Capitolul 4

Mecanică analitică

4.1 Introducere

Mecanica analitică a fost dezvoltată cu scopul de a se putea rezolva problemele de mecanică relativ complicate. Ea a fost rezultatul cercetărilor efectuate mai ales de matematicieni precum Lagrange, Euler, Hamilton.

O caracteristică importantă a acestei discipline este înlocuirea coordonatelor carteziene prin coordonate generalizate.

Ecuaţiile obţinute se exprimă diferit de cele ale mecanicii newtoniene. Ele sunt ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi şi al doilea. Rezultatele ce se obţin sunt identice cu cele obţinute când se utilizează ecuaţiile mecanicii newtoniene.

Principiile mecanicii analitice se exprimă în alt mod, formularea acestora fiind mai complexă, interpretarea fizică fiind mai puţin evidentă.

Principiile mecanicii analitice sunt de două feluri:

a) principii diferenţiale, care studiază comportarea sistemului pornind de la deplasările elementare ale acestuia, deplasări care pot fi reale sau virtuale.

b) principii integrale, care studiază comportarea sistemului pornind de la deplasări finite ale acestuia.

4.1.1 Legături

Starea de mişcare a unui sistem de N puncte materiale este definită dacă în orice moment de timp se cunosc poziţiile şi vitezele tuturor particulelor adică a vectorilor $\vec{r}_i$ şi $\dfrac{d\vec{r}_i}{dt}$ ($i = 1, 2, ..., N$).

Pentru aceasta este necesar să se rezolve sistemul de ecuaţii diferenţiale:

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}^{(i)} + \vec{F}_i^{(e)} = \vec{F}_i \qquad i = 1, 2, ..., N \tag{4.1}$$

În ecuaţiile de mai sus $\vec{F}_{ij}^{(i)}$ sunt forţe interne ale sistemului, iar $\vec{F}_i^{(e)}$ este rezultanta forţelor externe ce acţionează asupra particulei i. Această formulare nu simplifică mult problema, deoarece este necesar să se ia în consideraţie constrângerile care limitează mişcarea sistemului. Aceste constrângeri poartă numele de legături. Exemple de legături pot fi uşor arătate. Astfel moleculele unui gaz dintr-un vas sunt constrânse de pereţii vasului să se deplaseze în interiorul acestuia. O particulă plasată pe suprafaţa unei sfere se poate deplasa doar pe suprafaţa acesteia sau în regiunea externă a sferei.

Fie un sistem de N puncte materiale notate cu A_1 , A_2 ,..., A_n.

Spunem că sistemul este supus la legături dacă sunt impuse condiţii asupra variabilelor $\vec{r}_i$ şi $\dfrac{d\vec{r}_i}{dt}$. Aceste restricţii se exprimă prin anumite relaţii care au forma unor egalităţi

$$f\ \left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...\vec{r}_N\ ,\ \frac{d\vec{r}_1}{dt}, \frac{d\vec{r}_2}{dt}, ..., \frac{d\vec{r}_N}{dt}\ ,\ t\right) = 0 \tag{4.2}$$

şi care poartă numele de legături *bilaterale*, sau prin inegalităţi de forma

$$f\ \left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...\vec{r}_N\ ,\ \frac{d\vec{r}_1}{dt}, \frac{d\vec{r}_2}{dt}, ..., \frac{d\vec{r}_N}{dt}\ ,\ t\right) \geqslant 0 \tag{4.3}$$

care poartă numele de legături *unilaterale*.

Aceasta nu este singurul mod de clasificare al legăturilor.

Dacă timpul nu este conţinut explicit în expresia legăturii, aceasta poartă numele de legătură *scleronomă*. Dacă timpul este conţinut în mod explicit, legătura este *reonomă*.

Exemplu:

Fie cazul unui punct material ce se deplasează numai pe suprafaţa unei sfere de rază R, al cărui centru are coordonatele $(x_0\ ,\ y_0\ ,\ z_0)$. Atunci legătura se exprimă astfel:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \tag{4.4}$$

Dacă sfera pe care deplasează punctul material este în repaus legătura este scleronomă. Dacă sfera nu este în repaus faţă de sistemul inerţial considerat, atunci coeficienţii x_0 , y_0 , z_0 care apar în ecuaţia legăturii sunt funcţii de timp astfel că legătura este reonomă. În aceste cazuri se consideră cunoscută mişcarea corpurilor care asigură legătura.

Dacă legătura se exprimă printr-o egalitate în care nu apar vitezele

$$f\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...\vec{r}_N \quad, \ t\right) = 0 \tag{4.5}$$

legătura poartă numele de legătură *olonomă*. În celelalte cazuri legătura poartă numele de legătură *neolonomă*.

Legăturile exprimate prin egalităţi care conţin vitezele particulelor poartă numele de legături cinematice sau dinamice. Un interes particular prezintă legăturile descrise de expresii care sunt diferenţiale totale exacte şi care depind liniar de componentele vitezelor

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{g}_j\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...\vec{r}_N \quad, t\right) \frac{d\vec{r}_j}{dt} + g_0\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...\vec{r}_N \ , t\right) = 0 \tag{4.6}$$

Se observă că deoarece ecuaţia 4.5 este satisfăcută de soluţiile ecuaţiilor de mişcare la orice moment de timp, prin derivarea acesteia în raport cu timpul se poate scrie relaţia:

$$\sum_{j=1}^{N} \nabla_j f \ \left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...\vec{r}_N \ , \ t\right) \frac{d\vec{r}_j}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{4.7}$$

Ecuaţia 4.6 se obţine din ecuaţia 4.7 în cazul particular când

$$\vec{g}_j\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...\vec{r}_N \quad, \ t\right) = \nabla_j f \ \left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...\vec{r}_N \ , \ t\right) \tag{4.8}$$

unde

$$\nabla_j f \ \left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...\vec{r}_N \quad, t\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y_j}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z_j}\vec{e}_z \tag{4.9}$$

iar

$$g_0\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...\vec{r}_N \quad, \ t\right) = \frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.10}$$

În acest caz expresia legăturii descrisă de relaţia 4.6 este integrabilă. Legăturile diferenţiale integrabile sunt tot legături olonome.

Totuşi o legătură descrisă de relaţia 4.6 nu este complet echivalentă cu cea descrisă de relaţia 4.5 deoarece prin integrarea acesteia se obţine:

$$f\ \left(\vec{r}_j\ ,\ t\right) = C \tag{4.11}$$

unde C este o constantă arbitrară.

Legăturile exprimate prin forme integrabile poartă numele de legături *Pffaf*. Importanţa lor constă în faptul că un sistem caracterizat de astfel de legături poate fi tratat ca şi un sistem olonom.

În continuare ne vom ocupa numai de sisteme de puncte materiale care sunt supuse unor legături olonome.

4.1.2 Grade de libertate; coordonate generalizate

Fie un sistem de N puncte materiale pentru care există s legături de forma

$$f_k\left(\vec{r}_1\ ,\ \vec{r}_2\ ,...,\vec{r}_N\ ,t\right) = 0 \tag{4.12}$$

unde $k = 1\ ,\ 2\ ,...,\ s$.

Numărul s nu poate fi oricât de mare. Relaţiile 4.12 reprezintă un sistem de ecuaţii în $(x_i\ ,\ y_i\ ,z_i)$ unde $i = 1\ ,\ 2\ ,...,\ N$ care este incompatibil dacă $s > 3N$. Daca $s = 3N$ sistemul poate fi rezolvat în cooordonatele $(x_i\ ,\ y_i\ ,z_i)$; când timpul nu apare explicit, coordonatele punctelor materiale capătă valori fixe adică legăturile obligă sistemul să stea în repaus.

Dacă $s < 3N$ sistemul de ecuaţii 4.12 este nedeterminat şi înseamnă că numai $3N - s$ coordonate sunt independente, restul coordonatelor putând fi determinate în funcţie de primele prin rezolvarea sistemului 4.12. Numărul de variabile independente care descriu mişcarea sistemului este:

$$l = 3N - s \tag{4.13}$$

Acest număr reprezintă numărul de grade de libertate.

Se pot alege ca variabile independente l coordonate carteziene, celelalte rezultând din relaţiile de legătură. În cele ce urmează se vor considera toate coordonatele carteziene funcţii de l variabile independente q_k unde $k = 1\ ,\ 2\ ,...,\ l$ şi eventual de timp:

$$\vec{r}_j = \vec{r}_j\left(q_1, q_2, ..., q_l\ ,\ t\right) = \vec{r}_j\left(q_k\ ,\ t\right) \quad ; \quad j = 1, 2, ..., n \tag{4.14}$$

Prin q_k se notează ansamblul celor l variabile independente. Variabilele independente nu au obligatoriu dimensiunea unei lungimi şi se numesc coordonate generalizate ale sistemului. Ele au următoarele proprietăţi:

1) Variind independent variabilele q_k, variabilele $\vec{r}_j$ date de relaţiile 4.14 capătă valori ce satisfac relaţiile de legătură 4.12 .

2) Se pot obţine relaţiile inverse

$$q_k = q_k\left(\vec{r}_1\ ,\ \vec{r}_2\ , ..., \vec{r}_N\ , t\right) \quad k = 1\ ,\ 2\ , ...,\ l \tag{4.15}$$

în care vectorii $\vec{r}_1\ ,\ \vec{r}_2\ , ..., \vec{r}_N$ pot lua valorile permise doar de legături.

Variabilelor independente q_k li se poate asocia un spaţiu cu l dimensiuni, numit spaţiul configuraţiilor. Fiecărui punct din acest spaţiu îi corespunde un ansamblul de valori q_k $(k = 1\ ,\ 2\ , ...,\ l)$. Atunci unei configuraţii instantanee a sistemului de particule îi corespunde un punct din spaţiul configuraţiilor, denumit punct reprezentativ.

În timp configuraţia se schimbă astfel că punctul reprezentativ îsi schimbă poziţia în spaţiul configuraţiilor. El descrie o curbă numită *traiectorie generalizată* a sistemului. Funcţiile $q_k = q_k(t)$ $(k = 1\ ,\ 2\ , ...,\ l)$ reprezintă ecuaţiile parametrice ale traiectoriei generalizate.

4.1.3 Forţe de legătură

Trebuie observat că existentă legăturilor nu mai este compatibilă cu ecuaţiile de mişcare de forma:

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i\left(\vec{r}_1\ ,\ \vec{r}_2\ , ..., \vec{r}_n\ , \frac{d\vec{r}_1}{dt}\ ,\ \frac{d\vec{r}_2}{dt}\ , ..., \frac{d\vec{r}_n}{dt}\ , t\right) \tag{4.16}$$

unde prin $\vec{F}_i$ se înţelege forţa ce acţionează asupra particulei i, datorată celorlalte particule ale sistemului şi eventual unor câmpuri externe. Relaţiile de mai sus rămân valabile doar în cazul sistemelor nesupuse la legături. Dacă se derivează de două ori relaţiile 4.2 se obţin egalităţi în care apar acceleraţiile, vitezele şi coordonatele de poziţie. Dacă se înlocuiesc acceleraţiile cu valorile lor care rezultă din relaţiile 4.16 se obţin relaţii în care apar şi forţele $\vec{F}_i$. Deoarece forţele $\vec{F}_i$ nu sunt determinate de legături aceste egalităţi în general nu sunt satisfăcute.

Din acest motiv se ajunge la concluzia că existenţa legăturilor atrage după sine apariţia unor noi forţe $\vec{R}_i$ cu $i = 1\ ,\ 2\ , ...,\ N$ numite forţe de legătură. Atunci relaţiile 4.16 devin:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i + \vec{R}_i \tag{4.17}$$

Rezultă că forţele care acţionează asupra particulelor dintr-un sistem se împart în două categorii:

- forţe aplicate $\vec{F}_i$ care sunt cunoscute;

- forţe de legătură $\vec{R}_i$ care în general pot fi determinate numai după ce se cunoaşte starea sistemului.

Un exemplu simplu ilustrează acest fapt. Se consideră un obiect aflat pe o masă. Asupra lui acţionează forţa de greutate. Masa însă îl împiedică să cadă astfel că acceleraţia sa este zero. Acest fapt este posibil numai dacă masa acţionează asupra obiectului cu o forţă egală în mărime cu greutatea lui şi de sens contrar acesteia. Forţa aplicată va fi atunci greutatea iar forţa de legătură va fi reacţiunea mesei.

Fie o particulă care se deplasează pe o curbă sau pe o suprafaţă. Forţa de legătură poate fi descompusă într-o componentă aflată în planul tangent la suprafaţa respectivă $\vec{R}_t$ şi o altă componentă $\vec{R}_n$ normală pe acest plan. În general componenta tangenţială corespunde unei frecări între punctul material şi curba sau suprafaţa pe care se mişcă.

Dacă componenta tangenţială a forţei de legătură este nulă atunci spunem că legătura este ideală.

4.2 Formalismul Lagrange

4.2.1 Principiul lucrului mecanic virtual - principiul lui d'Alembert

Fie un sistem de puncte materiale supus unor legături olonome ideale:

$$f_i \left(\vec{r}_1 \,,\; \vec{r}_2 \,, ..., \vec{r}_N \,, t \right) = 0 \tag{4.18}$$

Deoarece legăturile sunt perfecte componentele tangenţiale ale forţelor de legătură sunt nule. Dacă se deplasează în mod arbitrar orice punct material al sistemului de-a lungul suprafeţei sau curbei pe care acest punct este obligat să se găsească în baza legăturilor impuse, forţele de legătură rămân normale la suprafaţa sau la curba considerată. Atunci lucrul mecanic al forţelor de legătură în cursul deplasării este nul. Totuşi afirmaţia precedentă este adevărată numai dacă suprafeţele sau curba pe care este obligat corpul să se mişte nu se deplasează în timp. În caz contrar deplasarea poate avea o componentă în direcţia normalei, adică de-a lungul forţei de legătură şi lucrul mecanic al acesteia ar fi diferit de zero.

Se defineşte deplasare virtuală a sistemului orice variaţie continuă a coordonatelor $(x_j\ ,\ y_j\ , z_j)$ cu $j = 1\ ,\ 2\ , ...,\ N$ astfel încât condiţiile de legătură să fie satisfăcute la acelaşi moment de timp. Ne interesează deplasările virtuale infinitezimale adică trecerea de la anumite valori $\vec{r}_j$ la $\vec{r}_j + \delta\vec{r}_j$, trecere compatibilă cu legăturile date. Atunci şi coordonatele $\vec{r}_j + \delta\vec{r}_j$ trebuie să satisfacă relaţiile de legatură 4.18.

$$f_i\left(\vec{r}_j + \delta\vec{r}_j\ ,\ t\right) = 0 \quad i = 1, 2, ..., s \tag{4.19}$$

Se dezvoltă în serie relaţiile 4.19 după valorile $\delta x_i\ , \delta y_i\ , \delta z_i$ şi se obţine:

$$f_i\left(\vec{r}_j + \delta\vec{r}_j\ ,\ t\right) = f_i\left(\vec{r}_j\right) + \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\delta x_j + \frac{\partial f_i}{\partial y_j}\delta y_j + \frac{\partial f_i}{\partial z_j}\delta z_j\right) = 0 \tag{4.20}$$

Ţinând cont de relaţiile 4.18 rezultă:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\delta x_j + \frac{\partial f_i}{\partial y_j}\delta y_j + \frac{\partial f_i}{\partial z_j}\delta z_j\right) = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, ..., s \tag{4.21}$$

Acestea sunt condiţiile ca deplasarea $(\delta x_j\ , \delta y_j\ , \delta z_j)$ să fie o deplasare virtuală în sensul definiţiei date mai sus.

Deoarece forţele de legătură sunt perpendiculare pe suprafeţele sau curbele pe care se află particulele în cursul unei deplasări virtuale lucrul mecanic al forţelor de legătură este nul:

$$\sum_{j=1}^{N}\vec{R}_j\delta\vec{r}_j = 0 \tag{4.22}$$

Această afirmaţie constituie enunţul principiului lucrului mecanic virtual (d'Alembert).

Trebuie remarcat că deplasarea virtuală nu are nimic de-a face cu o deplasare reală în cursul mişcării sistemului.

Înmulţind relaţiile 4.17 cu $\delta\vec{r}_i$ şi sumând se obţine:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i\delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i\delta\vec{r}_i \tag{4.23}$$

Dacă se ţine cont de 4.22 relaţia de mai sus devine:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i\delta\vec{r}_i \tag{4.24}$$

Astfel principiul lucrului mecanic virtual se poate scrie:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} - \vec{F}_i \right) \delta\vec{r}_i = 0 \tag{4.25}$$

4.2.2 Forţe generalizate

Fie un sistem de N particule supuse la s legături date de relaţiile 4.12 pentru care putem alege $l = 3N - s$ coordonate generalizate $q_k = q_k(\vec{r}_1\ ,\ \vec{r}_2\ , ..., \vec{r}_N\ , t)$ care joacă rolul unor parametri de mişcare ai sistemului. În acest caz o deplasare virtuală infinitezimală a sistemului se poate obţine prin varierea la un moment dat a coordonatele generalizate q_k:

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k \quad ; \quad i = 1\ ,\ 2\ , ...,\ N \tag{4.26}$$

Lucrul mecanic efectuat pentru o astfel de deplasare a sistemului este:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k \ = \sum_{k=1}^{l} Q_k\delta q_k \tag{4.27}$$

unde:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} \tag{4.28}$$

Mărimea Q_k poartă numele de forţă generalizată corespunzătoare coordonatei generalizate q_k şi în general ea depinde de coordonatele generalizate şi de vitezele generalizate:

$$Q_k = Q_k\left(q_1, q_2, ...q_l\ ,\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_l\ ,\ t\right) \tag{4.29}$$

unde în expresia 4.29 am folosit pentru derivata temporală notaţia

$$\frac{dq_k}{dt} = \dot{q}_k$$

Mărimile $\dot{q}_k \quad (k = 1, 2, ...l)$ poartă numele de viteze generalizate.

Forţele generalizate nu au întotdeauna dimensiunile unei forţe (adică ele nu se măsoară în newtoni).

Dacă forţele $\vec{F}_j$ derivă dintr-un potenţial:

$$\vec{F}_j = -\nabla_j U \tag{4.30}$$

Atunci:

$$Q_k = -\sum_{j=1}^{N} \left(\nabla_j U\right) \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} \tag{4.31}$$

sau

$$Q_k = -\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial z_j}\frac{\partial z_j}{\partial q_k} \right) \tag{4.32}$$

Astfel:

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} \tag{4.33}$$

În cazul sistemelor conservative, deoarece energia potenţială nu depinde de vitezele generalizate, nici forţele generalizate nu vor depinde de vitezele generalizate.

4.2.3 Ecuaţiile Lagrange

În cele ce urmează se consideră un sistem de puncte materiale supuse unor legături olonome. Se înlocuiesc relaţiile 4.26 care corelează deplasările virtuale în coordonate carteziene cu cele în coordonate generalizate, în relaţia 4.25. Atunci:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}-\vec{F}_i\right)\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k=0 \tag{4.34}$$

Relaţia 4.34 se mai poate scrie:

$$\sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k-\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{l}\vec{F}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k=0 \tag{4.35}$$

sau

$$\sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}-Q_k\right)\delta q_k=0 \tag{4.36}$$

În virtutea independenţei deplasărilor virtuale δq_k:

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}-Q_k=0 \quad ; \quad k=1,2,...,l \tag{4.37}$$

Se va arăta în continuare că expresia:

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} \tag{4.38}$$

se poate exprima cu ajutorul energiei cinetice a sistemului. Pentru aceasta se porneşte de la expresia energiei cinetice totale a sistemului de puncte materiale considerat.

$$E_c=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)^2 \tag{4.39}$$

Se derivează această expresia în raport cu o viteză generalizată.
Rezultă:

$$\frac{\partial E_c}{\partial\dot{q}_k}=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) \tag{4.40}$$

Cum $\vec{r}_i=\vec{r}_i\left(q_1,q_2,...,q_l\ ,\ t\right)$ atunci:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k \tag{4.41}$$

Din această expresie se obţine:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \tag{4.42}$$

Relaţia 4.40 devine:

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \tag{4.43}$$

Se derivează această relaţie încă o dată în raport cu timpul şi se obţine:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) \tag{4.44}$$

Cum:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) \tag{4.45}$$

atunci:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) \tag{4.46}$$

Din relaţia de mai sus se obţine:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)^2 \tag{4.47}$$

Atunci relaţiile 4.37 devin:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)^2\right] - Q_k = 0 \tag{4.48}$$

Ţinând cont de relaţia 4.39 obţinem:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} = Q_k \ , \ k = 1, 2, ..., l \tag{4.49}$$

Ecuaţiile de mai sus sunt ecuaţiile Lagrange şi permit determinarea mişcării sistemului. Numărul lor este egal cu numărul gradelor de libertate ale sistemului.

Dacă forţele derivă dintr-un potenţial, ecuaţiile lui Lagrange se pot scrie sub o formă compactă.

Pentru aceasta se introduce funcţia Lagrange definită de relaţia:

$$L = E_c - U \tag{4.50}$$

Deoarece vitezele generalizate sunt conţinute doar în expresia energiei cinetice:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} \tag{4.51}$$

iar

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} = \frac{\partial (L - E_c)}{\partial q_k} \tag{4.52}$$

relaţiile 4.49 capată forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \ , \ k = 1, 2, ..., l \tag{4.53}$$

Ecuaţiile Lagrange sub forma dată de relaţiile 4.49 sau 4.53 reprezintă un sistem de l ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea necunoscute fiind funcţiile $q_k = q_k(t)$, $k = 1, 2, ..., l$.

Rezolvarea sistemului presupune introducerea a $2l$ constante arbitrare $C_1, C_2, ..., C_{2l}$ astfel încât:

$$q_k = q_k(t\ , C_1, C_2, ..., C_{2l}) \quad , \quad k = 1, 2, ..., l \tag{4.54}$$

Determinarea constantelor se face din cunoaşterea condiţiilor iniţiale, adică a stării la un moment dat:

$$q_k(t_0) \ , \ \dot{q}_k(t_0) \quad , \quad k = 1, 2, ..., l \tag{4.55}$$

Practic, metoda de rezolvare a unei probleme de mecanică cu ajutorul formalismului Lagrange constă în următoarele:

1. Se stabileşte numărul gradelor de libertate ale sistemului şi se aleg coordonatele generalizate q_k, exprimând, dacă este necesar, dependenţa coordonatelor carteziene de coordonatele generalizate.

2. Se construiesc funcţiile E_c , Q_k sau L.

3. Se exprimă cele $2l$ condiţii iniţiale pentru coordonatele generalizate. Aceasta se face pornind de la condiţiile iniţiale exprimate în coordonate carteziene (relaţiile 4.14).

4. Se integrează ecuaţiile lui Lagrange şi se ţine cont de condiţiile iniţiale. Se determină astfel dependenţa de timp a coordonatelor generalizate. Din cunoaşterea dependenţei coordonatelor carteziene de cele generalizate se poate determina şi dependenţa de timp a coordonatelor carteziene.

5. Din cunoaşterea dependenţelor $\vec{r}_i = \vec{r}_i\,(t)$ se pot determina şi forţele de legătură cu ajutorul relaţiilor:

$$\vec{R}_i = m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} - \vec{F}_i \quad i = 1, 2, ...N \tag{4.56}$$

Obsevaţii

1. Dacă funcţia lui Lagrange nu depinde de una din coordonatele generalizate, de exemplu q_k atunci se obţine o *integrală primă a mişcării.* O integrală primă a mişcării este o mărime care nu variază în cursul mişcării: ea se conservă în cursul evoluţiei sistemului. Întradevăr dacă $\dfrac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ din ecuaţiile lui Lagrange rezultă $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0$. Atunci:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \text{const} \tag{4.57}$$

O astfel de coordonată generalizată se numeşte coordonată ciclică.

2. Funcţia lui Lagrange este definită până la o derivată totală a unei funcţii în raport cu timpul. Astfel, dacă în locul funcţiei iniţiale se consideră funcţia lui Lagrange de forma:

$$L' = L + \frac{d}{dt} F\,(q_1, q_2, ..., q_l\ ,\ t) \tag{4.58}$$

ecuaţiile lui Lagrange îşi păstrează forma. Într-adevăr:

$$L' = L + \frac{dF}{dt} = L + \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial F}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{4.59}$$

Din 4.59 rezultă

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial F}{\partial q_k} \tag{4.60}$$

Derivând în raport cu timpul relaţia 4.60 se obţine:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{dF}{dt}\right) \tag{4.61}$$

Din 4.59

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial L'}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{dF}{dt}\right) \tag{4.62}$$

Ţinănd cont de 4.61 şi 4.62 din 4.53 se obţine:
Rezultă:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_k} = 0 \tag{4.63}$$

Din cele prezentate mai sus rezultă că o funcţie de coordonatele generalizate şi de timp, care este o derivată totală în raport cu timpul, poate să fie omisă din expresia funcţiei lui Lagrange.

3. Dacă numai o parte din forţele ce actionează asupra sistemului derivă dintr-un potenţial ecuaţiile lui Lagrange pot fi scrise sub forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k\ ,\ \ k = 1, 2, ..., l \tag{4.64}$$

unde Q'_k reprezintă forţele ce nu derivă dintr-un potenţial.

4. Ecuaţiile lui Lagrange se pot scrie sub forma 4.53 şi în cazuri în care forţele generalizate pot fi exprimate sub forma:

$$Q_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad ; \quad k = 1, 2, ..., l \tag{4.65}$$

În expresia de mai sus funcţia $U = U(q_1, q_2, ..., q_l, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_l, t)$ poartă numele de potenţial generalizat. Acesta poate fi cazul mişcării unei particule de masă m şi sarcină electrică e într-un câmp electromagnetic extern.

5. Chiar dacă sistemul de puncte materiale nu este supus la legături, forma 4.53 pentru ecuaţiile de mişcare poate fi folosită dacă se poate trece la alt sistem de variabile independente faţa de care ecuaţiile de mişcare se scriu mai simplu. De exemplu în cazul unei particule care se mişcă într-un câmp central de forţe este util să se treacă de la coordonatele carteziene la coordonatele polare (în plan) sau la cele sferice (în spaţiu).

4.2.4 Principiul Hamilton

Principiul Hamilton face parte din categoria principiilor integrale. Principiul integral se referă la întreaga mişcare a sistemului pe toată durata sa într-un interval de timp finit. El este un principiu variaţional, prin variaţie înţelegând trecerea sistemului de la o traiectorie la alta în spaţiul configuraţiilor. Se iau în consideraţie toate traiectoriile posibile atât cele reale cât şi cele virtuale. Pe o traiectorie virtuală sunt satisfăcute legăturile dar nu sunt valabile ecuaţiile de mişcare.

Formularea principiului se poate face pornind de la principiul deplasărilor virtuale al lui d'Alembert.

Principiul lui Hamilton postulează că oricărui sistem i se poate asocia o funcţie L care descrie starea sistemului

$$L = L(q_k \ , \ \dot{q}_k \ , \ t) \tag{4.66}$$

Evoluţia sistemului în intervalul de timp $(t_1 \ , \ t_2)$ se desfăşoară astfel încât funcţionala numită actiune

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k \ , \ \dot{q}_k \ , \ t)\, dt \tag{4.67}$$

să aibă o valoare extremă.

Aici prin q_k şi prin $\dot{q}_k$ s-a notat ansamblul coordonatelor generalizate, respectiv ansamblul vitezelor generalizate.

Principiul poate fi formulat astfel:

Dintre toate traiectoriile posibile din spaţiul conf iguraţiilor care trec prin două puncte f ixe, corespunzătoare conf iguraţiilor la momentele t_1

şi t_2 se realizează aceea pentru care acţiunea are o valoare extremă sau este staţionară.

Ecuaţiile de mişcare ale sistemului se vor obţine din condiţia ca variaţia acţiunii să fie zero.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_k\ ,\ \dot{q}_k\ ,\ t\right) dt = 0 \tag{4.68}$$

Se consideră o traiectorie din spaţiul configuraţiilor

$$q_k = q_k\left(t\right)\ ,\ k = 1, 2, ..., l \tag{4.69}$$

şi o traiectorie vecină:

$$q_k' = q_k'\left(t\right)\ ,\ k = 1, 2, ..., l \tag{4.70}$$

Variaţiile coordonatelor generalizate sunt:

$$\delta q_k\left(t\right) = q_k'\left(t\right) - q_k\left(t\right) \tag{4.71}$$

iar variaţiile vitezelor generalizate:

$$\delta \dot{q}_k\left(t\right) = \dot{q}_k'\left(t\right) - \dot{q}_k\left(t\right) = \frac{d}{dt}\left[q_k'\left(t\right) - q_k\left(t\right)\right] = \frac{d}{dt}\delta q_k \tag{4.72}$$

Deoarece cele două traiectorii pornesc şi ajung în acelaşi punct:

$$\delta q_k\left(t_1\right) = \delta q_k\left(t_2\right) = 0 \tag{4.73}$$

Variaţia acţiunii este:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_k'\ ,\ \dot{q}_k'\ ,\ t\right) dt - \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_k\ ,\ \dot{q}_k\ ,\ t\right) dt \tag{4.74}$$

Rezultă:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(L\left(q_k'\ ,\ \dot{q}_k'\ ,\ t\right) dt - L\left(q_k\ ,\ \dot{q}_k\ ,\ t\right)\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L\left(q_k\ ,\ \dot{q}_k\ ,\ t\right) dt$$

sau

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{l} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k\right) dt \tag{4.75}$$

deoarece deplasările virtuale nu depind de timp.

Deoarece

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d}{dt}\left(\delta q_k\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q_k \tag{4.76}$$

atunci:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{l}\left[\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q_k\right] \tag{4.77}$$

Cum $\delta q_k\left(t_1\right) = \delta q_k\left(t_2\right) = 0$:

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{l}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right) = \sum_{k=1}^{l}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\bigg|_{t_1}^{t_2} = 0 \tag{4.78}$$

Atunci:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{k=1}^{l}\left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\right]\delta q_k dt \tag{4.79}$$

Conform principiului lui Hamilton dacă traiectoria este reală atunci integrala 4.79 trebuie să se anuleze oricare ar fi variaţiile δq_k. Deoarece aceste deplasări sunt independente între ele, pentru ca variaţia δS să fie nulă este necesar ca:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0\ ,\ \ k = 1, 2, ..., l \tag{4.80}$$

Acestea sunt ecuaţiile Lagrange.

Când s-au dedus ecuaţiile Lagrange din principiul D'Alembert a rezultat că $L = E_c - U$.

Dacă în prezentarea mecanicii analitice se porneşte de la principiul Hamilton în enunţul acestuia trebuie inclusă afirmaţia că există o funcţie numită funcţia Lagrange cu ajutorul căreia se scrie funcţionala acţiune.

Pentru construirea funcţiei Lagrange se utilizează câteva principii foarte generale:

a) *principiul superpoziţiei* care afirmă că se însumează termenii care se referă la particulele considerate independente, termenii ce corespund interacţiilor dintre particule şi termenii ce corespund interacţiei particulelor cu câmpuri externe.

b) *principiul invarianţei galileiene* care afirmă ca acţiunea este aceiaşi în orice sistem de referinţă. Principiul este o consecinţa a principiului relativităţii galileiene.

c) *principiul de corespondenţă*: rezultatele care se obţin cu ajutorul mecanicii newtoniene trebuie să se regăsească atunci când se utilizează funcţia Lagrange.

Trebuie remarcat că:

a) Funcţia Lagrange nu depinde decât de coordonatele şi vitezele generalizate (derivatele de ordin superior în raport cu timpul nu intervin). Această dependenţă este conformă cu faptul că starea unui sistem se cunoaşte dacă se cunosc coordonatele şi vitezele generalizate.

b) Într-un sistem închis funcţia Lagrange nu depinde explicit de timp.

c) Dacă un sistem mecanic este compus din mai multe părţi, care nu interacţionează, atunci:

$$L = L_1 + L_2 + ... + L_n \tag{4.81}$$

d) Funcţia Lagrange poate fi multiplicată printr-o constantă arbitrară; atunci ecuaţiile de mişcare nu se modifică. Operaţiunea de multiplicare poate fi înţeleasă ca o schimbare a unităţilor de măsură pentru L.

4.3 Legile de conservare şi proprietăţile de simetrie

Aşa cum s-a precizat mai înainte, în cazul unui sistem mecanic care are l grade de liberate se obţin l ecuaţii diferenţiale de ordin doi în raport cu timpul. Aceste ecuaţii de mişcare pot fi integrate rezultând uneori funcţii cu semnificaţii fizice cunoscute, alteori acest lucru nefiind posibil. Chiar dacă nu se obţine o soluţie completă a ecuaţiilor de mişcare, în multe probleme pot fi puse în evidenţă funcţii de coordonatele şi vitezele generalizate care sunt constante în timp. Aceste funcţii se numesc integrale prime ale mişcării.

Pentru un sistem închis cu l grade de libertate numărul integralelor prime independente este $2l - 1$. Aşa cum am arătat anterior soluţia generală a ecuaţiilor lui Lagrange depinde de $2l$ constante:

$$q_k = q_k\left(t\ , C_1, C_2, ..., C_{2l}\right) \quad , \quad k = 1, 2, ..., l \tag{4.82}$$

$$\dot{q}_k = \dot{q}_k\left(t\ , C_1, C_2, ..., C_{2l}\right) \quad , \quad k = 1, 2, ..., l \tag{4.83}$$

Deoarece pentru un sistem închis timpul nu este conţinut în mod explicit în ecuaţiile de mişcare, se poate alege originea acestuia în mod arbitrar. Aceasta înseamnă că una din cele $2l$ constante arbitrare din soluţiile ecuaţiilor poate fi pusă sub forma unei constante aditive.

$$q_k = q_k\left(t + t_0\ , C_1, C_2, ..., C_{2l-1}\ \right) \tag{4.84}$$

$$\dot{q}_k = \dot{q}_k\left(t + t_0\ , C_1, C_2, ..., C_{2l-1}\ \right) \tag{4.85}$$

Dacă se elimină $t + t_0$, cele $2l - 1$ constante se pot exprima în funcţie de coordonatele q_k şi vitezele generalizate $\dot{q}_k$. Rezultă că aceste constante sunt integrale prime.

Printre integralele prime ale mişcării există unele care sunt legate de proprietăţile generale ale spaţiului şi timpului. În continuare se prezintă legea de conservare a energiei care decurge din proprietatea de uniformitate a curgerii timpului, legea de conservare a impulsului care decurge din proprietatea de omogenitate a spaţiului şi legea de conservare a momentului cinetic care decurge din proprietatea de izotropie a spaţiului.

4.3.1 Conservarea energiei

Legea conservării energiei rezultă din uniformitatea curgerii timpului.

Din condiţia de uniformitate a curgerii timpului pentru un sistem închis rezultă că funcţia Lagrange nu depinde explicit de timp (forma ei rămâne aceiaşi la orice moment de timp). Atunci:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k + \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k \tag{4.86}$$

Cum din ecuaţiile lui Lagrange rezultă că:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \tag{4.87}$$

se obţine

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^{l} \dot{q}_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) + \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k = \sum_{k=1}^{l} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right) \tag{4.88}$$

$$\frac{d}{dt}\left(L - \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right) = 0 \tag{4.89}$$

Rezultă că:

$$L - \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = \text{const} \tag{4.90}$$

Dacă asupra sistemului acţionează doar forţe conservative:

$$L = E_c - U \tag{4.91}$$

În expresia de mai sus energia cinetică este funcţie de pătratele vitezelor particulelor care alcătuiesc sistemul, adică:

$$E_c = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left(\sum_{k=1}^{l} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2 \tag{4.92}$$

Relaţia 4.92 se poate pune sub forma:

$$E_c = a + \sum_{k=1}^{l} a_k \dot{q}_k + \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^{l} a_{kj}\dot{q}_k\dot{q}_j \tag{4.93}$$

unde:

$$a = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2$$

$$a_k = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Dacă transformările de coordonate nu conţin timpul, adică dacă legăturile sunt independente de timp (scleronome) doar ultimul termen din relaţia 4.93 este diferit de zero. Aceasta rezultă din faptul că derivatele parţiale în raport cu timpul ale coordonatelor sunt nule. Rezultă că energia cinetică este o funcţie pătratică omogenă în vitezele generalizate. Utilizând teorema lui Euler referitoare la funcţiile omogene şi observând că U nu depinde de vitezele generalizate când sistemul este conservativ obţinem:

$$\sum_{k=1}^{l} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{k=1}^{l} \dot{q}_k \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} = 2E_c \tag{4.94}$$

Atunci relaţia 4.90 devine:

$$E_c + U = \text{const} \tag{4.95}$$

Aceasta reprezintă legea de consevare a energiei în sistemele în care acţionează doar forţe conservative: suma dintre energia cinetică şi energia potenţială (energia totală) este o constantă.

4.3.2 Conservarea impulsului

Aceasă lege de conservare rezultă din proprietatea de omogenitate a spaţiului. Din proprietatea de omogenitate a spaţiului, care ilustrează faptul că toate punctele din spaţiu sunt echivalente rezultă că proprietăţile mecanice ale unui sistem nu se schimbă dacă se realizează o translaţie a întregului sistem în spaţiu.

Pentru a demonstra această proprietate se considera o translaţie infinitezimală în spaţiu şi se pune condiţia ca funcţia Lagrange să rămână neschimbată. Se defineşte operaţia de translaţie a sistemului ca o transformare prin care toate punctele sistemului se deplasează cu acelaşi segment:

$$\vec{r}_i \to \vec{r}_i + \delta\vec{r} \tag{4.96}$$

Într-o astfel de transformare variaţia funcţiei Lagrange este:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} (\nabla_i L)\, \delta\vec{r} = \delta\vec{r} \sum_{i=1}^{N} (\nabla_i L) \tag{4.97}$$

Pentru ca funcţia Lagrange $L\,(x_i\ ,\ y_i\ ,\ z_i\ ,\ \dot{x}_i\ ,\ \dot{y}_i\ ,\ \dot{z}_i)$ să nu se schimbe când facem o deplasare arbitrară $\delta\vec{r}$ este necesar ca:

$$\sum_{i=1}^{N} (\nabla_i L) = \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial L}{\partial y_i} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial L}{\partial z_i} \right) \vec{e}_z \right] = 0 \tag{4.98}$$

Deoarece

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \ ; \ \frac{\partial L}{\partial y_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) \ ; \ \frac{\partial L}{\partial z_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) \tag{4.99}$$

din relaţia 4.98 se obţine:

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \vec{e}_x + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) \vec{e}_z + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) \vec{e}_z \right] = 0$$

adică

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) \vec{e}_z + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) \vec{e}_z \right] \right] = 0 \tag{4.100}$$

Deoarece

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i = p_{x_i} \ ; \ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = m\dot{y}_i = p_{y_i} \ ; \ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} = m\dot{z}_i = p_{z_i} \tag{4.101}$$

şi cum impulsul total al sistemlui este:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} (p_{x_i} \vec{e}_x + p_{y_i} \vec{e}_y + p_{z_i} \vec{e}_z) \tag{4.102}$$

din relaţia 4.100 rezultă:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad ; \quad \vec{P} = \text{ const} \tag{4.103}$$

Astfel impulsul total este o constantă de mişcare pentru sistemul considerat.

S-a obţinut astfel legea de conservare a impulsului total al unui sistem de particule în absenţa unui câmp extern.

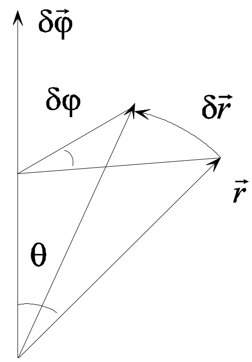

Figura 4.1: Reprezentarea unei rotaţii infinitezimale

4.3.3 Conservarea momentului cinetic

Conservarea momentului cinetic rezultă din proprietatea de izotropie a spaţiului: proprietăţile mecanice ale unui sistem închis nu se schimbă în cursul unei rotaţii în spaţiu a sistemului în ansamblu său.

Pentru a demonstra această lege se consideră o rotaţie în spaţiu (Fig. 4.1), după care se pune condiţia ca funcţia lui Lagrange să rămână neschimbată.

Numim vector de rotaţie infinitezimală $\delta\vec{\varphi}$ vectorul a cărui valoare este egală cu unghiul de rotaţie $\delta\varphi$ şi a cărui direcţie coincide cu axa de rotaţie. Sensul lui $\delta\vec{\varphi}$ este dat de regula burghiului.

Deplasarea liniară (Fig. 4.1) a extremităţii vectorului de poziţie este legată de unghiuri prin relaţia:

$$|\delta\vec{r}\,| = r\sin\theta\delta\varphi \tag{4.104}$$

Direcţia vectorului $\delta\vec{r}$ este dată de:

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{\varphi}\times\vec{r} \tag{4.105}$$

Rotaţia modifică nu numai direcţia vectorului de poziţie ci şi vitezele tuturor particulelor:

$$\delta\vec{v} = \delta\vec{\varphi}\times\vec{v} \tag{4.106}$$

Atunci:

$$\begin{aligned}\delta L &= \sum_{i=1}^{N}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)\delta x_i + \left(\frac{\partial L}{\partial y_i}\right)\delta y_i + \left(\frac{\partial L}{\partial z_i}\right)\delta z_i\right] \\ &+ \sum_{i=1}^{N}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\delta v_{xi} + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}\right)\delta v_{yi} + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i}\right)\delta v_{zi}\right] \end{aligned} \qquad (4.107)$$

Deoarece:

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = p_{x_i} & \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \dfrac{dp_{x_i}}{dt} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = p_{y_i} & \dfrac{\partial L}{\partial y_i} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}\right) = \dfrac{dp_{y_i}}{dt} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} = p_{z_i} & \dfrac{\partial L}{\partial z_i} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}_i}\right) = \dfrac{dp_{z_i}}{dt} \end{array}$$

Rezultă:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d\vec{p}_i}{dt}\delta\vec{r} + \vec{p}_i\delta\vec{v}_i\right) \qquad (4.108)$$

Ţinând cont de relaţiile 4.105 şi 4.106 se obţine:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{d\vec{p}_i}{dt}\left(\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}_i\right) + \vec{p}_i\left(\delta\vec{\varphi}\times\vec{v}_i\right)\right] = 0 \qquad (4.109)$$

sau

$$\delta L = \delta\varphi\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\vec{r}_i\times\frac{d\vec{p}_i}{dt}\right) + \left(\vec{v}\times\vec{p}_i\right)\right] = \delta\varphi\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{r}_i\times\vec{p}_i\right)\right] = 0 \qquad (4.110)$$

Cum rotaţia infitezimală este arbitrară

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{r}_i\times\vec{p}_i\right)\right] = 0 \qquad (4.111)$$

Deoarece prin definiţie $\vec{l_i} = \vec{r_i} \times \vec{p_i}$ este momentul cinetic al particulei i momentul cinetic total al sistemului este $\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r_i} \times \vec{p_i})$.

Din 4.111 rezultă că momentul cinetic total al sistemului se conservă.

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r_i} \times \vec{p_i}) = \text{const} \tag{4.112}$$

4.4 Formalismul Hamilton

4.4.1 Ecuaţiile Hamilton-Jacobi

Pentru descrierea sistemelor mecanice şi evoluţiei în timp a acestora Hamilton a introdus o altă funcţie în locul funcţiei Lagrange.

Ideea de bază constă în descrierea stării mecanice printr-un sistem de $2l$ variabile $q_1, q_2, ..., q_l$, $p_1, p_2, ..., p_l$. Variabilele $q_1, q_2, ..., q_l$ sunt coordonatele generalizate, iar variabilele $p_1, p_2, ..., p_l$ poartă numele de impulsuri generalizate şi se definesc prin relaţiile

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad , \quad k = 1, 2, ...l \tag{4.113}$$

Se consideră un sistem descris de funcţia Lagrange $L(q_k \; , \; \dot{q}_k \; , \; t)$. Atunci

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t}$$

unde

$$\ddot{q}_k = \frac{d^2 q_k}{dt^2}$$

Rezultă:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{l} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) - \dot{q}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] + \frac{\partial L}{\partial t} \tag{4.114}$$

Folosind ecuaţiile lui Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

relaţia 4.114 devine:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^{l} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right) + \frac{\partial L}{\partial t} \tag{4.115}$$

sau

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{l} p_k \dot{q}_k - L\right] = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{4.116}$$

Se observă că dacă $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ membrul stâng este nul, ceea ce înseamnă că mărimea fizică reprezentată de membrul stâng având dimesiunea unei energii se conservă. Această funcţie poartă numele de funcţia lui Hamilton.

$$H = \sum_{k=1}^{l} p_k \dot{q}_k - L \tag{4.117}$$

Ea depinde de coordoonatele şi impulsurile generalizate ale sistemului şi de timp.

$$H = H\left(q_k\ ,\ p_k\ ,\ t\right) \tag{4.118}$$

Cu ajutorul funcţiei Hamilton ecuaţiile de mişcare se pot scrie sub o altă formă. Diferenţiind expresia 4.118 rezultă:

$$dH = d\left(\sum_{k=1}^{l} p_k \dot{q}_k - L\right) = \sum_{k=1}^{l} p_k d\dot{q}_k + \sum_{k=1}^{l} \dot{q}_k dp_k - dL \tag{4.119}$$

Dar

$$dL = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k + \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

sau

$$dL = \sum_{k=1}^{l} p_k d\dot{q}_k + \sum_{k=1}^{l} \dot{p}_k dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

astfel încât 4.119 se poate pune sub forma:

$$dH = \sum_{k=1}^{l} \dot{q}_k dp_k - \sum_{k=1}^{l} \dot{p}_k dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{4.120}$$

Din 4.118 rezultă că diferenţiala lui H este:

$$dH = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial t} dt \tag{4.121}$$

Prin identificarea coeficienţilor diferenţialelor din expresiile 4.120 şi 4.121, se obţine:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{4.122}$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad , \quad k = 1, 2, ..., l \tag{4.123}$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad , \quad k = 1, 2, ..., l \tag{4.124}$$

Ecuaţiile 4.123 şi 4.124 sunt cunoscute sub numele de ecuaţiile canonice ale lui Hamilton. Acestea formează un sistem alcătuit din $2l$ ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi. Soluţiile lor depind de $2l$ constante arbitrare:

$$q_k = q_k \left(t \ , C_1, C_2, ..., C_{2l}\right) \tag{4.125}$$

$$p_k = p_k \left(t \ , C_1, C_2, ..., C_{2l}\right) \tag{4.126}$$

Pentru determinarea constantelor $C_1, C_2, ..., C_{2l}$ este necesară cunoaşterea la un moment dat a valorilor coordonatelor generalizate şi a impulsurilor generalizate.

În cazul unui sistem conservativ H coincide cu energia totală. Conform relaţiei 4.94

$$\sum_{k=1}^{l} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{k=1}^{l} \dot{q}_k p_k = 2E_c \tag{4.127}$$

astfel încât 4.117 devine:

$$H = 2E_c - L = 2E_c - E_c + U = E_c + U \tag{4.128}$$

Remarcăm că ecuaţiile canonice se pot obţine dintr-un principiu variaţional. Pentru aceasta se exprimă funcţia lui Lagrange ţinând cont de relaţia 4.117

$$L = \sum_{k=1}^{l} p_k \dot{q}_k - H \tag{4.129}$$

Atunci acţiunea se poate scrie ca:

$$S = \int_{t_2}^{t_1} \left[\sum_{k=1}^{l} p_k \dot{q}_k - H \right] dt \tag{4.130}$$

Variaţia acţiunii este:

$$\delta S = \int_{t_2}^{t_1} \left[\sum_{k=1}^{l} \left(p_k \delta \dot{q}_k + \dot{q}_k \delta p_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k - \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k \right) \right] dt \tag{4.131}$$

Se integrează prin părţi şi se obţine:

$$\begin{aligned} \delta S &= \sum_{k=1}^{l} p_k \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=1}^{l} \left(\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) \delta p_k \right] dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=1}^{l} \left(\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \delta q_k \right] dt \end{aligned} \tag{4.132}$$

Mişcarea reală corespunde staţionarităţii acţiunii ($\delta S = 0$).

Cum $\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0$ iar variaţiile δp_k şi δq_k sunt independente parantezele din expresia (4.132) trebuie să fie nule fapt care implică satisfacerea relaţiilor 4.123 şi 4.124.

4.4.2 Spaţiul fazelor

Dacă se aplică formalismul Hamilton se poate descrie starea dinamică a sistemului la un moment dat prin valorile coordonatelor şi impulsurilor generalizate q_k şi p_k numite variabile canonice unde $k = 1, 2....l$. Aceste $2l$ mărimi constituie coordonatele unui punct într-un spaţiu cu $2l$ dimensiuni, care a fost denumit spaţiul fazelor. Evoluţia în timp a sistemului este dată de:

$$q_k = q_k\,(t) \tag{4.133}$$

$$p_k = p_k\,(t) \tag{4.134}$$

şi este reprezentată în spaţiul fazelor prin traiectoria punctului reprezentativ. Ecuaţia traiectoriei este dată sub formă parametrică, parametrul fiind timpul t.

Este important de observat că pentru sistemele conservative funcţia lui Hamilton este o integrală primă. Expresia $H\,(q_k\;, p_k)$ =const este descrisă în spaţiul fazelor printr-o hipersuprafaţă $2l - 1$ dimensională.

4.4.3 Parantezele Poisson

Deoarece ecuaţiile canonice descriu variaţia în timp a variabilelor canonice se poate obţine legea de variaţie a oricărei mărimi ce depinde de starea sistemului. Fie $f\;\;(q_k\;,\;p_k\;,\;\;t)$ o astfel de mărime care pentru generalitate se presupune că depinde explicit de timp. Derivata totală a acesteia în raport cu timpul este:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{l}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k\right)$$

Dacă se ţine cont de ecuaţiile canonice ecuaţia de mai sus se poate scrie:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{l}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) \tag{4.135}$$

Suma din membrul al doilea se numeşte paranteză Poisson a funcţiilor H şi f şi se notează astfel:

$$\{H\ ,\ f\} = \sum_{k=1}^{l}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right) \tag{4.136}$$

Astfel pentru două mărimi oarecare se poate defini în general paranteza Poisson:

$$\{f\ ,\ g\} = \sum_{k=1}^{l}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}\right) \tag{4.137}$$

Obsevaţii

a) Paranteza Poisson este antisimetrică

$$\{f\ ,\ g\} = -\{g\ ,\ f\} \tag{4.138}$$

b) Paranteza Poisson este liniară în raport cu fiecare termen:

$$\{c_1 f_1 + c_2 f_2\ ,\ g\} = c_1\{f_1\ ,\ g\} + c_2\{f_2\ ,\ g\} \tag{4.139}$$

$$\{f\ ,\ c_1 g_1 + c_2 g_2\} = c_1\{f\ ,\ g_1\} + c_2\{f\ ,\ g_2\} \tag{4.140}$$

c) Sunt satisfăcute relaţiile:

$$\{f\ ,\ g_1 g_2\} = \{f\ ,\ g_1\}g_2 + \{f\ ,\ g_2\}g_1 \tag{4.141}$$

$$\{f_1 f_2\ ,\ g\} = f_1\{f_2\ ,\ g\} + f_2\{f_1\ ,g\} \tag{4.142}$$

d) În cazul în care $f = f(u\ ,\ v....)$ unde funcţiile u şi v depind de variabilele canonice:

$$\{f\ ,\ g\} = \frac{\partial f}{\partial u}\{u\ ,\ g\} + \frac{\partial f}{\partial v}\{v\ ,\ g\} + ... \tag{4.143}$$

e) Derivata parţială în raport cu timpul a unei paranteze Poisson se exprimă astfel:

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f\ ,\ g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}\ ,\ g\right\} + \left\{f\ ,\ \frac{\partial g}{\partial t}\right\} \tag{4.144}$$

f) Este satisfăcută identitatea lui Jacobi

$$\{f\ ,\ \{g\ ,\ h\}\} + \{h\ ,\ \{f\ ,\ g\}\} + \{g,\ \{h\ ,\ f\}\} = 0 \tag{4.145}$$

Trebuie remarcat că proprietăţile (a)-(e) rezultă direct din definiţia parantezelor Poisson. Identitatea lui Jacobi trebuie verificată prin calcul direct.

Parantezele Poisson joacă un rol important în mecanica analitică. Există câteva cazuri importante care sunt menţionate mai jos:

a) Parantezele Poisson ale variabilelor canonice sunt:

$$\{q_i\ ,\ q_j\} = 0 \tag{4.146}$$

$$\{p_i\ ,\ p_j\} = 0 \tag{4.147}$$

$$\{q_i\ ,\ p_j\} = \delta_{ij} \tag{4.148}$$

b) Parantezele Poisson ale unei funcţii şi a unei variabile canonice sunt:

$$\{f\ ,\ q_k\} = -\frac{\partial f}{\partial p_k} \tag{4.149}$$

$$\{f\ ,\ p_k\} = \frac{\partial f}{\partial q_k} \tag{4.150}$$

Dacă $f = H$ atunci:

$$\{H\ ,\ q_k\} = -\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k \tag{4.151}$$

$$\{H\ ,\ p_k\} = \frac{\partial H}{\partial q_k} = \dot{p}_k \tag{4.152}$$

Ecuaţiile 4.151 şi 4.152 constituie o altă exprimare a ecuaţiilor canonice Hamilton.

c) Funcţiile care rămân constante în cursul mişcării, constituie integrale prime ale mişcării. Condiţia ca o funcţie f să fie o integrală primă a mişcării este ca $\dfrac{df}{dt} = 0$. Atunci din relaţia 4.135 se scrie:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H\ ,\ f\} = 0 \tag{4.153}$$

Dacă integrala primă nu depinde explicit de timp rezultă:

$$\{H\ ,\ f\} = 0 \tag{4.154}$$

În particular când $f = H$, $\{H \ , \ H\} = 0$ se obţine un nou mod de exprimare a legii conservării energiei.

d) O ultimă obsevaţie se referă la teorema Poisson. Aceasta afirmă că dacă f şi g sunt două integrale prime atunci şi paranteza lor Poisson este o integrală primă a mişcării. Pentru a demonstra acest fapt se calculează derivata în raport cu timpul a parantezei Poisson $\{f \ , \ g\}$.

$$\frac{d}{dt}\{f \ , \ g\} = \frac{\partial}{\partial t}\{f \ , \ g\} + \{H \ , \ \{f \ , \ g\}\} \tag{4.155}$$

Se ţine cont că:

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f \ , \ g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t} \ , \ g\right\} + \left\{f \ , \ \frac{\partial g}{\partial t}\right\} \tag{4.156}$$

Utilizând identitatea Jacobi şi ţinând cont de proprietatea de antisimetrie a parantezelor Poisson:

$$\{H \ , \ \{f \ , \ g\}\} = -\{f \ , \ \{g \ , \ H\}\} - \{g, \ \{H \ , \ f\}\} = 0 \tag{4.157}$$

relaţia 4.155 devine:

$$\frac{d}{dt}\{f \ , \ g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t} \ , \ g\right\} + \left\{f \ , \ \frac{\partial g}{\partial t}\right\} - \{f \ , \ \{g \ , \ H\}\} - \{g, \ \{H \ , \ f\}\}$$

sau:

$$\frac{d}{dt}\{f \ , \ g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \{H \ , \ f\}, \ g\right\} + \left\{f \ , \ \frac{\partial g}{\partial t} + \{H \ , \ g\}\right\}$$

Rezultă:

$$\frac{d}{dt}\{f \ , \ g\} = \left\{\frac{df}{dt} \ , \ g\right\} + \left\{f \ , \ \frac{dg}{dt}\right\} \tag{4.158}$$

Deoarece funcţiile f şi g sunt integrale prime ale mişcării, ele nu variază în timp astfel că derivatele în raport cu timpul sunt nule. Rezultă:

$$\frac{d}{dt}\{f \ , \ g\} = 0 \tag{4.159}$$

Astfel, teorema lui Poisson este demonstrată. Prin acest procedeu se pot obţine alte integrale prime. Numărul de integrale prime independente este $2l - 1$.

4.5 Transformări canonice

Să considerăm cazul în care hamiltonianul este o constantă a mişcării şi toate coordonatele generalizate sunt ciclice. În aceste condiţii hamiltonianul va depinde doar de impulsurile generalizate:

$$H = H(p_k)$$

Din $p_k = \partial L/\partial \dot{q}_k$ iar $\partial L/\partial \dot{q}_k = \text{const}$ (relaţia 4.57) rezultă că impulsurile generalizate sunt constante.

Atunci ecuaţiile pentru coordonatele generalizate au o formă mai simplă:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \omega_k \quad , \quad k = 1, 2, ..., l \tag{4.160}$$

unde ω_k sunt funcţii de p_k şi sunt constante (deoarece impusul conjugat unei coordonate ciclice este constant în timp). Se integrează 4.160 şi rezultă:

$$q_k = \omega_k t + \beta_k \tag{4.161}$$

Trebuie remarcat că pentru un anumit sistem se pot alege mai multe seturi de coordonate generalizate. Astfel, în cazul mişcării unui punct material în plan, se pot alege coordonatele generalizate ca fiind coordonatele carteziene sau coordonatele polare. De exemplu în cazul unei mişcări în câmp central dacă se aleg coordonatele carteziene ca fiind coordonate generalizate atunci nici una dintre cele două nu sunt coordonate ciclice. Dacă însă se lucrează în coordonate polare, θ este o coordonată ciclică.

Numărul de coordonate ciclice depinde de modul de alegere a coordonatelor generalizate; pentru fiecare problemă în parte se poate alege un set de coordonate care să fie ciclice.

Vom studia transformarea de la un set de variabile la alt set de variabile mai convenabile. În cazul formalismului Hamilton impulsurile generalizate sunt variabile independente. Din acest motiv transformarea de coordonate necesită implicarea impulsurilor generalizate. Astfel se considera că:

$$Q_k = Q_k(q_i \ , \ p_i \ , \ t) \tag{4.162}$$

$$P_k = P_k(q_i \ , \ p_i \ , \ t) \tag{4.163}$$

Pentru ca aceste relaţii să reprezinte o adevărată schimbare de variabile este necesar ca relaţiile 4.162 şi 4.163 să fi inversabile faţa de variabilele q_i şi p_i, adică:

$$q_k = q_k\left(Q_i\ ,\ P_i\ ,\ t\right) \tag{4.164}$$

$$p_k = p_k\left(Q_i\ ,\ P_i\ ,\ t\right) \tag{4.165}$$

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca acest fapt să fie posibil este ca Jacobianul sistemului să fie diferit de zero, adică:

$$J = \frac{\partial\left(P_1\ ,\ P_2\ ,...,\ P_l\ ,\ Q_1\ ,\ Q_2\ ,...,\ Q_l\right)}{\partial\left(p_1\ ,\ p_2\ ,...,\ p_l\ ,\ q_1\ ,\ q_2\ ,...,\ q_l\right)} \neq 0 \tag{4.166}$$

Date fiind avantajele formei canonice a ecuaţiilor de mişcare este de dorit ca şi în noile variabile $Q_k\ ,\ P_k$ ecuaţiile de mişcare să aibă forma canonică:

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial P_k} \tag{4.167}$$

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial Q_k} \tag{4.168}$$

unde $\widetilde{H}$ este o funcţie Hamilton convenabil aleasă.

Transformarea pentru care relaţiile 4.167 şi 4.168 sunt valabile poartă numele de *transformare canonică.*

Aceasta nu este posibil când transformarea este arbitrară. Pentru ca transformarea să fie posibilă se impun anumite condiţii denumite condiţii de canonicitate.

Pentru a determina condiţiile ca transformarea să fie canonică se ţine cont de principiul lui Hamilton în care funcţia lui Lagrange se exprimă astfel:

$$L = \sum_{k=1}^{l} p_k \dot{q}_k - H\left(q_i\ ,\ p_i\ ,\ t\right) \tag{4.169}$$

Atunci acţiunea în funcţie de variabilele $q_j\ ,\ p_j$ este:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=1}^{l} p_k \dot{q}_k - H\left(q_i\ ,\ p_i\ ,\ t\right)\right] dt \tag{4.170}$$

Integrala acţiunii în variabilele Q_k , P_k este dată de o relaţie similară:

$$\widetilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=1}^{l} P_k \dot{Q}_k - \widetilde{H}\left(Q_k\ ,\ P_k\ ,\ t\right) \right] dt \tag{4.171}$$

În cazul mişcării reale a sistemului condiţiile $\delta S = 0$ şi $\delta \widetilde{H} = 0$ duc la concluzia că cele două integrale pot diferi printr-o derivată totală în raport cu timpul a unei funcţii F. De aici rezultă:

$$\sum_{k=1}^{l} \left(p_k \dot{q}_k - P_k \dot{Q}_k \right) + \left(\widetilde{H} - H \right) = \frac{dF}{dt} \tag{4.172}$$

sau

$$\left(\sum_{k=1}^{l} p_k dq_k - H dt \right) - \left(\sum_{k=1}^{l} P_k dQ_k - \widetilde{H} dt \right) = dF \tag{4.173}$$

Rezultă:

$$p_k = \frac{\partial F}{\partial q_k} \tag{4.174}$$

$$P_k = \frac{\partial F}{\partial Q_k} \tag{4.175}$$

$$\widetilde{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{4.176}$$

$F\left(q_k\ ,\ Q_k\ , t\right)$ poartă numele de funcţie generatoare a transformării canonice.

Se pot obţine deasemenea noi funcţii generatoare. De exemplu dacă se adaugă la ambii membri ai relaţiei 4.173 diferenţiala totală $d\left(\sum_{k=1}^{l} P_k Q_k\right)$ se obţine:

$$\sum_{k=1}^{l} Q_k dP_k + \sum_{k=1}^{l} p_k dq_k - \left(\widetilde{H} - H \right) dt = d\left(F + \sum_{k=1}^{l} P_k Q_k \right) \tag{4.177}$$

Expresia diferenţială din membrul drept scrisă în variabilele q_k , P_k constituie o nouă funcţie generatoare care se notează cu $G\left(q_k\ ,\ P_k\ , t\right)$.

Astfel:

$$p_k = \frac{\partial G}{\partial q_k} \tag{4.178}$$

$$Q_k = \frac{\partial G}{\partial P_k} \tag{4.179}$$

$$\widetilde{H} = H + \frac{\partial G}{\partial t} \tag{4.180}$$

În mod analog se obţine forma transformărilor exprimate prin funcţii generatoare ce depind de variabilele $(p_k \ , \ P_k)$ sau $(p_k \ , \ Q_k)$.

Transformările canonice formează un grup. Proprietăţile acestuia sunt:

a) Transformarea identică

$$P_k = p_k \ , \ Q_k = q_k \ \ , \ k = 1, 2....l \tag{4.181}$$

este canonică.

b) Inversa unei transformări canonice este tot o transformare canonică. Condiţia de canonicitate este îndeplinită deoarece expresia obţinută prin înlocuirea lui p_k cu P_k şi q_k cu Q_k în condiţia de canonicitate 4.173 este o diferenţială totală exactă a lui F.

c) Produsul a două transformări canonice este tot o transformare canonică. Prin produs a două transformări canonice se înţelege rezultatul obţinut ca urmare a aplicării succesive a două transformări canonice. Pe lângă transformarea

$$Q_k = Q_k \left(q_i \ , \ p_i \ , \ t\right) \tag{4.182}$$

$$P_k = P_k \left(q_i \ , \ p_i \ , \ t\right) \tag{4.183}$$

se consideră şi transformarea:

$$Q'_k = Q'_k \left(Q_i \ , \ P_i \ , \ t\right) \tag{4.184}$$

$$P'_k = P'_k \left(Q_i \ , \ P_i \ , \ t\right) \tag{4.185}$$

Atunci:

$$Q'_k = Q'_k \left(q_i \ , \ p_i \ , \ t\right) \tag{4.186}$$

$$P'_k = P'_k\left(q_i\ ,\ p_i\ ,\ t\right) \tag{4.187}$$

Pe baza proprietăţilor Jacobienilor rezultă:

$$\frac{\partial\left(P'_k\ ,\ Q'_k\right)}{\partial\left(p_i\ ,\ q_i\right)} = \frac{\partial\left(P'_k\ ,\ Q'_k\right)}{\partial\left(P_i\ ,\ Q_i\right)}\frac{\partial\left(P_k\ ,\ Q_k\right)}{\partial\left(p_i\ ,\ q_i\right)} \tag{4.188}$$

Jacobianul noii transformări este diferit de zero deoarece Jacobienii din membrul drept sunt diferiţi de zero. Pentru a arăta că transformarea produs este tot canonică se porneşte de la condiţiile de canonicitate a celor două transformări iniţiale:

$$\left(\sum_{k=1}^{l} p_k dq_k - Hdt\right) - \left(\sum_{k=1}^{l} P_k dQ_k - \widetilde{H}dt\right) = dF \tag{4.189}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{l} P_k dQ_k - \widetilde{H}dt\right) - \left(\sum_{k=1}^{l} P'_k dQ'_k - \widetilde{H}'dt\right) = dF' \tag{4.190}$$

Se observă că prin adunarea celor două relaţii se obţine:

$$\left(\sum_{k=1}^{l} p_k dq_k - Hdt\right) - \left(\sum_{k=1}^{l} P'_k dQ'_k - \widetilde{H}'dt\right) = \left(dF + dF'\right) \tag{4.191}$$

fapt ce exprimă canonicitatea transformării produs.

Rezultă că totalitatea transformărilor canonice formează un grup.

Se observă că modul de definire al noilor coordonate şi impulsuri generalizate face ca noţiunile respective să-si piardă din sensul inţial. Acest lucru se datorează faptului că noile variabile canonice Q_k precum şi noile impulsuri generalizate depind atât de vechile coordonate generalizate q_k cât şi de vechile impulsuri generalizate p_k.

Condiţia ca variabilele să fie canonic conjugate se poate exprima cu ajutorul parantezelor Poisson.

Se demonstrează mai întâi teorema generală de invarianţă a parantezelor Poisson faţă de transformările canonice.

Fie $\{f\ ,\ g\}_{p,q}$ paranteza Poisson a celor două funcţii în raport cu variabilele canonice $p_k\ ,\ q_k$ şi $\{f\ ,\ g\}_{P,Q}$ paranteza Poisson a celor două funcţii în raport cu variabilele canonice $P_k\ ,\ Q_k$. Atunci:

$$\{f \ , \ g\}_{p,q} = \{f \ , \ g\}_{P,Q} \tag{4.192}$$

Relaţia se poate verifica prin calcul direct, dar se poate justifica şi prin consideraţii calitative. Astfel se observă că în relaţiile 4.174 şi 4.175 timpul joacă rolul unui parametru. Prin urmare dacă demonstrăm egalitatea pentru mărimi care nu depind explicit de timp, relaţiile vor fi adevărate şi în cazul general. Să considerăm formal că funcţia g este o funcţie Hamilton a unui sistem fictiv. Atunci:

$$\{f \ , \ g\}_{p,q} = \frac{df}{dt} \tag{4.193}$$

Dar derivata în raport cu timpul $\frac{df}{dt}$ nu poate depinde decât de proprietăţile sistemului şi nu depinde de alegerea variabilelor. Prin urmare $\{f \ , \ g\}$ nu variază în cazul în care vom trece de la un grup la alt grup de variabile canonice. Rezultă că egalitatea 4.192 este satisfăcută.

Atunci datorită relaţiilor 4.146 , 4.147 , 4.148 şi teoremei de invarianţă a parantezelor Poisson

$$\{Q_k \ , \ Q_i\}_{P,Q} = \{Q_k, \ Q_i\}_{p,q} = 0 \tag{4.194}$$

$$\{P_k \ , \ P_i\}_{P,Q} = \{P_k, \ P_i\}_{p,q} = 0 \tag{4.195}$$

$$\{P_k \ , \ Q_i\}_{P,Q} = \{P_k, \ Q_i\}_{p,q} = \delta_{ki} \tag{4.196}$$

Relaţiile 4.196 constituie condiţia de canonicitate exprimată cu ajutorul parantezelor Poisson.

4.6 Ecuaţia Hamilton-Jacobi

Utilitatea transformărilor canonice constă în faptul că ele permit trecerea ecuaţiilor de mişcare dintr-o formă canonică în alta. Dacă se alege în mod convenabil o funcţie generatoare se pot obţine ecuaţiile canonice în cea mai simplă formă. Aceasta este:

$$\dot{P}_k = 0 \ , \ \dot{Q}_k = 0 \tag{4.197}$$

În acest caz particular variabilele canonice sunt constante. Acest lucru este posibil dacă hamiltonianul nu este dependent de P_k şi Q_k şi depinde eventual numai de timp. Cum în ecuaţiile canonice hamiltonianul apare numai prin derivatele sale parţiale în raport cu P_k şi Q_k , atunci se poate alege $\widetilde{H} = 0$. Se notează cu $S = S\left(q_k\ ,\ Q_k\ ,\ t\right)$ funcţia generatoarea a acestei transformări canonice. Atunci:

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} \tag{4.198}$$

$$P_k = -\frac{\partial S}{\partial Q_k} \tag{4.199}$$

$$\widetilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} \tag{4.200}$$

Cum $\widetilde{H} = 0$ rezultă că

$$H\left(q_k\ ,\ \frac{\partial S}{\partial q_k}\ ,\ t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{4.201}$$

Această ecuaţie este cunoscută sub numele de ecuaţia Hamilton-Jacobi.

Din ecuaţiile 4.197 rezultă:

$$Q_k = a_k \quad , \quad P_k = -b_k \tag{4.202}$$

unde a_k şi b_k sunt constante. Cum în relaţia 4.201 variabilele Q_k nu apar explicit, ţinându-se cont de 4.202 rezultă că trebuie să se găsească o soluţie a ecuaţiei Hamilton-Jacobi $S = S\left(q_k\ , a_k\ ,\ t\right)$ care depinde de l constante arbitrare a_k (numite constante arbitrare esenţiale). O astfel de soluţie poartă numele de integrală completă a ecuaţiei cu derivate parţiale Hamilton-Jacobi.

Ecuaţia Hamilton Jacobi este o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi având $l+1$ variabile independente $q_1\ ,\ q_2\ , ...,\ q_l$ şi t. O soluţie generală a ecuaţiei va trebui să conţină $l+1$ constante de integrare independente. Cum funcţia S nu apare în ecuaţia Hamilton - Jacobi decât prin intermediul derivatelor sale rezultă că dacă S este o soluţie a ecuaţiei atunci şi $S + C$ va fi o soluţie. Prin urmare una din cele $l+1$ constante este o constantă aditivă. Această constantă nu are sens fizic şi se poate alege egală cu zero. Rezultă faptul că din celelalte l constante esenţiale nici una nu este aditivă.

Din relaţia 4.199 şi relaţiile 4.202 rezultă:

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = b_k \tag{4.203}$$

Deoarece $S = S\left(q_i\ ,\ a_i\ ,\ t\right)$ rezultă că:

$$b_k = b_k\left(q_i\ ,\ a_i\ ,\ t\right) \tag{4.204}$$

Rezolvând sistemul de ecuaţii 4.204 în funcţie de coordonatele generalizate se obţine:

$$q_k = q_k\left(a_i\ ,\ b_i\ ,\ t\right) \tag{4.205}$$

Deoarece

$$\frac{\partial S}{\partial q_k} = p_k$$

se obţine $p_k = p_k\left(q_i\ ,\ a_i\ ,\ t\right)$. Folosind relaţiile 4.205 se obţine:

$$p_k = p_k\left(a_i\ ,\ b_i\ ,\ t\right) \tag{4.206}$$

În concluzie operaţiile necesare pentru a determina mişcarea unui sistem de puncte materiale sunt:

a) Se află integrala completă a ecuaţiei Hamilton-Jacobi

b) Se egalează derivatele parţiale ale integralei complete în raport cu parametri care-i conţine (a_k) cu constante noi (b_k).

c) Se rezolvă sistemul astfel obţinut în funcţie de variabilele q_k.

Trebuie remarcat că nu există un procedeu general pentru găsirea integralei complete. În anumite cazuri o metodă care permite simplificarea problemei este metoda separării variabilelor. Ea se utilizează de exemplu când hamiltonianul nu depinde de timp.

Atunci se consideră S de forma:

$$S\left(q_k\ ,\ a_k\ ,\ t\right) = S_0\left(q_k\ ,\ a_k\right) + S_1\left(a_k\ ,\ t\right) \tag{4.207}$$

Introducând pe S în ecuaţia 4.201 se obţine:

$$\frac{\partial S_1\left(a_k\ ,\ t\right)}{\partial t} + H\left(q_k\ ,\ \frac{\partial S_0\left(q_k\ ,\ a_k\right)}{\partial q_k}\right) = 0 \tag{4.208}$$

Deoarece primul termen depinde doar de timp, iar următorul numai de de variabilele independente q_k, egalitatea este satisfăcută dacă fiecare termen este constant.

$$\frac{\partial S_1\left(a_k\ ,\ t\right)}{\partial t} = -E \tag{4.209}$$

$$H\left[q_k\ ,\ \frac{\partial S_0\left(q_k\ ,\ a_k\right)}{\partial q_k}\right] = E \tag{4.210}$$

Din ecuaţia 4.209 rezultă

$$S_1 = -Et \tag{4.211}$$

Deoarece hamiltonianul nu depinde explicit de timp, constanta E este chiar energia sistemului.

Rămâne de rezolvat ecuaţia 4.210 care se numeşte ecuaţia Hamilton-Jacobi redusă.

Rezultă astfel că dacă funcţia generatoare S este determinată prin integrarea ecuaţiei Hamilton-Jacobi rezolvarea mişcării sistemului se reduce la rezolvarea unui sistem de ecuaţii algebrice.

Într-un anumit sens funcţia generatoare care rezultă din ecuaţia Hamilton-Jacobi este chiar acţiunea. Astfel pentru formularea principiului Hamilton s-a considerat integrala

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \tag{4.212}$$

luată de-a lungul unei traiectorii între două poziţii caracterizate de coordonatele generalizate $q_k^{(1)}$ şi $q_k^{(2)}$pe care sistemul le ocupă la momentele t_1, respectiv t_2. Considerăm noţiunea de acţiune sub un alt aspect. Fie integrala acţiunii pentru traiectorii reale toate cu o origine comună în punctul din spaţiul configuraţiilor $q_k^{(1)}$, (integrala data de 4.212 are un singur capăt fix). Cu alte cuvinte vom considera acţiunea ca o funcţie de valorile coordonatelor generalizate la limita superioară de integrare. Astfel:

$$S\left(q_k\ ,\ q_k^{(1)}\ ,\ t\right) = \int_{t_1}^{t} L\left(q_k\ ,\ \dot{q}_k\ ,\ t\right) dt \tag{4.213}$$

Variaţia acţiunii conform relaţiei 4.77 este în acest caz:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t} \sum_{k=1}^{l} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\right]\delta q_k$$

sau

$$\delta S = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \Big|_{t_1}^{t} + \int_{t_1}^{t} \sum_{k=1}^{l} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k \tag{4.214}$$

Deoarece traiectoriile mişcării reale satisfac ecuaţiile lui Lagrange integrala din relaţia 4.214 se anulează. În primul termen din 4.214 la limita inferioară $\delta q_k (t_1) = 0$. La limita superioară $\delta q_k (t)$ se notează cu δq_k. Atunci:

$$\delta S = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^{l} p_k \delta q_k \tag{4.215}$$

De aici rezultă:

$$\frac{\partial S}{\partial q_k} = p_k \tag{4.216}$$

Se consideră apoi funcţia S ca o funcţie de timp. Atunci derivata sa totală este:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial S}{\partial q_k} \dot{q}_k = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{k=1}^{l} p_k \dot{q}_k \tag{4.217}$$

Având în vedere relaţia 4.213:

$$\frac{dS}{dt} = L \tag{4.218}$$

Din ultimele două relaţii se poate scrie că:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = - \sum_{k=1}^{l} p_k \dot{q}_k + L \tag{4.219}$$

şi

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H \left(q_k \ , \ p_k \ , \ t \right) \tag{4.220}$$

Dacă în această ultimă relaţie se înlocuiesc impulsurile generalizate date de relaţia 4.216 rezultă că funcţia S satisface ecuaţia Hamilton-Jacobi. Acesta a fost şi motivul pentru care s-a notat iniţial funcţia generatoare cu S.