exercită între orice sarcini electrice aflate în mişcare. Aceste forţe pot fi atribuite existenţei în jurul sarcinilor în mişcare a unui câmp, numit câmp magnetic. În consecinţă unui curent i se poate asocia un câmp magnetic care se manifestă în spaţiul înconjurător. S-a verificat experimental că forţa ce acţionează asupra unei sarcini în mişcare este întotdeauna perpendiculară pe viteza particulei şi proporţională cu această viteză. Ea este proporţională şi cu mărimea sarcinii, iar sensul ei depinde de semnul sarcinii electrice.

Pentru a descrie câmpul magnetic se introduce în fiecare punct un vector $\vec{B}$ numit inducţie a câmpului magnetic. Rezultatele experimentale arată că forţa care se exercită asupra sarcinii q având viteza $\vec{v}$ este de forma:

$$\vec{f} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{7.188}$$

Astfel se poate defini câmpul magnetic ca fiind câmpul material ce acţionează asupra unei sarcini electrice în mişcare cu o forţă a cărei expresie este 7.188. Această forţă poartă numele de forţă Lorentz.

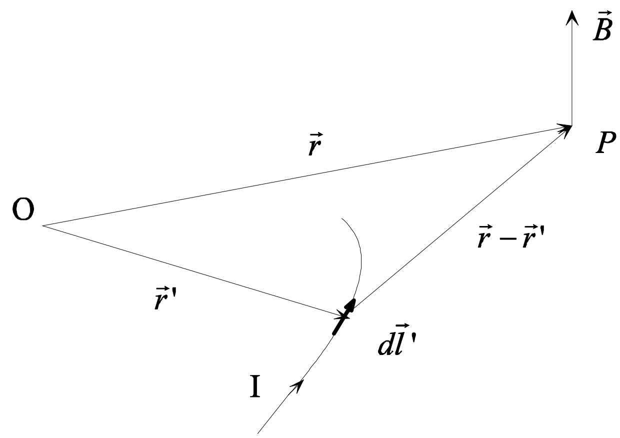

Figura 7.24: Calculul inducţiei câmpului magnetic

7.4.1 Legea Biot Savart

Această lege se referă la câmpul care apare în jurul curenţilor. Ea este analoagă celei ce permite calculul câmpului electrostatic determinat de o distribuţie de sarcini. În conformitate cu aceasta câmpul magnetic într-un punct P se datoreşte unor contribuţii $d\vec{B}$ provenite de la elementele de lungime $d\vec{l}'$ prin care trece curentul I. Contribuţia fiecărui element este proporţională cu curentul şi invers proporţională cu pătratul distanţei la punctul P. Mărimea $d\vec{B}$ este perpendiculară pe planul determinat de $d\vec{l}'$ şi $\vec{r}-\vec{r}'$ unde $\vec{r}$ este vectorul de poziţie al punctului P , iar $\vec{r}'$ este vectorul de poziţie al porţiunii de circuit considerat (Fig. 7.24). Rezultă:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \tag{7.189}$$

unde μ_0 este permeabilitatea magnetică a spaţiului vid. Factorul $\mu_0/4\pi$ a fost introdus pentru a exprima relaţiile în SI.

Câmpul total în punctul P este obţinut integrând pe întregul circuit (care este o curbă închisă):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \tag{7.190}$$

Vom exprima această relaţie într-un mod mai general. În acest sens se ţine seama de:

$$I d\vec{l}' = j\, S d\vec{l}' = \vec{j}\,(\vec{r}')\, S dl' = \vec{j}\,(\vec{r}')\, dv' \tag{7.191}$$

În relaţia 7.191 s-a ţinut cont că sensul vectorul $d\vec{l}'$ este acelaşi cu sensul lui $\vec{j}$. Atunci inducţia câmpului magnetic pentru o distribuţie de densitate de curenţi este:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \tag{7.192}$$

Aceasta este legea Biot Savart.

7.4.2 Legea lui Gauss pentru magnetism

Ca în cazul câmpului electric se defineşte fluxul câmpului magnetic printr-o suprafaţă printr-o relaţie de forma:

$$\Phi = \iint_S \vec{B} d\vec{S} \tag{7.193}$$

Deoarece câmpul magnetic nu este produs de sarcini magnetice este de aşteptat ca fluxul inducţiei câmpului magnetic printr-o suprafaţă închisă să fie nul.

$$\iint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \tag{7.194}$$

Vom demonstra acest lucru.

Dacă se ţine cont de relaţia:

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \tag{7.195}$$

se poate exprima inducţia câmpului magnetic astfel:

$$\vec{B}\,(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{j}\,(\vec{r}') \times \left(\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv' \tag{7.196}$$

Considerând identitatea:

$$\vec{A} \times \nabla f = -\nabla \times \left(\vec{A} f \right) \tag{7.197}$$

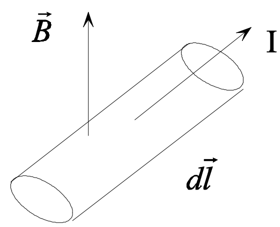

Figura 7.25: Element de curent în câmp magnetic

în care $\vec{A}$ este un vector constant, relaţia 7.196 devine:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \nabla \times \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right) dv' \tag{7.198}$$

Deoarece operatorul rotor acţionează asupra coordonatelor lui $\vec{r}$ se poate scrie:

$$\vec{B} = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dv' \right) \tag{7.199}$$

Rezultă:

$$\nabla \vec{B} = 0 \tag{7.200}$$

deoarece divergenţa unui rotor este nulă.

Dacă se consideră un volum V închis de suprafaţa S

$$\iiint_V \nabla \vec{B} dv = \iint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \tag{7.201}$$

Relaţia 7.201 exprimă faptul că fluxul câmpului magnetic prin orice suprafaţă închisă este nul. Ea arată că nu există sarcini magnetice libere.

7.4.3 Forţa electromagnetică

Fie un element de curent care străbate o porţiune de lungime dl având secţiunea S (Fig. 7.25).

Deoarece curentul este datorat deplasării unor sarcini electrice, iar asupra oricărei sarcini electrice în mişcare acţionează o forţă Lorentz, forţa totală ce se exercită asupra elementului de curent este rezultanta forţelor ce se exercită asupra tuturor sarcinilor care se deplasează. Dacă se notează cu n concentraţia purtătorilor de sarcină, numărul acestora din elementul de volum considerat este $dN = nSdl$. Considerând că viteza de transport este v atunci forţa rezultantă ce acţionează asupra tuturor purtătorilor de sarcină este:

$$d\vec{F} = dN\vec{f_l} \tag{7.202}$$

unde $\vec{f_l} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$ este forţa Lorentz ce acţionează asupra fiecărei particule. Se obţine:

$$d\vec{F} = nSq\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)dl \tag{7.203}$$

Cum $\vec{j} = nq\vec{v}$ relaţia 7.203 devine:

$$d\vec{F} = \left(\vec{j} \times \vec{B}\right)Sdl = \left(\vec{j} \times \vec{B}\right)dv \tag{7.204}$$

Rezultă că pentru o repartiţie continuă a densităţii de curent forţa totală care acţionează asupra acesteia este:

$$\vec{F} = \iiint_V \left(\vec{j} \times \vec{B}\right)dv \tag{7.205}$$

unde integrala se efectuează pe un volum suficient de mare care să conţină întreaga densitate de curent.

Revenind la situaţia considerată iniţial se observă că:

$$\vec{j}dv = \vec{j}Sdl = jSd\vec{l} = Id\vec{l} \tag{7.206}$$

Atunci relaţia 7.204 devine:

$$d\vec{F} = I\left(d\vec{l} \times \vec{B}\right) \tag{7.207}$$

Considerând curentul de-a lungul unei curbe C atunci:

$$\vec{F} = \int_C I\left(d\vec{l} \times \vec{B}\right) \tag{7.208}$$

Să considerăm interacţia dintre două bucle de curenţi (Fig. 7.26).

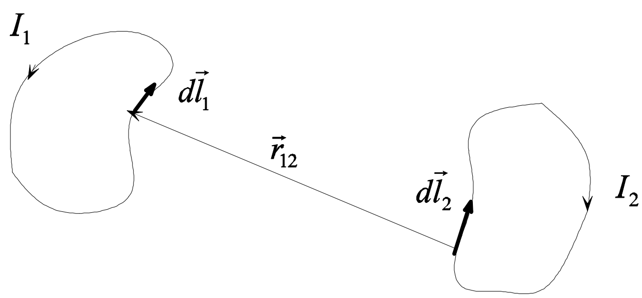

Figura 7.26: Interacţia dintre două bucle de curenţi

Se calculează forţa cu care câmpul magnetic generat de bucla a doua acţionează asupra primei bucle. Forţa care acţionează asupra elementului de curent $Id\vec{l}_1$ este:

$$d\vec{F} = I_1\left(d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2\right) = I_1 d\vec{l}_1 \times \frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\int_2 \frac{d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3} \tag{7.209}$$

Forţa totală care acţionează asupra primei bucle este:

$$\vec{F} = I_1 \int_1 d\vec{l}_1 \times \frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\int_2 \frac{d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}$$

sau

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\int_1\int_2 \frac{d\vec{l}_1 \times \left(d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}\right)}{|\vec{r}_{12}|^3} \tag{7.210}$$

7.4.4 Legea lui Ampère pentru curenţi staţionari

Legea se referă la valoarea circulaţiei câmpului magnetic pe un contur închis în regiunea din spaţiu în care există un câmp magnetic. Pentru obţinerea acestei legi vom porni tot de la expresia legii Biot-Savart.

Se aplică operatorul rotor egalităţii 7.198.

Atunci:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \left(\nabla \times \iiint \frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,'\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dv'\right) \tag{7.211}$$

Dar cum

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \nabla \left(\nabla \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A}$$

rezultă:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\nabla \left(\nabla \iiint \vec{j}\left(\vec{r}\,'\right) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dv' \right) - \nabla^2 \iiint \frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dv' \right]$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\nabla \iiint \vec{j}\left(\vec{r}\,'\right) \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right) dv' - \iiint \nabla^2 \left(\frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right) dv' \right] \tag{7.212}$$

Se foloseşte faptul că

$$\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right) = -\nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right) \tag{7.213}$$

unde semnul prim indică faptul că operatorul gradient acţionează asupra variabilelor ce intervin în vectorul $\vec{r}\,'$.

Cum:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right) = -4\pi \delta \left(\vec{r} - \vec{r}\,'\right) \tag{7.214}$$

unde $\delta\left(\vec{r} - \vec{r}\,'\right)$ este funcţia delta (Dirac), relaţia 7.212 devine:

$$\nabla \times \vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \iiint \vec{j}\left(\vec{r}\,'\right) \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dv' + \mu_0 \iiint j\left(\vec{r}\,'\right) \delta\left(\vec{r} - \vec{r}\,'\right) dv' \tag{7.215}$$

Prima integrală din 7.215 se poate evalua astfel:

$$\iiint \vec{j}\left(\vec{r}\,'\right) \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dv' = \iiint \nabla' \left(\frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right) dv' - \iiint \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \nabla' \vec{j}\left(\vec{r}\right) dv' \tag{7.216}$$

Prima integrală din relaţia 7.216 este nulă fiind extinsă pe un interval suficient de larg la marginea căruia densitatea de curent este nulă. Relaţia 7.215 devine:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \iiint \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \nabla' \vec{j}\,(\vec{r}\,')\, dv' + \mu_0 \vec{j} \tag{7.217}$$

În cazul staţionar $\nabla' \vec{j}\,(\vec{r}\,) = 0$; rezultă:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \tag{7.218}$$

Aceasta este legea lui Ampère pentru curenţi staţionari sub formă locală. Dacă se consideră o suprafaţă S care se sprijină pe o curbă C

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{B}\right) d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} d\vec{S}$$

De aici rezultă

$$\oint_C \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 I \tag{7.219}$$

Indiferent de forma conturului pe care se spijină suprafaţa S circulaţia vectorului $\vec{B}$ este proporţională cu curentul I care străbate suprafaţă.

7.4.5 Potenţialul vector

Având în vedere că $\nabla \vec{B} = 0$ în orice punct, rezultă că $\vec{B}$ trebuie să fie rotorul unui câmp vectorial $\vec{A}\,(\vec{r}\,)$ denumit potenţial vector:

$$\vec{B}\,(\vec{r}\,) = \nabla \times \vec{A}\,(\vec{r}\,) \tag{7.220}$$

Se observă că inducţia câmpului magnetic sub această formă a fost exprimată în relaţia 7.199. Se poate alege pentru potenţialul vector expresia:

$$\vec{A}\,(\vec{r}\,) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}\,(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dv' + \nabla \Psi \tag{7.221}$$

Se poate adăuga la $\vec{A}\,(\vec{r}\,)$ un gradient al unei funcţii scalare deoarece rotorul gradientului unei funcţii scalare este nul. Prin introducerea gradientului unei funcţii scalare rezultă că pentru o inducţie magnetică dată $\vec{B}\,(\vec{r}\,)$ potenţialul vector poate fi transformat astfel:

$$\vec{A} \to \vec{A} + \nabla \Psi \tag{7.222}$$

O astfel de transformare se numeşte transformare de etalonare. Ea este posibilă deoarece precizează numai rotorul lui $\vec{A}$. Această libertate în alegerea potenţialului vector permite să se utilizeze pentru $\vec{A}$ o formă convenabilă. Înlocuind 7.220 în 7.218 se obţine:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \mu_0 \vec{j} \tag{7.223}$$

Cum:

$$\nabla \left(\nabla \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \tag{7.224}$$

dacă se utilizează etalonarea lui Coulomb, adică dacă alegem $\nabla \vec{A} = 0$ potenţialul vector satisface ecuaţia:

$$\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \tag{7.225}$$

7.4.6 Momentul magnetic

Câmpul magnetic poate fi studiat cu ajutorul unor mici bucle de curenţi. Există următoarele aspecte:

a) câmpul magnetic generat de orice curent poate fi exprimat în funcţie de câmpul datorat unor mici bucle de curent.

b) mişcarea electronilor în atomi poate fi asimilată cu o buclă de curent.

Buclă de curent în câmp magnetic extern

Fie o buclă de curent într-un câmp magnetic extern (Fig.**??**).

Pe laturile SP şi RQ acţionează forţe care sunt egale şi opuse ca sens. La fel sunt şi forţele care acţionează asupra laturilor SR şi PQ. Rezultanta forţelor ce acţionează asupra buclei este zero. Există însă un moment δM care tinde să rotească bucla în jurul axei verticale.

Deoarece forţele ce acţionează asupra laturilor SR şi PQ $F_1 = F_2 = F = IBL_1$ momentul cuplului acestor forţe faţă de axa $\mathrm{A_1A_2}$ este:

$$M = FL_2 \cos\theta = L_1 L_2 BI \cos\theta = BIS \cos\theta \tag{7.226}$$

Relaţia poate fi scrisă vectorial astfel:

$$\vec{M} = I\vec{S} \times \vec{B} \tag{7.227}$$

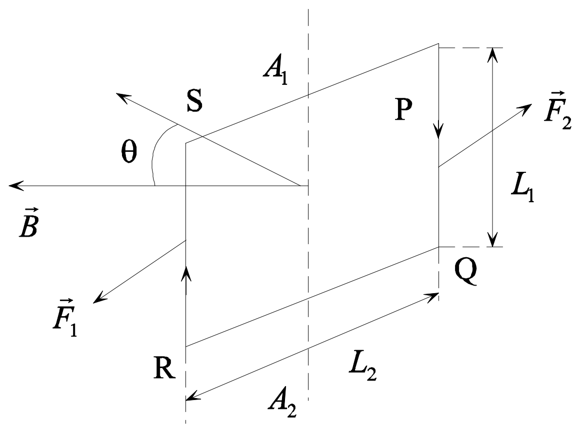

Figura 7.27: Buclă de curent în câmp magnetic

Am ajuns la concluzia că asupra unei mici bucle de curent acţionează un cuplu de forţe care tinde să alinieze bucla perpendicular pe câmpul magnetic.

De aici rezultă că se poate defini o energie potenţială a buclei în câmpul magnetic extern. Energia potenţială este egală cu lucrul mecanic ce trebuie efectuat asupra buclei pentru a o roti cu o viteză unghiulară constantă dintr-o poziţie perpendiculară într-o poziţie paralelă cu câmpul. Dacă prin convenţie se alege originea energiei când $\theta = \pi/2$ atunci:

$$E_p = \int_{\pi/2}^{\theta} M \, d\theta = \int_{\pi/2}^{\theta} ISB \sin\theta d\theta = -IBS\cos\theta \tag{7.228}$$

sau:

$$E_p = -I\vec{B}\vec{S} \tag{7.229}$$

Momentul de dipol magnetic

Făcând o analogie între rezultatul obţinut pentru o buclă de curent şi cel al dipolului electric, vom asocia unei bucle de curent un dipol magnetic al cărui moment $\vec{m}$ este definit astfel:

$$\vec{m} = I\vec{S} \tag{7.230}$$

unde $\vec{S}$ este un vector perpendicular pe suprafaţa buclei şi a cărui mărime este egală cu suprafaţa buclei. Atunci momentul forţei ce actionează asupra unui dipol magnetic este:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \tag{7.231}$$

iar energia sa potenţială într-un câmp magnetic este:

$$E_p = -\vec{m}\vec{B} \tag{7.232}$$

Ecuaţia de mai sus ne permite să calculăm forţa ce acţionează asupra buclei într-un câmp magnetic neuniform. Astfel:

$$\vec{F} = -\nabla E_p \tag{7.233}$$

$$\vec{F} = -\nabla \left(\vec{m}\vec{B}\right) = \nabla \left(m_x B_x + m_y B_y + m_z B_z\right) \tag{7.234}$$

Dacă câmpul magnetic este omogen forţa exercitată asupra dipolului magnetic este nulă. Dacă câmpul magnetic este orientat de-a lungul lui Oz şi dependent de coordonata z expresia forţei ce acţionează asupra dipolului magnetic devine:

$$\vec{F} = m_z \frac{\partial B}{\partial z} \vec{e}_z \tag{7.235}$$

În concluzie asupra unui dipol magnetic acţionează atât un cuplu de forţe care tinde să-l orienteze paralel cu câmpul magnetic cât şi o forţă care are tendinţa să-l deplaseze în direcţia gradientului câmpului magnetic.

Legătura dintre momentul de dipol magnetic şi momentul cinetic

Ca orice buclă de curent, curentul produs de mişcarea orbitală a unui electron într-un atom este caracterizat prin momentul său magnetic $\vec{m}$.

Să considerăm un electron aflat pe o orbită circulară, perioada de rotaţie fiind T. Mişcarea circulară a electronului este echivalentă cu un curent

$$I = -\frac{e}{T} = -\frac{e\omega}{2\pi} = -\frac{ev}{2\pi r} \tag{7.236}$$

Semnul minus apare din cauză că sarcina electronului este negativă, sensul curentului datorat mişcării electronului fiind opus sensului mişcării acestuia.

Cum aria buclei considerate este πr^2 , momentul magnetic este:

$$m = -\frac{ev}{2\pi r}\pi r^2 = -\frac{evr}{2} \tag{7.237}$$

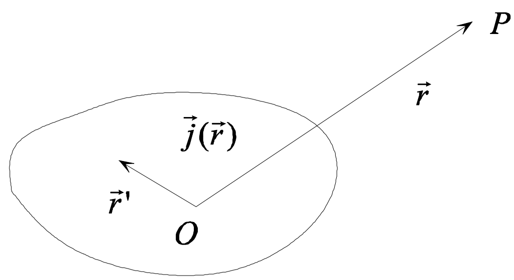

Figura 7.28: Distribuţie de curent

Deoarece momentul cinetic orbital este

$$L = m_e v r \tag{7.238}$$

unde m_e este masa electronului, rezultă:

$$m = -\frac{e}{2m_e} L \tag{7.239}$$

Vectorial relaţia 7.239 se scrie:

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e}\vec{L} = -\gamma\vec{L} \tag{7.240}$$

Mărimea $\gamma = e/2m_e$ poartă numele de raport magnetomecanic orbital al electronului.

7.4.7 Câmpul magnetic al unei distribuţii localizate de curent

Vom examina proprietăţile unei distribuţii de curent localizate într-o regiune din spaţiu aflată la o distanţă mare de punctul în care se doreşte să se calculeze inducţia câmpului magnetic (Fig. 7.28). Pentru aceasta se porneşte de la expresia generală a potenţialului vector

$$\vec{A}\left(\vec{r}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,'\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} dv' \tag{7.241}$$

Se dezvoltă în serie Taylor numitorul în raport cu $\vec{r}\,'$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}=\frac{1}{|\vec{r}|}+\frac{\vec{r}\,\vec{r}\,'}{|r|^3}+... \tag{7.242}$$

şi relaţia 7.241 devine:

$$\vec{A}\,(\vec{r}\,)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\vec{j}\,(\vec{r}\,')\,dv'+\frac{\mu_0}{4\pi\,|\vec{r}\,|^3}\iiint(\vec{r}\,\vec{r}\,')\,\vec{j}\,(\vec{r}\,')\,dv'... \tag{7.243}$$

Mărimile ce intervin în 7.243 sunt mărimi vectoriale. Se consideră componentele:

$$A_i\,(\vec{r}\,)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint j_i\,(\vec{r}\,')\,dv'+\frac{\mu_0}{4\pi\,|\vec{r}\,|^3}\iiint(\vec{r}\,\vec{r}\,')\,j_i\,(\vec{r}\,')\,dv'... \tag{7.244}$$

unde $i=x,y,z$.

În cazul staţionar ($\nabla\vec{j}=0$) este adevărată identitatea:

$$\iiint\left[f\,(\vec{r}\,')\,\vec{j}\,(\vec{r}\,')\,\nabla' g\,(\vec{r}\,')+g\,(\vec{r}\,')\,\vec{j}\,(\vec{r}\,')\,\nabla' f\,(\vec{r}\,')\right]dv'=0 \tag{7.245}$$

unde f şi g sunt două funcţii arbitrare de $\vec{r}\,'$.

Dacă se alege $f=1$ şi $g=r_i'$ ($r_i'=x'$, y' , z') rezultă:

$$\iiint j_i\,(\vec{r}\,')\,dv'=0 \tag{7.246}$$

Pentru $f=r_i'$ şi $g=r_j'$ rezultă:

$$\iiint\left[r_i' j_j\,(\vec{r}\,')+r_j' j_i\,(\vec{r}\,')\right]dv'=0 \tag{7.247}$$

Se evaluează expresia

$$I=\iiint(\vec{r}\,\vec{r}\,')\,j_i\,(\vec{r}\,)\,dv'=\sum_j r_j\iiint r_j' j_i dv'$$

$$I=\frac{1}{2}\sum_j r_j\iiint r_j' j_i dv'+\frac{1}{2}\sum_j r_j\iiint r_j' j_i dv'$$

Se ţine cont de 7.247 :

$$I = \frac{1}{2}\sum_j r_j \iiint r'_j j_i dv' - \frac{1}{2}\sum_j r_j \iiint r'_i j_j dv'$$

$$I = -\frac{1}{2}\sum_j r_j \iiint \left(r'_i j_j - r'_j j_i\right) dv' = -\frac{1}{2}\left[\vec{r} \times \iiint \left(\vec{r}\,' \times \vec{j}\left(\vec{r}\,'\right)\right) dv'\right]_i \tag{7.248}$$

Deoarece momentul de dipol magnetic al unei distribuţii de curent se defineşte:

$$\vec{m} = \iiint \left(\vec{r}\,' \times \vec{j}\left(\vec{r}\,'\right)\right) dv' \tag{7.249}$$

atunci:

$$I = -\frac{1}{2}\left(\vec{r} \times \vec{m}\right)_i \tag{7.250}$$

Rezultă:

$$\vec{A}\left(\vec{r}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{\left|\vec{r}\right|^3} \tag{7.251}$$

Acesta este termenul de ordinul cel mai mic din dezvoltarea potenţialului vector care nu se anulează. Calculând rotorul lui $\vec{A}$ se obţine câmpul magnetic produs de momentul de dipol al distribuţiei localizate de curent

$$\vec{B}\left(\vec{r}\right) = \nabla \times \vec{A}\left(\vec{r}\right) = \frac{3\vec{n}\left(\vec{n}\vec{m}\right) - \vec{m}}{\left|\vec{r}\right|^3} \tag{7.252}$$

unde $\vec{n} = \vec{r}/r$ este versorul direcţiei $\vec{r}$.

Se poate face o legătură între expresiile cu care este definit momentul magnetic (7.249 şi 7.230). Expresia 7.249 se poate particulariza pentru o spiră circulară cu sectiune constantă s şi rază r' străbătută de un curent a cărui densitate de curent este constantă, astfel:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\iiint \left(\vec{r}\,' \times \vec{j}\right) dv'$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\iiint \left(\vec{r}\,' \times \vec{j}\right) ds dl' = I \oint \left(\vec{r}\,' \times d\vec{l}\,'\right) = I\vec{S} \tag{7.253}$$

unde $\vec{S}$ este un vector perpendicular pe suprafaţa spirei având modulul egal cu aria spirei.

Rezultă că momentul magentic este perpendicular pe planul spirei.

7.4.8 Magnetizarea

Fie un corp de probă care este introdus în câmp magnetic. Experimental se constată că pentru majoritatea substanţelor asupra lui se exercită forţe extrem de mici. Dacă dimensiunea probelor este mică, forţa care acţionează asupra ei este direct proporţională cu gradientul inducţiei câmpului magnetic.

O altă constatare experimentală este aceea că pentru anumite substanţe forţa ce actionează asupra acestora tinde să atragă substanţa înspre regiunile cu câmp mai intens în timp ce pentru altele forţa tinde să respingă substanţa din câmp.

Având în vedere faptul că într-un câmp magnetic neuniform, asupra unui dipol magnetic se exercită o forţă se ajunge la concluzia că în probă se induce un moment magnetic.

După comportarea substanţelor în câmp magnetic se poate face o clasificare a acestora.

Substanţele care sunt slab respinse de câmpul magnetic (care se magnetizează în sens invers câmpului), precum apa, clorura de sodiu, cuarţul, sunt numite diamagnetice. Majoritatea substanţelor anorganice şi aproape toate substanţele organice sunt diamagnetice. Rezultă că diamagnetismul este o proprietate a fiecărui atom sau molecule. Când este observată o comportare diferită, aceasta se datorează faptului că diamagnetismul este mascat de efecte mai puternice.

Substanţele care sunt atrase către regiunile unde câmpul este mai intens (care se magnetizează în sensul câmpului) sunt numite substanţe paramagnetice. Există şi aici două categorii de substanţe: unele care sunt atrase cu forţe slabe de acelaşi ordin de mărime ca şi în cazul substanţelor diamagnetice (Na) şi altele ($CuCl_2$) în care efectul paramagnetic este mult mai puternic. Unele substanţe prezintă un paramagnetism dependent de temperatură.

O a treia categorie de substanţe sunt cele care posedă moment magnetic propriu. Acestea poartă numele de substanţe feromagnetice. Singurele metale care prezintă feromagnetism sunt fierul, nichelul, cobaltul şi gadoliniul; aliaje ale acestor metale pot fi de asemenea feromagnetice.

Existenţa momentelor magnetice se datorează mişcării orbitale a electronilor precum şi spinului electronilor.

Mişcarea electronilor pe anumite ”orbite” în jurul nucleului este echivalentă cu o buclă de curent care are un moment magnetic dipolar a cărui mărime este legată de momentul cinetic orbital prin relaţia:

$$\vec{m}_L = -\frac{e}{2m_e}\vec{L} \tag{7.254}$$

În expresia de mai sus, în afară de momentul cinetic $\vec{L}$ apar numai constante universale.

Consideraţiile făcute până acum s-au situat în cadrul mecanicii clasice însă la nivelul atomului mişcarea electronilor este tratată riguros cu ajutorul mecanicii cuantice. Conform acestei teorii momentul cinetic orbital al electronului este o mărime care poate lua numai valori discrete:

$$\left|\vec{L}\right| = \hbar\sqrt{l\,(l+1)} \qquad l = 0\ ,\ 1\ ,2\ ,... \tag{7.255}$$

În expresia de mai sus $\hbar = h/2\pi$ unde h este constanta lui Planck. Rezultă că şi momentul magnetic asociat mişcării orbitale este cuantificat:

$$|\vec{m}_L| = \frac{e\hbar}{2m_e}\sqrt{l\,(l+1)} \qquad l = 0\ ,\ 1\ ,2\ ,... \tag{7.256}$$

Mărimea $\mu_0 = e\hbar/2m_e = 9,29 \times 10^{-24}$ Am^2 poartă numele de magneton Bohr.

Spinul electronului este o mărime care nu are corespondent clasic şi el reprezintă un moment cinetic propriu. Calculele şi experienţele realizate au dus la concluzia că momentul cinetic de spin are valoarea

$$\left|\vec{S}\right| = \hbar\sqrt{s\,(s+1)} \tag{7.257}$$

unde $s = 1/2$.

Proiecţia spinului pe o axă poate lua doar două valori $S_z = \hbar/2$ şi $S_z = -\hbar/2$.

Electronul fiind o particulă încărcată cu sarcină electrică, momentului său cinetic îi corespunde un moment magnetic de spin. Relaţia dintre momentul cinetic şi momentul magnetic trebuie să fie una analoagă cu cea care există în cazul mişcării orbitale. Experimental s-a constatat că:

$$\vec{m}_S = -\frac{e}{m_e}\vec{S} = -2\gamma\vec{S} \tag{7.258}$$

Faptul că raportul dintre momentul magnetic de spin şi momentul cinetic de spin este de două ori mai mare decât acelaşi raport în cazul mişcării orbitale este cunoscut sub numele de anomalie giromagnetică.

Având în vedere cele discutate mai sus rezultă că proprietăţile magnetice ale atomilor sunt legate de proprietăţile magnetice ale electronilor acestor atomi.

Se poate calcula un moment cinetic total al electronilor din atom $\vec{J}$ care este suma momentelor cinetice orbitale şi de spin a electronilor. Acestui moment cinetic i se poate asociază un moment magnetic total al electronilor respectivi. Este posibil ca acest moment magnetic să fie zero sau diferit de zero.

Există mai multe situaţii posibile:

a) Când se introduce o substanţă în câmp magnetic electronii se rotesc în aşa fel încât pot genera un câmp magnetic de sens contrar câmpului exterior.

b) În absenţa câmpului magnetic exterior atomii substanţei respective posedă momente magnetice care sunt orientate în toate direcţiile cu probabilitate egală. Ca urmare a acestui fapt câmpul magnetic produs de acestea este nul. Plasând substanţa în câmp magnetic asupra momentelor magnetice acţionează un cuplu de forţe care tinde să le orienteze pe toate paralel cu direcţia câmpului. Chiar dacă orientarea momentelor paralel cu câmpul nu este perfectă datorită agitaţiei termice, există totuşi o orientare preferenţială a acestora. Ca urmare, suma vectorială a momentelor magnetice ale atomilor este diferită de zero, ceea ce face ca şi câmpul magnetic generat să fie diferit de zero. Se spune că în câmp magnetic substanţa se magnetizează.

Dacă în material există un mare număr de momente magnetice dipolare, toate orientate în acelaşi sens iar densitatea acestora este n atunci se poate defini vectorul densitate de magnetizare:

$$\vec{M} = n\vec{m} \tag{7.259}$$

Relaţii care au loc în materiale feromagnetice

a) materiale omogene

Să considerăm o probă dintr-un material în care momentele magnetice sunt uniform repartizate. Fie o folie din acest material cu feţele perpendiculare pe $\vec{M}$ şi având o grosime foarte mică **??**.

Folia se poate diviza în elemente de volum $dv = dadz$, unde da este elementul de arie. Momentul magnetic al elementului de volum este:

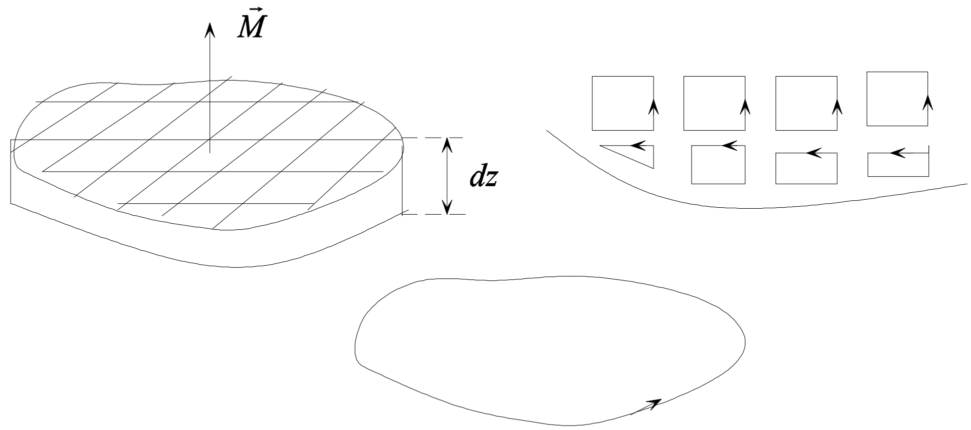

Figura 7.29: Material omogen în câmp magnetic

$$\vec{M} dadz$$

Dacă se admite că momentul magnetic este produs de un curent ce înconjoară porţiunea se consideră:

$$\vec{M} dadz = dId\vec{a} \tag{7.260}$$

Cum $d\vec{a}$ este paralel cu $\vec{M}$:

$$dI = Mdz \tag{7.261}$$

În acest mod se poate înlocui fiecare porţiune de material cu câte o buclă de curent de intensite I care satisface relaţia 7.261. Din Figura **??** se vede că rămân necompensaţi curenţii de la margine. Acum se poate reface întregul bloc, care este echivalent cu o buclă de curent cu intensitatea

$$I = \int_0^z Mdz = Mz \tag{7.262}$$

Acest curent poartă numele de curent superficial de magnetizare. El poate fi caracterizat printr-o densitate liniară de curent:

$$j_m(s) = \frac{I}{z} = M \tag{7.263}$$

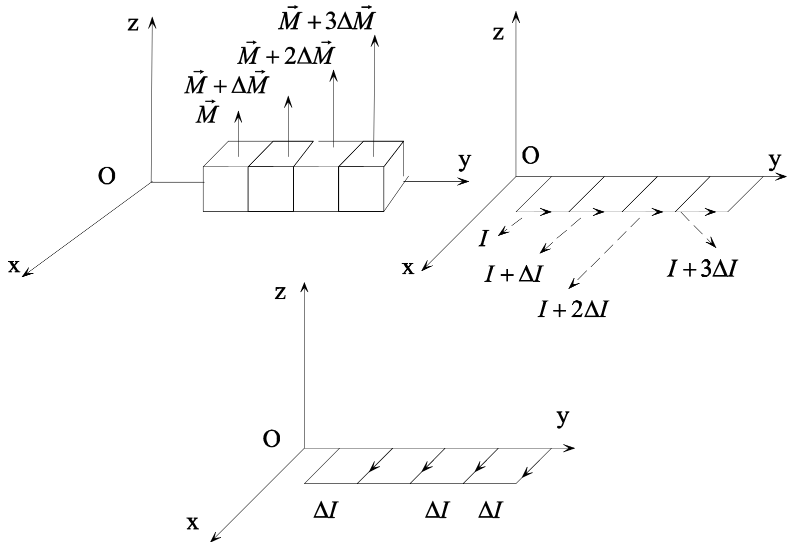

Figura 7.30: Material neomogen în câmp magnetic

b) materiale neomogene

În cazul materialelor neomogene $\vec{M}$ şi prin urmare curenţii corespunzători de magnetizare nu au aceiaşi valoare în toate regiunile corpului şi nu se mai compensează reciproc (Fig. 7.30).

Se va considera un caz particular al unui material magnetizat în direcţia Oz şi a cărui magnetizare creşte în funcţie de y. Materialul se împarte în volume paralelipipedice de mărime $\Delta x \Delta y \Delta z$ a căror magnetizare este prezentată în Fig. 7.30. Fiecare element de volum poate fi înlocuit prin curentul superficial:

$$I = j_m \Delta z = M_z \Delta z \tag{7.264}$$

Cum magnetizarea creşte liniar de la un element la alt element şi intensitatea curenţilor va creşte tot liniar. Ca urmare la limita de separaţie dintre două elemente de volum vecine, curenţii de sens opus nu se anulează. Diferenţa dintre intensităţile curenţilor este:

$$\Delta I = [M_z(y + \Delta y) - M_z(y)]\,\Delta z = \frac{\partial M_z}{\partial y} \Delta y \Delta z \tag{7.265}$$

Se observă că pe feţele normale la Ox curenţii se anulează reciproc. Densitatea curentului în sensul axei Ox este:

$$j_{mx}^{(1)} = \frac{\Delta I}{\Delta y \Delta z} = \frac{\partial M_z}{\partial y} \tag{7.266}$$

Dacă se analizează cazul unei probe magnetizate în direcţia Oy a cărei magnetizare are direcţia axei Ox se obţine:

$$j_{mx}^{(2)} = -\frac{\partial M_y}{\partial z} \tag{7.267}$$

Astfel:

$$j_{mx} = j_{mx}^{(1)} + j_{mx}^{(2)} = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} = \left(\nabla \times \vec{M}\right)_x \tag{7.268}$$

Generalizând şi pentru celelalte direcţii rezultă:

$$\vec{j}_m = \nabla \times \vec{M} \tag{7.269}$$

7.4.9 Curenţii liberi şi intensitatea câmpului magnetic

Aşa cum s-a prezentat mai înainte, s-a ajuns la concluzia că în afară de curenţii de conducţie (datoraţi electronilor liberi), la generarea unui câmp magnetic contribuie şi curenţii atomici sau moleculari datoraţi electronilor.

Densitatea totală de curent se poate exprima astfel:

$$\vec{j}_{total} = \vec{j}_{liber} + \vec{j}_m \tag{7.270}$$

unde $\vec{j}_{liber}$, $\vec{j}_m$ sunt densităţile de curent corespunzătoare electronilor liberi, respectiv legaţi.

Deoarece $\vec{j}_m$ satisface relaţia 7.269 , legea lui Ampère se poate scrie sub forma:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_{liber} + \vec{j}_m\right) = \mu_0 \left(\nabla \times \vec{M} + \vec{j}_{liber}\right) \tag{7.271}$$

de unde:

$$\vec{j}_{liber} = \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right) \tag{7.272}$$

Relaţia 7.272 sugerează faptul că se poate defini o altă mărime caracteristică câmpului magnetic a cărei surse sunt doar curenţii liberi, denumită intensitatea câmpului magnetic.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \tag{7.273}$$

Ea se măsoară în A/m. Rezultă:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{liber} \tag{7.274}$$

Integrând pe o suprafaţă care se sprijină pe un contur C:

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{H}\right) d\vec{S} = \iint_S \vec{j}_{liber} d\vec{S} \tag{7.275}$$

Se aplică teorema lui Stokes şi rezultă:

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = I_{liber} \tag{7.276}$$

Relaţia dintre $\vec{H}$ şi $\vec{B}$ joacă un rol important în electromagnetism. Pentru substanţe izotrope paramagnetice sau diamagnetice există o relaţie de liniaritate:

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_r\mu_0\vec{H} \tag{7.277}$$

unde μ este permeabilitatea absolută a mediului respectiv iar μ_r este permeabilitatea relativă. Pentru astfel de substanţe μ_r diferă foarte puţin de unitate. Pentru substanţele paramagnetice $\mu_r > 1$, iar pentru substanţele diamagnetice $0 < \mu_r < 1$.

Pentru substanţele feromagnetice relaţia 7.277 trebuie înlocuită cu o relaţie neliniară:

$$\vec{B} = \vec{B}\left(\vec{H}\right) \tag{7.278}$$

Aceste substanţe prezintă fenomenul de histerezis fapt ce arată că $\vec{B}$ nu este o funcţie univocă de $\vec{H}$ (Fig.7.31). Mai mult inducţia magnetică depinde de istoria materialului. Permeabilitatea relativă μ_r în acest caz este definită ca derivata în raport cu H a raportului B/μ_0 când H are valori suficient de mici încât B şi H să fie paraleli. Pentru anumite substanţe feromagnetice permeabilitatea relativă poate ajunge la valori de 10^6.

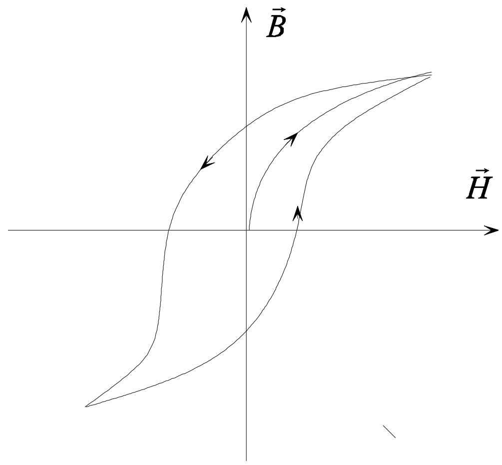

Figura 7.31: Curbă de histeresis

7.5 Inducţia electromagnetică

Primele observaţii legate de câmpurile electrice şi magnetice variabile în timp au fost realizate de Faraday în 1831. El a constatat că într-un circuit apare un curent când acesta este introdus sau scos din câmp magnetic.

În Figurile 7.32 şi 7.33 sunt prezentate diferite moduri în care fenomenul se poate pune în evidenţă experimental. Astfel în cazul din Fig. 7.32 la închiderea comutatorului, în spira din circuitul care conţine ampermetrul A se stabileşte pentru scurt timp un curent care este înregistrat de acesta. Acelaşi lucru se petrece în cazul prezentat în Fig. 7.33 când magnetul este adus în apropierea spirei. Curent apare şi atunci când magnetul este fix iar circuitul se roteşte în câmpul creat de acesta.

Există mai multe posibilităţi de a obţine o tensiune electromotoare indusă:

a) prin plasarea unui circuit într-o regiune în care există un câmp magnetic variabil în timp.

b) prin mişcarea unui circuit rigid într-un câmp magnetic.

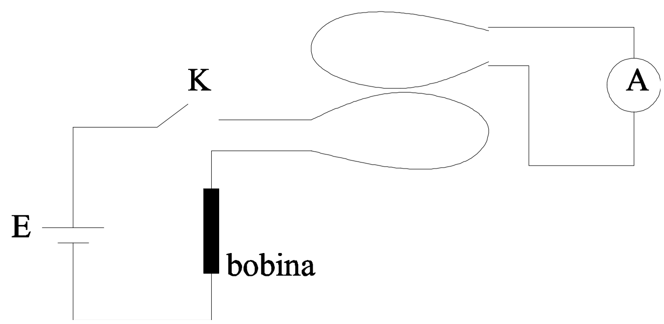

Figura 7.32: Fenomenul de inducţie electromagnetică care apare la închiderea comutatorului K

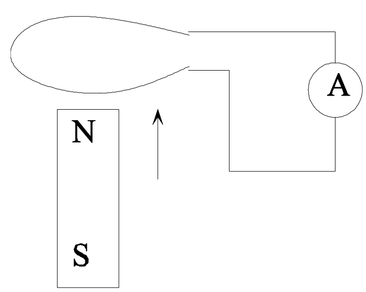

Figura 7.33: Fenomenul de inducţie electromagnetică care apare la aducerea unui magnet în apropierea circuitului

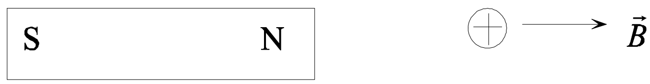

Figura 7.34: Sarcină electrică în câmp magnetic

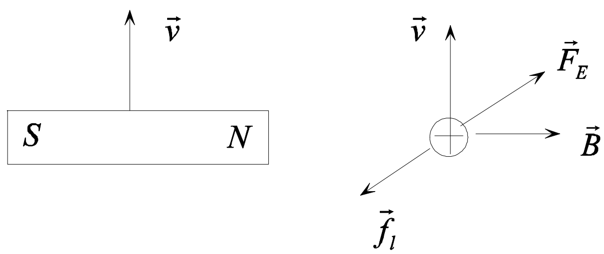

Figura 7.35: Sarcina electrică în mişcare în câmp magnetic

7.5.1 Câmpul electric generat prin mişcarea surselor câmpului magnetic

Se consideră o particulă cu sarcină electrică q care se găseşte într-un câmp magnetic produs de un magnet (Fig. 7.34). Particula şi magnetul sunt în repaus faţă de sistemul laboratorului (SL). Se constată că asupra particulei nu acţionează nici o forţă.

Să privim aceiaşi situaţie dintr-un sistem de referinţa care se deplasează cu viteza $-\vec{v}$ faţă de SL (ne vom limita la cazul vitezelor mici faţă de viteza luminii). Faţă de acest sistem de referinţă particula şi magnetul se deplasează cu viteza $\vec{v}$.

Deoarece sarcina se deplasează într-un câmp magnetic (Fig. 7.35) cu viteza $\vec{v}$ ea va fi supusă unei forţe Lorentz $\vec{f}_l = q\vec{v} \times \vec{B}$. Dacă nu ar exista şi alte forţe care să acţioneze asupra particulei ea ar trebui să fie accelerată fapt ce ar intra în contradicţie cu situaţia iniţială. Acest paradox este eliminat dacă se consideră că în sistemul aflat în mişcare apare un câmp electric $\vec{E}$ astfel încât:

$$\vec{F}_E = -\vec{f}_l \tag{7.279}$$

Rezultă:

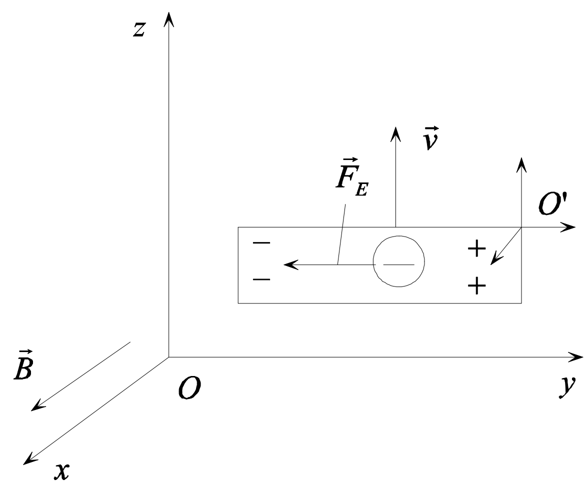

Figura 7.36: Bară conductoare în mişcare în câmp magentic

$$q\vec{E} = -q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{7.280}$$

de unde:

$$\vec{E} = -\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{7.281}$$

În concluzie, când sursa unui câmp magnetic este în mişcare faţă de un observator, acesta va constata pe lângă câmpul magnetic şi existenţa unui câmp electric.

7.5.2 Câmpul indus într-un conductor în mişcare într-un câmp magnetic uniform

Fie un conductor de lungime l ce se deplasează cu viteza $\vec{v}$ de-a lungul axei Oz într-un câmp magnetic uniform a cărui inducţie magnetică este paralelă cu axa Ox (Fig. 7.36).

Un observator O$'$ solidar legat de conductor constată că sursa câmpului magnetic se deplasează cu viteza $-\vec{v}$. Atunci în interiorul conductorului apare un câmp electric

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} \tag{7.282}$$

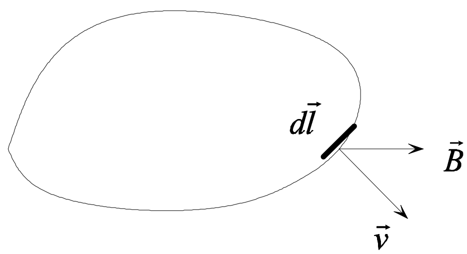

Figura 7.37: Spiră conductoare în câmp magnetic

Acest câmp este de natură neelectrostatică. Orice sarcină electrică va fi supusă unei forţe:

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{7.283}$$

Sub acţiunea acestei forţe, electronii se vor deplasa spre extremitatea din stânga a conductorului, iar la capătul din dreapta sa va produce o acumulare de sarcini pozitive. Aceste sarcini vor determina apariţia unui câmp electric de natură electrostatică care va avea un sens contrar câmpului electric indus.

În această experienţă imaginară capetele conductorului pot fi considerate ca cele două borne ale unei surse de t.e.m. a cărei valoare este:

$$\mathcal{E} = \int_0^l \vec{E} d\vec{l} = El = Blv \tag{7.284}$$

7.5.3 Tensiunea electromotoare indusă într-o spiră de curent ce se deplasează într-un câmp magnetic

Să considerăm o spiră realizată dintr-un conductor subţire care se deplasează în câmpul magnetic $\vec{B}$ cu viteza $\vec{v}$ ce face un unghi α cu $\vec{B}$ (Fig. 7.37).

Într-un element de buclă $d\vec{l}$ câmpul electric indus este:

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} \tag{7.285}$$

iar tensiunea electromotoare indusă este:

$$d\mathcal{E} = \vec{E} d\vec{l} = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) d\vec{l} \tag{7.286}$$

Tensiunea electromotoare indusă în întreaga buclă este:

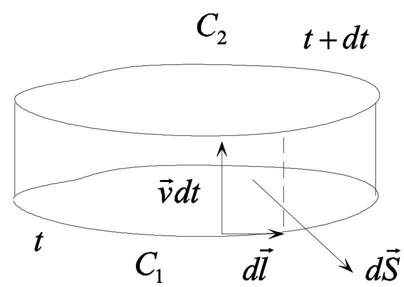

Figura 7.38: Spiră conductoare care se deplasează în câmp magnetic

$$\mathcal{E} = \oint_C \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) d\vec{l} \tag{7.287}$$

În continuare se examinează mai detaliat această situaţie. Se consideră că în timpul deplasării circuitului forma acestuia se păstrează şi atunci fiecare element al circuitului va fi caracterizat de o aceeaşi viteză de deplasare.

În cazul ilustrat în Fig.7.38 sunt reprezentate poziţiile buclei la momentele de timp t şi $t + dt$. La momentul t fluxul câmpului magnetic prin buclă este:

$$\Phi\left(t\right) = \iint_S \vec{B} d\vec{S} \tag{7.288}$$

Pentru calculul fluxului prin suprafaţa circuitului la momentul $t + dt$ vom ţine cont că fluxul unei mărimi vectoriale este acelaşi prin orice suprafaţă mărginită de un contur dat.

Pentru poziţia C_2 a buclei la momentul t+dt se alege următoarea suprafaţă: suprafaţa iniţială S şi suprafeţele laterale S_l datorate mişcării buclei. Atunci:

$$\Phi\left(t + dt\right) = \iint_S \vec{B} d\vec{S} + \iint_{S_l} \vec{B} d\vec{S} = \Phi\left(t\right) + \iint_{S_l} \vec{B}\left(\vec{v}dt \times d\vec{l}\right) \tag{7.289}$$

Deoarece integrala de suprafaţă se poate transforma într-o integrală curbilinie:

$$\Phi\left(t + dt\right) = \Phi\left(t\right) + \left[\oint_C \vec{B}\left(\vec{v} \times d\vec{l}\right)\right] dt \tag{7.290}$$

rezultă

$$d\Phi = \Phi\left(t+dt\right) - \Phi\left(t\right) = \left[\oint_C \vec{B}\left(\vec{v}\times d\vec{l}\right)\right] dt \tag{7.291}$$

sau

$$\frac{d\Phi}{dt} = \oint_C \vec{B}\left(\vec{v}\times d\vec{l}\right) = -\oint_C \left(\vec{v}\times\vec{B}\right) d\vec{l} \tag{7.292}$$

Conform relaţiei 7.287 ultima integrală este chiar tensiunea electromotoare indusă:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{7.293}$$

Rezultă că apariţia unei t.e.m. induse într-un circuit este determinată de viteza de variaţie a fluxului inducţiei magnetice prin acel circuit.

7.5.4 Legea inducţiei electromagnetice

În paragraful precedent s-a arătat că variaţia fluxului magnetic ca urmare a deplasării circuitului în câmp magnetic determină o t.e.m. indusă. Un flux magnetic variabil se poate obţine când câmpul magnetic variază în timp. Faptul că apare un curent în interiorul circuitului arată că şi în acest caz se induce o t.e.m iar asupra sarcinilor se exercită o forţă de natură electrică. Relaţia 7.293 rămâne valabilă în orice situaţie în care există un câmp magnetic variabil în timp printr-un circuit. Deoarece:

$$\mathcal{E} = \oint_c \vec{E} d\vec{l} \tag{7.294}$$

şi

$$\Phi = \iint \vec{B} d\vec{S} \tag{7.295}$$

atunci:

$$\oint_c \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} d\vec{S} \tag{7.296}$$

unde S este suprafaţa care se spijină pe curba C.

Se remarcă faptul că, deoarece $\oint_c \vec{E} d\vec{l} \neq 0$ câmpul electric indus este neconservativ. Transformând integrala din membrul stâng al relaţiei 7.296 într-o integrală pe suprafaţa S se obţine:

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{E}\right) d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \tag{7.297}$$

De aici se obţine:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{7.298}$$

Aceasta este forma diferenţială a legii lui Faraday; ea stabileşte că se pot produce câmpuri electrice prin variaţia în timp a câmpului magnetic. Trebuie remarcat că suprapunerea câmpului electric indus cu un câmp electrostatic nu modifică cu nimic relaţia de mai sus deoarece rotorul unui câmp potenţial este nul.

În acelaşi timp liniile câmpului electrostatic pornesc de pe corpurile încărcate pozitiv şi se termină pe corpurile încărcate negativ; în cazul în care este implicat un câmp electric indus liniile de câmp formează curbe închise.

7.5.5 Energia câmpului magnetic

Pentru studiul energiei câmpului magnetic se consideră că printr-un proces lent, cvasistaţionar, se modifică densitatea curenţilor de la valoarea zero până la o valoare finală. În evaluarea schimburilor de energie trebuie să se ţină cont că lucrul mecanic al forţei Lorentz este nul astfel că transferul de energie de la şi înspre câmpul magnetic nu poate fi asociat cu un lucru mecanic al forţei Lorentz. În schimb orice variaţie a câmpului magnetic poate fi asociată cu un câmp electric indus $\vec{E}_{ind}$.

Fie un circuit prin care circulă curentul I. Dacă fluxul câmpului magnetic se schimbă atunci în circuit se induce o tensiune electromotoare $\mathcal{E}$. Pentru a menţine curentul existent în circuit trebuie ca sursele să efectueze un lucru mecanic. Transferul de energie efectuat prin intermediul surselor în scopul compensării câmpului $\vec{E}_{ind}$ se evaluează considerând un câmp compensator $\vec{E}_c = -\vec{E}_{ind}$.

Vom considera iniţial o particulă cu viteza $\vec{v}$ asupra căreia acţionează o forţă $\vec{F}$. Viteza de variaţie a energiei cinetice a acestei particule este:

$$\frac{dE_{cin}}{dt} = \vec{v}\vec{F} \tag{7.299}$$

Rezultă că energia furnizată de surse în unitatea de timp pentru a menţine viteza particulei cu sarcina e este:

$$e\vec{v}\vec{E}_c$$

Pentru a calcula lucrul mecanic efectuat de surse în unitatea de timp asupra circuitului considerat se însumează contribuţia acţiunii surselor asupra tuturor electronilor. Ţinând cont că $\vec{j} = ne\vec{v}$ rezultă:

$$\frac{dW}{dt} = \sum e\vec{v}\vec{E}_c = \sum_{\Delta l} \Delta Ne\frac{\vec{j}}{ne}\vec{E}_c \tag{7.300}$$

În expresia de mai sus se consideră suma contribuţiilor porţiunilor de circuit Δl în care numărul de electroni este ΔN . Notând cu S secţiunea conductorului şi ţinând cont că n este concentraţia de electroni atunci $\Delta N/n = S\Delta l$. Relaţia 7.300 devine:

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{\Delta l} S\Delta l\vec{j}\vec{E}_c = \sum_{\Delta l} Sj\Delta\vec{l}\vec{E}_c = -I\sum_{\Delta l} \Delta\vec{l}\vec{E}_{ind} \tag{7.301}$$

Dar cum $\sum_{\Delta l} \Delta\vec{l}\vec{E}_{ind} = \mathcal{E}$ atunci:

$$\frac{dW}{dt} = -I\mathcal{E} = I\frac{d\Phi}{dt} \tag{7.302}$$

unde Φ este fluxul câmpului magnetic prin circuitul considerat.

Rezultă că dacă variaţia fluxului inducţiei magnetice printr-un circuit prin care trece curentul I este $\delta\Phi = S\delta B$, lucrul mecanic efectuat de surse pentru a menţine neschimbată valoarea curentului este:

$$\delta W = I\delta\Phi = I\left(\vec{S}\delta\vec{B}\right) \tag{7.303}$$

În relaţia 7.303 s-a considerat că variaţia fluxului este datorată numai variaţiei câmpului magnetic $\delta\vec{B}$.

Pentru evaluarea lucrului mecanic efectuat pentru stabilirea unei distribuţii staţionare de curenţi şi câmpuri se consideră că procesul decurge cu o viteză foarte mică astfel încât condiţia $\Delta\vec{j} = 0$ să fie tot timpul îndeplinită. Atunci distribuţia de curent poate fi împărţită într-o reţea de bucle elementare, o buclă elementară reprezentând un curent de secţiune $\Delta\sigma$ care urmăreşte o curbă închisă C ce delimitează o suprafaţă ΔS (Fig. 7.39).

Pentru a exprima lucrul mecanic efectuat împotriva forţelor de tensiune electromotoare induse datorită modificării inducţiei magnetice vom ţine cont de relaţia 7.303. Pentru o buclă elementară lucrul mecanic are expresia:

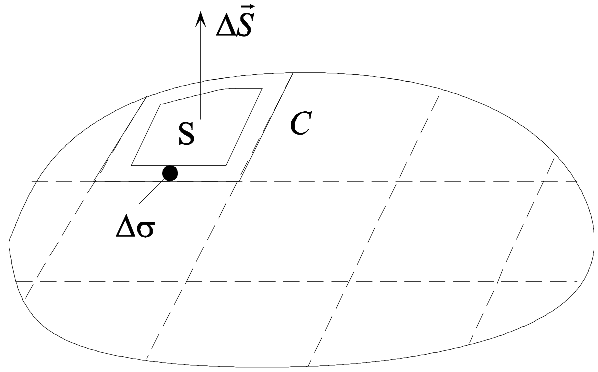

Figura 7.39: Distibuţie de curent împărţită în mici bucle de curent

$$\Delta\left(\delta W\right) = I \iint_{\Delta S} \delta\vec{B} d\vec{S} \tag{7.304}$$

Se exprimă inducţia magnetică în funcţie de potenţialul vector şi curentul în funcţie de densitatea de curent. Rezultă:

$$\Delta\left(\delta W\right) = j\Delta\sigma \iint_{\Delta S} \delta\left(\nabla\times\vec{A}\right) d\vec{S} \tag{7.305}$$

Aplicând teorema lui Stokes se poate scrie:

$$\Delta\left(\delta W\right) = j\Delta\sigma \oint_{C} \left(\delta\vec{A}\right) d\vec{l} \tag{7.306}$$

Cum $j\Delta\sigma d\vec{l} = \vec{j}dv$, $d\vec{l}$ fiind paralel cu $\vec{j}$ suma peste toate aceste bucle va fi o integrală de volum astfel încât lucrul mecanic pentru întreaga densitate de curent este:

$$\delta W = \iiint \left(\delta\vec{A}\right)\vec{j}dv \tag{7.307}$$

Pentru a obţine o expresie a lucrului mecanic care să conţină în locul lui $\vec{j}$ şi $\delta\vec{A}$ vectorii câmpului magnetic se foloseşte legea lui Ampère $\nabla\times\vec{H} = \vec{j}$. Relaţia 7.307 devine:

$$\delta W = \iiint \delta\vec{A}\left(\nabla\times\vec{H}\right)dv \tag{7.308}$$

Se ţine cont de relaţia:

$$\nabla\left(\vec{H}\times\delta\vec{A}\right)=\delta\vec{A}\left(\nabla\times\vec{H}\right)-\vec{H}\left(\nabla\times\delta\vec{A}\right)$$

Atunci:

$$\delta W=\iiint\left[\vec{H}\left(\nabla\times\delta\vec{A}\right)+\nabla\left(\vec{H}\times\delta\vec{A}\right)\right]dv \tag{7.309}$$

Al doilea termen din 7.309 se anulează la infinit deoarece $\vec{H}$ şi $\vec{A}$ se presupun nule. Atunci lucrul mecanic este:

$$\delta W=\iiint\vec{H}\delta\vec{B}dv \tag{7.310}$$

Dacă presupunem medii liniare (neferomagnetice):

$$\vec{H}\delta\vec{B}=\frac{1}{2}\delta\left(\vec{H}\vec{B}\right)$$

Când câmpul variază de la zero la o valoarea finită se obţine pentru energia câmpului magnetic formula:

$$W=\frac{1}{2}\iiint\vec{H}\vec{B}dv \tag{7.311}$$

Modificarea energiei magnetice atunci când un corp cu permeabilitatea μ_1 este plasat într-un mediu magnetic ale cărui surse sunt fixe se poate rezolva în analogie cu modificare energiei câmpului electrostatic când într-un câmp ale cărui surse sunt fixe se aduce un corp dielectric.

Dacă în mediu inducţia câmpului magnetic este $\vec{B}_0$, şi intensitatea este $\vec{H}_0$ iar după introducerea corpului de permitivitate μ vectorii câmpului magnetic devin $\vec{B}$ şi $\vec{H}$, modificarea energiei este dată de:

$$W=\frac{1}{2}\iiint_V\left(BH_0-HB_0\right)dv \tag{7.312}$$

unde integrala se extinde peste volumul corpului.

7.6 Ecuaţiile Maxwell

Ecuaţiile Maxwell reprezintă formularea matematică a principalelor postulate ale electrodinamicii clasice. Ele sunt un sistem complet de ecuaţii în sensul că determină univoc câmpul electromagnetic. Ele sunt valabile în anumite situaţii, şi anume atunci când corpurile materiale sunt imobile iar constantele de material ε , μ , σ nu depind de timp sau de intensitatea câmpurilor. Se face abstracţie de prezenţa unor materiale ce prezintă momente magnetice dipolare permanente. Nu se ia în considerare dependenţa constantelor de material de temperatură. Aceste ecuaţii se exprimă sub forma unor legi generale precum şi a unor legi de material.

7.6.1 Legea fluxului electric

Este legea care ilustrează legătura dintre câmpul electric şi sursele sale. Sub formă diferenţială ea este dată de relaţia:

$$\nabla \vec{D} = \rho_l \tag{7.313}$$

unde ρ_l este densitatea de sarcini libere. Sub formă integrală această lege se scrie:

$$\iint_S \vec{D} d\vec{S} = \iiint_V \rho_l dv \tag{7.314}$$

unde S este suprafaţa ce mărgineşte volumul V.

În vid $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$. Rezultă:

$$\iint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dV \tag{7.315}$$

şi

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{7.316}$$

7.6.2 Legea fluxului magnetic

Forma diferenţială a legii este :

$$\nabla \vec{B} = 0 \tag{7.317}$$

iar forma integrală este:

$$\iint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \tag{7.318}$$

unde S este o suprafaţă închisă. Ecuaţiile de mai sus sunt o consecinţă a faptului că liniile de câmp sunt închise. Legea arată inexistenţa sarcinilor magnetice libere.

7.6.3 Legea inducţiei electromagnetice

Forma diferenţială este:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{7.319}$$

iar forma integrală este

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} d\vec{S} \tag{7.320}$$

Curba închisă C mărgineşte suprafaţa S care nu este o suprafaţă închisă.

Această lege arată că un câmp magnetic variabil în timp produce un câmp electric. Sub formă integrală legea confirmă observaţiile experimentale: tensiunea electromotoare indusă într-un circuit este egală cu viteza de variaţie a fluxului magnetic prin suprafaţa circuitului.

7.6.4 Legea circuitului magnetic. Curent de deplasare

Legea stabileşte că câmpul magnetic poate fi produs de curenţi electrici şi de câmpuri electrice variabile în timp. Pentru curenţi staţionari această lege este:

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \iint_S \vec{j} d\vec{S} \tag{7.321}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} \tag{7.322}$$

Maxwell a fost primul care a sesizat unele dificultăţi ridicate de ecuaţiile de mai sus. Să aplicăm această lege succesiv pentru curbele C_1 , C_2 , ... a căror lungime tinde la zero (Fig. 7.40).

Atunci suprafeţele S_1 , S_2 ,... mărginite de curbele C_1 , C_2 , ... tind către o suprafaţa închisă şi finită iar:

$$\lim \oint_C \vec{H} d\vec{l} = 0 \tag{7.323}$$

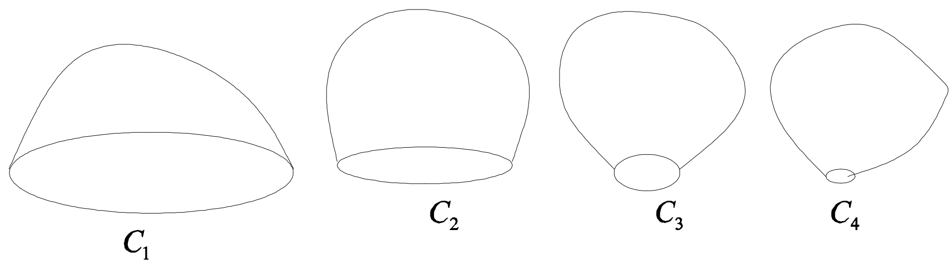

Figura 7.40: Curbe a căror lungime tinde la zero

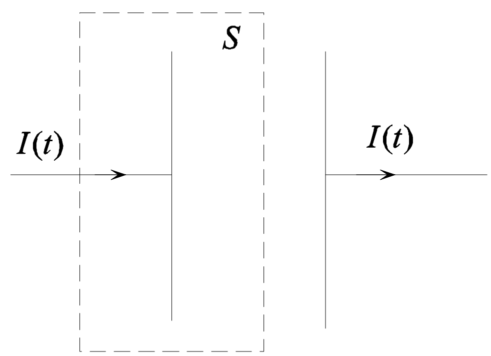

Figura 7.41: Încărcarea unui condensator

Rezultă că prin suprafaţă închisă S:

$$\iint_S \vec{j} d\vec{S} = 0 \tag{7.324}$$

Integrala de suprafaţă din relaţia 7.321 reprezintă curentul total ce iese din suprafaţa S. Egalitatea 7.324 arată că printr-o suprafaţă închisă curentul net este nul. Această situaţie este valabilă doar în cazul curenţilor staţionari. Există şi cazuri când acest lucru nu se petrece.

Să considerăm de exemplu încărcarea unui condensator (Fig. 7.41).

Fie o suprafaţă S închisă care înconjoară una din armături. Viteza cu care creşte sarcina pe această armătură este:

$$\frac{dq}{dt} = i(t) \tag{7.325}$$

Atunci:

$$\iint_S \vec{j}d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} \neq 0 \tag{7.326}$$

Deoarece curentul iese prin suprafaţă, integrala este negativă $\vec{j}$ fiind îndreptat înspre interiorul suprafeţei iar $d\vec{S} = \vec{n}dS$ spre exterior. Cum

$$q = \iint_S \vec{D}d\vec{S} \tag{7.327}$$

rezultă:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\iint_S \vec{D}d\vec{S} \tag{7.328}$$

Atunci:

$$\iint_S \vec{j}d\vec{S} + \frac{d}{dt}\iint_S \vec{D}d\vec{S} = 0 \tag{7.329}$$

Termenul al doilea din relaţia 7.329 are dimensiune de curent şi poartă numele de curent de deplasare.

Ecuaţia de mai sus este legea de consevare a sarcinii. O formulare mai generală a legii circuitului magnetic se obţine dacă în relaţia 7.321 se înlocuieşte $\iint_S \vec{j}d\vec{S}$ cu $\iint_S \vec{j}d\vec{S} + \frac{d}{dt}\iint_S \vec{D}d\vec{S}$. Se obţine:

$$\oint_C \vec{H}d\vec{l} = \iint_S \vec{j}d\vec{S} + \frac{d}{dt}\iint_S \vec{D}d\vec{S} \tag{7.330}$$

sau scriind relaţia în formă diferenţială:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \tag{7.331}$$

Aceste ultime două relaţii arată că un câmp magnetic poate fi generat de un curent electric şi de un câmp electric variabil în timp.

Dacă se consideră situaţia din vid $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ şi $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$ ecuaţia 7.331 devine:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \tag{7.332}$$

iar ecuaţia 7.330 devine:

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_0\iint_S \vec{j}d\vec{S} + \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\iint_S \vec{E}d\vec{S} \tag{7.333}$$

7.6.5 Legile de material

Experimental se constată existenţa unor relaţii între $\vec{P}$ şi $\vec{E}$, $\vec{H}$ şi $\vec{M}$ şi între $\vec{j}$ şi $\vec{E}$. Ele sunt determinate de starea mediului.

Legătura dintre $\vec{P}$ şi $\vec{E}$

În general densitatea de polarizare $\vec{P}$ este o sumă formată din doi termeni:

$$\vec{P} = \vec{P}_p + \vec{P}_t \tag{7.334}$$

Termenul $\vec{P}_p$ este polarizarea permanentă şi este independentă de existenţa câmpului electric (se poate obţine o polarizare permanentă tensionând pe o anumită direcţie un cristal piezoelectric).

Termenul $\vec{P}_t$ poartă numele de polarizare temporală şi este determinat de acţiunea câmpului electric.

$$\vec{P}_t = \vec{P}_t\left(\vec{E}\right) \tag{7.335}$$

Astfel în mediile anizotrope dar liniare:

$$\begin{aligned}
P_x &= \varepsilon_0\left(\chi^e_{xx}E_x + \chi^e_{xy}E_y + \chi^e_{xz}E_z\right)\\
P_y &= \varepsilon_0\left(\chi^e_{yx}E_x + \chi^e_{yy}E_y + \chi^e_{yz}E_z\right)\\
P_z &= \varepsilon_0\left(\chi^e_{zx}E_x + \chi^e_{zy}E_y + \chi^e_{zz}E_z\right)
\end{aligned} \tag{7.336}$$

Mărimile χ^e_{ij} unde $i\ ,\ j = x\ ,\ y\ ,\ z$ sunt componentele unui tensor simetric, denumit tensorul susceptibilităţii electrice[2]. Există un anumit sistem de referinţă în care tensorul respectiv are diferite de zero doar componentele pe diagonală. Relaţile 7.336 se pot scrie condensat:

$$\vec{P}_t = \varepsilon_0\overline{\overline{\chi^e}}\vec{E} \tag{7.337}$$

Într-un mediu omogen şi izotrop mărimea tensorială $\overline{\overline{\chi^e}}$ devine un scalar χ_e.

$$\vec{P} = \varepsilon_o\chi_e\vec{E} \tag{7.338}$$

[2] Tensorul este simetric $\chi^e_{ij} = \chi^e_{ji}$

În cazul în care nu există polarizare permanentă pentru mediile anizotrope liniare, inducţia câmpului electric se scrie că:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \overline{\overline{\chi^e}} \vec{E} = \varepsilon_0 \left(1 + \overline{\overline{\chi^e}} \right) \vec{E} = \varepsilon_0 \overline{\overline{\varepsilon}} \vec{E} \tag{7.339}$$

unde

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = 1 + \overline{\overline{\chi^e}}$$

este tensorul permitivităţii relative a mediului respectiv.

În cazul mediilor izotrope fără polarizare permanentă

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \tag{7.340}$$

iar permitivitatea relativă este un scalar:

$$\varepsilon = 1 + \chi_e$$

Legătura dintre $\bar{H}$ şi $\vec{M}$

Densitatea de magnetizare a unui material este dată de suma a doi termeni:

$$\vec{M} = \vec{M}_p + \vec{M}_t \tag{7.341}$$

unde $\vec{M}_p$ este magnetizarea permanentă, independentă de câmpul magnetic şi $\vec{M}_t$ magnetizarea temporală, dependentă de câmpul magnetic. Corpurile feromagnetice prezintă magnetizare permanentă. Magnetizarea temporală se întâlneşte la toate corpurile şi în general are o valoare foarte mică:

$$\vec{M}_t = \vec{M}_t \left(\vec{H} \right) \tag{7.342}$$

În mediile anizotrope liniare fără magnetizare permanentă

$$\vec{M} = \vec{M}_t = \overline{\overline{\chi^m}} \vec{H} \tag{7.343}$$

unde $\overline{\overline{\chi^m}}$ este tensorul permeabilităţii magnetice. În cazul mediilor izotrope liniare tensorul degenerează într-un scalar:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

În cazul mediilor anizotrope fără magnetizare permanentă inducţia câmpului magnetic este:

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M}\right) = \mu_0 \left(1 + \overline{\overline{\chi^m}}\right) \vec{H} = \mu_0 \overline{\overline{\mu}} \vec{H} \tag{7.344}$$

unde $\overline{\overline{\mu}}$ este tensorul permeabilităţii relative.

În mediile izotrope liniare cei doi tensori devin scalari:

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M}\right) = \mu_0 \left(1 + \chi_m\right) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H} \tag{7.345}$$

7.6.6 Legătura dintre $\vec{j}$ şi $\vec{E}$

În mediile anizotrope şi liniare legătura dintre vectorii $\vec{j}$ şi $\vec{E}$ este dată de legea lui Ohm a cărei formă generală este:

$$\vec{j} = \overline{\overline{\sigma}} \left(\vec{E} + \vec{E}_i\right) \tag{7.346}$$

unde $\overline{\overline{\sigma}}$ este tensorul conductivitătii, iar $\vec{E}_i$ este intensitatea câmpurilor electrice de origine neelectrostatică (produse datorită neomogenităţilor de material sau de temperatură). $\vec{E}_i$ se numeşte câmp electric imprimat.

7.7 Potenţiale electromagnetice

Ecuaţiile lui Maxwell sunt un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi care leagă între ei vectorii câmpurilor electric şi magnetic. Ecuaţiile Maxwell împreună cu legile de material permit determinarea vectorilor câmpului electric şi ai câmpului magnetic în funcţie de ρ şi $\vec{j}$.

Ecuaţiile pot fi rezolvate ca atare pentru anumite situaţii simple. Uneori este convenabil să se introducă un potenţial scalar sau un potenţial vector.

Deoarece $\nabla\vec{B} = 0$ indiferent dacă câmpul magnetic este static sau dinamic putem defini vectorul inducţie câmp magnetic prin intermediul potenţialului vector

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{7.347}$$

Introducând 7.347 în relaţia 7.319 obţinem:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \vec{A}\right)$$

sau

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \qquad (7.348)$$

Dacă rotorul unei mărimi se anulează atunci acea mărime poate fi scrisă ca un gradient al unei funcţii scalare şi anume al potenţialului:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V \qquad (7.349)$$

Rezultă:

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (7.350)$$

Prin definirea lui $\vec{B}$ şi $\vec{E}$ în funcţie de potenţialele $\vec{A}$ şi V (relaţiile 7.347 şi 7.350) cele două ecuaţii omogene ale lui Maxwell 7.317 şi 7.319 sunt satisfăcute. Fie un mediu omogen şi izotrop în care ε_r şi μ_r sunt independente de intensităţile câmpului electromagnetic. Ne propunem să obţinem ecuaţiile satisfăcute de potenţialul vector $\vec{A}$ şi potenţialul scalar V. Din relaţiile 7.347 şi 7.350 se poate scrie:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = -\varepsilon \left(\nabla V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \qquad (7.351)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} = \frac{1}{\mu} \left(\nabla \times \vec{A} \right) \qquad (7.352)$$

Aplicând relaţiei 7.351 operatorul divergenţă şi considerând 7.313 se obţine:

$$\nabla \vec{D} = -\varepsilon \nabla \left(\nabla V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \rho \qquad (7.353)$$

De aici rezultă:

$$\Delta V + \nabla \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (7.354)$$

Aplicând relaţiei 7.352 operatorul rotor şi considerând 7.331 rezultă:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu}\nabla \times \vec{A}\right) = \vec{j} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

sau

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) + \varepsilon\mu\nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) + \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu\vec{j} \tag{7.355}$$

Dar:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \nabla\left(\nabla\vec{A}\right) - \Delta\vec{A}$$

rezultă

$$-\Delta\vec{A} + \nabla\left(\nabla\vec{A}\right) + \varepsilon\mu\nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) + \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu\vec{j}$$

sau

$$\Delta\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu\vec{j} \tag{7.356}$$

Se obţin astfel ecuaţiile 7.354 şi 7.356 pe care le satisfac cele două potenţiale, ecuaţii care sunt încă cuplate.

Decuplarea acestor două ecuaţii poate fi realizată ţinând cont de faptul că există o nedeterminare în definirea potenţialelor.

Astfel potenţialul vector al câmpului magnetic nu este modificat de transformarea

$$\vec{A}' \rightarrow \vec{A} + \nabla\Psi \tag{7.357}$$

iar potenţialul scalar de transformarea

$$V' \rightarrow V - \frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{7.358}$$

Acestea se numesc transformări de etalonare iar invarianţa câmpurilor în urma acestor transformări se numeşte condiţie de etalonare.

Invarianţa câmpurilor la transformarea de etalonare dă posibilitatea de a se lucra cu ecuaţii mai simple. O relaţie simplă este sugerată de forma ecuaţiei 7.356 în care termenul:

$$\nabla\left(\nabla\vec{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

poate fi anulat dacă se pune condiţia:

$$\nabla\vec{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial V}{\partial t}=0 \tag{7.359}$$

Această condiţie este numită condiţia lui Lorentz iar etalonarea respectivă poartă numele de etalonare Lorentz. Atunci ecuaţia satisfăcută de potenţialul vector este:

$$\Delta\vec{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{j} \tag{7.360}$$

Din condiţia de etalonare Lorentz obţinem:

$$\nabla\vec{A}=-\varepsilon\mu\frac{\partial V}{\partial t}$$

iar ecuaţia 7.354 devine:

$$\Delta V-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{7.361}$$

7.8 Condiţii la limită

Suprafeţele corpurilor constituie frontiere care separă medii ce au în general proprietăţi diferite. Ne propunem să studiem câmpurile în vecinătatea unor astfel de suprafeţe unde parametri ε , μ , şi σ se schimbă brusc.

7.8.1 Condiţiile la limită pentru componentele normale ale inducţiei câmpului electric şi inducţiei câmpului magnetic

Fie S suprafaţa de separaţie dintre mediile 1 şi 2. Se consideră din această suprafaţă un element ΔS suficient de mic. Se construieşte un cilindru de înălţime Δh situat în cele două medii (Fig. 7.42).

Suprafaţa ΔS se alege suficient de mică astfel încât pe bazele cilindrului considerat vectorul inducţie câmp magnetic să fie uniform.

Atunci aplicând legea lui Gauss se obţine:

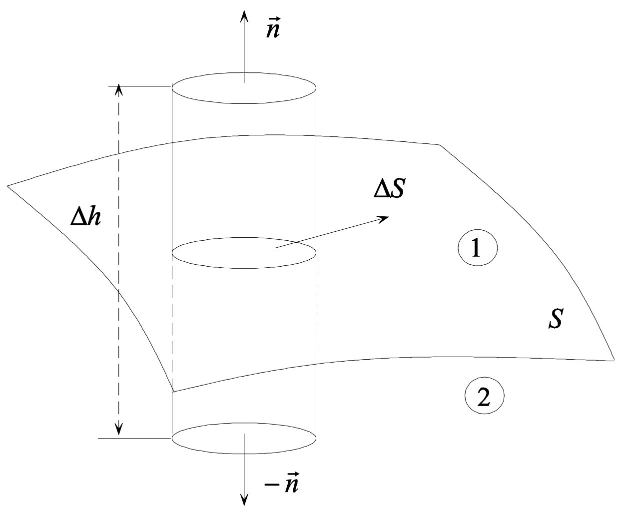

Figura 7.42: Construcţie pentru demonstrarea relaţiilor dintre componentele normale ale inducţiei câmpului electric şi componentele normale ale inducţiei câmpului magnetic la suprafaţa de separaţie dintre două medii.

$$\vec{D}_1\vec{n}\Delta S - \vec{D}_2\vec{n}\Delta S + \Phi_{lat} = \Delta q \tag{7.362}$$

unde Φ_{lat} este fluxul inducţiei câmpului electric prin suprafaţa laterală a cilindrului iar sarcina Δq este sarcina din interiorul cilindrului.

Se face înălţimea cilindrului să tindă la zero $\Delta h \to 0$. Atunci $\Phi_{lat} = 0$. Dacă admitem că poate exista sarcină şi pe suprafaţa ΔS atunci putem scrie:

$$\Delta q = \Delta q_v + \Delta q_s \tag{7.363}$$

unde Δq_s este sarcina de suprafaţă, iar Δq_v este sarcina din volumul cilindrului. Atunci când înăţimea tinde la zero şi sarcina de volum Δq_v va tinde la zero. Relaţia 7.362 devine:

$$\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right)\vec{n}\Delta S = \Delta q_s = \sigma\Delta S \tag{7.364}$$

unde σ este densitatea de sarcină de pe suprafaţă.

Rezultă:

$$\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right)\vec{n} = \sigma \tag{7.365}$$

Deoarece

$$\begin{aligned}\vec{D}_1\vec{n} &= D_{1n}\\ \vec{D}_2\vec{n} &= D_{2n}\end{aligned}$$

sunt componentele normale la suprafaţa de separaţie dintre cele două medii relaţia 7.365 se mai poate scrie ca:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$

Dacă pe suprafaţa de separaţie dintre cele două medii nu există sarcini electrice atunci:

$$D_{1n} = D_{2n}$$

adică componenta normală a inducţiei câmpului electric este continuă.

Pentru componentele normale ale inducţiei câmpului magnetic vom utiliza tot teorema lui Gauss ca şi în cazul anterior:

$$\vec{B}_1\vec{n}\Delta S - \vec{B}_2\vec{n}\Delta S + \Phi_{lat} = 0 \tag{7.366}$$

Se face înălţimea cilindrului să tindă la zero $\Delta h \to 0$. Atunci:

$$\left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right)\vec{n} = 0$$

Cum:

$$\vec{B}_1\vec{n} = B_{1n} \qquad ; \qquad \vec{B}_2\vec{n} = B_{2n}$$

unde B_{1n} şi B_{2n} sunt componentele normale ale inducţiei câmpului magnetic, rezultă:

$$B_{1n} = B_{2n}$$

La suprafaţa de separaţie a două medii componenta normală a vectorului inducţie câmp magnetic este continuă.

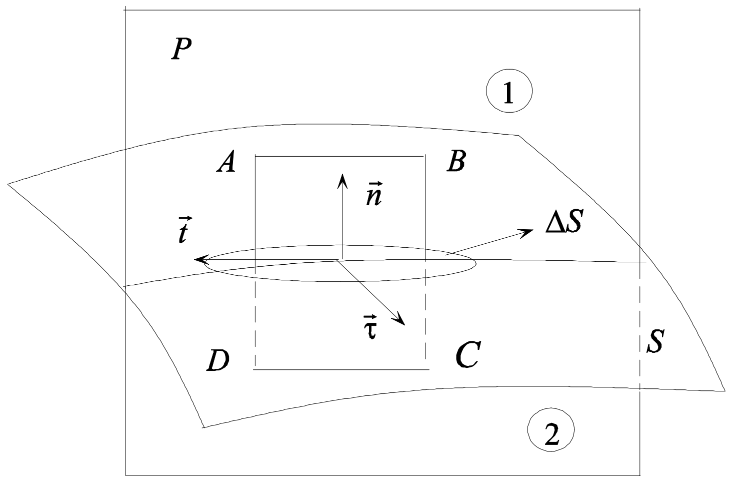

Figura 7.43: Construcţie pentru demonstrarea relaţiilor dintre componentele tangenţiale ale intensităţii câmpului electric şi componentele tangenţiale ale intensităţii câmpului magnetic la suprafaţa de separaţie dintre două medii

7.8.2 Condiţii la limită pentru componentele tangenţiale ale intensităţii câmpului electric şi intensităţii câmpului magnetic

Pentru a rezolva această problemă se face construcţia indicată în Fig. 7.43.

Fie S suprafaţa de separaţie dintre cele două medii. Secţionăm această suprafaţă cu un plan P care poate fi considerat perpendicular pe o porţiune mică ΔS din această suprafaţă. Construim în planul P un contur dreptunghiular ABCD care intersectează suprafaţa S în interiorul porţiunii ΔS. Se consideră AB=CD=Δl iar AD=BC=Δh laturile laterale fiind paralele cu normala $\vec{n}$ la suprafaţa de separaţie. Vectorul unitar al tangentei la linia de intersecţie dintre suprafaţa S şi planul P o notăm cu $\vec{t}$. Orientarea sa este astfel aleasă încât să verifice relaţia:

$$\vec{t} = \vec{\tau} \times \vec{n} \tag{7.367}$$

unde $\vec{\tau}$ este un vector normal la planul P.

Condiţiile la limită pentru componentele tangenţiale ale intensităţii câmpului electric

Se consideră circulaţia vectorului $\vec{E}$ pe conturul ABCD

$$\vec{E}_1\vec{t}\Delta l - \vec{E}_2\vec{t}\Delta l + C_{lat} = -\frac{\partial B}{\partial t}\Delta l\Delta h \tag{7.368}$$

În relaţia de mai sus am împărţit circulaţia vectorului $\vec{E}$ în trei părţi. Primii doi termeni corespund laturilor AB şi CD iar al treilea termen corespunde laturilor BC şi DA. Se micşorează inălţimea $\Delta h \to 0$, astfel încât laturile AB şi CD se confundă pe suprafaţa de separaţie; termenul C_{lat} se anulează. Rezultă:

$$\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right)\vec{t} = 0 \tag{7.369}$$

Pentru a interpreta această egalitate trebuie să ţinem cont că orientarea lui $\vec{t}$ pe suprafaţa de separaţie este arbitrară în raport cu intensitatea câmpului electric, deoarece putem roti planul P în raport cu normala $\vec{n}$. De aceea putem considera că $\vec{t}$ coincide cu direcţia proiectiei vectorului $\vec{E}$ pe S. Atunci:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1\vec{t} &= E_{1t}\\ \vec{E}_2\vec{t} &= E_{2t}\end{aligned}$$

unde E_{1t} şi E_{2t} sunt componentele tangenţiale ale câmpului electric în cele două medii. Rezultă:

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{7.370}$$

adică componenta tangenţială a vectorului intensitate câmp electric este continuă la suprafaţa de separaţie dintre două medii.

Egalitatea 7.369 poate fi pusă sub o altă formă ţinând cont de relaţia 7.367. Rezultă:

$$\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right)(\vec{\tau} \times \vec{n}) = \left[\vec{n} \times \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right)\right]\vec{\tau} = 0$$

Această egalitate nu mai depinde de sensul vectorului $\vec{\tau}$ care indică orientarea lui P. Atunci:

$$\vec{n} \times \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) = 0 \tag{7.371}$$

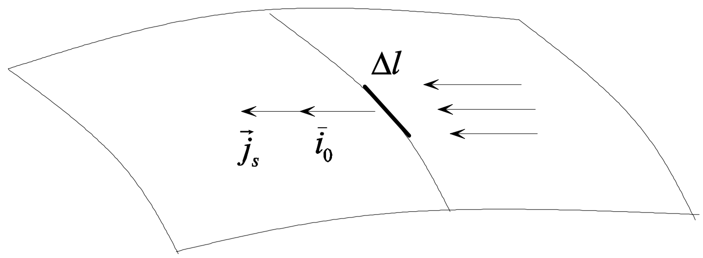

Figura 7.44: Densitatea curentului de suprafaţă

Formula 7.371 are avantajul de a include în ea un vector $\vec{n}$ perfect definit care nu depinde de sensul câmpului studiat.

Condiţiile la limită pentru componentele tangenţiale ale intensităţii câmpului magnetic.

Ca şi in cazul precedent se scrie ciculaţia vectorului $\vec{H}$ pe conturul ABCD

$$\vec{H}_1\vec{t}\Delta l - \vec{H}_2\vec{t}\Delta l + C_{lat} = -\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}\right)\vec{\tau}\Delta l\Delta h \tag{7.372}$$

unde C_{lat} este contribuţia laturilor laterale la circulaţia lui $\vec{H}$. Ca şi în cazurile anterioare se trece la limită ($\Delta h \to 0$), contribuţia laturilor BC şi DA la circulaţia vectorului $\vec{H}$ este nulă iar termenul $-\left(\partial \vec{D}/\partial t\right)\vec{\tau}\Delta l\Delta h$ se anulează. Termenul $\vec{j}\vec{\tau}\Delta l\Delta h$ se anulează dacă nu există curenţi de suprafaţă. Un curent de suprafaţă se caracterizează prin densitatea superficială

$$\vec{j}_s = \lim_{\Delta l \to 0} \vec{i}_0 \frac{\Delta I}{\Delta l} \tag{7.373}$$

unde $\vec{i}_0$ este versorul ce indică sensul curentului, iar Δl este un element al liniei ce este perpendiculară pe ΔI (Fig. 7.44)

Atunci

$$\vec{j}\vec{\tau}\Delta l\Delta h = \vec{\tau}\Delta l \int_{x_1}^{x_2} \vec{j} dx \tag{7.374}$$

unde $x_2 - x_1 = \Delta h$.

Atunci când $\Delta h \to 0$ conturul se reduce la un element Δl dar integrala nu se anulează deoarece porţiunea Δl este traversată de totalitatea curentului superficial. Atunci:

$$\vec{\tau}\Delta l \int_{x_1}^{x_2} \vec{j}dx \to \vec{\tau}\vec{j}_s \Delta l \tag{7.375}$$

Rezultă:

$$\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right)\vec{t} = \vec{j}_s\vec{\tau} \tag{7.376}$$

Ţinând cont de 7.367 relaţia 7.376 devine:

$$\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right)(\vec{\tau} \times \vec{n}) = \left[\vec{n} \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right)\right]\vec{\tau} = \vec{j}_s\vec{\tau}$$

Sau:

$$\vec{n} \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = \vec{j}_s \tag{7.377}$$

Rezultatul arată că în prezenţa unui curent pe suprafaţa de separaţie a două medii, vectorul intensitate câmp magnetic prezintă o discontinuitate. În absenţa curentului superficial componenta normală a intensităţii câmpului magnetic rămâne constantă:

$$H_{1t} = H_{2t} \tag{7.378}$$

7.9 Teorema Poynting şi conservarea energiei

7.9.1 Câmpul electromagnetic şi transformarea energiei

Fie $W(t)$ energia câmpului electromagnetic dintr-un volum V. Aceasta poate varia în timp. Dacă:

a) $dW/dt < 0$

energia câmpului electromagnetic se diminuează. Descreşterea energiei câmpului poate fi datorată absorţiei acesteia de către mediu, transformării în alt tip de energie sau emisiei de radiaţii electromagnetice. Dacă:

b) $dW/dt > 0$

are loc o creştere a energiei câmpului electromagnetic. Ea se poate realiza datorită existenţei unor surse în domeniul considerat precum şi datorită pătrunderii de radiaţii electromagnetice prin frontiera domeniului.

Pentru studiul energiei câmpului electromagnetic se va considera pentru început o sarcină pozitivă q într-un câmp electric $\vec{E}$. Asupra acesteia va acţiona o forţă $\vec{F} = q\vec{E}$. Lucrul mecanic efectuat de câmp când sarcina este deplasată pe distanţa $d\vec{l}$ este:

$$\delta L = q\vec{E}d\vec{l} \tag{7.379}$$

iar puterea consumată de câmp este:

$$P = \frac{\delta L}{dt} = q\vec{E}\frac{d\vec{l}}{dt} = q\vec{v}\vec{E} \tag{7.380}$$

Dacă se consideră că sarcina q ocupă volumul ΔV foarte mic atunci se poate exprima sarcina ca fiind distribuită cu o densitate ρ.

$$q = \rho\Delta V \tag{7.381}$$

Putem exprima energia consumată de câmp în domeniul ΔV ca fiind:

$$\Delta P = \rho\vec{v}\vec{E}\Delta V \tag{7.382}$$

Se poate astfel defini o densitate de putere consumată:

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta V} = \rho\vec{v}\vec{E} = \vec{j}\vec{E} \tag{7.383}$$

Cum:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \tag{7.384}$$

atunci densitatea de putere se poate scrie:

$$p = \sigma\vec{E}^2 \tag{7.385}$$

Puterea disipată într-un volum V este:

$$P = \iiint_V \vec{j}\vec{E}dv = \iiint_V \sigma\vec{E}^2 dv \tag{7.386}$$

Aceasta este legea lui Joule. Pentru a o exprima sub o formă mai cunoscută vom considera cazul unui domeniu sub formă cilindrică în care curentul curge de-a lungul axei sale. Atunci putem exprima puterea consumată astfel:

$$P = \int_l \int \int_S \vec{j}\vec{E}d\vec{l}d\vec{S} = (El)(jS) = UI \tag{7.387}$$

Pentru a considera acţiunea surselor, relaţia 7.384 se schimbă cu

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}_i\right) \tag{7.388}$$

Aceasta înseamnă că alături de câmpul electrostatic $\vec{E}$ există şi un câmp imprimat $\vec{E}_i$ care nu derivă dintr-un potenţial. Există mai multe cazuri in care pot apărea câmpurile imprimate:

a) câmpuri imprimate datorate neomogenităţilor de material şi neomogenităţilor de temperatura care dau efectele termoelectrice.

b) câmpuri electrice imprimate de natură electrochimică.

c) câmpuri electrice imprimate care apar datorită fenomenului de inducţie.

În acest caz densitatea de putere se poate scie ca:

$$p = \vec{j}\vec{E} = \frac{\vec{j}\left(\vec{j} - \sigma\vec{E}_i\right)}{\sigma} = \sigma^{-1}\vec{j}^{\,2} - \vec{j}\vec{E}_i \tag{7.389}$$

Rezultă că densitatea de putere poate fi pusă sub forma unei sume de doi termeni

$$p = p_p + p_s \tag{7.390}$$

Termenul $p_p = \sigma^{-1}\vec{j}^{\,2}$ este densitatea de putere pierdută de câmpul electromagnetic iar termenul $p_s = -\vec{j}\vec{E}_i$ reprezintă densitatea de putere care este câstigată de câmpul electromagnetic.

7.9.2 Ecuaţia de bilanţ energetic

Din legea circuitului magnetic rezultă:

$$\vec{j} = \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{7.391}$$

Atunci:

$$\iiint_V \vec{j}\vec{E}dv = \iiint_V \left[\vec{E}\left(\nabla \times \vec{H}\right) - \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right] dv \tag{7.392}$$

Folosind identitatea vectorială:

$$\nabla\left(\vec{E} \times \vec{H}\right) = \vec{H}\left(\nabla \times \vec{E}\right) - \vec{E}\left(\nabla \times \vec{H}\right)$$

şi legea lui Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

relaţia 7.392 devine:

$$\iiint_V \vec{j}\vec{E}dv = -\iiint_V \left[\nabla\left(\vec{E} \times \vec{H}\right) + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right] dv \tag{7.393}$$

Ne vom limita în continuare discuţia la mediile macroscopice care au proprietăţi liniare. Admitem că expresiile densităţilor de energie ale câmpului electric şi magnetic sunt valabile şi pentru câmpuri variabile în timp.

Notăm densitatea totală de energie a câmpului electromagnetic cu

$$u = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}\right) \tag{7.394}$$

Cum:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{7.395}$$

relaţia 7.393 se scrie:

$$\int_V \vec{j}\vec{E}dv = -\int_V \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\left(\vec{E} \times \vec{H}\right)\right] dv$$

Ţinând cont de 7.389

$$\iiint_V \left(\sigma^{-1}\vec{j}^2 - \vec{j}\vec{E}_i\right) dv = -\iiint \frac{\partial u}{\partial t}dv - \iint_\Sigma \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) d\vec{A}$$

sau

$$\frac{d}{dt}\iiint_V udv = \iiint_V \vec{j}\vec{E}_i dv - \iiint_V \sigma^{-1}\vec{j}^2 dv - \iint_\Sigma \left(\vec{E}\times\vec{H}\right) d\vec{A} \quad (7.396)$$

unde Σ este suprafaţa care înconjoară volumul V iar $d\vec{A}$ este elementul de suprafaţă.

Rezultă că variaţia energiei câmpului în unitatea de timp $\iiint_V (\partial u/\partial t)\, dv$ este datorată transformării energiei neelectrice în energie a câmpului electromagnetic $\iiint_V \vec{j}\vec{E}_i dv$ pierderilor de energie prin efect Joule $\iiint_V \sigma^{-1}\vec{j}^{\,2} dv$ şi transferului de energie electromagnetică prin suprafaţa Σ dată de integrala

$$\iint_\Sigma \left(\vec{E}\times\vec{H}\right) dS.$$

Vectorul

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} \quad (7.397)$$

poartă numele de vector Poynting şi el trebuie interpretat ca densitatea fluxului de putere transferată prin suprafaţa Σ. Deoarece energia dintr-un volum V este $W = \int_V udv$ relaţia 7.396 se mai poate scrie:

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_V \vec{j}\vec{E}_i dv - \iiint_V \sigma^{-1}\vec{j}^{\,2} dv - \iint_\Sigma \vec{S} d\vec{A} \quad (7.398)$$

Relaţia 7.398 poartă denumirea de Teorema Poynting.

Formula 7.398 mai poate fi scrisă sub formă diferenţială astfel:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \vec{j}\vec{E}_i - \sigma^{-1}\vec{j}^{\,2} - \nabla\vec{S} \quad (7.399)$$