Capitolul 1

Elemente de mecanică newtoniană

1.1 Cinematica punctului material

Cinematica este partea din mecanică ce studiază mişcarea fără a-i considera cauzele. Prin mişcare mecanică înţelegem schimbarea în timp a poziţiei unui corp în raport cu alt corp material. Corpul faţă de care se studiază mişcarea care prin convenţie, este considerat fix poartă numele de corp de referinţă. De corpul de referinţă poate fi ataşat rigid un sistem de coordonate (de exemplu un sistem ortogonal cu trei axe). Pentru măsurarea timpului este necesar un ceasornic. Aceasta implică un proces periodic (de exemplu oscilaţiile unui pendul). Sistemul de coordonate şi ceasornicul formează sistemul de referinţă. Un rol important îl au sistemele de referinţă în care este valabil principiul inerţiei şi care poartă numele de *sisteme inerţiale*. Sistemele inerţiale se deplasează unele faţă de altele cu viteză constantă. Un corp material este în general un sistem complex. Pentru studiul mişcării acestuia se pot face o serie de simplificări cum ar fi neglijarea formei acestuia sau a dimensiunilor sale. Astfel, un corp ale cărui dimensiuni pot fi neglijate în raport cu spaţiul înconjurător, poartă numele de punct material.

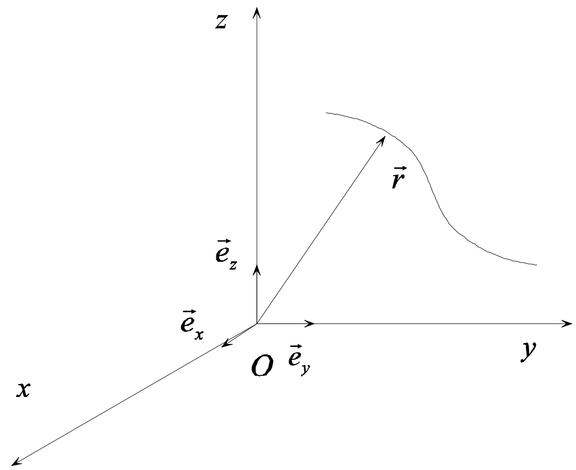

Figura 1.1: Vectorul de poziţie este vectorul cu originea în originea sistemului de coordonate şi cu vârful pe punctul material

1.1.1 Mărimi fundamentale

Traiectorie

Mişcarea unui punct material este caracterizată prin modificarea în timp a coordonatelor sale în sistemul de coordonate ales. Astfel, într-un sistem de coordonate cartezian, cunoaşterea mişcării este echivalentă cu a cunoaşte evoluţia în timp a razei vectoare sau a vectorului de poziţie (Fig. 1.1).

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z \tag{1.1}$$

Se numeşte traiectorie curba descrisă de punctul material în timpul mişcării sale.

Funcţia $\vec{r}(t)$ trebuie să satisfacă anumite condiţii. Ea trebuie să fie continuă, uniformă, finită şi cel puţin de două ori derivabilă. Ecuaţiile:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \tag{1.2}$$

poartă numele de ecuaţiile dinamice ale mişcării şi ele reprezintă ecuaţiile parametrice ale traiectoriei, având ca parametru timpul.

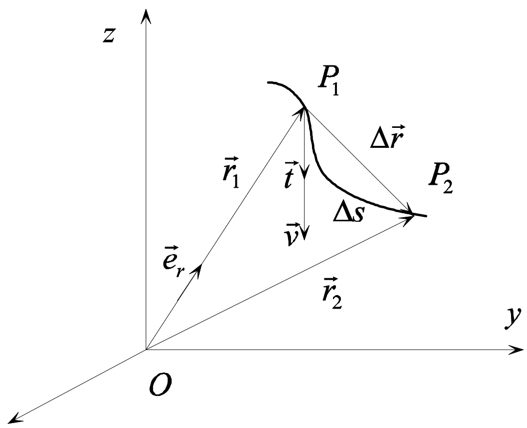

Figura 1.2: Vectorul deplasare $\Delta\vec{r}$ şi vectorul viteză $\vec{v}$

Prin eliminarea timpului se obţin două ecuaţii:

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= 0 \\ f_2(x,y,z) &= 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Fiecare din aceste ecuaţii reprezintă câte o suprafaţă, traiectoria fiind curba de intersecţie a celor două suprafeţe.

Viteza

Viteza unei particule reprezintă variaţia poziţiei sale raportată la unitatea de timp. Fie $\vec{r}_1$ vectorul de poziţie al punctului material la momentul t şi $\vec{r}_2$ vectorul de poziţie la momentul $t + \Delta t$. Vectorul $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ se numeşte vector de deplasare.

Definim vectorul viteză medie (Fig. 1.2):

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{e}_x + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{e}_y + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{e}_z \tag{1.4}$$

Modulul vitezei medii este:

$$v_m = |\vec{v}_m| = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} \tag{1.5}$$

Pentru a caracteriza mişcarea punctului material trebuie definită viteza instantanee. Prin definiţie:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z \tag{1.6}$$

Cum

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z \tag{1.7}$$

prin identificare din relaţiile 1.6 şi 1.7 se obţine pentru componentele vitezei:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{1.8}$$

Când are loc trecerea la limită, $P_2 \to P_1$, secanta P_1P_2 se roteşte în jurul lui P_1 şi devine tangentă la traiectorie. Rezultă că vectorul viteză instantanee este tangent la traiectorie.

Deoarece la limită (pentru deplasări foarte mici) lungimea arcului de curbă coincide cu lungimea coardei rezultă:

$$\frac{|d\vec{r}\,|}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}\,|}{\Delta s} = 1 \tag{1.9}$$

În relaţia 1.9 Δs este spaţiul parcurs pe curbă de mobil iar s este lungimea arcului pe traiectorie de la un punct considerat ca referinţă şi poartă denumirea de coordonată curbilinie.

Atunci derivata $d\vec{r}/ds$ - având modulul egal cu unitatea este un versor îndreptat în direcţia tangentei la curbă. Se noteză acest versor cu $\vec{t}$; el are sensul creşterii lui s.

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t} \tag{1.10}$$

Atunci:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{t}\,\frac{ds}{dt} = \vec{t}v \tag{1.11}$$

unde $v = ds/dt$ este viteza de deplasare pe traiectorie; ea reprezintă spaţiul parcurs pe traiectorie în unitatea de timp. Ţinând cont de cele prezentate mai sus:

$$|\vec{v}\,| = \left|\vec{t}v\right| = v \tag{1.12}$$

adică viteza pe traiectorie este egală cu modulul vectorului viteză.

În concluzie vectorul viteză instantanee este tangent la traiectorie şi îndreptat în sensul mişcării.

Putem exprima vectorul de poziţie ca fiind:

$$\vec{r} = \vec{e}_r(t)r(t) \qquad ; \qquad |\vec{e}_r(t)| = 1 \tag{1.13}$$

unde $\vec{e}_r$ este versorul razei vectoare.

Atunci, putem exprima viteza astfel:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r(t) + r\frac{d\vec{e}_r(t)}{dt} \tag{1.14}$$

Semnificaţia formulei de mai sus este următoarea: viteza punctului material este datorată atât variaţiei modulului razei vectoare cât şi direcţiei razei vectoare.

În plus vectorul $d\vec{e}_r/dt$ este perpendicular pe $\vec{e}_r$.

Acest lucru se poate demonstra, ţinând cont că

$$|\vec{e}_r| = 1 \tag{1.15}$$

Atunci:

$$\vec{e}_r^{\,2} = 1$$

Derivând în raport cu timpul relaţia de mai sus se obţine:

$$\frac{d\vec{e}_r^{\,2}}{dt} = 2\vec{e}_r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = 0 \tag{1.16}$$

şi se justifică afirmaţia făcută anterior. Trebuie observat că deşi $|\vec{e}_r| = 1$, $\vec{e}_r$ îşi modifică direcţia în timp. Astfel, putem trage concluzia că derivata unui vector variabil, dar de modul constant este perpendiculară pe acel vector.

Acceleraţia

În general în cursul unei miscări viteza $\vec{v}$ variază atât ca direcţie cât şi ca modul. Se impune introducerea unei mărimi care să caracterizeze această variaţie. Această mărime poartă numele de acceleraţie. Ea reprezintă variaţia vitezei în unitatea de timp. Ca şi în cazul vitezei vom defini o acceleraţie medie pe un interval de timp Δt (Fig. 1.3)

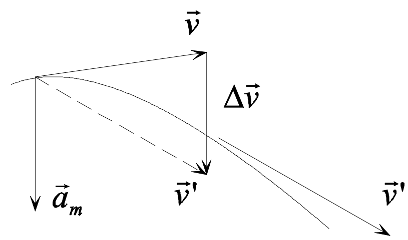

Figura 1.3: Acceleraţie medie

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{1.17}$$

precum şi o acceleraţie instantanee

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{e}_x + \frac{dv_y}{dt}\vec{e}_y + \frac{dv_z}{dt}\vec{e}_z \tag{1.18}$$

care mai poate fi scrisă ca:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{e}_x + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_z \tag{1.19}$$

Exprimând acceleraţia în funcţie de proiecţiile sale pe cele trei axe de coordonate

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$$

se obţine:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{1.20}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \tag{1.21}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{1.22}$$

Se observă că acceleraţia este îndreptată înspre interiorul traiectoriei şi nu este tangentă la traiectorie.

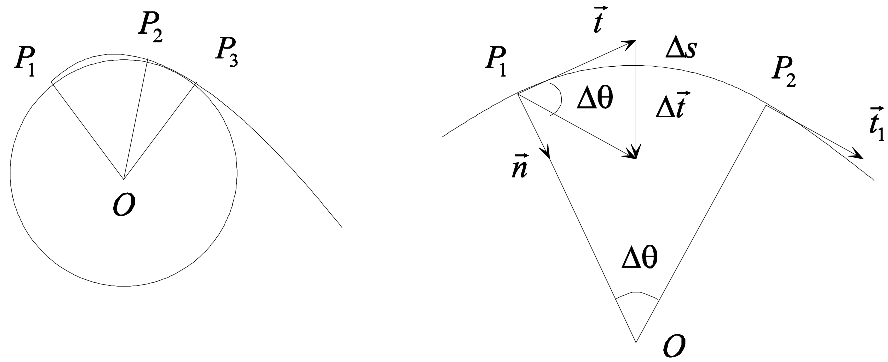

Figura 1.4: Curbura şi raza de curbură

O descriere mai detaliată a vectorului acceleraţie impune definirea unor mărimi noi precum raza de curbură şi curbura. Se consideră pe o curbă C (Fig. 1.4) trei puncte necolineare P_1 , P_2 , P_3.

Cele trei puncte definesc un cerc a cărui rază R dă curbura medie $C = 1/R$ a curbei pe porţiunea $P_1P_2P_3$. Dacă punctele P_1 şi P_3 tind către P_2 atunci cercul obţinut poartă numele de cerc de curbură sau cerc osculator al curbei în punctul P_2. Planul limită definit de cele trei puncte poartă numele de plan osculator şi conţine cercul osculator. Se poate defini astfel raza de curbură într-un punct:

$$R = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta\theta} = \frac{ds}{d\theta} \tag{1.23}$$

Curbura în punctul respectiv este inversul razei:

$$C = \frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} \tag{1.24}$$

Din Fig. 1.4 se observă că $\Delta s/\Delta\theta$ reprezintă raza cercului osculator.

Astfel curbura C măsoară gradul de abatere a curbei de la linia dreaptă. Vectorul unitate perpendicular pe tangenta la curbă într-un punct îndreptat înspre centrul de curbură şi aflat în planul osculator poartă numele de normală principală. Din Fig.1.4 se vede că:

$$\left|\frac{\Delta\vec{t}}{\Delta\theta}\right| = \frac{2\left|\vec{t}\right|\sin\Delta\theta/2}{\Delta\theta} = \frac{\sin\Delta\theta/2}{\Delta\theta/2}$$

Atunci când $\Delta\theta \to 0$ rezultă:

$$\frac{\sin \Delta\theta/2}{\Delta\theta/2} \to 1$$

Astfel:

$$\left|\frac{\Delta\vec{t}}{\Delta\theta}\right| \to 1 \qquad ; \qquad \left|\frac{d\vec{t}}{d\theta}\right| = 1 \tag{1.25}$$

Atunci când P_1 se apropie de punctul P_2 vectorul $\vec{t}$ se roteşte în jurul lui P_1 iar $\Delta\vec{t}$ devine perpendicular pe $\vec{t}$. Rezultă:

$$\frac{d\vec{t}}{d\theta} = \vec{n} \tag{1.26}$$

În plus

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} = C\vec{n} = \frac{\vec{n}}{R} \tag{1.27}$$

Derivând relaţia 1.11 obţinem :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{t}\,) = \frac{dv}{dt}\vec{t} + v\frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + v\frac{d\vec{t}}{ds}\frac{ds}{dt} \\ \vec{a} &= \frac{dv}{dt}\vec{t} + v^2\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n} \end{aligned} \tag{1.28}$$

Se poate exprima acceleraţia ca sumă din doi vectori perpendiculari:

$$\vec{a} = a_t\vec{t} + a_n\vec{n} \tag{1.29}$$

unde

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \tag{1.30}$$

poartă denumirea de acceleraţie tangenţială, ea fiind datorată variaţiei modului vitezei, iar

$$a_n = \frac{v^2}{R} \tag{1.31}$$

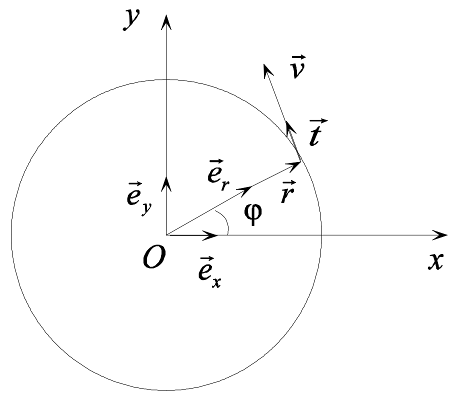

Figura 1.5: Mişcarea circulară

poartă denumirea de acceleraţie normală sau centripetă şi este datorată variaţiei direcţiei vitezei.

Se remarcă faptul că mişcarea curbilinie este întotdeauna o mişcare accelerată deoarece $\vec{a}_n \neq 0$.

Rezultă că acceleraţia se descompune într-o componentă tangenţială $\vec{a}_t$ care este îndreptată de-a lungul vitezei şi o componentă normală $\vec{a}_n$ îndreptată înspre centrul de curbură.

1.1.2 Mişcarea circulară

Mişcarea circulară este mişcarea unui punct material a cărui traiectorie este un cerc.

Într-o mişcare circulară variază numai direcţia razei vectoare $\vec{r}$ (Fig. 1.5). Atunci în relaţia 1.14 $dr/dt = 0$. Rezultă:

$$\vec{v} = r\,\frac{d\vec{e}_r}{dt} \tag{1.32}$$

Conform Fig. 1.5 versorul razei vectoare se scrie ca:

$$\vec{e}_r = \vec{e}_x \cos\varphi(t) + \vec{e}_y \sin\varphi(t) \tag{1.33}$$

Deoarece

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = (-\vec{e}_x \sin\varphi + \vec{e}_y \cos\varphi)\frac{d\varphi}{dt} \tag{1.34}$$

putem scrie:

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{t}\ \frac{d\varphi}{dt} \tag{1.35}$$

unde

$$\vec{t} = -\vec{e}_x \sin\varphi + \vec{e}_y \cos\varphi \tag{1.36}$$

şi

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \tag{1.37}$$

reprezintă viteza unghiulară.

Astfel în mişcarea circulară, vectorul viteză este:

$$\vec{v} = r\omega\vec{t} \tag{1.38}$$

iar modulul său este:

$$v = |\vec{v}\,| = r\omega \tag{1.39}$$

Acceleraţia tangenţială este:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon \tag{1.40}$$

unde

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \tag{1.41}$$

poartă numele de acceleraţie unghiulară.

Acceleraţia normală sau centripetă este:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \tag{1.42}$$

Acceleraţia totală este:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{1.43}$$

Viteza poate fi scrisă vectorial prin introducerea vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$ perpendiculară pe planul traiectoriei circulare având sensul dat de

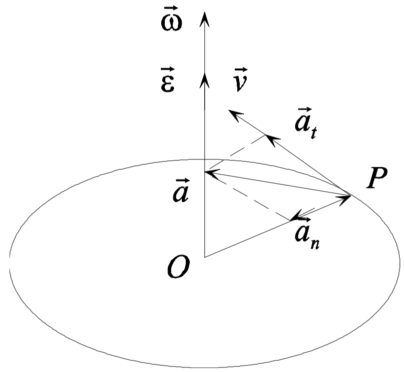

Figura 1.6: Accelerația normală şi tangențială în cazul mişcării circulare

regula burghiului drept (Fig. 1.6). Se poate defini şi vectorul accelerație unghiulară ca fiind:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{1.44}$$

care va fi situat pe aceiaşi axă cu $\vec{\omega}$.

Din Fig. 1.6 se observă că:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{1.45}$$

$$\vec{a}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \tag{1.46}$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2\vec{r} = -\frac{v^2}{r^2}\vec{r} \tag{1.47}$$

Ca exemplu putem considera cazul mişcării circulare uniforme. În acest caz ω = const. Rezultă că accelerația unghiulară şi accelerația tangențială sunt nule, numai accelerația normală fiind diferită de zero. Pentru o astfel de mişcare se pot defini frecvența şi perioada.

Frecvența ν reprezintă numărul de rotații efectuat de corp în unitatea de timp.

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \tag{1.48}$$

Perioada T reprezintă timpul în care se efectuează o rotație completă

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} \tag{1.49}$$

1.2 Legile mecanicii

1.2.1 Formulările legilor mecanicii

Legea I (Principiul inerţiei)

Experimental s-a constat că dacă asupra unui corp aflat în stare de repaus nu se exercită acţiunea altor corpuri această stare se menţine un timp nedefinit. Dacă se lansează pe un plan şlefuit o bilă se constată că traiectoria acesteia este o dreaptă iar în intervale de timp scurte mişcarea este aproape o mişcare uniformă în sensul că viteza se micşorează foarte puţin.

Repetând experienţa pe alte plane se constă că cu cât suprafaţa planului este mai bine şlefuită micşorarea vitezei în acelaşi interval de timp este mai mică. Aceste fapte duc la concluziile următoare:

- în punctul de contact dintre bilă şi plan apar interacţii care se opun mişcării;

- dacă interacţiile care se opun mişcării ar fi eliminate atunci mişcarea bilei ar fi o miscare rectilinie uniformă.

Generalizând, se poate formula principiul inerţiei:

Orice corp liber îşi păstrează starea de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă (un corp liber este corpul asupra căruia nu se exercită nici forţe nici momente indiferent de modul de aplicare).

Principiul nu a putut fi verificat în mod absolut în practică, deoarece nici un corp nu poate fi izolat complet de acţiunea celorlalte corpuri care-l înconjoară. Experienţele care au dus la această concluzie au minimizat cât s-a putut de mult sau au anulat într-un fel acţiunile exterioare corpului.

Proprietatea unui corp de a-şi menţine starea de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă poartă numele de inerţie.

Sistemele de referinţă în care este valabil principiul inerţei poartă numele de sisteme inerţiale. Ca o observaţie trebuie remarcat că sistemele de referinţă legate de pământ nu sunt riguros inerţiale, datorită mişcării acestuia. Abaterile sunt însă mici, astfel încât aceste sisteme pot fi considerate ca inerţiale.

Legea a II-a (Legea fundamentală a mecanicii)

În mecanică se consideră două feluri de interacţiuni dintre două corpuri:

a) interacţiuni în urma cărora viteza unuia din corpuri se modifică (în mărime şi direcţie), adică corpul este accelerat.

b) interacţiuni în urma cărora corpurile se deformează.

Cele două tipuri de acţiuni poartă numele de forţe. În continuare ne vom limita la primului caz.

Experimental s-a constatat că acceleraţia căpătată de un corp este proporţională cu forţa care acţionează asupra lui.

$$\vec{a} \backsim \vec{F}$$

Atunci legea a doua se formulează astfel:

Acceleraţia pe care o capătă un corp datorită acţiunii unei forţe este direct proporţională cu mărimea acelei forţe şi colineară cu ea.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{1.50}$$

În relaţia de mai sus m este un parametru ce caracterizează corpul respectiv şi poartă numele de masă. Newton a interpretat acest parametru ca fiind cantitatea de substanţă conţinută într-un corp. Deoarece cu cât masa este mai mare acceleraţia imprimată este mai mică, se poate spune că masa unui corp este o măsură a inerţiei sale. Din acest motiv masa m poartă numele de masă inerţială.

Legea a doua poate fi exprimată şi în alt mod. Pentru aceasta se defineşte impulsul ca fiind produsul dintre masă şi viteză.

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{1.51}$$

Dacă se consideră masa ca fiind o constantă

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{1.52}$$

Rezultă că:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{1.53}$$

Relatia 1.53 reprezintă o altă formă a legii a II-a a dinamicii. Ea este valabilă şi în cadrul mecanicii relativiste unde masa este o mărime variabilă.

Legea a III-a (Principiul acţiunii şi reacţiunii)

Forţele care acţionează asupra unui corp sunt determinate de alte corpuri. Experimental se constată că forţele cu care un corp acţionează asupra altuia determină instantaneu din partea celui de-al doilea o reacţiune asupra primului. Se găseşte că cele două două forţe sunt egale dar de sens contrar. Prin generalizarea acestor fapte s-a obţinut principiul acţiunii şi reacţiunii:

Dacă un corp acţionează asupra altui corp cu o forţă $\vec{F}_{12}$*, al doilea corp acţionează asupra primului cu o forţă* $\vec{F}_{21}$ *egală în mărime şi de sens contrar cu prima forţă.*

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Cele două forţe poartă numele de acţiune şi reacţiune şi acţionează asupra unor corpuri diferite.

Legea a IV-a (Principiul suprapunerii forţelor)

Principiul suprapunerii forţelor arată ce se petrece atunci când asupra unui corp acţionează simultan mai multe forţe:

Dacă asupra unui corp acţionează forţele $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$*, efectul obţinut este acelaşi ca şi în cazul în care asupra corpului ar acţiona o singură forţă*

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \tag{1.54}$$

Aceasta înseamnă ca fiecare forţă acţionează independent, efectul uneia dintre ele nefiind afectat de existenţa celorlalte forţe.

1.2.2 Sisteme de referinţă (SR)

Aşa cum s-a arătat, studiul mişcării corpurilor impune raportarea acesteia la un sistem spaţio-temporal (SR) care constă:

- dintr-un sistem de coordonate (ataşat de un corp considerat prin convenţie fix);

- un ceasornic pentru măsurarea timpului.

Newton a ajuns la concluzia că un sistem de referinţă, fixat de corpuri materiale nu poate fi absolutizat, din lipsa motivelor care ar susţine unicitatea unui astfel de sistem.

Totuşi un sistem de referinţă fix a fost introdus, deşi despre poziţionarea acestuia nu se poate spune nimic precis. Acesta este spaţiul absolut.

Admiterea timpului absolut a fost realizată în aşa fel încât marcarea momentelor de timp absolut nu putea fi atribuită unor evenimente materiale.

Alegerea unui sistem de referinţă se face astfel încât principiile mecanicii să fie satisfăcute iar fenomenele studiate să apară cât mai simplu.

În conformitate cu aceasta s-a introdus sistemul de referinţă inerţial (SRI); în acest sistem principiul inerţiei este satisfăcut.

Cerinţele ce trebuie îndeplinite de spaţiu şi timp în sistemul de referinţă inerţial pentru menţinerea stării de mişcare rectilinie şi uniformă sau repaus relativ a unui corp liber sunt:

1 Omogenitatea spaţiului: toate punctele din spaţiu sunt echivalente.

2 Izotropia spaţiului: traiectoriile corpurilor libere în mişcare sunt rectilinii indiferent de direcţiile în care are loc mişcarea.

3 Uniformitatea timpului: corpurile libere parcurg spaţii egale în intervale de timp egale.

1.2.3 Transformările Galilei

Fie două sisteme S şi S$'$ inerţiale, S$'$ fiind în mişcare relativă fată de S cu viteza constantă $\vec{v}$. Un punct material are coordonatele $(\vec{r}, t)$ în S şi $(\vec{r}\,', t')$ în S$'$.

Se pune problema de a determina relaţiile de trecere de la coordonatele $(\vec{r}, t)$ la coordonatele $(\vec{r}\,', t')$.

Aceste relaţii sunt date de transformările Galilei şi rezultă din existenţa spaţiului absolut şi a timpului absolut.

Transformarea timpului

Se consideră două sisteme de referinţă cu două ceasornice identice. Deoarece poziţia unui ceasornic în sistemul căruia îi este ataşat nu contează se poate alege poziţia acestuia astfel ca să existe un moment în care poziţia celor două ceasornice să coincidă. Astfel se poate realiza sincronizarea lor.

$$t_0 = t_0' = 0 \tag{1.55}$$

În mecanica clasică se presupune că mersul ceasornicelor este independent de starea de mişcare a sistemelor de referinţă; scurgerea timpului este aceiaşi

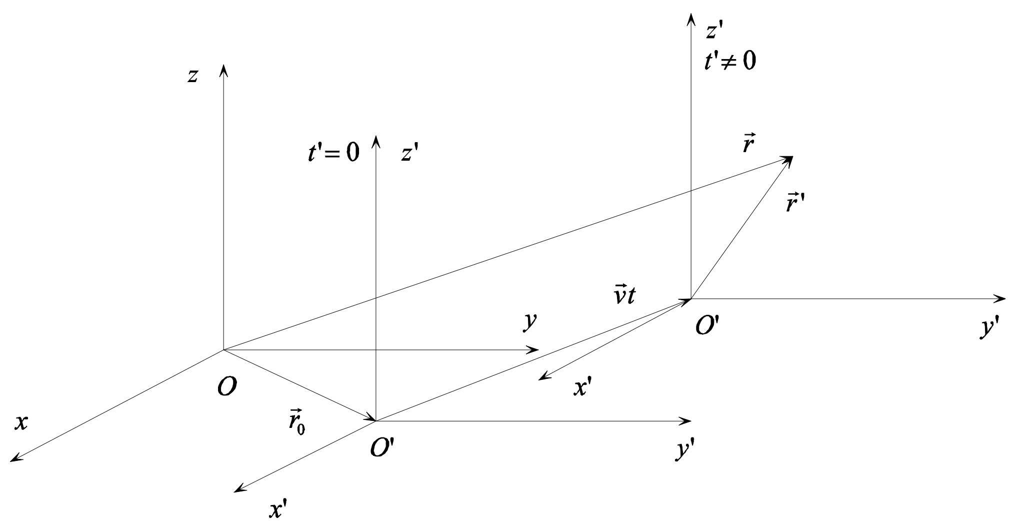

Figura 1.7: Transformările Galilei. Sistemul S$'$ este reprezentat la două momente de timp: $t = 0$ şi $t \neq 0$.

în ambele sisteme de referinţă; atunci:

$$t' = t \tag{1.56}$$

Se constată că dacă se admite existenţa unui timp absolut, simultaneitatea este absolută: două sau mai multe evenimente simultane într-un sistem de referinţă inerţial sunt simultane în orice alt sistem de referinţă inerţial.

Transformarea spaţiului

Pentru deducerea relaţiei de transformare dintre $\vec{r}$ şi $\vec{r}\,'$ se consideră că:

- etaloanele de lungime nu se modifică în funcţie de starea de mişcare a sistemelor cărora le sunt ataşate;

- măsurarea unei distanţe într-un sistem se face prin considerarea poziţiilor celor două extremităţi la un moment de timp t.

Se consideră că la $t' = t = 0$ originea sistemului S$'$ se găseşte la coordonata $\vec{r}_0$. Din Fig. 1.7 se observă că:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,' + \vec{v}t \tag{1.57}$$

Relaţia 1.57 reprezintă relaţia de transformare a spaţiului.

Pentru $t = 0$, $\vec{r}_0 = 0$, relaţiile Galilei care dau transformarea spaţiului şi timpului devin:

$$\begin{aligned} t &= t' \\ \vec{r} &= \vec{r}\,' + \vec{v}t \end{aligned} \tag{1.58}$$

Dacă S′ se deplasează de-a lungul axei Oy, relaţiile Galilei sunt:

$$\begin{aligned} t &= t' \\ x &= x' \\ y &= y' + vt \\ z &= z' \end{aligned} \tag{1.59}$$

Derivând relaţia 1.57 se obţine relaţia de legătură dintre vitezele punctului material din cele două sisteme de referinţă

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

viteza punctului material în S, şi

$$\vec{u}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt}$$

viteza punctului material în S′:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \vec{v} \tag{1.60}$$

Atunci:

$$\vec{u} = \vec{u}\,' + \vec{v} \tag{1.61}$$

Dacă un corp se mişcă rectiliniu şi uniform (cu viteză constantă în sistemul de referinţă S) el se va mişca în acelaşi mod şi în sistemul S′.

Dacă S şi S′ sunt inerţiale, atunci sistemele de referinţă se mişcă unele faţă de altele cu viteză constantă.

Pentru obţinerea relaţiilor dintre acceleraţiile din cele două sisteme de referinţă se derivează în raport cu timpul relaţia 1.61:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}\,'}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{1.62}$$

Rezultă:

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

Cum masa este constantă, legea a II-a a dinamicii îşi păstrează aceiaşi formă în ambele sisteme de referinţă. Acest fapt a dus la enunţarea principiului relativităţii al lui Galilei:

Legile mecanicii sunt invariante la transformările Galilei.

1.3 Dinamica punctului material

1.3.1 Teorema impulsului

Din principiul al doilea al dinamicii rezultă:

$$\vec{F}dt = d\vec{p} \tag{1.63}$$

Se defineşte impulsul forţei astfel:

$$\vec{H} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \tag{1.64}$$

Din 1.63 şi 1.64 rezultă:

$$\vec{H} = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m_2\vec{v}_2 - m_1\vec{v}_1 \tag{1.65}$$

Cum în mecanica clasică masa este constantă $m_1 = m_2$ se obţine:

$$\vec{H} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \Delta\vec{p} \tag{1.66}$$

Relaţia 1.66 reprezintă teorema impulsului:

Impulsul forţei rezultante aplicate unui punct material este egal cu variaţia impulsului punctului material.

Dacă asupra punctului material nu acţionează nici o forţă ($\vec{F} = 0$), sau rezultanta forţelor ce acţionează asupra punctului este nulă atunci:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \tag{1.67}$$

Integrând relaţia 1.67 se obţine:

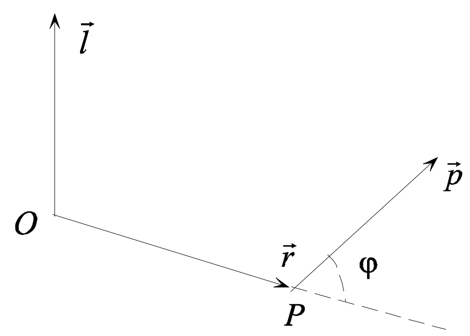

Figura 1.8: Momentul cinetic

$$\vec{p} = \text{const} \tag{1.68}$$

Aceasta este legea conservării impulsului*:*

Dacă rezutanta forţelor ce acţionează asupra unui punct material este nulă, impulsul acestuia rămâne constant.

1.3.2 Teorema momentului cinetic

Momentul cinetic (Fig. 1.8) al unui punct material P se defineşte în raport cu un punct O:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \tag{1.69}$$

Rezultă că momentul cinetic este un vector perpendicular pe planul format de vectorul de poziţie şi impuls. Modulul lui este:

$$l = rp \sin\varphi = rmv \sin\varphi$$

Se derivează expresia 1.69 şi se obţine:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

sau

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \tag{1.70}$$

deoarece $\vec{v}\times\vec{p}=0$, $\vec{v}$ şi $\vec{p}$ fiind vectori pe aceiaşi direcţie. Mărimea $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$ este momentul forţei. Rezultă:

$$\vec{M}=\frac{d\vec{l}}{dt} \tag{1.71}$$

Aceasta reprezintă teorema momentului cinetic.

Momentul forţei este egal cu derivata momentului cinetic în raport cu timpul.

În cazul în care momentul forţei este nul:

$$\frac{d\vec{l}}{dt}=0$$

Prin integrare rezultă:

$$\vec{l}=\mathrm{const}$$

Aceasta este expresia matematică a legii de conservare a momentului cinetic.

Dacă momentul rezultant al forţelor care acţionează asupra unui punct material este nul, momentul cinetic se conservă.

1.3.3 Lucrul mecanic

Forţele pot produce deplasări ale corpurilor. O măsură a efectului produs de forţă este lucrul mecanic. Presupunând că prin acţiunea forţei $\vec{F}$ are loc o deplasare foarte mică $d\vec{r}$ a punctului material pe traiectorie (Fig. 1.9) se poate defini lucrul mecanic elementar:

$$\delta L=\vec{F}d\vec{r} \tag{1.72}$$

În cazul unei deplasări finite între punctele (1) şi (2):

$$L=\int_{(1)}^{(2)}\vec{F}d\vec{r}=\int_{(1)}^{(2)}F_x dx+F_y dy+F_z dz \tag{1.73}$$

În cazul unei forţe constante:

$$L=\vec{F}\int_{(1)}^{(2)}d\vec{r}=\vec{F}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)=\vec{F}\vec{d}=Fd\cos\alpha \tag{1.74}$$

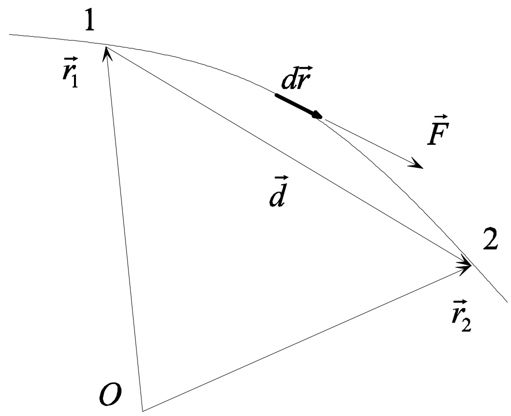

Figura 1.9: Lucrul mecanic

unde α este unghiul dintre forţa $\vec{F}$ şi vectorul deplasare $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Se observă că dacă $\vec{F} \perp \vec{d}$ atunci $L = 0$, fapt ce arată că într-o deplasare curbilinie doar componenta tangenţială a forţei efectuează lucru mecanic.

1.3.4 Puterea

Definim puterea ca fiind viteza cu care este efectuat lucrul mecanic.

Puterea medie în intervalul de timp Δt este raportul dintre lucrul mecanic ΔL efectuat în acest interval şi valoarea intervalului Δt:

$$P_m = \frac{\Delta L}{\Delta t} \tag{1.75}$$

Puterea instantanee sau puterea momentană se defineşte ca fiind[1]:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{\delta L}{dt} \tag{1.76}$$

Cum $\delta L = \vec{F} d\vec{r}$ rezultă:

$$P = \vec{F}\,\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\,\vec{v} \tag{1.77}$$

[1] S-a introdus notaţia δL pentru a menţiona faptul că lucrul mecanic nu este o diferenţială totală exactă.

1.3.5 Teorema energiei cinetice

Din legea a doua a mecanicii:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

rezultă:

$$\vec{F}\vec{v}dt = m\vec{v}d\vec{v} \tag{1.78}$$

sau:

$$\vec{F}d\vec{r} = d\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}\right) \tag{1.79}$$

Deoarece

$$\delta L = \vec{F}d\vec{r}$$

rezultă:

$$\delta L = d\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}\right) = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \tag{1.80}$$

Se observă că lucrul elementar al rezultantei forţelor ce acţionează asupra unui punct material este egal în orice moment, cu diferenţiala mărimii $mv^2/2$ care poartă numele de energiei cinetică. Integrând relaţia 1.80 se obţine:

$$L = \int_{(1)}^{(2)} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{c_2} - E_{c_1} \tag{1.81}$$

unde:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \tag{1.82}$$

este energia cinetică.

Relaţia 1.81 reprezintă teorema variaţiei energiei cinetice:

Lucrul mecanic efectuat de rezultanta forţelor ce acţionează asupra unui punct material este egal cu variaţia energiei cinetice a punctului material.

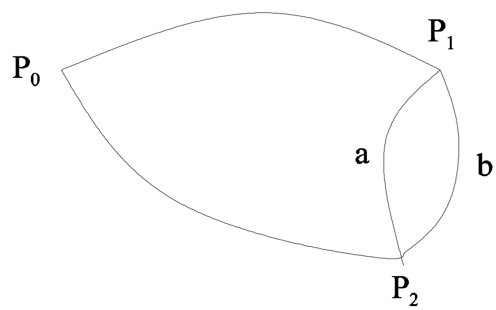

Figura 1.10: Energia potenţială. Lucrul mecanic efectuat de forţele conservative este acelaşi între punctele P_1 şi P_2 indiferent de drumul parcurs.

1.3.6 Energia potenţială

Există câmpuri de forţe numite conservative (câmpul gravitaţional, câmpul electrostatic) în care lucru mecanic efectuat de forţele câmpului asupra punctului material nu depinde de traiectorie sau viteză, ci numai de poziţia iniţială şi finală. O consecinţă a acestui fapt este că lucrul mecanic efectuat de astfel de forţe asupra unui punct material ce se deplasează pe o traiectorie închisă este nul. Din Fig. 1.10 rezultă:

$$L_{P_1 a P_2} = L_{P_1 b P_2}$$

$$L_{P_1 a P_2} - L_{P_1 b P_2} = 0$$

$$L_{P_1 a P_2} + L_{P_2 b P_1} = 0$$

sau:

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0$$

Această proprietate se poate considera ca o definiţie a câmpului conservativ. Astfel un câmp de forţe este conservativ dacă lucrul mecanic efectuat de forţele câmpului pe orice traiectorie închisă este nul.

Pentru a defini energia potenţială se alege un punct P_0 de referinţă. Acest punct poate fi un punct fix sau poate fi plasat la infinit.

Într-un câmp conservativ energia potenţială E_p într-un punct P este egală cu lucrul mecanic cu semn schimbat efectuat de forţele câmpului pentru deplasarea punctului material din P_0 în P:

$$E_p(\vec{r}) = -\int_{P_0}^{P} \vec{F} d\vec{r} = \int_{P}^{P_0} \vec{F} d\vec{r} \tag{1.83}$$

Atunci:

$$L_{P_1P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_0} \vec{F} d\vec{r} + \int_{P_0}^{P_2} \vec{F} d\vec{r}$$

sau:

$$L_{P_1P_2} = E_p(P_1) - E_p(P_2) \tag{1.84}$$

Rezultă:

$$L_{P_1P_2} = -\left[E_p(P_2) - E_p(P_1)\right] = -\Delta E_p \tag{1.85}$$

Relaţia diferenţială corespunzătoare este: $\delta L = -dE_p$
Cum

$$\delta L = \vec{F}\, d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \tag{1.86}$$

iar

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz \tag{1.87}$$

se obţine:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$$

$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

adică:

$$\vec{F} = -\bigtriangledown E_p \tag{1.88}$$

Relaţia de mai sus indică modul în care se determină forţele ce acţionează asupra punctului material când se cunoaşte energia potenţială.

Valoarea efectivă a energiei potenţiale nu are semnificaţie fizică datorită modului arbitrar în care se alege punctul P_0 (acesta în general se alege astfel încât expresia energiei potenţiale să fie cât mai simplă). Semnificaţie fizică are doar variaţia energiei potenţiale care este legată de lucrul forţelor conservative. Astfel energia potenţială se determină până la o constantă arbitrară.

1.3.7 Conservarea energiei mecanice

Fie un punct material ce se deplasează într-un câmp conservativ, atât sub acţiunea forţelor conservative cât şi unor forţe neconservative; atunci, conform teoremei variaţiei energiei cinetice:

$$L = E_{c_2} - E_{c_1} \tag{1.89}$$

unde E_{c_2} este energia cinetică în poziţia finală, iar E_{c_1} este energia cinetică în poziţia iniţială.

Având in vedere faptul că asupra punctului material acţionează atât forţe conservative cât şi forţe neconservative, vom considera lucrul mecanic ca o sumă:

$$L = L_C + L_{NC} \tag{1.90}$$

unde L_C este lucrul mecanic al forţelor conservative, iar L_{NC} lucrul mecanic al forţelor neconservative. Cum:

$$L_C = -\left(E_{p2} - E_{p1}\right) \tag{1.91}$$

atunci

$$L_{NC} - \left(E_{p2} - E_{p1}\right) = E_{c_2} - E_{c_1} \tag{1.92}$$

şi:

$$L_{NC} = \left(E_{p2} + E_{c_2}\right) - \left(E_{p1} + E_{c1}\right) \tag{1.93}$$

Se defineşte energia mecanică a unui punct material ca fiind suma dintre energia cinetică şi cea potenţială:

$$E = E_c + E_p \tag{1.94}$$

Atunci

$$L_{NC} = E_2 - E_1, \tag{1.95}$$

Relaţia 1.95 reprezintă teorema variaţiei energiei mecanice:

Lucrul mecanic al forţelor neconservative care acţionează asupra unui punct material este egal cu variaţia energiei mecanice a punctului material respectiv.

Dacă asupra punctului material nu acţionează forţe neconservative atunci $L_{NC} = 0$ şi

$$E_2 = E_1. \tag{1.96}$$

Aceasta este legea conservării energiei mecanice:

Într-un câmp de forţe conservative energia mecanică a punctului material rămâne constantă în cursul mişcării, având loc o transformare a energiei cinetice în energie potenţială şi invers.

1.4 Dinamica sistemelor de puncte materiale

1.4.1 Teorema impulsului total. Conservarea impulsului

Fie un sistem de N puncte materiale de mase m_k, având vectorii de poziţie $\vec{r}_k$, $k = 1, 2, ..., N$

Masa totală a sistemului de puncte materiale este

$$M = \sum_{k=1}^{N} m_k \tag{1.97}$$

Se defineşte centrul de masă al sistemului ca fiind punctul al cărui vector de poziţie este:

$$\vec{R} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k}{\sum\limits_{k=1}^{N} m_k} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k \tag{1.98}$$

Putem defini viteza centrului de masă:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} \tag{1.99}$$

Rezultă:

$$\vec{V} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k \tag{1.100}$$

Asupra unui punct P_k se exercită pe de o parte forţe interne $\vec{F}_{kl}^{(i)}, l \neq k$ din partea celorlalte puncte materiale şi pe de altă parte forţe externe $\vec{F}_k^{(e)}$, din partea unor corpuri care nu fac parte din sistemul considerat.

Conform legii acţiunii şi reacţiunii forţele interne sunt perechi, egale două câte două şi de sensuri contrare.

$$\vec{F}_{kl}^{(i)} = -\vec{F}_{lk}^{(i)} \tag{1.101}$$

Din acest motiv, însumând totalitatea forţelor interne pe întreg sistemul rezultatul este nul.

$$\vec{F}^{(i)} = \sum_{\substack{k,l=1 \\ l\neq k}}^{N} \vec{F}_{kl}^{(i)} = 0 \tag{1.102}$$

Se notează cu $\vec{p}_k = m\vec{v}_k$ - impulsul particulei k, şi se defineşte impulsul total al sistemului:

$$\vec{P} = \sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k \tag{1.103}$$

Pentru un punct material, principiul al II-lea al dinamicii se scrie:

$$\vec{F}_k = \frac{d\vec{p}_k}{dt} \tag{1.104}$$

unde

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)} \tag{1.105}$$

iar

$$\vec{F}_k^{(i)} = \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{N} \vec{F}_{kl}^{(i)} \tag{1.106}$$

reprezintă rezultanta forţelor interne ce acţionează asupra particulei k.

Atunci

$$\vec{F}_k^{(e)} + \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{N} \vec{F}_{kl}^{(i)} = \frac{d\vec{p}_k}{dt} \tag{1.107}$$

Însumând pentru toate punctele materiale:

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(e)} + \sum_{\substack{k,l=1 \\ l\neq k}}^{N} \vec{F}_{kl}^{(i)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{d\vec{p}_k}{dt} \tag{1.108}$$

şi ţinând cont de relaţia 1.102 se obţine:

$$\vec{F}^{(e)} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(e)} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k = \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{1.109}$$

Expresia 1.109 reprezintă teorema impulsului total:

Derivata în raport cu timpul a impulsului total al unui sistem de particule este egală cu rezultanta forţelor externe ce acţionează asupra sistemului de puncte materiale.

Ţinând cont de relaţia 1.100 obţinem:

$$\vec{P} = M\vec{v} \tag{1.110}$$

adică impulsul total este egal cu produsul dintre masa totală a sistemului şi viteza centrului de masă.

Dacă rezultanta forţelor externe ce acţioneaza asupra sistemului este nulă:

$$\vec{F}^{(e)} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(e)} = 0$$

atunci

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \tag{1.111}$$

iar

$$\vec{P} = \text{const} \tag{1.112}$$

Se obţine astfel legea conservării impulsului:

Impulsul unui sistem de puncte materiale rămâne constant când rezultanta forţelor exterioare este nulă.

1.4.2 Teorema momentului cinetic total. Conservarea momentului cinetic total

Pentru sistemul de puncte materiale considerat putem defini momentul cinetic total faţă de un punctul O, care este originea sistemului de coordonate considerat:

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^{N} \vec{l}_k = \sum_{k=1}^{N} (\vec{r}_k \ \times \ \vec{p}_k) \tag{1.113}$$

unde

$$\vec{l}_k = \vec{r}_k \ \times \ \vec{p}_k \tag{1.114}$$

este momentul cinetic al particulei k.

Se derivează relaţia 1.114 în raport cu timpul şi se obţine:

$$\frac{d}{dt}\vec{l}_k = \vec{r}_k \ \times \ \frac{d\vec{p}_k}{dt} + \frac{d\vec{r}_k}{dt} \ \times \ \vec{p}_k$$

sau

$$\frac{d}{dt}\vec{l}_k = \vec{r}_k \ \times \ \vec{F}_k + \vec{v}_k \ \times \ \vec{p}_k = \vec{r}_k \ \times \vec{F}_k \tag{1.115}$$

deoarece

$$\vec{v}_k \ \times \ \vec{p}_k = \vec{v}_k \ \times \ m\vec{v}_k = 0$$

unde

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)}$$

Atunci

$$\frac{d}{dt}\vec{l}_k = \vec{r}_k \ \times \ \left[\vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)}\right] \ , \ \ (k = 1, ..., N) \tag{1.116}$$

Se însumează relaţiile de mai sus şi se obţine:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{d}{dt}\vec{l}_k = \sum_{k=1}^{N} \left[\vec{r}_k \ \times \ \vec{F}_k^{(e)}\right] + \sum_{k=1}^{N} \left[\vec{r}_k \ \times \ \vec{F}_k^{(i)}\right]$$

sau

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}^{(e)} + \vec{M}^{(i)} \tag{1.117}$$

unde

$$\vec{M}^{(e)} = \sum_{k=1}^{N} \left[\vec{r}_k \ \times \vec{F}_k^{(e)}\right] \tag{1.118}$$

este momentul forţelor exterioare, iar

$$\vec{M}^{(i)} = \sum_{k=1}^{N} \left[\vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(i)}\right] = \sum_{\substack{k,l=1 \\ l \neq k}}^{N} \left[\vec{r}_k \times \vec{F}_{kl}^{(i)}\right] \tag{1.119}$$

este momentul forţelor interne.

Vom arăta că $\vec{M}^{(i)} = 0$.

Într-adevăr, suma este formată din perechi de termeni

$$\vec{r}_k \times \vec{F}_{kl}^{(i)} + \vec{r}_l \times \vec{F}_{lk}^{(i)} = \vec{r}_k \times \vec{F}_{kl} - \vec{r}_l \times \vec{F}_{kl}^{(i)} = (\vec{r}_k - \vec{r}_l) \times \vec{F}_{kl}^{(i)} = 0$$

Aceasta este adevărat deoarece vectorul $\vec{F}_{kl}$ are pe direcţia vectorului $\vec{r}_k - \vec{r}_l$ dintre cele două particule.

Atunci:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(e)} \tag{1.120}$$

Relaţia 1.120 reprezintă teorema variaţiei momentului cinetic total:

Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic total $\vec{L}$ al unui sistem este egală cu momentul rezultant $\vec{M}$ al forţelor externe.

Daca $\vec{M}^{(e)} = 0$, atunci momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale se conservă.

$$L = \text{ const}$$

Aceasta este legea conservării momentului cinetic total.

Momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale rămâne constant când momentul forţelor exterioare ce acţionează asupra sistemului este nul.

1.4.3 Teorema energiei cinetice. Conservarea energiei mecanice

Dacă se ia în considerare relaţia 1.79 pentru un punct material k, teorema energiei cinetice se scrie:

$$d\left(\frac{1}{2}m_k v_k^2\right) = \left[\vec{F}_k^{(e)} + F_k^{(i)}\right] d\vec{r} \tag{1.121}$$

În relaţia 1.121 cu $\vec{F}_k^{(e)}$ s-a notat rezultanta forţelor exterioare ce acţionează asupra particulei k, iar cu $F_k^{(i)}$ s-a notat rezultanta forţelor interne ce acţionează asupra particulei k.

Se însumează pentru toate punctele materiale; rezultă:

$$d\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}m_k\vec{v}_k^{\,2}\right)=\sum_{k=1}^{N}F_k^{(e)}d\vec{r}+\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^{(i)}d\vec{r}$$

sau

$$d\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}m_k v_k^2\right)=\delta L^{(e)}+\delta L^{(i)} \tag{1.122}$$

Dacă se integrează relaţia de mai sus se obţine:

$$\Delta\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}m_k v_k^2\right)=L^{(e)}+L^{(i)} \tag{1.123}$$

În relaţia 1.123 cu $L^{(e)}$ s-a notat lucrul mecanic al forţelor exterioare ce acţionează asupra sistemului, iar cu $L^{(i)}$ s-a notat lucrul mecanic al forţelor interne ce acţionează asupra sistemului.

Relaţia 1.123 reprezintă expresia matematică a teoremei variaţiei energiei cinetice totale.

Variaţia energiei cinetice totale este egală cu lucrul mecanic efectuat de toate forţele, atât externe cât şi interne.

Dacă forţele interne sunt conservative, atunci se poate introduce energia potenţială a sistemului care este funcţie numai de poziţiile tuturor punctelor materiale ale sistemului, adică funcţie numai de configuraţia sistemului.

$$L^{(i)}=-\Delta E_p$$

Atunci:

$$\Delta E_c=-\Delta E_p+L^{(e)}$$

sau

$$\Delta\left(E_c+E_p\right)=L^{(e)} \tag{1.124}$$

Variaţia energiei mecanice, a unui sistem în care forţele interne sunt conservative este egală cu lucrul mecanic al forţelor externe aplicate.

Dacă sistemul este izolat forţele externe sunt nule:

$$L^{(e)} = 0$$

Rezultă că:

$$E_c + E_p = \text{const} \tag{1.125}$$

Aceasta este legea de conservare a energiei mecanice pentru un sistem de puncte materiale:

În cazul unui sistem izolat în care forţele interne sunt conservative, energia mecanică totală este constantă.