Capitolul 2

Mişcarea oscilatorie

2.1 Oscilaţii armonice

2.1.1 Ecuaţia de mişcare

Mişcarea oscilatorie armonică este determinată de forţe de tip elastic. În cazul în care se consideră că forţa care acţionează asupra unui punct material are direcţia axei Ox:

$$\vec{F} = -kx\vec{e}_x \tag{2.1}$$

unde k este constanta de elasticitate iar $\vec{e}_x$ este versorul axei Ox.

Forţa este îndreptată către origine, punct ce reprezintă poziţia de echilibru în care valoarea ei este nulă. Ţinând cont de legea a doua a dinamicii:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2x}{dt^2}\vec{e}_x \tag{2.2}$$

rezultă o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

care se poate scrie:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{2.3}$$

unde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.4}$$

reprezintă pulsaţia mişcării oscilatorii.

Soluţia generală a unei astfel de ecuaţii poate fi pusă sub forma:

$$x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t \tag{2.5}$$

unde a si b sunt constante care depind de condiţiile iniţiale. Mărimea $x(t)$ poartă numele de elongaţie şi reprezintă depărtarea faţă de poziţia de echilibru la care punctul material ajunge la un moment dat.

Soluţia 2.5 se poate scrie şi sub forma:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta_0) \tag{2.6}$$

unde A si θ_0 sunt constante care depind de condiţiile iniţiale. A poartă numele de amplitudinea mişcării şi reprezintă depărtarea maximă de poziţia de echilibru la care ajunge punctul material. Mărimea θ_0 poartă numele de fază iniţială a mişcării iar $\varphi = \omega t + \theta_0$ este faza mişcării.

Echivalenţa soluţiilor 2.5 şi 2.6 se justifică astfel: dezvoltând funcţia cosinus obţinem:

$$x(t) = A \sin \theta_0 \sin \omega t + A \cos \theta_0 \cos \omega t \tag{2.7}$$

Identificând relaţiile 2.5 şi 2.7 se obţine:

$$\begin{aligned} a &= A \sin \theta_0 \\ b &= A \cos \theta_0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

O caracteristică a acestei mişcării este periodicitatea. Pentru a determina perioada mişcării se ţine cont de faptul că funcţia cosinus este periodică cu perioada 2π. Notând cu T perioada mişcării:

$$\cos(\omega t + \theta_0 + 2\pi) = \cos[\omega(t + T) + \theta_0]$$

Rezultă că perioada T, care reprezintă timpul în care se efectuează o oscilaţie este:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{2.9}$$

Frecvenţa mişcării se defineşte ca fiind inversul perioadei şi reprezintă numărul de oscilaţii efectuate în unitatea de timp:

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{2.10}$$

Viteza şi acceleraţia în mişcarea oscilatorie armonică sunt:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \theta_0) \tag{2.11}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 x \tag{2.12}$$

2.1.2 Energia oscilatorului armonic

Forţele elastice sunt forţe conservative (lucrul mecanic efectuat de acestea nu depinde de drum ci doar de poziţia inţială şi finală) Cum:

$$\delta L = F dx = -kxdx$$

prin integrare între poziţiile x_1 si x_2 se obţine:

$$L = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = -\frac{k}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right) \tag{2.13}$$

Deoarece lucrul mecanic depinde doar de poziţia iniţială şi finală se poate defini o energie potenţială:

$$\Delta E_p = -L = \frac{k}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right) \tag{2.14}$$

$$E_p = \frac{kx^2}{2} + \text{const} \tag{2.15}$$

Energia potenţială este definită până la o constantă arbitrară. Aceasta arată că semnificaţie fizică are doar variaţia acesteia şi nu valoarea ei. Cum constanta aditivă se poate alege arbitrar, se consideră că în poziţia în care $x = 0$ energia potenţială este nulă. Atunci această constantă devine zero. Ţinând cont de cele de mai sus şi de relaţia 2.6 se obţine:

$$E_p = \frac{k}{2} A^2 \cos^2(\omega t + \theta_0) \tag{2.16}$$

Cum $\omega^2 = \frac{k}{m}$ relaţia 2.16 se scrie:

$$E_p = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \cos^2(\omega t + \theta_0) \tag{2.17}$$

Energia cinetică se obţine ţinând cont de expresia vitezei 2.11 şi este dată de expresia:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \sin^2(\omega t + \theta_0) \tag{2.18}$$

Energia mecanică a oscilatorului armonic liniar este suma dintre energia cinetică si cea potenţială. Rezultă:

$$E = E_c + E_p = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \tag{2.19}$$

Se constată că energia oscilatorului armonic liniar este proporţională cu pătratul amplitudinii şi pătratul pulsaţiei şi nu depinde de timp.

2.1.3 Energii medii

Fie o funcţie $f(t)$ care depinde de timp. Se defineşte valoarea medie a funcţiei în intervalul de timp $[t_1, t_2]$ ca fiind:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)\ dt \tag{2.20}$$

Se observă că valoarea medie a funcţiei respective depinde de intervalul pe care se face medierea.

Pentru mărimi periodice intervalul de timp se ia egal cu perioada T:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\ dt \tag{2.21}$$

O proprietate a mediei temporale este aceea că media sumei a două funcţii este egală cu suma mediilor fiecărei funcţii luate în parte.

$$\langle f + g \rangle = \langle f \rangle + \langle g \rangle \tag{2.22}$$

Trebuie remarcat că media temporală a unui produs de două funcţii nu este egală cu produsul mediilor celor două funcţii:

$$\langle fg \rangle \neq \langle f \rangle \langle g \rangle \tag{2.23}$$

Relaţiile 2.22 şi 2.23 se demonstrează pornind de la definiţia valorii medii.

Pentru calculul valorilor medii a energiei cinetice şi a energiei potenţiale a oscilatorului armonic este necesar să se calculeze mediile temporale ale funcţiilor $\sin^2 \omega t$ şi $\cos^2 \omega t$.

$$\left\langle \sin^2 \omega t \right\rangle = \frac{1}{2} \langle 1 - \cos 2\omega t \rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \langle \cos 2\omega t \rangle = \frac{1}{2} \tag{2.24}$$

deoarece $\langle \cos 2\omega t \rangle = 0$

În mod analog se demonstrează:

$$\left\langle \cos^2 \omega t \right\rangle = \frac{1}{2} \tag{2.25}$$

Atunci se poate calcula direct energia cinetică medie şi energia potenţială medie a oscilatorului armonic liniar tinând cont de rezultatele 2.24 şi 2.25

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \left\langle \sin^2 (\omega t + \theta) \right\rangle = \frac{1}{4} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} E \tag{2.26}$$

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \langle \cos (\omega t + \theta) \rangle = \frac{1}{4} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} E \tag{2.27}$$

Se observă că mediile în timp a celor două energii sunt egale iar suma lor este energia totală.

2.1.4 Reprezentări ale mişcării oscilatorii

a) Reprezentarea fazorială

Mişcarea oscilatorie poate fi reprezentată cu ajutorul unui vector rotitor (Fig. 2.1) a cărui mărime este egală cu amplitudinea iar viteza unghiulară de rotaţie ω este egală cu pulsaţia mişcării respective. În Fig. 2.1 vectorul este reprezentat la un moment oarecare. Acest vector poartă numele de fazor. Pentru a cunoaşte elongaţia la un moment dat se proiectează vectorul respectiv pe axa Ox.

b) Reprezentarea complexă

Se consideră că vectorul din Fig. 2.1 reprezintă un număr complex, axa reală fiind axa Ox. Astfel:

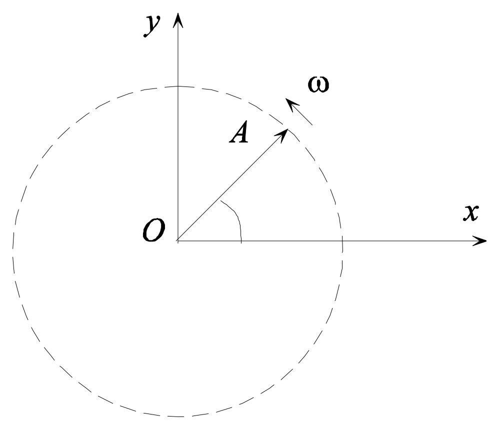


Figura 2.1: Reprezentarea fazorială a mişcării oscilatorii

$$x = A\cos(\omega t + \theta_0) = \mathrm{Re}[A\exp i(\omega t + \theta_0)] \tag{2.28}$$

sau

$$x = \mathrm{Re}[\bar{A}\exp i\omega t] \tag{2.29}$$

unde $\bar{A} = A\exp i\theta_0$ poartă numele de amplitudine complexă; se observă că $\left|\bar{A}\right| = A$, adică modulul amplitudinii complexe este egal cu amplitudinea reală. Numărul complex se notează cu o bară deasupra. De cele mai multe ori se efectuează calculele cu numere complexe şi doar în rezultatul final se va considera partea reală.

2.1.5 Compunerea mişcărilor oscilatorii

Compunerea mişcărilor oscilatorii de-a lungul aceleiaşi axe

Presupunem că asupra unui corp acţionează pe aceiaşi direcţie două forţe de tip elastic:

$$\begin{aligned} F_1 &= -k_1 x \\ F_2 &= -k_2 x \end{aligned} \tag{2.30}$$

Se consideră următoarele cazuri:

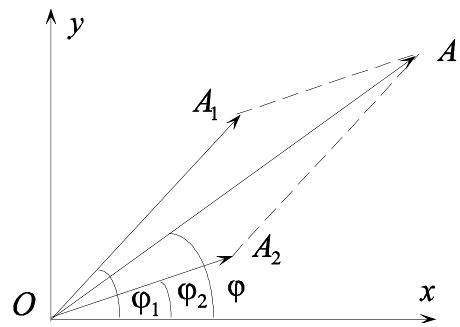


Figura 2.2: Compunerea a două oscilaţii de aceiaşi pulsaţie

a) constantele elastice sunt egale $k_1 = k_2 = m/\omega^2$
Atunci fiecare forţă determină o mişcare oscilatorie:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \theta_{10})$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \theta_{20})$$

Compunerea acestor oscilaţii se poate face analitic prin însumarea celor două expresii de mai sus. Mai simplu compunerea se face pornind de la reprezentarea fazorială a celor două mişcări (Fig. 2.2) prin sumarea vectorială a celor doi fazori la un moment dat.

Se obţine astfel pentru amplitudine expresia:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\theta_{10} - \theta_{20})} \tag{2.31}$$

Pentru determinarea fazei iniţiale se consideră proiecţia lui A la momentul iniţial pe cele două axe de coordonate. Se obţine:

$$\begin{aligned} A_x(0) &= A_1 \cos\theta_{10} + A_2 \cos\theta_{20} \\ A_y(0) &= A_1 \sin\theta_{10} + A_2 \sin\theta_{20} \end{aligned}$$

Atunci se poate exprima tangenta unghiului care reprezintă defazajul iniţial:

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\mathrm{A_y}(0)}{\mathrm{A_x}(0)} = \frac{\mathrm{A_1} \sin\theta_{10} + \mathrm{A_2} \sin\theta_{20}}{\mathrm{A_1} \cos\theta_{10} + \mathrm{A_2} \cos\theta_{20}}$$

Trebuie remarcat faptul ca funcţia tangentă este o funcţie periodică cu perioada π. Ea nu determină univoc cadranul în care se găseşte θ_0. Pentru aceasta trebuie să se cunoască semnele lui A_x şi A_y.

Valoarea amplitudinii rezultante dată de relaţia 2.31 depinde nu numai de amplitudinile A_1 şi A_2 ale celor două mişcări oscilatorii ci şi de diferenţa de fază dintre acestea $\theta_{10} - \theta_{20}$.

Dacă:

$$\Delta\theta_0 = \theta_{10} - \theta_{20} = 2k\pi \quad (k = 0, 1, ...) \tag{2.32}$$

rezultă:

$$A = A_1 + A_2 \tag{2.33}$$

În acest caz se spune că oscilaţiile sunt în fază.

Dacă:

$$\Delta\theta_0 = \theta_{10} - \theta_{20} = (2k+1)\pi \quad (k = 0, 1, ...) \tag{2.34}$$

rezultă:

$$A = |A_1 - A_2| \tag{2.35}$$

În acest caz se spune că oscilaţiile sunt în opoziţie de fază.

Un alt caz interesant este acela când

$$\Delta\theta_0 = \theta_{10} - \theta_{20} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad (k = 0, 1, ...)$$

Atunci:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

iar oscilaţiile sunt în cuadratură.

b) constantele elastice nu sunt egale $k_1 \neq k_2$

Aceasta înseamnă că nici pulsaţiile celor două mişcări nu sunt egale.

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_{10}) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_{20}) \end{aligned}$$

Ca şi în cazul anterior compunerea oscilaţiilor se face fazorial:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \tag{2.36}$$

De această dată însă fazele nu mai sunt considerate la momentul iniţial ci la un moment oarecare:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \omega_1 t + \theta_{10} \\ \varphi_2 &= \omega_2 t + \theta_{20} \end{aligned} \tag{2.37}$$

Din acest motiv mişcarea rezultantă nu mai este o mişcare armonică simplă deoarece amplitudinea ei este variabilă în timp.

Pentru a avea o privire de ansamblu asupra acesteia se consideră cazul când amplitudinile celor două mişcări oscilatorii sunt egale şi fazele iniţiale sunt nule:

$$A_1 = A_2 = A$$

şi

$$\theta_{10} = \theta_{20} = 0.$$

Atunci:

$$x = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t \tag{2.38}$$

Se obţine:

$$x = 2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t = 2A\cos\Omega t\cos\omega t \tag{2.39}$$

unde:

$$\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \tag{2.40}$$

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tag{2.41}$$

Dacă $\omega_2 \lessapprox \omega_1$(adică ω_2 este puţin mai mic decât ω_1) se observă că mişcarea oscilatorie are amplitudinea variabilă în timp după legea $2A\cos\Omega t$. Se spune că amplitudinea este modulată. Dacă $\Omega t = k\pi$ amplitudinea rezultantă este maximă. Dacă notăm cu τ intervalul de timp după care amplitudinea devine din nou maximă atunci:

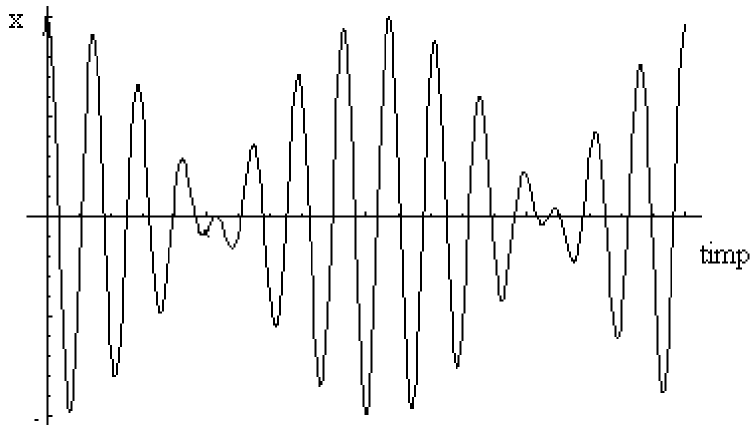


Figura 2.3: Compunerea a doua oscilaţii cu pulsaţii de valori apropiate

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{1}{\nu_1 - \nu_2} \tag{2.42}$$

Frecvenţa la care se succed maximele amplitudinii este:

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \nu_1 - \nu_2 \tag{2.43}$$

Fenomenul de succesiune a maximelor oscilaţiilor rezultante poartă numele de *bătăi*, nume sugerat de fenomenul acustic care-i corespunde.

Relaţia 2.42 arată că intervalul de timp dintre maximele succesive ale amplitudinii este cu atât mai mare (bătăile sunt mai rare) cu cât frecvenţele oscilaţiilor care se compun sunt mai apropiate. Invers bătăile sunt mai dese cu cât frecvenţele oscilaţiilor diferă mai mult una de alta.

În Fig. 2.3 este reprezentat grafic rezultatul compunerii a două oscilaţii cu frecvenţe apropiate.

Fenomenul poate fi pus în evidenţă cu ajutorul a două diapazoane care vibrează cu frecvenţe diferite dar apropiate. Astfel două diapazoane cu frecvenţele de 400 Hz şi 320 Hz vor da bătăi cu frevenţa de 80 Hz iar sunetul produs de cele două va fi perceput ca un sunet de frecvenţă joasă deşi fiecare din diapazoane are o frecvenţă mai mare.

Fenomenul apare de exemplu în cazul avioanelor bimotoare care zboară la înălţime. Sunetul auzit se întăreşte sau slăbeşte succesiv. Aceasta se datorează motoarelor sale, ale căror turaţii diferă puţin.

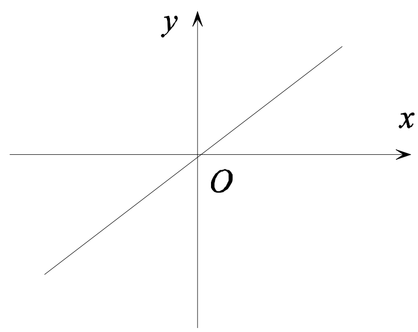


Figura 2.4: Compunerea a două oscilaţii de aceiaşi pulsaţie efectuate în direcţii perpendiculare cu o diferenţă de fază $\theta_0 = 0$

Compunerea mişcărilor oscilatorii care se efectuează în direcţii perpendiculare

Să considerăm două mişcări oscilatorii cu aceiaşi pulsaţie, una după axa Ox şi alta după axa Oy:

$$x = A\cos\omega t \tag{2.44}$$

$$y = B\cos\left(\omega t + \theta_0\right) \tag{2.45}$$

Se consideră următoarele cazuri:

a) Dacă $\theta_0 = 0$ atunci prin eliminarea timpului din relaţiile de mai sus rezultă:

$$y = \frac{B}{A}x \tag{2.46}$$

Relaţia 2.46 reprezintă ecuaţia unei drepte. Traiectoria punctului material este o dreaptă şi este reprezentată în Fig. 2.4

b) Dacă $\theta_0 = \pi$ atunci prin eliminarea timpului din ecuaţiile 2.44 şi 2.45 se obţine:

$$y = -\frac{B}{A}x \tag{2.47}$$

Aceasta reprezintă tot ecuaţia unei drepte.

c) Dacă $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ ecuaţiile 2.44 şi 2.45 devin:

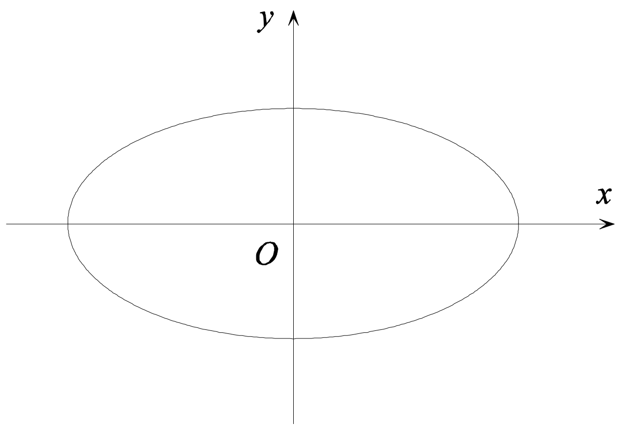


Figura 2.5: Compunerea a două oscilaţii care se efectuează în direcţii perpendiculare cu aceiaşi pulsaţie şi o diferenţă de fază $\theta_0 = \pi/2$

$$x = A\cos\omega t \tag{2.48}$$

$$y = B\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -B\sin\omega t \tag{2.49}$$

Din 2.48

$$\cos\omega t = \frac{x}{A}$$

iar din 2.49

$$\sin\omega t = -\frac{y}{B}$$

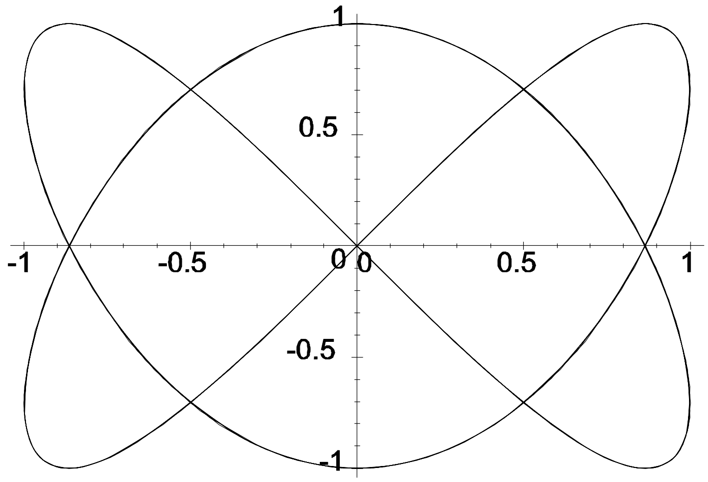
Deoarece $\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$ se obţine în final ecuaţia:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \tag{2.50}$$

Ecuaţia 2.50 reprezintă ecuaţia unei elipse raportată la axele Ox şi Oy (Fig. 2.5).

Dacă $A = B$ atunci traiectoria devine circulară.

d) Dacă $\theta_0 \neq 0, \pi, \frac{\pi}{2}$ rezultă tot o traiectorie eliptică însă axele elipsei sunt înclinate faţă de axele de coordonate.



În cazul în care frecvenţele oscilaţiilor perpendiculare nu sunt egale traiectoria punctului material descrie mai multe ramuri. Alura acestor curbe (denumite figuri Lissajous) depinde de raportul frecvenţelor şi de diferenţa de fază dintre cele două oscilaţii. În Fig. 2.1.5 este ilustrat un astfel de caz.

Figurile Lissajous pot fi puse în evidenţă cu ajutorul unui osciloscop în care pe cele două perechi de plăci de deflexie ale acestuia se aplică semnale de frecvenţe diferite. Trebuie remarcat că aceste curbe pot fi închise sau deschise. O condiţie necesară ca aceste curbe să fie închise este ca raportul frecvenţelor să fie egal cu raportul a două numere întregi.

2.2 Oscilaţii amortizate

Presupunem că în afară de forţa elastică care acţionează asupra punctului material există şi o forţă de frecare care implică o disipare de energie. Fenomenul care are loc nu este un proces pur mecanic, dar de multe ori poate fi descris printr-un model în care intervine o forţă de rezistenţă. Se admite o forţă de rezistenţă proportională cu viteza ($F_r = -\lambda v$). O astfel de forţă există de exemplu într-un mediu vâscos şi ea acţionează asupra corpurilor ce se deplasează în acest mediu cu viteze relativ mici. Cum problema pe care o tratăm este unidimensională legea a doua a mecanicii se scrie în acest caz:

$$ma = -kx - \lambda v \tag{2.51}$$

Rezultă ecuaţia

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Se împarte ecuaţia de mai sus la m şi se notează $2\gamma = \lambda/m$ (γ poartă numele de constantă de amortizare) şi $\omega_0^2 = k/m$; se obţine:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2.52}$$

Ecuaţia caracteristică a acestei ecuaţii diferenţiale omogene este:

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0 \tag{2.53}$$

cu soluţiile:

$$r_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{2.54}$$

Se consideră următoarele cazuri:

a) $\gamma > \omega_0$ (mişcare aperiodică)

Atunci r_1 şi r_2 sunt reale, iar ecuaţia 2.52 are o soluţie de forma

$$x = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \tag{2.55}$$

sau

$$x = A\exp\left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)t + B\exp\left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)t \tag{2.56}$$

Se observă că deoarece ambii exponenţi sunt negativi elongaţia tinde la zero când timpul tinde la infinit. Din punct de vedere fizic aceasta înseamnă că avem de-a face cu o amortizare foarte puternică (Fig. 2.6).

b) $\gamma = \omega_0$ (mişcare aperiodică critică)

În acest caz $r_1 = r_2 = -\gamma$, iar soluţia generală a ecuaţiei este de forma

$$x = (At + B)\exp(-\gamma t) \tag{2.57}$$

Mişcarea este o mişcare aperiodică, evoluţia spre starea de echilibru ne mai fiind neapărat o evoluţie monotonă (Fig. 2.7). Semnul elongaţiei se

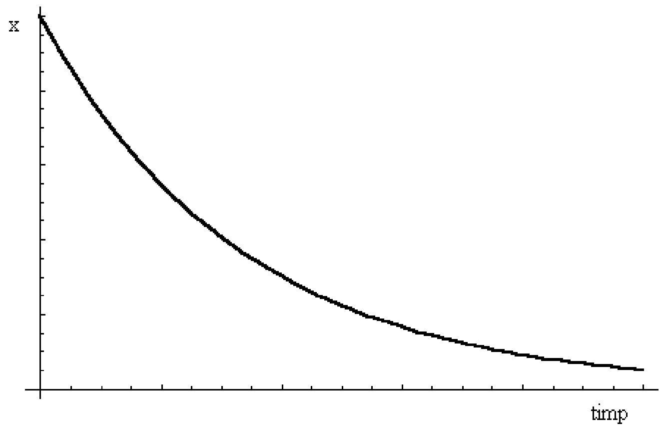


Figura 2.6: Mişcare aperiodică

poate păstra sau schimba o singură dată. Amortizarea critică este importantă în practică în cazul sistemelor la care trebuie evitată oscilaţia acestora în jurul poziţiei de echilibru, ca de exemplu în cazul amortizoarelor pentru autovehicule.

c) $\gamma < \omega_o$ *(mişcare periodică amortizată)*

În acest caz soluţiile ecuaţiei caracteristice 2.54 se pot scrie ca:

$$r_1 = -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma + i\omega$$

$$r_2 = -\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma - i\omega$$

unde

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{2.58}$$

Soluţia generală a ecuaţiei 2.52 este în acest caz:

$$x = e^{-\gamma t}\left[A\exp\left(i\omega t\right) + B\exp(-i\omega t)\right] \tag{2.59}$$

Pentru a discuta forma acestei ecuaţii se utilizează formulele lui Euler:

$$\exp\left(i\omega t\right) = \cos\omega t + i\sin\omega t$$

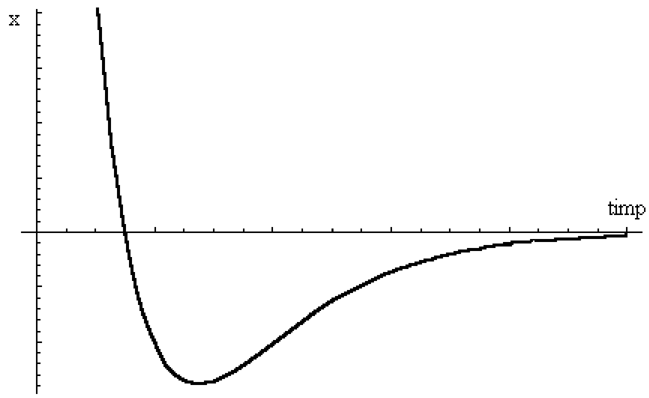


Figura 2.7: Mişcare aperiodică critică

$$\exp(-i\omega t) = \cos\omega t - i\sin\omega t$$

Atunci:

$$x(t) = [(A+B)\cos\omega t + i(A-B)\sin\omega t]\, e^{-\gamma t} \tag{2.60}$$

Deoarece elongaţia trebuie să fie reală A şi B trebuie să fie complex conjugate:

$$\begin{aligned} A &= a + ib \\ B &= a - ib \end{aligned}$$

Rezultă:

$$x = e^{-\gamma t}(2a\cos\omega t - 2b\sin\omega t)$$

sau:

$$x = e^{-\gamma t} 2a \left(\cos\omega t - \frac{2b}{2a}\sin\omega t\right) \tag{2.61}$$

Notând $\frac{2b}{2a} = \operatorname{tg}\theta$ relaţia 2.61 devine:

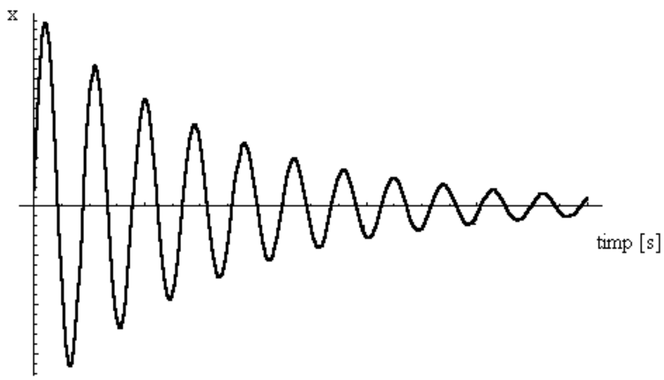


Figura 2.8: Mişcare periodică amortizată

$$x = \frac{2a}{\cos\theta} e^{-\gamma t} \left(\cos\omega t \cos\theta - \sin\omega t \sin\theta\right) \tag{2.62}$$

În plus dacă se notează $A_0 = \dfrac{2a}{\cos\theta}$ se obţine:

$$x = A_0 e^{-\gamma t} \cos\left(\omega t + \theta\right) \tag{2.63}$$

Rezultă că punctul material execută oscilaţii amortizate cu o amplitudine descrecătoare în timp

$$A = A_0 e^{-\gamma t} \tag{2.64}$$

cu pulsaţia

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{2.65}$$

Reprezentarea mişcării este dată în Fig. 2.8.

Acesta este cazul regimului cvasiperiodic al oscilaţiilor amortizate. Cuasi-perioada acestor oscilaţii este:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \tag{2.66}$$

Raportul elongaţiilor sau amplitudinilor după un interval de timp egal cu perioada T este:

$$\frac{x(t)}{x(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\gamma t}}{A_0 e^{-\gamma(t+T)}} = e^{\gamma T} \tag{2.67}$$

Logaritmul acestui raport poartă numele de decrement logaritmic.

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \gamma T \tag{2.68}$$

Acesta este o mărime adimensională ce caracterizează gradul de amortizare al oscilaţiilor (cu cât este mai mare cu atât oscilaţiile se amortizează mai repede).

Amortizarea oscilaţiilor este legată de pierderea de energie a punctului material care execută oscilaţiile amortizate. Deoarece variaţia energiei mecanice este egală cu lucrul mecanic al forţelor neconsevative:

$$dE = -\lambda \frac{dx}{dt} dx \tag{2.69}$$

iar puterea disipată este egală cu variaţia energiei (variaţie care este negativă) în unitatea de timp, se obţine:

$$P = \frac{dE}{dt} = -\lambda \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -2\gamma m v^2 \tag{2.70}$$

Expresia

$$Q = \frac{1}{2}\lambda v^2 = \gamma m v^2 \tag{2.71}$$

poartă numele de funcţie de disipaţie. Se observă că

$$P = -2Q \tag{2.72}$$

2.3 Oscilaţii forţate

Datorită forţelor neconsevative care disipă energie, oscilaţiile sunt amortizate. Pentru a întreţine mişcarea oscilatorie trebuie intervenit cu o forţă din exterior care să compenseze pierderile de energie. Cazurile interesante sunt cele în care forţa exterioară este o funcţie periodică în timp. Deoarece această funcţie se poate dezvolta în serii Fourier, care conţin funcţii sinusoidale sau cosinusoidale este interesant să se examineze fenomenul când forţa are forma cea mai simplă, adică

$$F = F_0 \cos \omega t \tag{2.73}$$

Atunci ecuaţia de mişcare a punctului material care oscilează într-un mediu disipativ este:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \lambda v + F_0 \cos \omega t \tag{2.74}$$

sau ţinând cont de faptul că $2\gamma = \lambda/m$ şi $\omega_0^2 = k/m$ se obţine:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \tag{2.75}$$

Soluţia generală a unei astfel de ecuaţii diferenţiale de ordinul doi neomogene este:

$$x = x_0(t) + x_1(t) \tag{2.76}$$

unde $x_0(t)$ este soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate iar $x_1(t)$ este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene.

După un timp suficient de lung $x_0(t)$ tinde la zero cum s-a prezentat la studiul mişcării oscilatorii amortizate. Aceasta înseamnă că ceea ce contează după un interval de timp suficient de lung este soluţia particulară a ecuaţiei neomogene care trebuie să fie de forma:

$$x_1(t) = A\cos(\omega t + \theta) \tag{2.77}$$

Substituind 2.77 în 2.75 se obţine:

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \theta) - 2\gamma\omega A \sin(\omega t + \theta) + \omega_0^2 A \cos(\omega t + \theta) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \tag{2.78}$$

Ecuaţia 2.78 reprezintă o identitate. Se egalează cu cu zero coeficienţii lui $\sin \omega t$ şi $\cos \omega t$ şi rezultă:

$$A\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) \cos\theta - 2\gamma\omega A \sin\theta = \frac{F_0}{m} \tag{2.79}$$

$$A\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) \sin\theta - 2\gamma\omega A \cos\theta = 0 \tag{2.80}$$

Se ridică la pătrat cele două ecuaţii, se adună şi se obţine:

$$A^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2A^2=\left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \tag{2.81}$$

Rezultă:

$$A=\frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}} \tag{2.82}$$

Din 2.80 se obţine:

$$\operatorname{tg}\theta=-\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \tag{2.83}$$

În concluzie:

a) La o solicitare sinusoidală oscilatorul va oscila cu o pulsaţie ce nu este pulsaţia lui proprie ci este pulsaţia forţei exterioare care acţionează asupra lui.

b) Mişcarea este defazată în raport cu forţa exterioară.

c) Amplitudinea şi faza depind de pulsaţia forţei ω.

d) Amplitudinea şi faza nu depind de condiţiile iniţiale (oricum soluţia este valabilă pentru timpi suficienţi de mari)

Prezintă interes următoarele cazuri:

a) $\omega \ll \omega_0$

În acest caz termenii ce conţin pe ω^2 sunt neglijabili faţă de cei ce conţin pe ω_0^2. Aceasta este situaţia în care perioada forţei este mult mai mare decât perioada proprie de oscilaţie ($T \gg T_0$). Atunci:

$$A=\frac{F_0}{m\omega_0^2}=\frac{F_0}{k} \tag{2.84}$$

Pentru a determina valoarea lui θ trebuie să se calculeze efectiv $\cos\theta$ şi $\sin\theta$. Din ecuaţiile 2.79 şi 2.80 rezultă:

$$\cos\theta=\frac{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2A^2\omega^2}} \tag{2.85}$$

$$\sin\theta=-\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2A^2\omega^2}} \tag{2.86}$$

În situaţia care s-a considerat $\cos\theta > 0$ şi $\sin\theta < 0$. Din acest motiv unghiul θ se află în cadranul al patrulea şi, în condiţiile date, tinde la zero ($\theta \to 0$). Atunci:

$$x = \frac{F_0}{k}\cos\omega t \tag{2.87}$$

Aceasta înseamnă că forţa exterioară şi elongaţia punctului sunt în fază.

b) $\omega \gg \omega_0$

În aceast caz termenii care conţin pe ω_0^2 sunt neglijabili în raport cu cei ce conţin pe ω^2. Atunci:

$$A \cong \frac{F_0}{m\sqrt{\omega^4 + 4\gamma^2\omega^2}} \cong \frac{F_0}{m\omega^2} \tag{2.88}$$

Cum $\cos\theta < 0$ şi $\sin\theta < 0$ rezultă $\theta \in (\pi\ ,\ 3\pi/2)$ şi $\theta \to \pi$. Elongaţia este în opoziţie de fază cu forţa exterioară. Astfel:

$$x = \frac{F_0}{k}\cos(\omega t + \theta) = -\frac{F_0}{k}\cos\omega t$$

c) $\omega = \omega_0$

Atunci

$$A = \frac{F_0}{2m\gamma\omega} \tag{2.89}$$

şi cum $\cos\theta = 0$ rezultă $\theta = \pi/2$

$$x = \frac{F_0}{2m\gamma\omega}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{2.90}$$

Elongaţia este defazată cu $\pi/2$ în raport cu forţa exterioară.

Rezonanţa

Atunci când pulsaţia forţei exterioare ω variază, variază şi amplitudinea A. Din relaţia 2.82 rezultă că amplitudinea oscilaţiilor depinde de valoarea amplitudinii forţei exterioare F, de pulsaţia ω şi factorul de atenuare γ. Considerând valoarea amplitudinii forţei exterioare constantă, şi privind pe γ ca pe un parametru se va urmări variaţia amplitudinii oscilaţiei funcţie de pulsaţia perturbaţiei externe. Pentru a vedea dacă amplitudinea are un maxim expresia ei se derivează în raport cu ω şi derivata se egalează cu zero.

$$-4\omega\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 8\gamma^2\omega = 0$$

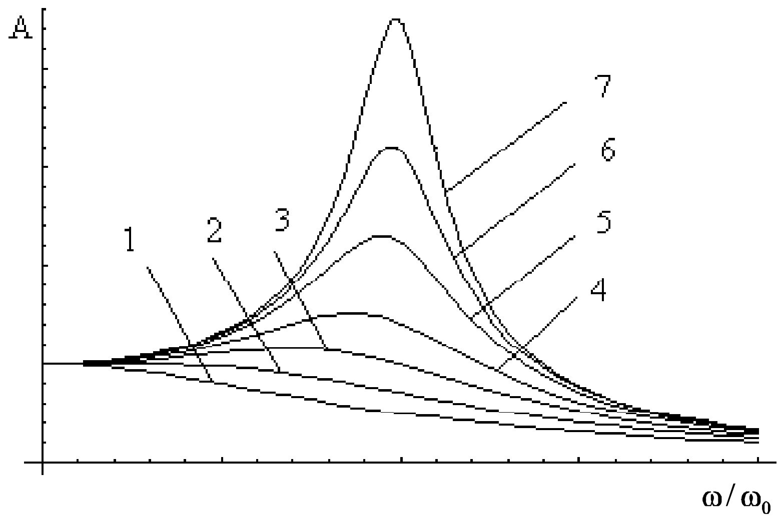


Figura 2.9: Rezonanţa. Curbele corespund cazurilor în care $4\gamma^2/\omega_0^2$ are valorile: 4 (curba 1); 2 (curba 2); 1 (curba 3); 0,5 (curba 4); 0,2 (curba 5); 0,1 (curba 6); 0,005 (curba7).

Valoarea ω_M corespunzătoare maximului este:

$$\omega_M = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} < \omega_0 \tag{2.91}$$

Se observă că dacă $\omega_0^2 < 2\gamma^2$ funcţia $A = A(\omega)$ nu prezintă un maxim şi ea este o funcţie descrescătoare de ω . Aceasta este situaţia în care amortizarea este mare.

Dacă $\omega_0^2 > 2\gamma^2$ amplitudinea prezintă un maxim pentru o valoare ω_M denumită pulsaţie de rezonanţă. Fenomenul poartă denumirea de *rezonanţă*. Valoarea maximă a amplitudinii este:

$$A = A(\omega_M) = \frac{F_0}{2m\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} > A(\omega_0) \tag{2.92}$$

Din relaţia de mai sus se observă că amplitudinea A ia valori cu atât mai mari cu cât γ este mai mic. În cazul în care $\gamma \to 0$, $A \to \infty$.

În Fig. 2.9 este reprezentată variaţia amplitudinii în funcţie de raportul ω/ω_0 pentru diverse valori ale lui γ. Cu cât γ scade, se micşorează şi domeniul de pulsaţii ale forţei exterioare pentru care are loc fenomenul de rezonantă.

2.4 Analiză Fourier

2.4.1 Funcţii periodice

Se demonstrează că o funcţie periodică $f(t)$ de perioadă T se poate descompune într-o serie trigonometrică de forma:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \tag{2.93}$$

sau:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \alpha_n) \tag{2.94}$$

unde $\omega = 2\pi/T$. Putem trece de la prima expresie la cea de-a doua astfel:

$$f(t) = a_n \left(\cos n\omega t + \frac{b_n}{a_n} \sin n\omega t \right)$$

Punând:

$$\mathrm{tg}\,\theta_\mathrm{n} = -\frac{\mathrm{b_n}}{\mathrm{a_n}}$$

Atunci:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\cos n\omega t - \mathrm{tg}\,\theta_\mathrm{n} \sin \mathrm{n}\omega \mathrm{t})$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\cos\theta_n} \cos(n\omega t + \theta_n) \tag{2.95}$$

Prin identificarea lui 2.94 cu 2.95 se obţine:

$$\theta_m = \alpha_n \tag{2.96}$$

$$A_n = \frac{a_n}{\cos\alpha_n} = \left(a_n^2 + b_n^2\right) \tag{2.97}$$

Pentru obţinerea coeficienţilor a_n şi b_n se înmulţeşte egalitatea 2.93 cu $\cos n\omega t$ şi $\sin n\omega t$ şi se integrează pe perioada T. Se observă că:

$$\int_0^T \cos n\omega t \sin k\omega t \; dt = 0$$

$$\int_0^T \cos n\omega t \cos k\omega t \; dt = \frac{T}{2}\delta_{nk}$$

$$\int_0^T \sin n\omega t \sin k\omega t \; dt = \frac{T}{2}\delta_{nk}$$

unde δ este simbolul lui Kroneker:

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 0 \text{ dacă } n \neq k \\ 1 \text{ dacă} n = k \end{cases} \tag{2.98}$$

Se obţine expresia:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) \; dt = \langle f \rangle$$

care reprezintă media funcţiei respective pe o perioadă:

$$b_0 = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos n\omega t \; dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin n\omega t \; dt$$

Dezvoltarea în serie Fourier se poate exprima cu ajutorul funcţiilor exponenţiale. Astfel relaţia 2.93 se poate scrie:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2}\left[\exp(in\omega t) + \exp(-in\omega t)\right] \\ &\quad - \frac{ib_n}{2}\left[\exp(in\omega t) - \exp(-in\omega t)\right] \end{aligned}$$

sau:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(a_n - ib_n) e^{in\omega t} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n) e^{-in\omega t} \right] \tag{2.99}$$

Putem face ca suma să se extindă de la -∞ la ∞ notând:

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

Atunci:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega t) \tag{2.100}$$

Se observă că $c_{-n} = c_n^*$ unde cu steluţă notăm expresia complex conjugată. Coeficienţii dezvoltării în serie sunt daţi de relaţiile:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt \tag{2.101}$$

Funcţiile periodice pot fi reprezentate cu ajutorul unor funcţii sinusoidale cu pulsaţii egale cu multipli întregi ai pulsaţiei fundamentale ω. Spectrul este dat de o diagramă în care sunt reprezentate amplitudinile A_n în funcţie de frecvenţă; el constă din linii verticale de diverse mărimi (proporţionale cu amplitudinile).

2.4.2 Funcţii neperiodice

Atunci când mărimea investigată este o funcţie neperiodică în locul seriei Fourier discrete intervine o integrală Fourier. În locul unui spectru discret rezultă un spectru continuu. Se demonstrează că dacă $f(t)$ este o funcţie neperiodică ea poate fi pusă sub forma

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} a(\omega) \cos[\omega t + \theta(\omega)] \; d\omega \tag{2.102}$$

Sub formă complexă, funcţia considerată se exprimă astfel:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) \exp(i\omega t) \; d\omega \tag{2.103}$$

unde $c\left(-\omega\right)=c^{*}\left(\omega\right)$ şi:

$$c\left(\omega\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(t\right)\exp\left(-i\omega t\right)\ dt \tag{2.104}$$

Vom discuta pe scurt legătura dintre reprezentarea reală şi reprezentarea complexă a integralei Fourier. Pentru aceasta vom porni de relaţia 2.102 pe care o vom prelucra ţinând cont de formulele lui Euler:

$$f\left(t\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}a\left(\omega\right)\left[\cos\omega t\cos\theta-\sin\omega t\sin\theta\right]\ d\omega$$

sau

$$f\left(t\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\frac{a\left(\omega\right)}{2}\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)\cos\theta-\frac{ia\left(\omega\right)}{2}\left(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}\right)\sin\theta\right]\ d\omega \tag{2.105}$$

Grupând în mod convenabil termenii expresiei 2.105 aceasta devine:

$$\begin{aligned} f\left(t\right) &= \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{\infty}\left[a\left(\omega\right)\cos\theta-ia\left(\omega\right)\sin\theta\right]e^{i\omega t}\ d\omega+ \\ &+\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{\infty}\left[a\left(\omega\right)\cos\theta+ia\left(\omega\right)\sin\theta\right]e^{-i\omega t}d\omega \end{aligned} \tag{2.106}$$

Expresia de mai sus poate fi scrisă mai condensat astfel:

$$f\left(t\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}c\left(\omega\right)e^{i\omega t}d\omega \tag{2.107}$$

unde

$$c\left(\omega\right)=\frac{a\left(\omega\right)\cos\theta-ia\left(\omega\right)\sin\theta}{2} \tag{2.108}$$

şi

$$c(-\omega)=c^{*}\left(\omega\right) \tag{2.109}$$

Din relaţia 2.108 rezultă:

$$\left|a\left(\omega\right)\right|=2\left|c\left(\omega\right)\right| \tag{2.110}$$

În plus se obţine:

$$\operatorname{tg}\theta(\omega) = -\frac{\operatorname{Im}[\mathrm{c}(\omega)]}{\operatorname{Re}[\mathrm{c}(\omega)]} \tag{2.111}$$

În concluzie, funcţiile periodice prezintă un spectru discret în timp ce funcţiile neperiodice prezintă un spectru continuu.

2.4.3 Aplicaţii ale dezvoltărilor în integrale Fourier

Perturbaţie de durată f inită

Considerăm o oscilaţie de pulsaţie ω_o care durează un interval de timp finit Δt. Ea poate fi reprezentată astfel:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t \in [-\infty\ ,\ -\Delta t/2] \\ A_o e^{i\omega_0 t} & t \in [-\Delta t/2\ ,\ \Delta t/2] \\ 0 & t \in [\Delta t/2\ ,\ \infty] \end{cases} \tag{2.112}$$

O astfel de funcţie poate fi dezvoltată într-o integrală Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega \tag{2.113}$$

unde

$$c(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-i\omega t} dt \tag{2.114}$$

Vom calcula aceşti coeficienţi:

$$c(\omega) = \int\limits_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} A_0 e^{i(\omega_0-\omega)t} dt = A_0 \left.\frac{\exp[i(\omega_0-\omega)t]}{i(\omega_0-\omega)}\right|_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2}$$

Rezultă:

$$c(\omega) = A_0 \frac{\exp\left[i(\omega_0-\omega)\dfrac{\Delta t}{2}\right] - \exp\left[-i(\omega_0-\omega)\dfrac{\Delta t}{2}\right]}{i(\omega_0-\omega)} \tag{2.115}$$

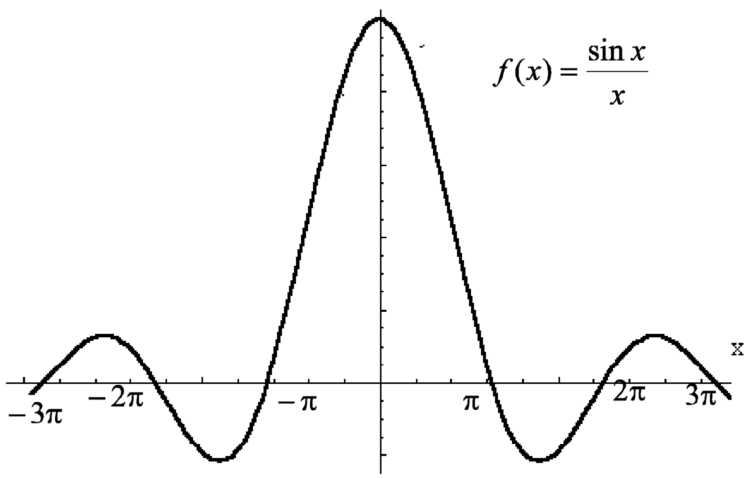


Figura 2.10: Funcţia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Astfel:

$$c(\omega) = A_0 \Delta t \frac{\sin\left[(\omega_0 - \omega)\frac{\Delta t}{2}\right]}{(\omega_0 - \omega)\frac{\Delta t}{2}} = A_0 \Delta t \frac{\sin\frac{\Delta\omega\Delta t}{2}}{\frac{\Delta\omega\Delta t}{2}} \tag{2.116}$$

Notând cu $\xi = \frac{\Delta\omega\Delta t}{2}$ relaţia 2.116 se va scrie:

$$c(\omega) = A_0 \Delta t \frac{\sin\xi}{\xi} \tag{2.117}$$

În Fig. 2.10 este arătată variaţia funcţiei $f(\xi) = \frac{\sin\xi}{\xi}$. Ea este o funcţie pară, care oscilează în jurul valorii de zero şi care pentru valori mari ale lui ξ se amortizează. Se observă că pentru $\xi \to 0$, $f(\xi) = \frac{\sin\xi}{\xi} \to 1$. Funcţia se anulează atunci când $\sin\xi = 0$, adică atunci când $\xi = \pm m\pi$, unde m este un număr întreg diferit de zero. Extremele acestei funcţii se determină prin calcularea derivatei acesteia în raport cu ξ. Se obţine:

$$\frac{\xi\cos\xi - \sin\xi}{\xi^2} = 0$$

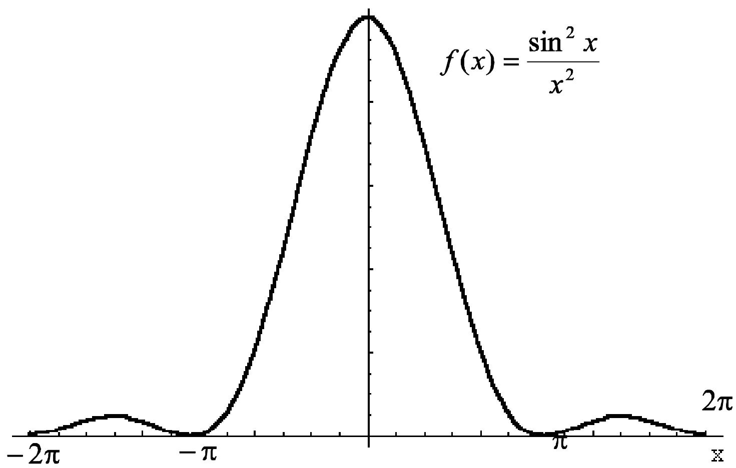


Figura 2.11: Funcţia $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$

de unde rezultă că:

$$\operatorname{tg} \xi = \xi \tag{2.118}$$

Relaţia 2.118 este o ecuaţie transcendentă care se poate rezolva numeric sau grafic.

Din 2.113 se constată că oscilaţia iniţială s-a descompus într-o mulţime continuă de oscilaţii monocromatice cu pulsaţii diferite.

Energia asociată fiecărei oscilaţii este proporţională cu $|c^2(\omega)|$ unde

$$\left|c^2(\omega)\right| = A_0^2 (\Delta t)^2 \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} \tag{2.119}$$

Reprezentare acestei funcţii este dată în Fig. 2.11.

Când $\omega = \omega_0$

$$\left|c^2(\omega_0)\right| = A_0^2 (\Delta t)^2 \tag{2.120}$$

iar când ω corespunde primului maxim secundar $|c^2(\omega)| = 0.04 \times A_0^2 (\Delta t)^2$. Din acest motiv se consideră că distribuţia spectrală a perturbaţiei respective este semnificativă numai în intervalul $\xi \in [-\pi\ ,\ \pi]$.

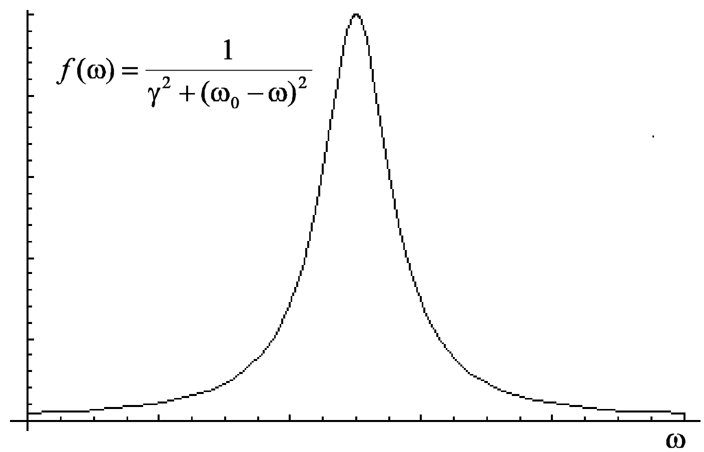


Figura 2.12: Distribuţia Lorentz

O mărime care caracterizează această distribuţie a energiei este lărgimea la semiînălţime. Din $\frac{\sin^2\xi}{\xi^2} = \frac{1}{2}$rezultă:

$$\Delta\omega\Delta t = 1,78$$

Se observă că cu cât Δt este mai mare cu atât $\Delta\omega$ este mai mic şi spectrul de pulsaţii în care poate fi descompusă perturbaţia este mai restrâns. Invers cu cât Δt este mai mic cu atât distribuţia este mai largă.

Spectrul unei oscilaţii amortizate

Vom considera o expresie a oscilaţiei amortizate de forma:

$$x\left(t\right) = A\exp\left(-\gamma t\right)\exp\left(i\omega_0 t\right) \qquad , \qquad t > 0 \tag{2.121}$$

Coeficienţii dezvoltării sunt:

$$c\left(\omega\right) = \int_0^\infty A\exp\left(-\gamma t\right)\exp\left[i\left(\omega_0 - \omega\right)t\right]dt \tag{2.122}$$

$$c\left(\omega\right) = A_0\,\frac{\exp\left[i\left(\omega_0 - \omega\right) - \gamma\right]t}{i\left(\omega_0 - \omega\right) - \gamma}\Bigg|_0^\infty \tag{2.123}$$

Rezultă:

$$c(\omega) = \frac{1}{\gamma - i(\omega_0 - \omega)} \tag{2.124}$$

Ca şi în cazul precedent se va calcula $|c^2(\omega)|$, acest termen fiind proporţional cu energia oscilaţiei de pulsaţie ω.

$$\left|c^2(\omega)\right| = \frac{1}{\gamma^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \tag{2.125}$$

Dependenţa lui $|c^2(\omega)|$de ω este reprezentată în Fig. 2.12; ea este o distribuţie Lorentz.

Valoarea mărimii $|c^2(\omega)|$ este maximă atunci când numitorul expresiei 2.125 este minim. Aceasta se petrece când $\omega = \omega_0$. Valoarea maximă este

$$\left|c_m^2\right| = \frac{1}{\gamma^2}$$

Pentru a determina lărgimea la semiînălţime se pune condiţia ca

$$\left|c^2(\omega)\right| = \frac{1}{\gamma^2 + (\omega_0 - \omega)^2} = \frac{|c_m^2|}{2} = \frac{1}{2\gamma^2}$$

Rezultă ecuaţia

$$(\omega_0 - \omega)^2 = \gamma^2 \tag{2.126}$$

sau:

$$\omega_0 - \omega = \pm\gamma$$

Astfel soluţiile ecuaţiei 2.126 sunt:

$$\omega_1 = \omega_0 - \gamma$$

şi

$$\omega_2 = \omega_0 + \gamma$$

Lărgimea la semiînălţime este:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma \tag{2.127}$$

Se constată că cu cât γ este mai mic, (adică cu cât amortizarea este mai mică) cu atât lărgimea la semiînălţime a distribuţiei este mai mică, adică spectrul de frecvenţe este mai restrâns.