Capitolul 3

Teoria formală a undelor

3.1 Introducere

Se numesc unde, perturbaţiile care se propagă din aproape în aproape prin intermediul unui câmp. De exemplu scoaterea din poziţia de echilibru a unei particule care este situată într-un mediu elastic determină ieşirea din poziţia de echilibru şi a particulelor vecine datorită forţelor elastice ce se exercită între particulele mediului. În acest mod mişcarea se propagă din aproape în aproape prin intermediul unui câmp de forţe elastice.

Prezenţa unei unde presupune existenţa unei surse care produce perturbaţia iniţială şi a unui mediu în care aceasta să se propage.

După natura perturbaţiei, putem avea diferite feluri de unde:

- unde elastice (undele acustice), care sunt produse de oscilaţii de natură mecanică de mică amplitudine care se propagă în medii elastice;

- unde termice, care apar datorită diferenţelor de temperatură şi caracterizează fenomenul de propagare a căldurii;

- unde electromagnetice, care sunt produse de perturbaţii de natură electromagnetică.

Pentru primele două tipuri de unde este necesar un mediu material, în timp ce undele electromagnetice se pot propaga şi în vid.

Mediile în care se propagă undele pot fi:

- omogene sau neomogene după cum mărimile care caracterizează mediul sunt, respectiv nu sunt dependente de coordonatele punctului;

- izotrope sau anizotrope după cum mărimile ce caracterizează mediul sunt sau nu funcţie de direcţia în care sunt măsurate;

- dispersive sau nedispersive după cum viteza de propagare a undei depinde sau nu de frecvenţă;

- liniare sau neliniare după cum rezultanta compunerii a mai multor unde se exprimă sau nu printr-o relaţie liniară.

După caracterul perturbaţiei, undele pot fi:

- scalare, pentru care perturbaţia este caracterizată de o mărime scalară;

- vectoriale, pentru care perturbaţia este caracterizată de o mărime vectorială.

După modul în care apar perturbaţiile în raport cu direcţia de propagare, undele pot fi:

- transversale, când oscilaţiile sau deplasările se efectuează în plane perpendiculare pe direcţia de propagare;

- longitudinale, când oscilaţiile sau deplasările se efectuează în direcţia de propagare a undelor.

Din punct de vedere fizic, perturbaţiile armonice prezintă o importanţă deosebită. Ele sunt produse de un sistem fizic antrenat într-o stare de oscilaţie armonică. Starea de oscilaţie a sursei se transmite şi în celelalte puncte ale mediului având o frecvenţă egală cu cea a sursei, dar cu o fază întârziată faţă de aceasta, datorită timpului necesar pentru ca oscilaţiile să se propage de la sursă la punctul respectiv.

Trebuie remarcat că perturbaţiile armonice cu o frecvenţă fixă reprezintă un caz ideal. Studiul acestor cazuri ideale permite o extrapolare în cazurile reale, când pot să apară fenomene periodice nearmonice; acestea pot fi abordate prin aplicarea unor metode matematice cunoscute (serii sau integrale Fourier).

Se definesc:

- suprafaţa de undă, locul geometric al punctelor care oscilează în fază;

- frontul de undă, locul geometric al punctelor cele mai îndepărtate de sursa de oscilaţie care oscilează în fază.

După forma suprafeţei de undă, undele pot fi clasificate ca:

- unde cilindrice (produse de surse filiforme);

- unde sferice (produse de o sursă punctiformă);

- unde plane (frontul de undă este un plan perpendicular pe direcţia de propagare).

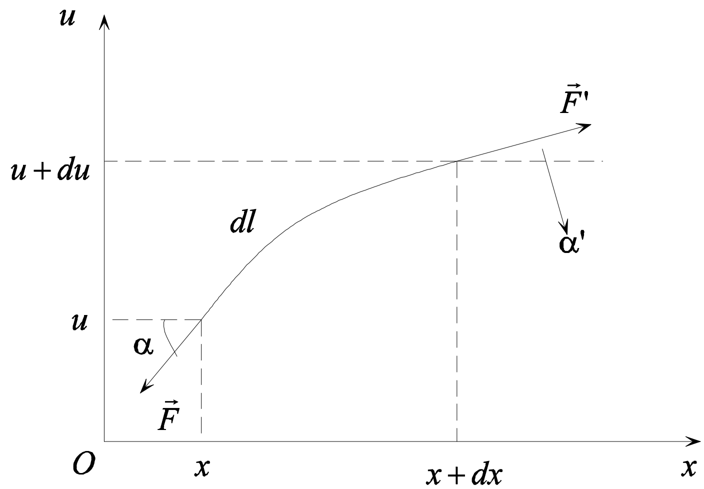

Figura 3.1: Deformarea unui element al unei corzii vibrante

3.2 Ecuaţia unidimensională a undelor

Pentru determinarea acestei ecuaţii se consideră o coardă vibrantă, care efectuează mici oscilaţii transversale. Coarda este elastică şi are o masă constantă pe unitatea de lungime. Deoarece s-a presupus că această coardă este elastică şi omogenă, tensiunea este tangentă la coardă, iar legea lui Hooke este valabilă. Se neglijează forţele de frecare şi greutatea corzii.

Se consideră un element al corzii de lungime dl şi de masă dm (Fig. 3.1). Fie u deplasarea unui punct al corzii faţă de poziţia sa de echilibru (care se află pe axa Ox). La capetele sale acţionează forţele $\vec{F}$ şi $\vec{F}\,'$ care sunt egale în modul cu tensiunea din coardă. Datorită oscilaţiilor, deplasarea u este funcţie de coordonata x (adică de poziţia punctului) şi de timp.

Deoarece oscilaţiile sunt foarte mici, unghiurile α şi α' sunt foarte mici. Atunci:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha \simeq \sin\alpha \simeq \alpha \tag{3.1}$$

Se proiectează forţele pe axa Ox şi se obţine:

$$dF_x = F\cos\alpha' - F\cos\alpha = 0 \tag{3.2}$$

deoarece $\cos\alpha' \simeq \cos\alpha = 1$.

Astfel, practic nu există mişcare de-a lungul axei Ox.
Se proiectează forţele pe axa Oy şi se obţine:

$$dF_y = F\sin\alpha' - F\sin\alpha \simeq F(\alpha' - \alpha)$$

$$dF_y = F\left[\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] = F\frac{\partial[u(x+dx,t) - u(x,t)]}{\partial x}$$

Atunci

$$dF_y = F\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]dx = F\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dx \tag{3.3}$$

Conform legii a doua a dinamicii :

$$F\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dx = dm\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3.4}$$

unde

$$dm = \rho S dl = \rho S\sqrt{(dx)^2 + (du)^2} = \rho S\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}dx$$

unde S este secţiunea corzii iar ρ este densitatea corzii. Deoarece $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ este foarte mică:

$$dm \simeq \rho S dx \tag{3.5}$$

Atunci, ţinând cont de 3.5 relaţia 3.4 devine:

$$F\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \rho S\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

şi

$$\frac{F}{\rho S}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{3.6}$$

Se observă că mărimea $(F/\rho S)^{1/2}$ are dimensiunile unei viteze; într-adevăr

$$\left[\frac{F}{\rho S}\right] = \frac{kg\cdot m}{s^2}\cdot\frac{m^3}{kg}\cdot\frac{1}{m^2} = \frac{m^2}{s^2}$$

Notând cu

$$v^2 = \frac{F}{\rho s}$$

relaţia 3.6 se poate scrie:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{3.7}$$

Aceasta este ecuaţia unidimensională a undelor. Ea este o ecuaţie de tip d'Alembert.

3.2.1 Soluţia ecuaţiei unidimensionale a undelor

Se arată că soluţia cea mai generală a ecuaţiei 3.7 este de forma

$$u(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt) \tag{3.8}$$

unde f şi g sunt funcţii arbitrare de argumentele indicate.

Pentru aceasta se va arăta la început că $f(x - vt)$ este o soluţie a ecuaţiei 3.8. Notând

$$z = x - vt$$

se obţine:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = -v\frac{\partial f}{\partial z}$$

şi în final:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-v\frac{\partial f}{\partial z}\right) = -v\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{3.10}$$

Astfel ecuaţia undelor este satisfăcută.

În mod analog se poate arăta că şi $g(x + vt)$ este soluţie a ecuaţiei 3.7.

Unda reprezentată de $f(x - vt)$ reprezintă o undă progresivă sau undă directă, iar unda reprezentată de $g(x + vt)$ reprezintă o unda regresivă sau unda indirectă, care se propagă înspre sursă.

Unda directă se propagă în sensul axei Ox. Pentru a justifica acest fapt se consideră că la momentul t_2 în x_2 există aceiaşi perturbaţie ca la momentul t_1 în x_1. Atunci:

$$f\left(x_2 - vt_2\right) = f\left(x_1 - vt_1\right)$$

De aici rezultă:

$$x_2 - vt_2 = x_1 - vt_1$$

adică

$$x_2 = x_1 + v_1\left(t_2 - t_1\right)$$

Se observă că dacă $t_2 > t_1$, atunci $x_2 > x_1$ adică perturbaţia se propagă în sensul axei Ox, adică de la sursă în afară.

Mărimea $x - vt$ poartă denumirea de faza undei. Punând condiţia ca faza să fie constantă

$$x - vt = \text{ const}$$

şi diferenţiind această relaţie rezultă:

$$dx - vdt = 0$$

Astfel viteza

$$v = \frac{dx}{dt}$$

poartă denumirea de viteză de fază.

3.2.2 Integrarea ecuaţiei undelor

În multe probleme este suficientă obţinerea unei soluţii particulare a ecuaţiei undelor. Una din metodele clasice utilizate pentru rezolvarea efectivă a ecuaţiei undelor este aceea a separării variabilelor. În această metodă soluţia se poate scrie sub forma:

$$u(x,t) = X(x)\mathcal{T}(t) \tag{3.11}$$

Introducând 3.11 în 3.7 obţinem:

$$\mathcal{T}(t)\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{1}{v^2}X(x)\frac{d^2\mathcal{T}(t)}{dt^2}$$

sau:

$$\frac{v^2}{X}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{1}{\mathcal{T}}\frac{d^2\mathcal{T}(t)}{dt^2} = \text{const} \tag{3.12}$$

Cum din punct de vedere fizic importante sunt fenomenele periodice, este necesar ca această constantă de separare să fie negativă. Atunci

$$\frac{1}{\mathcal{T}}\frac{d^2\mathcal{T}(t)}{dt^2} = -\omega^2 \tag{3.13}$$

Se obţine astfel o ecuaţie diferenţială de ordinul doi:

$$\frac{d^2\mathcal{T}}{dt^2} + \omega^2\mathcal{T} = 0 \tag{3.14}$$

care admite soluţia generală:

$$\mathcal{T} = c_1e^{i\omega t} + c_2e^{-i\omega t} \tag{3.15}$$

Ecuaţia pe care o satisface $X(x)$ este:

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2}X = 0 \tag{3.16}$$

Punând $k = \omega/v$ (k poartă denumirea de număr de undă) se obţine ecuaţia:

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k^2X = 0 \tag{3.17}$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii este:

$$X = D_1e^{ikx} + D_2e^{-ikx} \tag{3.18}$$

Rezultă că o soluţie a ecuaţiei undelor se poate pune sub forma unei suprapuneri de funcţii de forma :

$$u(x,t) = e^{\pm i(\omega t \pm kx)} \tag{3.19}$$

Forma concretă a soluţiei ecuaţiei undelor se poate obţine dacă se cunosc condiţiile iniţiale şi condiţiile la limită. Un astfel de calcul se va face pentru coarda vibrantă.

3.2.3 Unda armonică plană

O soluţie particulară a ecuaţiei undelor este:

$$u\left(x,t\right) = Ae^{i(\omega t - kx + \varphi_0)} \tag{3.20}$$

O astfel de soluţie care reprezintă o undă progresivă poartă numele de *undă armonică plană*. Reprezentarea de mai sus dată sub formă complexă este comodă în calcule. Dacă se ia doar partea reală a acestei reprezentări se obţine reprezentarea reală a undei armonice plane:

$$u\left(x,t\right) = A\cos\left(\omega t - kx + \varphi_0\right) \tag{3.21}$$

Unda armonică plană este un concept idealizat; ea este o undă neîntreruptă extinsă la infinit şi este importantă deoarece există procese fizice ce pot fi aproximate prin expresii de forma 3.20.

În plus orice perturbaţie poate fi reprezentată prin intermediul integralei Fourier ca o sumă de perturbaţii elementare de forma $a\left(\omega\right)e^{i\omega t}d\omega$.

În cazul undei plane faza acesteia este:

$$\phi = \omega t - kx + \varphi_0 \tag{3.22}$$

Funcţia $u(x,t)$ este o funcţie periodică în spaţiu şi timp. Pentru a caracteriza cele două periodicităţi se ţine cont de faptul că funcţia cosinus este o funcţie periodică cu perioada principală 2π.

Periodicitatea în timp este caracterizată prin perioada T. Din condiţia

$$\omega(t+T) - kx + \varphi_0 = \omega t - kx + \varphi_0 + 2\pi$$

rezultă că:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{3.23}$$

unde ω - poartă numele de pulsaţie.

Periodicitatea în spaţiu este caracterizată prin mărimea numită lungime de undă λ. Din condiţia

$$\omega t - k(x + \lambda) + \varphi_0 = \omega t - kx + \varphi_0 - 2\pi$$

rezultă:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{3.24}$$

Lungimea de undă este distanţa minimă dintre două puncte care oscilează în fază.

Se observă că:

$$\omega = \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{3.25}$$

şi

$$k = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{3.26}$$

3.2.4 Unde staţionare

O undă staţionară se obţine prin suprapunerea a două unde armonice de egală amplitudine care se propagă în direcţii opuse.

$$u\,(x,t) = a\cos\left(\omega t - kx\right) + a\sin\left(\omega t + kx\right) = 2a\cos kx\cos\omega t \tag{3.27}$$

Se observă că dacă în cazul undei armonice progresive amplitudinea este aceiaşi indiferent de coordonată, în cazul undei staţionare amplitudinea $A = 2a\cos kx$ este dependentă de coordonata x, adică de poziţie.

Poziţiile în care amplitudinea este maximă poartă numele de ventre iar poziţiile în care amplitudinea este minimă poartă numele de noduri.

3.2.5 Coarda vibrantă; unde staţionare

Pentru a observa modul concret în care se obţine o soluţie a ecuaţiei undelor vom considera o coardă vibrantă. Pentru determinarea mişcării concrete a corzii pe lângă ecuaţia 3.7 trebuie cunoscută starea iniţială, adică trebuie cunoscute funcţiile:

$$u\,(x,0) = \varphi\,(x) \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\,(x,0) = \varphi_1\,(x) \tag{3.29}$$

Se consideră o coardă vibrantă de lungime l fixată la capetele de coordonate $x = 0$ şi $x = l$. Condiţiile la limită sunt:

$$u(0,t) = 0 \quad ; \quad u(l,t) = 0 \tag{3.30}$$

Pentru rezolvarea problemei se utilizează metoda separării variabilelor aşa cum s-a prezentat anterior. În acest caz soluţiile ecuaţiilor 3.14 şi 3.16 vor fi scrise sub formă reală.

$$\mathcal{T}\,(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{3.31}$$

$$X\,(x) = C\cos kx + D\sin kx \tag{3.32}$$

O soluţie particulară este:

$$u\,(x,t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)\,(C\cos kx + D\sin kx) \tag{3.33}$$

Punând condiţiile la limită 3.30 se obţine:

$$C = 0 \tag{3.34}$$

şi

$$D\sin kl = 0 \tag{3.35}$$

A doua ecuaţie este satisfăcută şi atunci când $D = 0$, dar o astfel de valoare conduce la soluţia banală pentru ecuaţia iniţială. Rezultă că trebuie pusă condiţia:

$$\sin kl = 0$$

Această condiţie este satisfăcută când

$$kl = n\pi \qquad (n = 1, 2, 3...) \tag{3.36}$$

Rezultă valori discrete ale numărului de undă.

$$k_n = \frac{n\pi}{l} \qquad (n = 1, 2, 3...) \tag{3.37}$$

Atunci o soluţie particulară este:

$$u_n(x,t) = (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{3.38}$$

unde

$$\omega_n = v k_n = \frac{n\pi v}{l} \tag{3.39}$$

Soluţia generală este formată dintr-o suprapunere de forma:

$$u(x,l) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi v}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi v}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{3.40}$$

Pentru determinarea coeficienţilor A_n şi B_n vom ţine cont de condiţiile iniţiale 3.28 şi 3.29. Din relaţia 3.28 rezultă:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \varphi(x) \tag{3.41}$$

Relaţiei

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n\pi v}{l} A_n \sin \frac{n\pi v}{l} t + \frac{n\pi v}{l} B_n \cos \frac{n\pi v}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

i se aplică condiţia 3.29; rezultă:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi v}{l} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \varphi_1(x) \tag{3.42}$$

Relaţiile 3.41 şi 3.42 constituie dezvoltări ale funcţiilor $\varphi(x)$ şi $\varphi_1(x)$ în serii de funcţii de sinus. Pentru calculul coeficienţilor A_n şi B_m se înmulţesc ecuaţiile 3.41 şi 3.42 cu $\sin \frac{k\pi}{l}$ şi se integrează între 0 şi l . Se obţine:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left(\varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \right) dx \tag{3.43}$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^l \left(\varphi_1 (x) \sin \frac{n\pi}{l} x \right) dx$$

Spre deosebire de o undă armonică progresivă a cărei amplitudine este independentă de poziţia punctului care oscilează, în cazul acesta amplitudinea de oscilaţie a fiecărui punct depinde de poziţia sa şi nu depinde de timp. O astfel de undă este o undă staţionară.

Introducând lungimea de undă

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2}{n} l \tag{3.44}$$

se obţine

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi v}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi v}{l} t \right) \sin \frac{2\pi}{\lambda_n} x \tag{3.45}$$

Relaţia 3.45 arată că în coarda vibrantă se pot forma unde staţionare cu diferite frecvenţe şi lungimi de undă; acestea sunt modurile de vibraţie ale corzii.

Frecvenţa

$$v_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2l} \cdot v = \frac{v}{2l} \tag{3.46}$$

se numeşte frecvenţă fundamentală. Ea este cea mai mică frecvenţă emisă de coardă.

În Fig. 3.2 sunt arătate modurile în care oscilează o coardă vibrantă:

$n = 1$; $v_1 = \frac{v}{2l}$; $\lambda_1 = 2l$ -frecvenţă fundamentală

$n = 2$; $v_2 = 2v_1$; $\lambda_2 = l$ -prima armonică

$n = 3$; $v_3 = 3v_1$; $\lambda_3 = \frac{2l}{3}$ -a doua armonică

Punctele în care amplitudinea este nulă poartă numele de noduri, iar cele în care amplitudinea este maximă poartă numele de ventre.

3.3 Unde tridimensionale

În spaţiu funcţia de undă $u(x,t)$ va depinde şi de coordonatele y şi z. Vom nota cu $\psi(x,y,z,t)$ această funcţie.

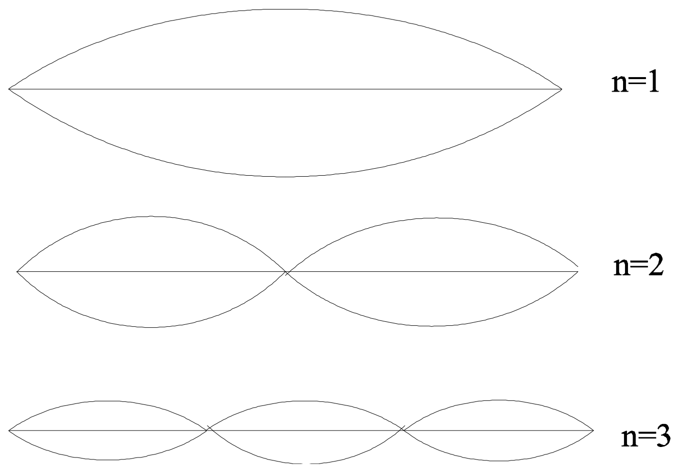

Figura 3.2: Moduri de oscilaţie în cazul unei coarde vibrante

Mărimea ψ poate fi un scalar, un vector sau chiar o mărime tensorială. În continuare discuţia va fi limitată la cazul undelor scalare. Ecuaţia undelor 3.7 devine în cazul tridimensional:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{3.47}$$

3.3.1 Unda plană

Fie $\vec{r}$ vectorul de poziţie al unui punct iar $\vec{u}$ vectorul unitate al unei direcţii date. Dacă soluţia este de forma $\psi(\vec{u}\,\vec{r}, t)$ înseamnă că starea de oscilaţie este aceiaşi în toate punctele unui plan $\vec{u}\,\vec{r}$ =const. În acest caz se spune că unda este plană, deoarece suprafeţele de undă sunt plane.

Soluţia generală a ecuaţiei 3.47 este de forma:

$$\psi(\vec{u}\,\vec{r}, t) = \psi_+(\vec{u}\,\vec{r} - vt) + \psi_-(\vec{u}\,\vec{r} + vt) \tag{3.48}$$

unde prima parte corespunde undei progresive iar a doua undei regresive.

Pentru determinarea unei forme analitice se consideră o soluţie de forma:

$$\psi = \psi_1(x) \cdot \psi_2(y) \cdot \psi_3(z) \cdot e^{i\omega t} \tag{3.49}$$

Se obţine pentru partea atemporală ecuaţia:

$$\frac{1}{\psi_1}\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2}+\frac{1}{\psi_2}\frac{d^2\psi_2\left(y\right)}{dy^2}+\frac{1}{\psi_3}\frac{d\psi_3\left(z\right)}{dz^2}=-\frac{\omega^2}{v^2} \tag{3.50}$$

Se notează

$$k^2=\frac{\omega^2}{v^2} \tag{3.51}$$

Fiecare termen din 3.50 este o funcţie de o singură variabilă; pentru ca suma lor să fie constantă, fiecare termen trebuie să fie constant. Se obţin astfel trei ecuaţii:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi_1}\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2}&=-k_x^2\\ \frac{1}{\psi_2}\frac{d^2\psi_2(y)}{dy^2}&=-k_y^2\\ \frac{1}{\psi_3}\frac{d^2\psi_3(z)}{dz^2}&=-k_z^2 \end{aligned} \tag{3.52}$$

cu

$$k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2 \tag{3.53}$$

ale căror soluţii sunt:

$$\begin{aligned} \psi_1&=Ae^{\pm ik_xx}\\ \psi_2&=Be^{\pm ik_yy}\\ \psi_3&=Ce^{\pm ik_zz} \end{aligned} \tag{3.54}$$

O soluţie particulară a ecuaţiei undelor ce corespunde unei unde progresive este:

$$\psi_+=A\exp\left\{i\left[\omega t-\left(k_xx+k_yy+k_zz\right)\right]\right\} \tag{3.55}$$

Introducând vectorul $\vec{k}$ cu componentele k_x, k_y, k_z, denumit vector de undă, relaţia 3.55 se scrie:

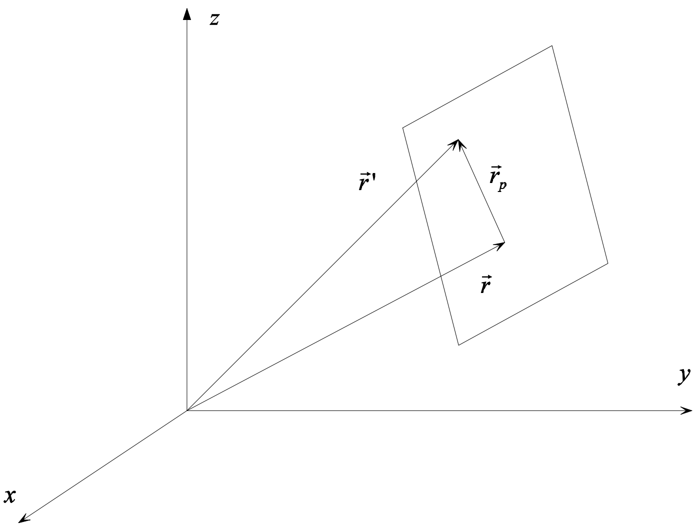

Figura 3.3: Unda plană

$$\psi_+ = A \exp i(\omega t - \vec{k}\,\vec{r}) \tag{3.56}$$

Aceasta este forma unei unde armonice plane monocromatice.

Într-adevăr suprafeţele de undă sunt la un moment dat definite de ecuaţia $\omega t - \vec{k}\,\vec{r}$ =const sau de ecuaţia $\vec{k}\,\vec{r}$ =const care este echivalentă cu

$$k_x x + k_y y + k_z z = \mathrm{const} \tag{3.57}$$

Aceasta este ecuaţia unor plane a căror normală are direcţia vectorului de undă $\vec{k}$ şi versorul $\vec{u} = \dfrac{\vec{k}}{k}$.

Se consideră doi vectori $\vec{r}$ şi $\vec{r}\,'$ cu vârful pe un plan de fază constantă. La un moment dat $\vec{k}\,\vec{r} =$ const şi $\vec{k}\,\vec{r}\,' =$ const (Fig. 3.3).

$$\vec{k}\,(\vec{r} - \vec{r}\,') = 0$$

Notând $\vec{r}\,' - \vec{r} = \vec{r}_p$, unde $\vec{r}_p$ este un vector conţinut în planul de fază constantă, se observă că:

$$\vec{k}\,\vec{r}_p = 0 \tag{3.58}$$

adică $\vec{k}$ este perpendicular pe planul de fază constantă.

Deoarece $\vec{k}$ este perpendicular pe planele pentru care faza este constantă el are direcţia de propagare.

Faza undei este:

$$\phi = \omega t - \vec{k}\,\vec{r} \tag{3.59}$$

Se observă că:

$$\omega = \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{3.60}$$

$$\vec{k} = -\nabla \phi \tag{3.61}$$

3.3.2 Unda sferică

Când sursa este punctiformă, iar mediul este omogen şi izotrop, perturbaţiile se propagă la fel în toate direcţiile. Atunci funcţia de undă va fi o funcţie doar de distanţa de la sursă şi nu va depinde de unghiurile polare ci numai de modulul razei vectoare $\psi(r,t)$.

Pentru a determina forma funcţiei $\psi(r,t)$ se exprimă laplaceianul în coordonate sferice:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \tag{3.62}$$

Deoarece funcţia de undă depinde doar de distanţa r ecuaţia undelor devine:

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)\right] = \frac{1}{v^2}\frac{\partial \psi}{\partial t^2} \tag{3.63}$$

Făcând substituţia:

$$\psi(r,t) = \frac{f(r,t)}{r} \tag{3.64}$$

relaţia 3.63 devine:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{3.65}$$

Ecuaţia 3.65 are soluţia generală de forma

$$f = f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{v}\right) \tag{3.66}$$

cele două funcţii f_1 şi f_2 fiind arbitrare.

Se aplică metoda separării variabilelor şi se obţin soluţii particulare pentru ecuaţia 3.63 de forma:

$$\psi = \frac{A}{r}e^{i\omega\left(t+\frac{r}{v}\right)} + \frac{B}{r}e^{i\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)} \tag{3.67}$$

care reprezintă o suprapunere dintre o undă progresivă şi una regresivă. Se constată că pentru unda sferică, amplitudinea variază cu $1/r$.

3.3.3 Ecuaţia atemporală a undelor

Noţiunea de undă armonică plană poate fi extinsă la o funcţie de forma

$$\psi\left(\vec{r}, t\right) = A\left(\vec{r}\right)e^{i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)} \tag{3.68}$$

în care amplitudinea este o funcţie de poziţie. Chiar şi în această situaţie se poate face o separare a variabilelor temporale de cele spaţiale. Astfel se scrie:

$$\psi\left(\vec{r}, t\right) = \psi\left(\vec{r}\right)e^{i\omega t} \tag{3.69}$$

Dacă se introduce această formă în ecuaţia 3.47 se obţine pentru $\psi\left(\vec{r}\right)$ ecuaţia:

$$\frac{\partial^2\psi\left(\vec{r}\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi\left(\vec{r}\right)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi\left(\vec{r}\right)}{\partial z^2} + k^2\psi\left(\vec{r}\right) = 0 \tag{3.70}$$

Aceasta este ecuaţia atemporală a undelor; ea este o ecuaţie de tip Helmoltz.

3.4 Pachet de unde

Aşa cum s-a prezentat anterior, o perturbaţie de durată finită poate fi considerată ca o suprapunere de oscilaţii monocromatice a căror frecvenţe sau pulsaţii sunt practic cuprinse într-un interval:

$$\left(\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}, \nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}\right)$$

respectiv

$$\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)$$

Rezultă că atunci când este implicată o perturbaţie de durată finită unda nu este monocromatică, ci reprezintă o suprapunere a undelor monocromatice cu pulsaţiile cuprinse într-un interval. Se spune că avem de-a face cu o suprapunere de unde numit grup de unde sau pachet de unde.

Funcţia de undă, se poate scrie ca o suprapunere de forma:

$$\psi(r,t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} A(\omega) e^{i(\omega t - kx)} d\omega \tag{3.71}$$

În scopul simplificării calculelor se consideră $A(\omega) = A_0$. Aproximaţia este acceptabilă dacă $\Delta\omega \ll \omega_0$.

Deoarece numărul de undă k nu este precizat şi depinde de ω, k se poate dezvolta în serie în funcţie de ω în jurul lui ω_0 şi ne putem limita la primii termeni din dezvoltare.

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0)\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0} \tag{3.72}$$

Atunci

$$\psi(x,t) = A_0 \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \left\{ \exp i \left[\omega t - k_0 x - (\omega - \omega_0)\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0} x \right] \right\} d\omega$$

sau

$$\psi(x,t) = A_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \left\{ \exp i(\omega - \omega_0) \left[t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0} x \right] \right\} d\omega \tag{3.73}$$

Se face schimbarea de variabilă $\omega - \omega_0 = y$ şi se notează

$$\zeta = t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0} x \tag{3.74}$$

Rezultă astfel:

$$\psi(x,t) = A_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\frac{\Delta\omega}{2}} e^{iy\zeta} dy$$

sau

$$\psi(x,t) = A_0 \left[\exp i(\omega_0 t - k_0 x)\right] \cdot \frac{\exp\left(i\frac{\Delta\omega}{2}\zeta\right) - \exp\left(-i\frac{\Delta\omega}{2}\zeta\right)}{i\zeta}$$

$$\psi(x,t) = 2A_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \cdot \frac{2\sin\frac{\Delta\omega}{2}\zeta}{\zeta}$$

Atunci:

$$\psi(x,t) = A_0 \Delta\omega \cdot \frac{\sin\frac{\Delta\omega}{2}\zeta}{\frac{\Delta\omega}{2}\zeta} e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \tag{3.75}$$

Expresia de mai sus arată că suprapunerea undelor armonice plane dintr-un domeniu îngust de pulsaţii este analoagă unei unde ”armonice” a cărei amplitudine este modulată cu factorul

$$\frac{\sin\frac{\Delta\omega}{2}\zeta}{\frac{\Delta\omega}{2}\zeta} \tag{3.76}$$

Aceasta înseamnă că la un moment dat, amplitudinea undei este diferită de zero într-un domeniu restâns din spaţiu.

Maximul amplitudinii corespunde valorii

$$\frac{\Delta\omega}{2}\zeta = 0 \tag{3.77}$$

Se observă că la grupul de unde, pe lângă suprafeţele echifaze apar şi suprafeţe pe care amplitudinea este constantă.

Dacă se ţine cont de 3.74 rezultă că aceste suprafeţe au ecuaţia:

$$\frac{\Delta\omega}{2}\left[t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0} x\right] = \text{ const} \tag{3.78}$$

De aici rezultă aşa numita viteză de grup - viteza cu care se propagă suprafeţele echiamplitudine (sau maximul pachetului)

$$v_g = \frac{dx}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega=\omega_0} \tag{3.79}$$

Deoarece energia în cazul mişcării oscilatorii este proporţională cu pătratul amplitudinii, rezultă că viteza de grup reprezintă viteza cu care se propagă energia.

Din condiţia ca faza să fie constantă ($\omega_0 t - k_0 x =$ const) rezultă viteza de fază

$$v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega_0}{k_0} \tag{3.80}$$

În continuare se va determina legătura dintre viteza de fază şi viteza de grup.

Relaţia dintre viteza de fază şi viteza de grup se poate determina astfel:

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega=\omega_0} = \frac{d}{dk}(kv_f) = v_f + k\frac{dv_f}{dk} \tag{3.81}$$

Un alt mod de estimare a lui v_g este şi următorul

$$\frac{dv_f}{dk} = \frac{dv_f}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk} = \frac{dv_f}{d\lambda}\frac{d}{dk}\left(\frac{2\pi}{k}\right) = -\frac{2\pi}{k^2}\frac{dv_f}{d\lambda} \tag{3.82}$$

sau

$$\frac{dv_f}{dk} = -\frac{\lambda}{k}\frac{dv_f}{d\lambda} \tag{3.83}$$

$$v_g = v_f - \lambda\frac{dv_f}{d\lambda} \tag{3.84}$$

Există medii în care viteza de fază depinde de k (sau λ), şi care se numesc *medii dispersive,* şi medii în care viteza de fază nu depinde de k (sau λ), şi care se numesc *medii nedispersive.* În mediile dispersive $v_f \neq v_g$.

Se observă că în cazul mediilor nedispersive $\frac{dv_f}{dk} = 0$ sau $\frac{dv_f}{d\lambda} = 0$; atunci $v_f = v_g$. În astfel de medii, viteza de grup este egală cu viteza de fază.

Dacă $\frac{dv_f}{d\lambda} > 0$ (dispersie normală) viteza de fază este mai mare decât viteza de grup.

Dacă $\frac{dv_f}{d\lambda} < 0$ (dispersia este anomală) viteza de fază este mai mică decât viteza de grup.

Trebuie remarcat că, în mediile nedispersive pachetul de unde rămâne grupat, în timp ce, în mediile dispersive, pachetul de unde nu-şi mai păstrează forma ci se dispersează deoarece undele care îl compun se deplasează cu viteze diferite.

Referitor la compactitatea pachetului de undă, din relaţia 3.75 se constată că amplitudinea este modulată de funcţia $\frac{\sin\frac{\Delta\omega}{2}\zeta}{\frac{\Delta\omega}{2}\zeta}$. Se observă că funcţia $\frac{\sin\frac{\Delta\omega}{2}\zeta}{\frac{\Delta\omega}{2}\zeta}$ în care se notează $\alpha = \frac{\Delta\omega}{2}\zeta$ are valori semnificative când abaterea unghiului α faţă de valoarea zero este egală cu π, ($\Delta\alpha = \pi$).

În realitate trebuie să se ţină cont că amplitudinea este diferită de zero şi dacă $\Delta\alpha \geq \pi$.

Se consideră două situaţii:

a) Momentul de timp este fixat. Atunci:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta\omega}{2}\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0}\Delta x \tag{3.85}$$

Cum

$$\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0}\Delta\omega \simeq \Delta k \tag{3.86}$$

se obţine:

$$\Delta x\Delta k \geq 2\pi \tag{3.87}$$

Relaţia 3.87 arată că în cazul unui pachet de unde nu se poate stabili cu aceiaşi precizie valoarea vectorului de undă şi coordonata x care localizează pachetul.

b) Poziţia în spaţiu este fixată; atunci:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta\omega}{2}\Delta t$$

astfel că:

$$\Delta t \cdot \Delta\omega \geq 2\pi \tag{3.88}$$

Relaţiile 3.87 şi 3.88 poartă numele de relaţiile de incertitudine referitoare la pachetul de undă.

Relaţia 3.88 poate fi privită ca o relaţie între durata semnalului ce generează pachetul de undă şi domeniul de frecvenţe al acestuia. Se observă că pentru durate Δt foarte mari, $\Delta\omega$ este foarte mic. La limită, dacă semnalul ar fi de durată infinită, unda obţinută ar fi perfect monocromatică. În funcţie de durata Δt a semnalului, pachetele de undă sunt caracterizate de domeniul de frecvenţe

$$\Delta\nu \geq \frac{1}{\Delta t} \tag{3.89}$$

O aplicaţie a acestui fapt este banda de frecvenţe a semnalului folosit în televiziune.

De exemplu, imaginea unui televizor este formată din 600 de linii, fiecare linie având 600 de puncte. Imaginea este formată dintr-un ansamblu de $3,6 \cdot 10^5$ imagini punctiforme. Pentru a avea o senzaţie de continuitate, este necesar ca în fiecare punct să se succeadă 25 de imagini pe secundă. Deci pentru formarea unei imagini pe ecranul unui televizor este necesar un număr $n = 25 \cdot 3,6 \cdot 10^5 \simeq 10^7$ impulsuri pe secundă. Aceasta înseamnă că durata unui semnal trebuie să fie $\Delta t = 10^{-7}$s. Atunci, domeniul de frecvenţe corespunzătoare unui semnal este:

$$\Delta v = \frac{1}{\Delta t} = 10 \text{ MHz}.$$

Cum frecvenţele purtătoare utilizate în televiziune sunt cuprinse între 400 şi 800 MHz există posibilitatea de a folosi un spaţiu de 40 de canale diferite.

În cazul unor unde purtătoare care sunt generate de laser în domeniul vizibil domeniul de frecvenţe ar fi dat de $\Delta\nu = \nu_r - \nu_v = 2 \times 10^{14}$ Hz, unde ν_r este frecvenţa radiaţiei roşii iar ν_v este frecvenţa radiaţiei violete. Se pot obţine 2×10^7 canale diferite.