Probleme de fizică

Emil Petrescu Viorel Păun

October 6, 2004

Cuprins

Capitolul 1

OSCILAŢII

PROBLEMA 1.1 Cunoscând vitezele v_1 şi v_2 ce corespund elongaţiilor x_1 şi x_2 ale unui oscilator armonic, să se determine amplitudinea şi perioada oscilaţiilor acestuia.

SOLUŢIE

Din expresiile elongaţiei x_1 şi a vitezei v_1

$$x_1 = A\sin(\omega t_1 + \varphi)$$

$$v_1 = \omega A\cos(\omega t_1 + \varphi)$$

rezultă

$$\frac{x_1}{A} = \sin(\omega t_1 + \varphi) \tag{1.1}$$

$$\frac{v_1}{\omega A} = \cos(\omega t_1 + \varphi) \tag{1.2}$$

Prin însumarea pătratelor expresiilor 1.1 şi 1.2 rezultă:

$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{v_1^2}{\omega^2 A^2} = 1 \tag{1.3}$$

În mod analog, se obţine relaţia dintre elongaţia x_2 şi viteza v_2.

$$\frac{x_2^2}{A^2} + \frac{v_2^2}{\omega^2 A^2} = 1 \tag{1.4}$$

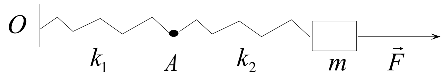

Figura 1.1: Resoarte legate în serie

Din sistemul format din relaţiile 1.3 şi 1.4 rezultă pulsaţia

$$\omega = \sqrt{\frac{v_2^2 - v_1^2}{x_1^2 - x_2^2}}$$

şi amplitudinea

$$A = \sqrt{\frac{x_1^2 v_2^2 - x_2^2 v_1^2}{v_2^2 - v_1^2}}$$

Perioada oscilaţiilor este

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{x_1^2 - x_2^2}{v_2^2 - v_1^2}}$$

PROBLEMA 1.2 O masă m este legată de un punct fix O prin intermediul a două resorturi cu constantele elastice k_1 şi k_2 montate în serie, apoi în paralel. Să se determine în fiecare caz perioada micilor oscilaţii.

SOLUŢIE

a) Cazul resoartelor legate în serie (Fig. 1.1)

Se notează cu x_1 şi x_2 deplasările punctului A şi a masei m din poziţiile lor de echilibru. Aceasta înseamnă că deformarea celui de-al doilea resort este: $x_2 - x_1$.

Ecuaţia de mişcare a masei m este:

$$m\, \ddot{x}_2 = -k\,(x_2 - x_1) \tag{1.5}$$

Deoarece tensiunea în cele două resoarte este egală:

$$k_1 x_1 = k_2\,(x_2 - x_1) \tag{1.6}$$

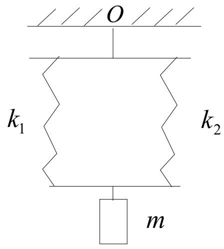

Figura 1.2: Resoarte legate în paralel

Se elimină x_1 din ecuaţiile 1.5 şi 1.6 şi se obţine

$$m\,\ddot{x}_2 + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x_2 = 0$$

Aceasta este ecuaţia unui oscilator armonic cu pulsaţia

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$$

În acest caz perioada micilor oscilaţii este:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$$

b) Cazul resoartelor legate în paralel (Fig. 1.2)

În acest caz deformarea celor două resoarte este egală. Ecuaţia de mişcare a corpului de masă m este

$$m\,\ddot{x} = -\left(k_1 + k_2\right) x$$

iar perioada de oscilaţie

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

PROBLEMA 1.3 Un areometru (densimetru) de masă m cu diametrul tubului cilindric d efectuează mici oscilaţii verticale cu perioada T într-un lichid cu densitatea ρ. Să se determine densitatea lichidului.

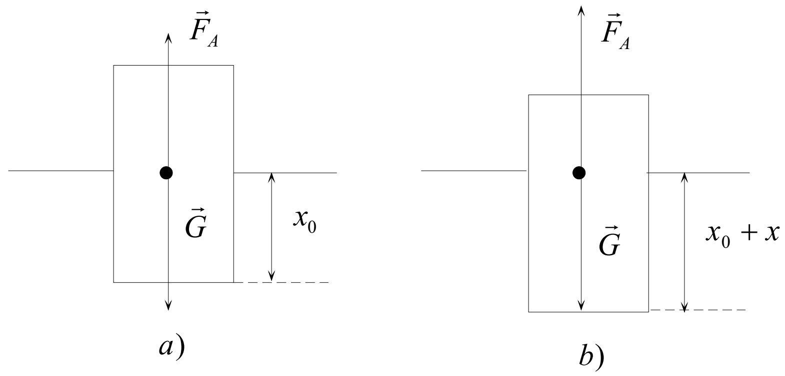

Figura 1.3: Areometru care oscilează în lichid

SOLUŢIE

Asupra areometrului acţionează forţa gravitaţională şi forţa arhimedică. În Fig. 1.3 sunt prezentate două situaţii:

a) areometrul este în echilibru

b) areometrul este scos puţin din poziţia de echilibru.

Când areometrul este în poziţia de echilibru, $F_A = G$, adică

$$\frac{\pi d^2}{4} x_0 \rho g = mg \tag{1.7}$$

unde m este masa areometrului.

Când areometrul este scos din poziţia de echilibru şi este introdus mai adânc în lichid forţa arhimedică este mai mare decât forţa gravitaţională. Rezultanta celor două forţe este:

$$R = F_A - G = \frac{\pi d^2}{4} (x_0 + x) \rho g - mg \tag{1.8}$$

În expresia de mai sus s-a notat cu x deplasarea areometrului faţă de poziţia de echilibru.

Ţinând cont de relaţia 1.7, din 1.8 rezultă

$$R = \frac{\pi d^2}{4} \rho g x = kx \tag{1.9}$$

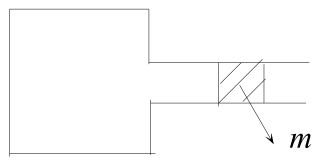

Figura 1.4: Piston care oscilează într-un tub

Deoarece rezultanta forţelor este proporţională cu deplasarea şi este îndreptată în sensul revenirii areometrului în poziţia de echilibru, rezultă

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\pi d^2}{4m}\rho g}$$

şi

$$\rho = \frac{16\pi m}{g d^2 T^2}$$

PROBLEMA 1.4 În cazul recipientului reprezentat în Fig. 1.4 un piston de masă m poate culisa în interiorul tubului cilindric de secţiune S.

Când pistonul este în poziţia de echilibru, volumul aerului din recipient este V, iar presiunea sa este egală cu presiunea atmosferică p_0. Dacă pistonul este scos din poziţia de echilibru el începe să oscileze. Dacă se consideră că interiorul cilindrului este izolat adiabatic, să se determine perioada micilor oscilaţii.

SOLUŢIE

Dacă pistonul este deplasat din poziţia de echilibru cu distanţa Δx volumul aerului din recipient creşte cu:

$$\Delta V = \Delta x S$$

Din ecuaţia transformării adiabatice

$$pV^\gamma = \text{const}$$

se obţine

$$V^{\gamma}\Delta p + \gamma V^{\gamma-1} p \Delta V = 0$$

Rezultă astfel variaţia presiunii gazului din interiorul recipientului:

$$\Delta p = -\frac{\gamma p_0}{V}\Delta V$$

Se arată că dacă volumul de gaz din recipient creşte presiunea acestuia scade astfel că forţa rezultantă acţionează din exterior înspre interior, iar dacă volumul de gaz se micşorează, rezultanta acţionează spre exterior. Rezultă că forţa are tendinţa de a readuce pistonul în poziţia de echilibru. Expresia ei este:

$$F = \Delta p S = -\frac{\gamma p_0 S}{V}\Delta V = -\frac{\gamma p_0 S^2}{V}\Delta x$$

Această forţa este de tip elastic astfel că pulsaţia este:

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma p_0 S^2}{V m}}$$

iar perioada micilor oscilaţii

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{V m}{\gamma p_0 S^2}}$$

PROBLEMA 1.5 Un punct material m se mişcă fără frecare în interiorul unei cicloide plasate în plan vertical. Ecuaţiile parametrice ale cicloidei sunt:

$$x = R\left(\theta + \sin\theta\right) \tag{1.10}$$

$$z = R\left(1 - \cos\theta\right) \tag{1.11}$$

Să se calculeze abscisa curbilinie s în funcţie de parametrul θ.

Să se arate că perioada oscilaţiilor în jurul poziţiei de echilibru $x = 0$ şi $z = 0$ este independentă de amplitudinea acestor oscilaţii.

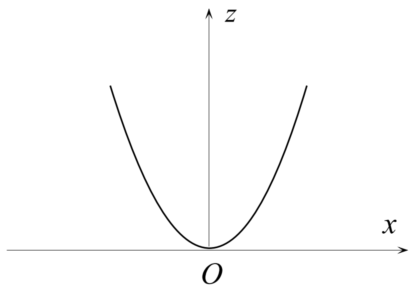

Figura 1.5: Forma unei cicloide în vecinătatea originii

SOLUŢIE

În Fig. 1.5 este arătată forma cicloidei. Punctul $x = 0$ şi $z = 0$ corespunde valorii $\theta = 0$.

Deoarece:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \tag{1.12}$$

Introducând 1.10 şi 1.11 în 1.12 rezultă:

$$ds = R\sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\, d\theta = 2R\cos\frac{\theta}{2} d\theta$$

şi integrând

$$s = 4R\sin\frac{\theta}{2} \tag{1.13}$$

Energia cinetică a punctului material este:

$$E_c = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\,\dot{s}^2 \tag{1.14}$$

Energia potenţială este de natură gravitaţională şi este dată de expresia:

$$E_p = mgz = mgR\,(1-\cos\theta) = 2mgR\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{mgs^2}{8R} \tag{1.15}$$

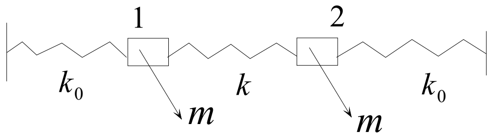

Figura 1.6: Sistem de trei resoarte şi două corpuri care oscileaz

Energia totală este:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\,\dot{s}^2 + \frac{mg}{8R}s^2 \tag{1.16}$$

Deoarece în sistem nu există forţe neconservative, energia mecanică se conservă. Derivând în raport cu timpul relaţia 1.16 se obţine:

$$\ddot{s} + \frac{g}{4R}s = 0 \tag{1.17}$$

Relaţia 1.17 este ecuaţia unui oscilator armonic cu pulsaţia

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{4R}}$$

Perioada micilor oscilaţiilor este

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

PROBLEMA 1.6 Se consideră un sistem compus din două corpuri de mase m legate cu ajutorul a 3 resoarte cu constantele de elasticititate k_0 şi k (vezi Fig. 1.6).

La momentul iniţial se aplică un impuls corpului 1 astfel încât viteza acestuia să devină egală cu v_0.

Să se determine ecuaţiile de mişcare ale celor două corpuri.

SOLUŢIE

Poziţiile celor două corpuri vor fi date de deplasările acestora faţă de poziţiile de echilibru: x_1 pentru corpul 1 şi x_2 pentru corpul 2.

Ecuaţiile de mişcare ale celor două corpuri sunt:

$$m\,\ddot{x}_1 = -k_0 x_1 - k\,(x_1 - x_2) \tag{1.18}$$

$$m\,\ddot{x}_2 = -k_0 x_2 - k\,(x_2 - x_1) \tag{1.19}$$

Se adună cele două relaţii

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k_0\,(x_1 + x_2) \tag{1.20}$$

şi se scad cele două relaţii

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -\,(k_0 + 2k)\,(x_1 - x_2) \tag{1.21}$$

Atunci se pot face schimbările de variabile:

$$q_1 = x_1 + x_2 \tag{1.22}$$

$$q_2 = x_1 - x_2 \tag{1.23}$$

Ecuaţiile de mişcare 1.20 şi 1.21 devin:

$$\ddot{q}_1 + \frac{k_0}{m}\,q_1 = 0 \tag{1.24}$$

$$\ddot{q}_2 + \frac{k_0 + 2k}{m}\,q_2 = 0 \tag{1.25}$$

Soluţiile generale ale acestor ecuaţii sunt

$$q_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \qquad ; \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{k_0}{m}} \tag{1.26}$$

$$q_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad ; \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_0 + 2k}{m}} \tag{1.27}$$

Condiţiile iniţiale la momentul t_0

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \quad ; \quad \dot{x}_1 = v_0 \\ x_2 &= 0 \quad ; \quad \dot{x}_2 = 0 \end{aligned}$$

devin pentru noile variabile:

$$\begin{aligned} q_1 &= 0 \quad ; \quad \dot{q}_1 = v_0 \\ q_2 &= 0 \quad ; \quad \dot{q}_2 = v_0 \end{aligned}$$

Utilizând condiţiile iniţiale rezultă

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 = 0 \\ A_1 &= \frac{v_0}{\omega_1} \qquad A_2 = \frac{v_0}{\omega_2} \end{aligned}$$

Astfel relaţiile 1.26 şi 1.27 devin:

$$q_1 = \frac{v_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \tag{1.28}$$

$$q_2 = \frac{v_0}{\omega_2} \sin \omega_2 t \tag{1.29}$$

Ţinând cont de modul de definire a variabilelor q_1 şi q_2, rezultă:

$$x_1 = \frac{v_0}{2} \left[\frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} + \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} \right]$$

$$x_2 = \frac{v_0}{2} \left[\frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} - \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} \right]$$

PROBLEMA 1.7 Un punct material de masă m şi sarcină q se află într-un plan xOy sub acţiunea unei forţe $\vec{F} = -k\vec{r}$, unde $\vec{r}$ este raza vectoare a punctului material. Dacă în această regiune există un câmp magnetic $\vec{B}$ perpendicular pe planul xOy să se calculeze pulsaţia mişcării oscilatoarii. Se va considera cazul unui câmp magnetic slab.

SOLUŢIE

În acest caz legea a doua a dinamicii este:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r} + q\vec{v} \times \vec{B} \tag{1.30}$$

În planul xOy se obţine:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{qB}{m}\,\dot{y} \tag{1.31}$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = -\frac{qB}{m}\,\dot{x} \tag{1.32}$$

Se fac următoarele notaţii: $\omega_0^2 = k/m$ şi $\omega_l = qB/2m$.
Se înmulţeşte ecuaţia 1.32 cu i şi se adună cu 1.31. Rezultă:

$$\left(\ddot{x} + i\,\ddot{y}\right) + \omega_0^2(x + iy) = -i2\omega_l\left(\dot{x} + i\dot{y}\right) \tag{1.33}$$

Introducând o nouă variabilă:

$$u = x + iy$$

ecuaţia 1.33 devine

$$\ddot{u} + 2i\,\dot{u}\,\omega_l + \omega_0^2 u = 0 \tag{1.34}$$

Relaţia 1.34 este o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea cu coeficienţi constanţi a cărei ecuaţie caracteristică este:

$$r^2 + 2i\omega_l r + \omega_0^2 = 0$$

şi are soluţiile

$$r_{1,2} = -i\omega_l \pm i\sqrt{\omega_l^2 + \omega_0^2}$$

În cazul câmpurilor magnetice slabe B este mic astfel încât se poate considera că

$$\omega_l \ll \omega_0$$

Atunci soluţiile ecuaţiei caracteristice pot fi puse sub forma mai simplă:

$$r_{1,2} = -i\left(\omega_l \pm \omega_0\right)$$

iar soluţia ecuaţiei 1.34 este

$$u = e^{-i\omega_l} \left[Ae^{i\omega_0 t} + Ce^{-i\omega_0 t}\right]$$

A şi C sunt constante care se determină din condiţiile iniţiale.

Se constată că în câmp magnetic pulsaţia ω_0 se schimbă cu o valoare ω_l astfel încât:

$$\omega = \omega_0 \pm \omega_l$$

PROBLEMA 1.8 Asupra unei sfere de rază r care se deplasează cu o viteza v într-un fluid cu coeficientul de vâscozitate η acţionează o forţă de frecare care are expresia:

$$\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$$

O sferă de masă m este suspendată de un resort cu constanta elastică k. Perioada de oscilaţie în aer, unde frecarea este neglijabilă, este T_0. Când sfera este introdusă într-un fluid perioada oscilaţiilor devine $T < T_0$. Să se determine coeficientul de vâscozitate în funcţie de T şi T_0.

SOLUŢIE

Legea a doua a lui Newton pentru sfera care oscilează în fluid este

$$m\,\ddot{x} = -kx - 6\pi\eta r\,\dot{x} \tag{1.35}$$

Notând $\lambda = 3\pi\eta r$, ecuaţia 1.35 devine:

$$m\,\ddot{x} + 2\lambda\,\dot{x} + kx = 0 \tag{1.36}$$

Ecuaţia caracteristică a ecuaţiei diferenţiale 1.36 este

$$mr^2 + 2\lambda r + k = 0$$

şi are soluţiile

$$r_{1,2} = -\frac{\lambda}{m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\lambda^2}{m^2}} \tag{1.37}$$

În cazul în care $k/m \leq \lambda^2/m^2$ mişcarea este aperiodică. Deoarece se consideră că sfera efectuează oscilaţii în fluid se va considera cazul $k/m > \lambda^2/m^2$. Soluţia ecuaţiei 1.36 este:

$$x = Ae^{-\lambda t/m} \exp i\,(\omega t + \phi) \tag{1.38}$$

unde:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\lambda^2}{m^2}} \tag{1.39}$$

În cazul în care sfera oscilează în aer, forţa de frecare este neglijabilă. Atunci se poate considera $\lambda = 0$ iar pulsaţia oscilaţiilor este

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.40}$$

Din 1.39 şi 1.40 rezultă:

$$\lambda = m\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Deoarece $\lambda = 3\pi\eta r$, $\omega_0 = 2\pi/T_0$ şi $\omega = 2\pi/T$

$$\eta = \frac{2m}{3r}\sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}}$$

PROBLEMA 1.9 O particulă este legată de un resort cu constanta elastică k. Ea poate executa oscilaţii fără amortizare. La momentul iniţial particula se află în poziţia de echilibru. Asupra particulei acţionează o forţă F un timp egal cu τ secunde. Să se determine amplitudinea oscilaţiilor după ce forţa încetează.

SOLUŢIE

Ecuaţia de mişcare în intervalul de timp $[0, \tau]$ este

$$m\ddot{x} = -kx + F \tag{1.41}$$

cu condiţiile iniţiale

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{1.42}$$

Soluţia ecuaţiei de mai sus este de forma

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{F}{k} \tag{1.43}$$

unde: $\omega = \sqrt{k/m}$

Pentru determinarea constantelor A şi φ se ţine cont de condiţiile iniţiale. Rezultă

$$x = (1 - \cos\omega t)\frac{F}{k} \tag{1.44}$$

Ecuaţia de mişcare pentru $t > \tau$ este

$$m\ddot{x} = -kx \tag{1.45}$$

Soluţia ecuaţiei 1.45 este:

$$x = A'\cos[\omega(t - \tau) + \alpha] \tag{1.46}$$

Pentru determinarea amplitudinii A' se pune condiţia de continuitate pentru elongaţie şi viteză în momentul $t = \tau$

Se obţine

$$(1 - \cos\omega\tau)\frac{F}{k} = A'\cos\alpha$$

$$\frac{F}{k}\sin\omega\tau = -A'\sin\alpha$$

Cele două relaţii se ridică la pătrat şi se adună. Rezultă

$$A' = \frac{2F}{m}\sin\frac{\omega\tau}{2}$$

PROBLEMA 1.10 O masă m legată de un resort oscilează , decrementul logaritmic al amortizării fiind δ. După timpul t_1, energia oscilatorului scade de n ori. Să se determine constanta de elasticitate a resortului.

SOLUŢIE

Deoarece energia unui oscilator este proporţională cu pătatrul amplitudinii oscilaţiei raportul energiilor oscilatorului corespunzătoare momentelor t_0 şi t_1 este:

$$\frac{E_1}{E_0} = \left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2 = \frac{1}{n} \tag{1.47}$$

Notând cu γ coeficientul de amortizare:

$$\frac{A_1}{A_0} = \exp\left(-\gamma t_1\right) \tag{1.48}$$

Din relaţiile 1.47 şi 1.48 rezultă:

$$\ln\sqrt{n} = \gamma t_1$$

şi decrementul logaritmic este:

$$\delta = \gamma T = \frac{\ln\sqrt{n}}{t_1} T \tag{1.49}$$

Cum

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 = \frac{k}{m} - \gamma^2$$

$$k = m\left(\omega^2 + \gamma^2\right) = m\left(\frac{4\pi^2}{T^2} + \gamma^2\right) \tag{1.50}$$

Dacă se ţine cont de relaţia 1.49 din relaţia 1.50 se obţine constanta de elasticitate a resortului:

$$k = \left[\left(\frac{2\pi\ln\sqrt{n}}{\delta t_1}\right)^2 + \gamma^2\right]$$

PROBLEMA 1.11 Un corp de masă m este suspendat de un resort cu constanta de elasticitate k. Forţa de atracţie este proporţională cu viteza. Dupa s oscilaţii amplitudinea scade de n ori. Să se determine perioada de oscilaţie şi decrementul logaritmic δ.

SOLUŢIE

Mişcarea corpului este o mişcare amortizată. Ea are loc după legea

$$x = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) \tag{1.51}$$

unde:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{1.52}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.53}$$

Amplitudinea în timpul mişcării oscilatorii scade exponenţial în timp:

$$A = A_0 e^{-\gamma t}$$

Conform datelor problemei:

$$\frac{A_0}{n} = A_0 e^{-\gamma s T} \tag{1.54}$$

Rezultă:

$$\ln n = \gamma s T \tag{1.55}$$

Din relaţiile 1.52 şi din 1.55 se obţine:

$$\gamma = \frac{\omega_0 \ln n}{\sqrt{4\pi^2 s^2 + \ln^2 n}}$$

$$T = \frac{\ln n}{\gamma s} = \frac{\sqrt{4\pi^2 s^2 + \ln^2 n}}{s\omega_0}$$

Decrementul logaritmic este

$$\delta = \gamma T = \frac{\ln n}{s}$$

PROBLEMA 1.12 Un corp de masă m=5 kg este suspendat de un resort care oscilează. În absenţa forţelor de rezistenţă perioada de oscilaţie este $T_0 = 0,4\pi$ s. Atunci când există o forţă de rezistenţă proporţională cu viteza, perioada de oscilaţie devine $T = 0,5\pi$ s. Să se determine ecuaţia de mişcare a corpului presupunând că în momentul iniţial acesta se găseşte la distanţa $x_0 = 4$ cm faţă de poziţia de echilibru şi apoi este lăsat liber.

SOLUŢIE

Mişcarea corpului este o mişcare cvasiperiodică amortizată cu pulsaţia ω şi perioada T date de relaţiile:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - \gamma^2$$

Rezultă că:

$$\gamma = 2\pi\sqrt{\frac{T^2 - T_0^2}{T^2 T_0^2}} = \frac{2\pi}{T_0 T}\sqrt{T^2 - T_0^2} = 3 \ \ \mathrm{s}^{-1}$$

Deoarece ecuaţia de mişcare a corpului este de forma:

$$x = A_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi) \tag{1.56}$$

viteza sa este:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A_0 \gamma e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi) + \omega A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) \tag{1.57}$$

Aplicând condiţiile iniţiale

$$x(0) = x_0 \qquad v(0) = 0$$

se obţine:

$$0 = -A_0 \gamma \sin\phi + A_0 \omega \cos\phi \tag{1.58}$$

$$x_0 = A_0 \sin\phi \tag{1.59}$$

Din relaţiile 1.58 şi 1.59 rezultă $A_0 = 5$ cm şi

$$\phi = \arcsin\frac{x_0}{A_0} = \arcsin\frac{4}{5}$$

Ecuaţia de mişcare este:

$$x = 5e^{-3t} \sin(4t + \arcsin 4/5) \quad \text{cm}$$

PROBLEMA 1.13 Să se scrie ecuaţia de mişcare a unui punct material de masă m care este supus acţiunii unei forţe elastice kx şi unei forţe constante F_0 având aceiaşi direcţie ca forţa elastică. Se consideră că la momentul $t = 0$ în punctul $x = 0$ viteza este nulă.

SOLUŢIE

Legea a doua a mecanicii este:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \tag{1.60}$$

Soluţia acestei ecuaţii diferenţiale neomogene este suma dintre soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene

$$x_1 = A\sin(\omega t + \phi_0) \qquad \text{cu} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.61}$$

şi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene

$$x_2 = \frac{F_0}{k} \tag{1.62}$$

Atunci soluţia ecuaţiei 1.60 este:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{F_0}{k} + A\sin(\omega t + \phi_0) \tag{1.63}$$

Viteza punctului material este

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi_0) \tag{1.64}$$

Din condiţiile iniţiale

$$x(0) = 0 \qquad \text{şi} \qquad v(0) = 0$$

şi din ecuaţiile 1.63 şi 1.64 se obţine:

$$A = -\frac{F_0}{k} \qquad \text{şi} \qquad \phi_0 = \frac{\pi}{2}$$

iar ecuaţia de mişcare este:

$$x = -\frac{F_0}{k}(1 - \cos\omega t)$$

PROBLEMA 1.14 Să se scrie ecuaţia de mişcare unidimensională a unui punct material de masă m care este supus acţiunii unei forţe elastice $-kx$ şi unei forţe $F = at$ care are aceiaşi direcţie ca şi forţa elastică. La momentul $t = 0$ în punctul $x = 0$ viteza este nulă.

SOLUŢIE

Legea a doua a mecanicii se scrie:

$$m\ddot{x} + kx = at \tag{1.65}$$

Soluţia acestei ecuaţii diferenţiale neomogene este suma dintre soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene

$$x_1 = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{cu} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.66}$$

şi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene

$$x_2 = \frac{at}{k} \tag{1.67}$$

Atunci soluţia ecuaţiei 1.65 este:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{at}{k} + A\sin(\omega t + \varphi) \tag{1.68}$$

Viteza punctului material este

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{a}{k} + A\omega\cos(\omega t + \varphi) \tag{1.69}$$

Din condiţiile iniţiale

$$x(0) = 0 \qquad \text{şi} \qquad v(0) = 0$$

şi din ecuaţiile 1.68 şi 1.69 se obţine:

$$A\sin\varphi = 0 \tag{1.70}$$

$$\frac{a}{k} + A\omega\cos\varphi = 0 \tag{1.71}$$

Din 1.70 şi din 1.71 rezultă:

$$\varphi = 0 \qquad A = -\frac{a}{k\omega}$$

Ecuaţia de mişcare 1.68 devine:

$$x = \frac{a}{k}\left(t - \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$$

PROBLEMA 1.15 Să se scrie ecuaţia de mişcare unidimesională a unui punct material de masă m care este supus acţiunii unei forţe elastice $-kx$ şi unei forţe $F = F_0 \exp(-\alpha t)$. La momentul $t = 0$ în punctul $x = 0$ viteza este nulă.

SOLUŢIE

Legea a doua a mecanicii se scrie:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \exp(-\alpha t) \tag{1.72}$$

Soluţia acestei ecuaţii diferenţiale neomogene este suma dintre soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{cu} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.73}$$

şi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene de forma:

$$x_2 = A_2 \exp(-\alpha t) \tag{1.74}$$

Pentru a determina valoarea constantei A_2 introducem 1.74 în 1.72. Se obţine:

$$m\alpha^2 A_2 \exp(-\alpha t) + kA_2 \exp(-\alpha t) = F_0 \exp(-\alpha t)$$

Rezultă:

$$A_2 = \frac{F_0}{m\alpha^2 + k} \tag{1.75}$$

Atunci soluţia generală a ecuaţiei 1.72 este:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{F_0}{m\alpha^2 + k} \exp(-\alpha t) + A_1 \sin(\omega t + \varphi) \tag{1.76}$$

Viteza punctului material este

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{-\alpha F_0}{m\alpha^2 + k} \exp(-\alpha t) + A_1 \omega \cos(\omega t + \varphi) \tag{1.77}$$

Din condiţiile iniţiale

$$x(0) = 0 \qquad \text{şi} \qquad v(0) = 0$$

şi din ecuaţiile 1.76 şi 1.77 se obţine:

$$\frac{F_0}{m\alpha^2 + k} + A_1 \sin\varphi = 0 \tag{1.78}$$

$$\frac{-\alpha F_0}{m\alpha^2 + k} + A_1 \omega \cos\varphi = 0 \tag{1.79}$$

Din 1.78 şi din 1.79 se obţine:

$$A_1 = \frac{F_0}{m\alpha^2 + k} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\omega^2}}$$

şi, prin împărţirea acestora, unghiul φ:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega}{\alpha}$$

PROBLEMA 1.16 O sursă aflată într-un mediu elastic unidimensional oscilează dupa legea

$$y = 0,5 \sin 100\pi t \quad \text{mm}$$

Lungimea de undă a undelor longitudinale emise este $\lambda = 20$ m.

a) După cât timp va începe să oscileze un punct aflat la distanţa $x_1 = 8$ m faţă de sursă?

b) Ce defazaj există între oscilaţia punctului aflat la distanţa x_1 de sursă şi oscilaţia sursei?

c) La ce distanţă se află două puncte ale căror oscilaţii sunt defazate cu $\pi/3$?

SOLUŢIE

a) Din ecuaţia de oscilaţie a sursei rezultă că $\omega = 100\pi$ astfel că:

$$T = \frac{2\pi}{100\pi} = 2 \times 10^{-2} \ \text{s}$$

Deoarece lungimea de undă este $\lambda = vT$, viteza de propagare a undei este:

$$v = \frac{\lambda}{T} = 10^3 \ \text{m/s}$$

Timpul după care punctul aflat la distanţa x_1 începe să oscileze este:

$$t = \frac{x_1}{v} = \frac{8}{10^3} = 8 \times 10^{-3} \ \text{s}$$

b) Ecuaţia undei este:

$$y_1 = 0,5 \sin 100\pi \left(t - \frac{x_1}{v}\right) \ \text{mm}$$

Defazajul dintre oscilaţia sursei şi oscilaţia punctului considerat este:

$$\Delta\varphi = \varphi_s - \varphi_p = 100\pi t - 100\pi \left(t - \frac{x_1}{v}\right) = 100\pi \frac{x_1}{v} = \frac{8\pi}{10} \ \text{rad}$$

c) Se consideră defazajul dintre două puncte aflate la distanţa Δx unul de altul

$$\Delta\varphi = 100\pi \left(t - \frac{x_2}{v}\right) - 100\pi \left(t - \frac{x_1}{v}\right) = \frac{100\pi \left(x_1 - x_2\right)}{v}$$

Atunci:

$$\Delta x = (x_1 - x_2) = \frac{v\Delta\varphi}{100\pi} = 3,3 \ \text{m}$$

PROBLEMA 1.17 Un avion cu reacţie zboară cu viteza constantă $v = 1000$ m/s la înălţimea $h = 10,2$ km. Care este forma frontului undei de şoc produsă de avion? La ce distanţă de o casă se va afla avionul când geamurile acesteia încep să vibreze? Viteza sunetului este $c = 340$ m/s.

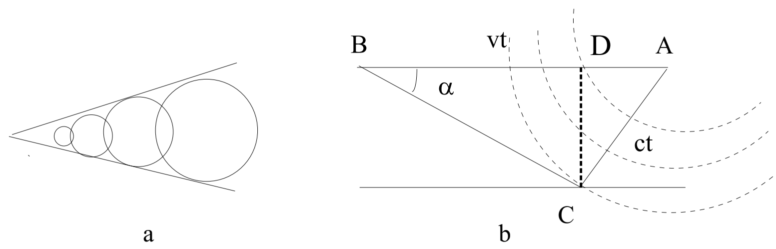

Figura 1.7: Unda de şoc produsă de un avion

SOLUŢIE

Dacă un corp (glonţ, avion supersonic) se deplasează într-un fluid cu o viteză mai mare decât a undelor sonore apare aşa numita undă de şoc. Undele produse de avion se propagă în toate direcţiile sub formă de unde sferice. Deoarece viteza v a avionului este mai mare decât a sunetului, frontul de undă are forma unui con în vârful căruia se află avionul în fiecare moment (Fig. 1.7).

Dacă la un moment dat avionul se afla în punctul A după trecerea timpului t, el s-a deplasat în punctul B iar AB= vt. Frontul undei emise în A va avea raza AC = ct. În punctul C se presupune că se află casa unde este simţită unda de soc. Se observă în Fig.1.7 că:

$$\sin\alpha = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v}$$

Distanţa BC faţa de o casă aflată în punctul C de pe sol este:

$$d = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{hv}{c} = 30 \ \text{km}$$

PROBLEMA 1.18 O sursă punctiformă emite unde sonore cu frecvenţa ν. Să se găsească frecvenţele sunetului pe care-l recepţionează un observator care se apropie de sursă cu viteza v. Să se găsească frecvenţa sunetului pe care acelaşi observator îl recepţioneaza dacă se depărtează de sursă cu viteza v. Viteza sunetului în aer este c.

SOLUŢIE

Sursa fiind punctiformă undele emise de aceasta sunt sferice. Suprafeţele de undă sunt sfere concentrice distanţate una de alta cu lungimea de undă. Dacă observatorul ar fi în repaus el ar recepţiona ct/λ unde în timpul t. Dacă observatorul se apropie de sursă el va recepţiona $(c+v)\,t/\lambda$ unde în timpul t. Frecvenţa cu care observatorul recepţionează undele este

$$\nu\,' = \frac{(c+v)t}{\lambda t} = \frac{c+v}{\lambda} = \frac{(c+v)}{cT} = \nu\left(1+\frac{v}{c}\right)$$

Dacă observatorul se depărtează de sursă cu viteza v el va recepţiona $(c-v)\,t/\lambda$ unde în timpul t. Frecvenţa receptionată de observator va fi:

$$\nu\,' = \frac{(c-v)t}{\lambda t} = \frac{c-v}{\lambda} = \frac{(c-v)}{cT} = \nu\left(1-\frac{v}{c}\right)$$

Putem astfel să exprimăm frecvenţa receptionată de observatorul care se apropie sau se depărtează de sursă astfel:

$$\nu\,' = \nu\left(1 \pm \frac{v}{c}\right)$$

unde semnul + corespunde cazului când observatorul se apropie de sursă iar semnul − corespunde cazului când observatorul se depărtează de sursă. Acesta este efectul Doppler.

PROBLEMA 1.19 O sursă punctiformă emite unde sonore cu frecvenţa ν. Să se găsească frecvenţele sunetului pe care-l recepţionează un observator în cazul în care sursa se apropie de observator cu viteza v. Să se găsească frecvenţa sunetului pe care acelaşi observator îl recepţionează dacă sursă se depărtează de observator cu viteza v. Viteza sunetului în aer este c.

SOLUŢIE

Deoarece viteza de propagare a sunetului depinde numai de proprietăţile mediului, în timpul unei oscilaţii unda se va propaga înainte cu distanţa λ. Dar în timpul unei perioade şi sursa se deplasează în sensul de deplasare al undei cu vT, unde T este perioada. Atunci lungimea de undă va fi:

$$\lambda' = \lambda - vT = cT - vT = (c - v)\, T$$

Frecvenţa percepută de observator va fi:

$$\nu' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{c - v}\,\nu$$

Dacă sursa se depărtează de observator cu viteza v lungimea de undă va fi:

$$\lambda' = \lambda + vT = cT + vT = (c + v)\, T$$

Frecvenţa percepută de observator va fi:

$$\nu' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{c + v}\,\nu$$

Astfel în cazul în care sursa se apropie sau se depărtează de observator frecvenţa percepută de acesta este:

$$\nu' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{c \pm v}\,\nu$$

unde semnul $+$ corespunde cazului în care sursa se apropie de observator iar semnul $-$ corespunde cazului în care sursa se depărtează de observator.

PROBLEMA 1.20 Să se rezolve ecuaţia undelor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

pentru o coardă de lungime $l = 1$ care iniţial este în repaus şi prezintă proprietăţile:

$$u\,(x, 0) = \begin{cases} x/5 & \text{dacă} \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ (1 - x)\,/5 & \text{dacă} \quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

SOLUŢIE

Soluţia generală a ecuaţiei undelor este o suprapunere de forma:

$$u\left(x,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos n\pi vt+B_n\sin n\pi vt\right)\sin n\pi x \tag{1.80}$$

deoarece $l=1$. Având în vedere că

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}n\pi v\left(A_n\sin n\pi vt-B_n\cos n\pi vt\right)_{t=0}\sin n\pi x=0$$

coeficienţii B_n sunt nuli.

Atunci relaţia 1.80 devine:

$$u\left(x,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos n\pi vt\sin n\pi x \tag{1.81}$$

La momentul $t=0$ din 1.81 se obţine:

$$u\left(x,0\right)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\pi x$$

Coeficienţii A_n se calculează cu formulele:

$$A_n=2\int_0^1 u\left(x,0\right)\sin n\pi x dx \tag{1.82}$$

Ţinând seama de proprietăţile funcţiei $u(x,0)$ 1.82 devine:

$$A_n=\frac{2}{5}\int_0^{1/2}x\sin n\pi x dx+\frac{2}{5}\int_{1/2}^{1}(1-x)\sin n\pi x dx$$

Se efectuează substituţia:

$$n\pi x=\xi \qquad x=\frac{\xi}{n\pi} \qquad dx=\frac{d\xi}{n\pi}$$

Atunci:

$$A_n=\frac{2}{5}\int_0^{n\pi/2}\frac{\xi}{n\pi}\sin\xi\frac{d\xi}{n\pi}+\frac{2}{5}\int_{n\pi/2}^{n\pi}\left(1-\frac{\xi}{n\pi}\right)\sin\xi\frac{d\xi}{n\pi}$$

$$A_n = \frac{2}{5\left(n\pi\right)^2}\left[\int_0^{n\pi/2}\xi\sin\xi d\xi + n\pi\int_{n\pi/2}^{n\pi}\sin\xi d\xi - \int_{n\pi/2}^{n\pi}\xi\sin\xi d\xi\right]$$

Dar

$$\int\xi\sin\xi d\xi = \sin\xi - \xi\cos\xi$$

şi

$$\int\sin\xi d\xi = -\cos\xi$$

Atunci:

$$A_n = \frac{2}{5\left(n\pi\right)^2}\left[\left(\sin\xi - \xi\cos\xi\right)\Big|_0^{n\pi/2} - n\pi\cos\xi\Big|_{n\pi/2}^{n\pi} - \left(\sin\xi - \xi\cos\xi\right)\Big|_{n\pi/2}^{n\pi}\right]$$

şi

$$A_n = \frac{4}{5\left(n\pi\right)^2}\sin\frac{n\pi}{2} \tag{1.83}$$

Soluţia ecuaţiei este:

$$u\left(x,t\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{5\left(n\pi\right)^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin n\pi x\cos n\pi vt$$

PROBLEMA 1.21 Să se găsească unda rezultantă obţinută prin suprapunerea a două unde care au aceiaşi amplitudine dar a căror lungime de undă şi pulsaţie diferă puţin.

$$u_1\left(x,t\right) = A\sin\frac{2\pi}{\lambda_1}\left(x - v_1 t\right)$$

$$u_2\left(x,t\right) = A\sin\frac{2\pi}{\lambda_2}\left(x - v_2 t\right)$$

SOLUŢIE

Deoarece

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \text{şi} \qquad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi v}{\lambda}$$

$$u = u_1 + u_2 = 2A\sin\frac{k_1 x - \omega_1 t + k_2 x - \omega_2 t}{2}\cos\frac{k_1 x - \omega_1 t - k_2 x + \omega_2 t}{2}$$

$$u = 2A\sin\left[\frac{k_1+k_2}{2}x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right]\cos\left[\frac{k_1-k_2}{2}x - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right]$$

În relaţia de mai sus vom introduce notaţiile:

$$k_1 = k + dk \qquad k_2 = k - dk$$

$$\omega_1 = \omega + d\omega \qquad \omega_2 = \omega - d\omega$$

Atunci:

$$u = 2A\cos\left(xdk - td\omega\right)\sin\left(kx - \omega t\right)$$

Termenul

$$2A\cos\left(xdk - td\omega\right)$$

reprezintă amplitudinea undei progresive iar factorul de fază este:

$$\sin\left(kx - \omega t\right) = \sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(x - \frac{\omega}{k}t\right)$$

PROBLEMA 1.22 Să se găsească legătura dintre viteza de fază şi viteza de grup.

SOLUŢIE

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\left(v_f k\right)}{dk} = v_f + k\frac{dv_f}{dk}$$

Dar

$$k\frac{dv_f}{dk} = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{dv_f}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk}\right) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(-\frac{2\pi}{k^2}\right)\frac{dv_f}{d\lambda}$$

$$k\frac{dv_f}{dk} = -\frac{4\pi^2}{\lambda}\frac{\lambda^2}{4\pi^2}\frac{dv_f}{d\lambda} = -\lambda\frac{dv_f}{d\lambda}$$

Atunci:

$$v_g = v_f - \lambda\frac{dv_f}{d\lambda}$$

Mărimea $dv_f/d\lambda$ măsoară dispersia cauzată de mediu. Dacă nu există dispersie, energia va fi transportată cu viteza de fază iar $v_f = v_g$.

PROBLEMA 1.23 Să se reducă ecuaţia undelor neomogene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + v\left(x\right)$$

la trei ecuaţii diferenţiale.

SOLUŢIE

Dacă se încearcă substituţia

$$u = X\left(x\right) T\left(t\right)$$

se obţine:

$$T\frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{X}{v^2}\frac{d^2 T}{dt^2} + v$$

Se observă că variabilele nu pot fi separate.
Se alege următoarea substituţie:

$$u = X\left(x\right) T\left(t\right) + \gamma\left(x\right)$$

Atunci:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = T\frac{dX}{dx} + \frac{d\gamma}{dx}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{d^2\gamma}{dx^2}$$

şi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X\frac{d^2 T}{dt^2}$$

Atunci

$$T\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{d^2\gamma}{dx^2} = \frac{X}{v^2}\frac{d^2 T}{dt^2} + v\left(x\right) \tag{1.84}$$

Se alege funcţia γ astfel:

$$\frac{d^2\gamma}{dx^2} = v\left(x\right) \tag{1.85}$$

Atunci 1.84 devine:

$$T\frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{X}{v^2}\frac{d^2 T}{dt^2}$$

Această ecuaţie se mai poate scrie:

$$\frac{v^2}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}$$

Admiţând soluţii periodice se poate face o separare de variabile astfel încât:

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 X = 0$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0$$

Se obţin astfel două ecuaţii diferenţiale la care se mai poate adăuga şi ecuaţia 1.85.

Capitolul 2

MECANICĂ ANALITICĂ

PROBLEMA 2.1 Să se scrie ecuaţiile diferenţiale de mişcare ale unui pendul matematic de masă m_2 şi lungime l al cărui punct de suspensie de masă m_1 se deplasează orizontal (Fig. 2.1).

SOLUŢIE

Se aleg coordonatele generalizate ca fiind x – coordonata pe axa Ox a punctului cu masă m_1 şi φ – unghiul făcut de firul pendului cu verticala.

$$x_1 = x \qquad x_2 = x + l\sin\varphi$$

$$y_1 = 0 \qquad y_2 = l\cos\varphi$$

Componentele vitezelor sunt:

$$\dot{x_1} = \dot{x} \qquad \dot{x_2} = \dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\dot{y_1} = 0 \qquad \dot{y_2} = -l\dot{\varphi}\sin\varphi$$

Energia cinetică a sistemului este:

$$E_c = \frac{m_1}{2}(\dot{x_1}^2 + \dot{y_1}^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x_2}^2 + \dot{y_2}^2) \tag{2.1}$$

sau

$$E_c = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{\varphi}^2 l^2) \tag{2.2}$$

Energia potenţială este datorată câmpului gravitaţional:

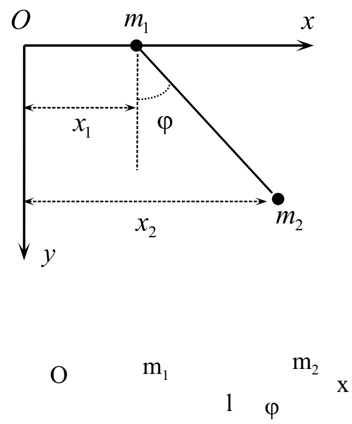

Figura 2.1: Pendul al cărui punct de suspensie se deplasează orizontal

$$E_p = -m_2 g y_2 = -m_2 g l \cos\varphi \tag{2.3}$$

Funcţia lui Lagrange se obţine din relaţiile 2.2 şi 2.3

$$L = E_c - E_p = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{\varphi}^2 l^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi) + m_2 g l \cos\varphi \tag{2.4}$$

Ecuaţiile de mişcare sunt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \tag{2.6}$$

Pentru a determina forma concretă a acestor ecuaţii se va calcula fiecare termen separat.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi)$$

Deoarece funcţia lui Lagrange nu depinde de x

$$(\partial L/\partial x) = 0$$

şi ecuaţia 2.5 devine:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) = 0 \tag{2.7}$$

Ecuaţia 2.7 se poate integra în raport cu timpul. Se obţine:

$$(m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi = \text{const} \tag{2.8}$$

Se observă că expresia din stânga reprezintă componenta după direcţia Ox a impulsului total. Relaţia 2.8 exprimă conservarea componentei impulsului după axa Ox.

Pentru a obţine forma concretă a ecuaţiei 2.6 se vor calcula următoarele derivate parţiale:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2\dot{\varphi} + m_2 l\dot{x}\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 l\ddot{x}\cos\varphi - m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi - m_2 gl\sin\varphi$$

Atunci ecuaţia 2.7 devine:

$$m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 l\ddot{x}\cos\varphi + m_2 gl\sin\varphi = 0 \tag{2.9}$$

Ecuaţiile de mişcare sunt date de relaţiile 2.7 şi 2.9.

PROBLEMA 2.2 Să se determine ecuaţia de mişcare a unui electron în câmpul creat de un nucleu cu numărul atomic Z presupus fix (Fig. 2.2).

SOLUŢIE

Când nucleul este fix, forţa de interacţiune este o forţă centrală:

$$\vec{F}(r) = F(r)\vec{r}$$

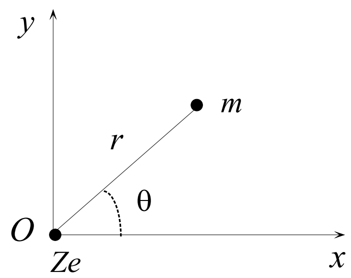

Figura 2.2: Electronul în câmpul electric al nucleului

Mişcarea are loc într-un plan. Astfel, prin derivarea egalităţii $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ rezultă:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}(r) = 0$$

ceea ce arată că momentul cinetic se conservă. Rezultă că $\vec{r}$ se află într-un plan care este perpendicular pe $\vec{l}$. Mişcarea se face într-un plan şi există doar două grade de libertate. Se aleg coordonatele polare r şi θ ca fiind coordonatele generalizate. Centrul O al sistemului de coordonate se consideră nucleul cu sarcina Ze. Atunci

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

Energia cinetică este:

$$E_c = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \tag{2.10}$$

Energia potenţială se determină pornind de la faptul că forţele electrostatice sunt conservative. Deoarece

$$dE_p = -F dr = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

prin integrare se obţine:

$$E_p(r) = \int_{\infty}^{r} \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = -\left.\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right|_{\infty}^{r} = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{2.11}$$

Funcţia lui Lagrange este:

$$L = E_c - E_p = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{2.12}$$

Ecuaţiile de mişcare sunt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{2.13}$$

şi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \tag{2.14}$$

Pentru a determina forma concretă a acestor ecuaţii se va calcula fiecare termen în parte.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mr^2\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta}r$$

Deoarece L nu depinde explicit de θ

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Relaţia 2.13 devine:

$$mr^2\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta}r = 0 \tag{2.15}$$

Prin integrarea acestei relaţii se obţine:

$$mr^2\dot{\theta} = mr^2\omega = mrv = \text{const}$$

Relaţia reprezintă legea de conservare a momentului cinetic.

$$l = mr^2\dot{\theta} = mvr = \text{const} \tag{2.16}$$

Mărimea $mr^2\dot{\theta}$ este o integrală primă a mişcării.

Pentru a obţine forma concretă a ecuaţiei 2.14 se calculează:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Ecuaţia 2.15 devine:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0 \tag{2.17}$$

Această ecuaţie poate fi scrisă doar în funcţie de r. Pentru aceasta se ţine cont de relaţiile 2.16 şi 2.17. Rezultă:

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0 \tag{2.18}$$

PROBLEMA 2.3

Să se demonstreze că în cazul în care L nu depinde de timp (sisteme conservative) mărimea

$$H = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L \tag{2.19}$$

este o integrală primă a mişcării şi reprezintă energia totală a sistemului.

SOLUŢIE

Deoarece $L = L(q_k, \dot{q}_k)$ atunci:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d\dot{q}_k}{dt} \tag{2.20}$$

Se ţine cont de ecuaţiile de mişcare

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

şi se obţine:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d\dot{q}_k}{dt}$$

sau

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right)$$

de unde rezultă:

$$\frac{d}{dt}\left[L - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right] = 0 \tag{2.21}$$

Atunci:

$$H = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = \text{const}$$

Mărimea H poartă denumirea de hamiltonian, iar în cazul de faţă este o integrală primă a mişcării.

În plus:

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} = 2E_c$$

deoarece E_c este o funcţie omogenă (formă pătratică) în raport cu $\dot{q}_k$.

Atunci

$$H = \; = 2E_c - L = 2E_c - E_c + E_p = E_c + E_p = \text{const}$$

Rezultă că hamiltonianul sistemului în acest caz coincide cu energia mecanică a sistemului considerat.

PROBLEMA 2.4 Pe o parabolă (Fig. 2.3) cu vârful în jos, având ca axă de simetrie verticala şi care se roteşte cu viteza unghiulară $\omega =$ const în jurul acestei axe, se poate mişca fără frecare un punct material de masă m. Să se determine la ce înălţime h se poate ridica punctul material dacă la momentul iniţial acesta se află în vârful parabolei şi are viteza v_0.

SOLUŢIE

Problema se va discuta într-un sistem neinerţial cu centrul în vârful parabolei şi care se roteşte odată cu aceasta.

Deoarece punctul material se poate mişca doar pe această parabolă sistemul are un singur grad de libertate. Coordonata generalizată este

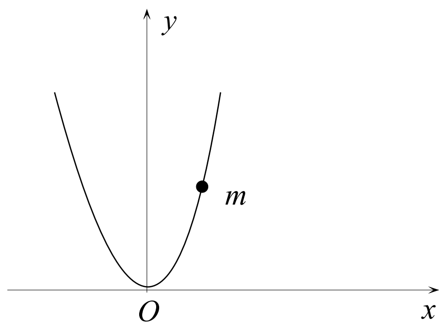

Figura 2.3: Particulă care se misca pe o parabolă

coordonata x a punctului în sistemul considerat. Ordonata punctului material este: $y = ax^2$. Aceasta reprezintă şi ecuaţia parabolei ($a > 0$). Energia cinetică a punctului material este:

$$E_c = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(1 + 4a^2x^2\right)\dot{x}^2 \tag{2.22}$$

Mişcarea de rotaţie face ca asupra punctului să acţioneze o forţă centrifugă $F_c = m\omega^2 x$. Energia potenţială datorată rotaţiei este:

$$E_{pc} = -\int_0^x F_c dx = -\int_0^x m\omega^2 x dx = -\frac{m\omega^2 x^2}{2} \tag{2.23}$$

Particula se află în câmp gravitaţional iar energia potenţială gravitaţională este:

$$E_{pg} = mgy = amgx^2 \tag{2.24}$$

Energia potenţială totală a punctului material este

$$E_p = E_{pc} + E_{pg} = -\frac{m\omega^2 x^2}{2} + amgx^2 \tag{2.25}$$

Atunci funcţia lui Lagrange este:

$$L = E_c - E_p = \frac{m}{2}(1 + 4a^2x^2)\dot{x}^2 + \frac{m\omega^2 x^2}{2} - mgax^2 \tag{2.26}$$

Deoarece L nu depinde explicit de timp, hamiltonianul sistemului

$$H = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L \tag{2.27}$$

se conservă şi reprezintă energia punctului material. Cum:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(1 + 4a^2x^2)\dot{x}$$

relaţia 2.27 devine:

$$H = \frac{m}{2}(1 + 4a^2x^2)\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2x^2}{2} + gmax^2 = \text{const} \tag{2.28}$$

La momentul iniţial $\dot{x} = v_0$ şi $x = 0$. La momentul final $\dot{x} = 0$ (punctul material s-a oprit) şi $x = x_f$.

Deoarece hamiltonianul este o mărime care se conservă valoarea lui este aceiaşi în starea iniţială şi finală. Atunci:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2x_f^2 + gmax_f^2 \tag{2.29}$$

de unde

$$x_f^2 = \frac{v_0^2}{2ag - \omega^2}$$

şi

$$h = ax_f^2 = \frac{av_0^2}{2ag - \omega^2} \tag{2.30}$$

Dacă $\omega^2 > 2ag$ atunci expresia lui h din 2.30 nu are sens. Aceasta înseamnă că viteza punctului nu poate deveni nulă şi el urcă până ajunge la marginea parabolei.

Se observă că dacă $\omega^2 < 2ag$ şi $\omega^2 \longrightarrow 2ag$ atunci $h \to \infty$, iar particula se deplasează la infinit pe ramura principală.

Pentru ca particula să se ridice la o înalţime finită este necesar ca $\omega^2 < 2ag$.

PROBLEMA 2.5 Un tub foarte lung aflat într-un plan vertical se roteşte în jurul capătului său O, cu viteza unghiulară constantă ω (Fig. 2.4). La momentul $t = 0$ tubul se află în poziţie orizontală. În interiorul tubului se mişcă fară frecare o bilă de masă m care la momentul iniţial se află în punctul O. Tubul se mişcă în sensul acelor de ceasornic. Să se determine ecuaţia de mişcare a bilei.

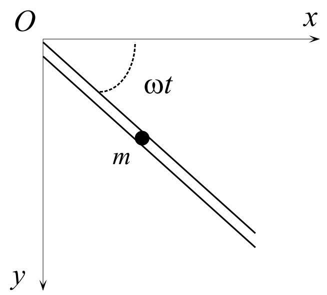

Figura 2.4: Bilă de masă m ce se mişcă într-un tub care se roteşte în planul vertical Oxy în jurul punctului O

SOLUŢIE

Sistemul are un singur grad de libertate deoarece bila nu se poate mişca decât în lungul tubului. În figura 2.4 este ilustrat sistemul de coordonate ales. Coordonata generalizată este r (distanţa de la punctul O la bila de masă m).

Atunci:

$$x = r\cos\omega t$$
$$y = r\sin\omega t$$
$$\dot{x} = \dot{r}\cos\omega t - r\omega\sin\omega t$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin\omega t + r\omega\cos\omega t$$

Energia cinetică este:

$$E_c = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\right) \tag{2.31}$$

Energia potenţială este doar de natură gravitaţională :

$$E_p = -mgy = -mgr\sin\omega t \tag{2.32}$$

Funcţia lui Lagrange este:

$$L = E_c - E_p = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\right) + mgr\sin\omega t \tag{2.33}$$

iar ecuaţia de mişcare:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \tag{2.34}$$

Calculând fiecare termen în parte se obţine:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\omega^2 + mg\sin\omega t$$

iar ecuaţia 2.34 devine:

$$\ddot{r} - \omega^2 r - g\sin\omega t = 0 \tag{2.35}$$

Ecuaţia 2.35 este o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea neomogenă. Soluţia generală este dată de suma dintre soluţia generală a ecuaţiei omogene şi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene.

Ecuaţia omogenă este:

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0 \tag{2.36}$$

Cum soluţiile ecuaţiei caracteristice $t^2 - \omega^2 = 0$ sunt $t_1 = \omega$ şi $t_2 = -\omega$, soluţia generală a ecuaţiei omogene 2.36 este:

$$r = Ae^{-\omega t} + Be^{\omega t} \tag{2.37}$$

unde A şi B sunt constante.

Pentru ecuaţia neomogenă se consideră o soluţie de forma:

$$r = a\sin\omega t$$

unde a este o constantă. Înlocuind în ecuaţia 2.35 se obţine:

$$-a\omega^2\sin\omega t - a\omega^2\sin\omega t - g\sin\omega t = 0 \tag{2.38}$$

Rezultă:

$$a = -\frac{g}{2\omega^2}$$

şi

$$r = -\frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t$$

Soluţia generală a ecuaţiei 2.35 este:

$$r = Ae^{-\omega t} + Be^{\omega t} - \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t \tag{2.39}$$

Viteza punctului material este:

$$\dot{r}(t) = -\omega Ae^{-\omega t} + \omega Be^{\omega t} - \frac{g}{2\omega}\cos\omega t$$

Constantele A şi B se determină din condiţiile iniţiale $r(0) = 0$ şi $\dot{r}(0) = 0$ (iniţial corpul este în repaus). Rezultă:

$$A + B = 0$$
$$-\omega A + \omega B - \frac{g}{2\omega} = 0$$

Prin rezolvarea acestui sistem de ecuaţii se obţine:

$$A = -B = -\frac{g}{4\omega^2}$$

Atunci ecuaţia de mişcare este:

$$r = \frac{g}{4\omega^2}\left[e^{\omega t} - e^{-\omega t} - 2\sin\omega t\right]$$

PROBLEMA 2.6 Un tub de lungime foarte mare se roteşte cu viteza unghiulară ω_0 în jurul unui ax vertical cu care face un unghi θ_0 în tot cursul mişcării. Axul intersectează tubul considerat (Fig.2.5). În interiorul tubului se află o bilă de diametru aproape egal cu cel al tubului şi care se mişcă în interiorul acestuia fără frecare şi fără viteză iniţială. Să se determine legea de mişcare a bilei.

SOLUŢIE

Alegem coordonata generalizată r – distanţa din punctul O la bilă. Atunci în raport cu sistemul de coordonate din Fig. 2.5:

$$x_1 = r\sin\theta_0\cos\omega_0 t$$

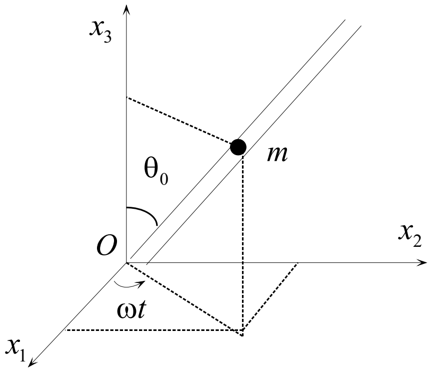

Figura 2.5: Bilă într-un tub vertical care se roteşte în jurul axei Ox_3 cu viteză unghiulară constantă

$$x_2 = r \sin\theta_0 \sin\omega_0 t$$

$$x_3 = r\cos\theta_0$$

Derivatele coordonatelor în raport cu timpul sunt:

$$\dot{x}_1 = \dot{r}\sin\theta_0\cos\omega_0 t - r\omega_0\sin\theta_0\sin\omega_0 t$$

$$\dot{x}_2 = \dot{r}\sin\theta_0\sin\omega_0 t + r\omega_0\sin\theta_0\cos\omega_0 t$$

$$\dot{x}_3 = \dot{r}\cos\theta_0$$

Energia cinetică a bilei este:

$$E_c = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\omega_0^2\sin^2\theta_0\right) \tag{2.40}$$

Energia potenţială este de natură gravitaţională şi are expresia:

$$E_p = mgx_3 = mgr\cos\theta_0 \tag{2.41}$$

Funcţia lui Lagrange este:

$$L = E_c - E_p = \frac{m}{2}[\dot{r}^2 + r^2\omega_0^2\sin^2\theta_0] - mgr\cos\theta_0 \tag{2.42}$$

Ecuaţia de mişcare este:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \tag{2.43}$$

Calculând fiecare termen în parte se obţine:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\omega_0^2 \sin^2\theta_0 - mg\cos\theta_0$$

şi ecuaţia 2.43 devine:

$$\ddot{r} - r\omega_0^2 \sin^2\theta_0 = -g\cos\theta_0 \tag{2.44}$$

Ecuaţia obţinută este o ecuaţie diferenţială de ordinul doi neomogenă. Ecuaţia omogenă este:

$$\ddot{r} - r\omega_0^2 \sin^2\theta_0 = 0$$

şi are ecuaţia caracteristică:

$$t^2 - \omega_0^2 \sin^2\theta_0 = 0$$

cu soluţiile $t_{1,2} = \pm\omega_0 \sin\theta_0$

Astfel soluţia ecuaţiei omogene este:

$$r = Ae^{\omega_0 t \sin\theta_0} + Be^{-\omega_0 t \sin\theta_0} \tag{2.45}$$

Soluţia generală o vom găsi folosind metoda variaţiei constantelor. Considerând A şi B dependente de t, se obţine:

$$\dot{A}e^{\omega_0 t \sin\theta_0} + \dot{B}e^{-\omega_0 t \sin\theta_0} = 0$$

$$\dot{A}\omega_0 \sin\theta_0 e^{\omega_0 t \sin\theta_0} - \dot{B}\omega_0 \sin\theta_0 e^{-\omega_0 t \sin\theta_0} = -g\cos\theta_0$$

Rezultă:

$$\dot{A} = -\frac{g\cos\theta_0}{2\omega_0 \sin\theta_0} \exp^{-\omega_0 t \sin\theta_0}$$

$$\dot{B} = \frac{g\cos\theta_0}{2\omega_0 \sin\theta_0} e^{\omega_0 t \sin\theta_0}$$

Astfel:

$$A = \left(\frac{g\cos\theta_0}{2\omega_0^2 \sin^2\theta_0} e^{-\omega_0 t \sin\theta_0} + A_1\right)$$

$$B = \left(\frac{g \cos \theta_0}{2\omega_0^2 \sin^2 \theta_0} e^{\omega_0 t \sin \theta_0} + B_1 \right)$$

Soluţia generală este:

$$r = A_1 e^{\omega_0 t \sin \theta_0} + B_1 e^{-\omega_0 t \sin \theta_0} + \frac{g \cos \theta_0}{\omega_0^2 \sin^2 \theta_0} \tag{2.46}$$

Considerând că la momentul iniţial $r(0) = R_0$ şi $\dot{r}(0) = 0$ (bila este în repaus), rezultă că:

$$A_1 = B_1 = \frac{1}{2} \left[R_0 - \frac{g \cos \theta_0}{\omega_0^2 \sin^2 \theta_0} \right]$$

Cu condiţiile iniţiale de mai sus soluţia ecuaţiei de mişcare este:

$$r = \left[R_0 - \frac{g \cos \theta_0}{\omega_0^2 \sin^2 \theta_0} \right] [\mathrm{ch}(\omega_0 \sin \theta_0 t)] + \frac{g \cos \theta_0}{\omega_0^2 \sin \theta_0} \tag{2.47}$$

Discuţie:
a) $\theta_0 < \pi/2$
Dacă:

$$R_0 < \frac{g \cos \theta_0}{\omega_0^2 \sin^2 \theta_0}$$

r descreşte în timp şi bila se apropie de origine.
Dacă:

$$R_0 = \frac{g \cos \theta_0}{\omega_0^2 \sin^2 \theta_0}$$

bila este în echilibru instabil în raport cu tubul.
Dacă:

$$R_0 > \frac{g \cos \theta_0}{\omega_0^2 \sin^2 \theta_0}$$

r creşte în timp şi bila urcă în tub.
b) $\theta_0 = \pi/2$

$$r = R_0 \mathrm{ch} \omega_0 t$$

tubul este orizontal şi bila se depărtează de origine.
c) $\theta_0 > \pi/2$
Tubul este orientat în jos astfel că bila va coborî depărtându-se de origine.

PROBLEMA 2.7 Să se discute mişcarea unui punct material greu, de masă m care se deplasează, fără frecare, de-a lungul unei cicloide, aflată în plan vertical care are ecuaţiile parametrice:

$$x = a(\zeta + \sin\zeta)$$

$$y = a(1 - \cos\zeta)$$

unde $\zeta \in [-\pi, \pi]$

SOLUŢIE

Se alege drept coordonata generalizată parametrul ζ.
Atunci:

$$\dot{x} = a\dot{\zeta}(1 + \cos\zeta)$$
$$\dot{y} = a\dot{\zeta}\sin\zeta$$

Energia cinetică este:

$$E_c = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = ma^2\dot{\zeta}^2\left(1 + \cos\zeta\right) \tag{2.48}$$

iar energia potenţială:

$$E_p = mgy = mga(1 - \cos\zeta) \tag{2.49}$$

Funcţia lui Lagrange este:

$$L = E_c - E_p = ma^2\dot{\zeta}^2\left(1 + \cos\zeta\right) - mga(1 - \cos\zeta) \tag{2.50}$$

sau

$$L = 2ma^2\dot{\zeta}^2\cos^2\frac{\zeta}{2} - 2mga\sin^2\frac{\zeta}{2} \tag{2.51}$$

Se efectuează schimbarea de variabilă:

$$z = \sin\frac{\zeta}{2} \quad \text{şi} \quad \dot{z} = \frac{\dot{\zeta}}{2}\cos\frac{\zeta}{2}$$

Atunci funcţia lui Lagrange devine:

$$L = 8a^2m\dot{z}^2 - 2mgaz^2 \tag{2.52}$$

Considerând z noua coordonată generalizată ecuaţia de mişcare se va scrie astfel:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

Se calculează fiecare termen în parte:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 16a^2m\dot{z}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = 16a^2m\ddot{z}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -4mgaz$$

Atunci forma ecuaţiei de mişcare devine:

$$4a\ddot{z} + gz = 0 \tag{2.53}$$

Ecuaţia obţinută este o ecuaţie diferenţială omogenă de ordinul al doilea. Soluţiile ecuaţiei caracteristice sunt $\pm i\sqrt{g/4a}$

Soluţia ecuaţiei de mişcare se poate pune sub forma:

$$z = a_1 \sin\sqrt{\frac{g}{4a}}\ t + b_1 \cos\sqrt{\frac{g}{4a}}\ t \tag{2.54}$$

Să considerăm că la momentul iniţial $\zeta = \zeta_0$ şi $\dot{\zeta} = 0$. Atunci la $t = 0,\ z = z_0 = \sin(\zeta_0/2),\ \dot{z}(0) = 0$

Ţinând cont de condiţiile iniţiale obţinem:

$$a_1 = 0$$

$$b_1 = z_0$$

Atunci relaţia 2.54 devine:

$$z = z_0 \cos\sqrt{\frac{g}{4a}}\ t = \sin\frac{\zeta_0}{2}\cos\sqrt{\frac{g}{4a}}\ t \tag{2.55}$$

Cum:

$$\sin\frac{\zeta}{2} = \sin\frac{\zeta_0}{2}\cos\sqrt{\frac{g}{4a}}\ t$$

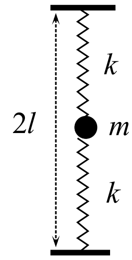

Figura 2.6: Particula ce oscilează între două resoarte

din 2.55 obţinem:

$$\zeta = 2 \arcsin \left[\frac{\zeta_0}{2} \cos \sqrt{\frac{g}{4a}}\ t \right]$$

PROBLEMA 2.8 Să se determine perioada micilor oscilaţii executate de o particulă de masă m legată de două resoarte precum şi legea de mişcare a acesteia (Fig. 2.6). Sistemul se află în câmp gravitaţional, particula se poate mişca numai pe verticală iar lungimea nedeformată a fiecărui resort este l. La momentul iniţial particula se află în repaus între cele două resoarte nedeformate.

SOLUŢIE

Alegem ca sistem de referinţă axa Oy cu originea în punctul de legătură cu suportul a resortului inferior. Fie y – coordonata particulei de masă m. Energia sa cinetică este:

$$E_c = \frac{m\dot{y}^2}{2} \tag{2.56}$$

Energia potenţială este suma dintre energia potenţială gravitaţională a particulei şi energia potenţială a resoartelor:

$$E_p = mgy + \frac{k}{2}(y-l)^2 + \frac{k}{2}(l-y)^2 = mgy + k(y-l)^2 \tag{2.57}$$

Poziţia de echilibru stabil se determină din condiţia de minim a e-nergiei potenţiale:

$$\frac{dE_p}{dy} = 0 \tag{2.58}$$

Din 2.57 şi 2.58 rezultă:

$$y_0 = l - \frac{mg}{2k} \tag{2.59}$$

Funcţia lui Lagrange a sistemului este:

$$L = \frac{m\dot{y}^2}{2} - mgy - k(y-l)^2 \tag{2.60}$$

Se introduce o nouă coordonată:

$$z = y - y_0$$

care reprezintă deplasarea particulei faţă de poziţia de echilibru. Atunci 2.60 devine:

$$L = \frac{m\dot{z}^2}{2} - kz^2 - mgl + \frac{3m^2g^2}{4k} \tag{2.61}$$

Ecuaţia de mişcare este:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \tag{2.62}$$

adică

$$\ddot{z} + \frac{2k}{m}z = 0$$

Aceasta este ecuaţia unui oscilator armonic liniar cu soluţia:

$$z = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{cu} \qquad \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Rezultă:

$$y = y_0 + A\sin(\omega t + \varphi)$$

Viteza particulei este:

$$v = \dot{y} = \omega A \cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

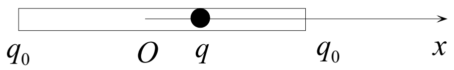

Figura 2.7: Particulă încărcată electric care oscilează într-un tub la capetele căruia se află sarcini de acelaşi semn cu cele a particulei

Constantele A şi φ se determină din condiţiile iniţiale $y(0) = l$ şi $v(0) = 0$.

Rezultă

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \qquad \text{şi} \qquad A = \frac{mg}{2k}$$

PROBLEMA 2.9 La capetele unui tub neconductor de lungime $2l$ sunt fixate două sarcini q_0 (Fig 2.7). În centrul tubului se poate mişca fără frecare o bilă de masă m încărcată cu sarcina q de acelaşi semn ca sarcinile q_0. Să se determine pulsaţia micilor oscilaţii ale bilei.

SOLUŢIE

Se alege ca sistem de referinţă o axă în lungul tubului cu originea în centrul tubului. Coordonata generalizată este coordonata x la care se află particula şi ea reprezintă deplasarea faţă de poziţia de echilibru.

Energia cinetică este:

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \tag{2.63}$$

Energia potenţială a particulei de masă m este datorată interacţiei acesteia cu sarcinile q_0 de la capetele tubului.

$$E_p = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{l-x} + \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{l+x} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{l-x} + \frac{1}{l+x} \right)$$

$$E_p = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2l}{l^2 - x^2} = \frac{qq_0}{2\pi\epsilon_0 l} \left(\frac{1}{1 - (x^2/l^2)} \right) \tag{2.64}$$

Considerând cazul micilor oscilaţii ($x \ll l$) se obţine pentru expresia energiei potenţiale:

$$E_p \simeq \frac{qq_0}{2\pi\epsilon_0 l}\left(1+\frac{x^2}{l^2}\right) \tag{2.65}$$

Funcţia lui Lagrange este:

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{qq_0}{2\pi\epsilon_0 l}\left(1+\frac{x^2}{l^2}\right) \tag{2.66}$$

Ecuaţia de mişcare poate fi pusă sub forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Calculând pe rând fiecare termen din ecuaţia de mişcare se obţine:

$$\ddot{x} + \frac{qq_0}{m\pi\varepsilon_0 l^3}x = 0 \tag{2.67}$$

Relaţia 2.67 este ecuaţia unui oscilator armonic liniar cu pulsaţia:

$$\omega = \sqrt{\frac{qq_0}{m\pi\varepsilon_0 l^3}}$$

Ecuaţia de mişcare este:

$$y = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

unde A şi B sunt constante care se determină din condiţiile iniţiale.

PROBLEMA 2.10 Să se găsească frecvenţa oscilaţiilor unui corp de masă m ce se poate deplasa pe o dreaptă şi este fixat de un resort a cărui extremitate este fixată într-un punct A la o distanţă l de dreaptă (Fig. 2.8). Când lungimea resortului este egală cu l el este solicitat de o forţă F.

SOLUŢIE

Considerăm coordonata generalizată ca fiind x – deplasarea corpului faţă de punctul O. Energia cinetică a acestuia este:

$$E_c = \frac{m\dot{x}^2}{2} \tag{2.68}$$

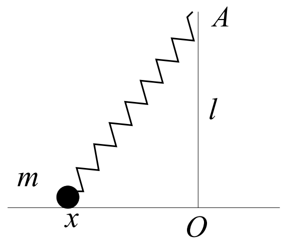

Figura 2.8: Corp legat de un resort care oscilează pe o dreaptă orizontală

iar energia potenţială este:

$$E_p = F\Delta l \tag{2.69}$$

unde Δl este alungirea resortului considerată foarte mică. Atunci:

$$\Delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l = l\sqrt{1 + \frac{x^2}{l^2}} - l \simeq l\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2}\right) - l = \frac{1}{2}\frac{x^2}{l}$$

Astfel relaţia 2.69 devine:

$$E_p = \frac{Fx^2}{2l} \tag{2.70}$$

Funcţia lui Lagrange este:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{Fx^2}{2l} \tag{2.71}$$

Ecuaţia de mişcare este:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{2.72}$$

Rezultă:

$$\ddot{x} + \frac{F}{ml}x = 0 \tag{2.73}$$

Relaţia 2.73 este ecuaţia unui oscilator armonic liniar cu pulsaţia:

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{ml}}$$

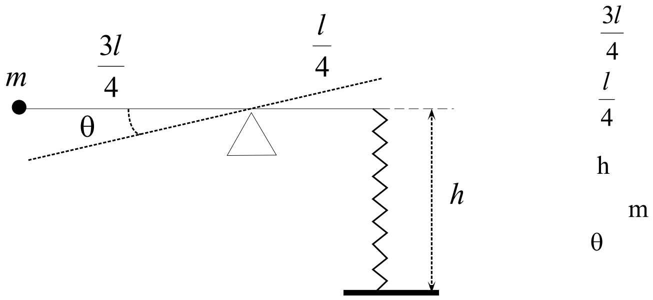

Figura 2.9: Bara care la un capăt este legată de un resort iar la celălalt capăt are un corp de masă m care oscilează

PROBLEMA 2.11 Să se găsească perioada micilor oscilaţii ale sistemului din Fig. 2.9. Bara de lungime l are o masă neglijabilă. Lungimea resortului nedeformat este h.

SOLUŢIE

Alegem coordonata generalizată ca fiind θ – unghiul de înclinare al barei faţă de orizontală. Energia cinetică este:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{3l}{4}\dot{\theta}\right)^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{3l}{4}\right)^2\dot{\theta}^2 \tag{2.74}$$

Energia potenţială este dată de suma dintre energia potenţială gravitaţională şi cea elastică. Valoarea de zero a energiei potenţiale gravitaţionale se poate alege în poziţia în care bara este orizontală.

$$E_p = \frac{k}{2}\left(\frac{l}{4}\theta\right)^2 - mg\frac{3l}{4}\theta \tag{2.75}$$

unde k este constanta de elasticitate.

În expresia de mai sus s-a considerat de la început că θ este mic. Poziţia de echilibru a sistemului se determină prin punerea condiţiei ca energia potenţială să fie minimă:

$$\left.\frac{dE_p}{d\theta}\right|_{\theta_0} = 0$$

adică

$$\frac{l^2}{16}k\theta_0 - mg\frac{3l}{4} = 0$$

Rezultă:

$$\theta_0 = \frac{12mg}{kl} \tag{2.76}$$

Introducând schimbarea de variabilă:

$$\varphi = \theta - \theta_0 \tag{2.77}$$

unde φ reprezintă deplasarea unghiulară a barei faţă de poziţia de echilibru, expresiile 2.74 şi 2.75 care reprezintă energiile cinetică, respectiv potenţială devin:

$$E_c = \frac{m}{2}\left(\frac{3l}{4}\right)^2\dot{\theta}^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{3l}{4}\right)^2\dot{\varphi}^2 \tag{2.78}$$

$$E_p = \frac{k}{2}\left(\frac{l}{4}\right)^2(\varphi+\theta_0)^2 - mg\frac{3l}{4}(\varphi+\theta_0) = \frac{kl^2}{32}\varphi^2 - \frac{9m^2g^2}{2k} \tag{2.79}$$

Funcţia lui Lagrange se poate scrie astfel:

$$L = E_c - E_p = \frac{m}{2}\left(\frac{3l}{4}\right)^2\dot{\varphi}^2 - \frac{kl^2}{32}\varphi^2 \tag{2.80}$$

deoarece termenul constant din energia potenţială se poate omite.

Ecuaţia de mişcare este:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \tag{2.81}$$

Rezultă:

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{9m}\varphi = 0$$

Se obţine ecuaţia unui oscilator armonic liniar cu pulsaţia:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{9m}}$$

PROBLEMA 2.12 Să se determine frecvenţa oscilaţiilor unui pendul al cărui punct de suspensie de masă m se poate deplasa orizontal.

SOLUŢIE

Utilizăm rezultatele obţinute în problema 2.1. Ecuaţiile de mişcare sunt:

$$(m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi) = 0 \tag{2.82}$$

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} + (m_2 l \cos\varphi)\ddot{x} + m_2 g l \sin\varphi = 0 \tag{2.83}$$

Deoarece se studiază cazul micilor oscilaţii unghiul φ este mic şi se vor folosi aproximaţiile:

$$\sin\varphi \simeq \varphi; \quad \cos\varphi \simeq 1$$

În plus se neglijează produsele în care apar puteri mai mari ca 2 ale lui φ.

Atunci ecuaţiile 2.82 şi 2.83 devin:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l\ddot{\varphi} = 0 \tag{2.84}$$

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x} + g\varphi = 0 \tag{2.85}$$

Din relaţia 2.84 rezultă

$$\ddot{x} = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\ddot{\varphi}$$

Introducând expresia lui $\ddot{x}$ în 2.85 se obţine ecuaţia:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g(m_1 + m_2)}{m_1 l}\varphi = 0$$

care este ecuaţia unui oscilator armonic liniar cu pulsaţia:

$$\omega = \sqrt{\frac{g\,(m_1 + m_2)}{m_1 l}}$$

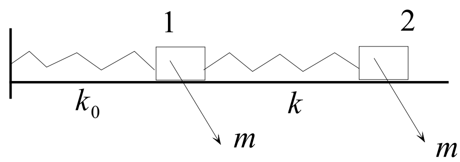

Figura 2.10: Sistem format din două resoarte şi două corpuri care oscilează într-un plan orizontal.

PROBLEMA 2.13 Să se determine ecuaţiile de mişcare pentru sistemul format din două mase $m_1 = m_2 = m$ şi două resoarte cu constantele elastice $k_1 = k_2 = k$ (Fig. 2.10). Ambele resoarte nedeformate au o lungime egală cu l_0.

SOLUŢIE

Dacă se notează cu x_1 şi x_2 coordonatele celor două corpuri energia cinetică a sistemului este:

$$E_c = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} \tag{2.86}$$

Energia potenţială este determinată de deformarea resorturilor

$$E_p = \frac{k_1}{2}(x_1 - l_0)^2 + \frac{k_2}{2}(x_2 - x_1 - l_0)^2 \tag{2.87}$$

Introducând schimbarea de variabile:

$$\eta_1 = x_1 - l_0$$

$$\eta_2 = x_2 - 2l_0$$

relaţiile 2.86 şi 2.87 devin:

$$E_c = \frac{m_1 \dot{\eta}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\eta}_2^2}{2} \tag{2.88}$$

$$E_p = \frac{k_1}{2}\eta_1^2 + \frac{k_2}{2}(\eta_2 - \eta_1)^2 \tag{2.89}$$

Funcţia lui Lagrange este:

$$L = \frac{m_1 \dot{\eta}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\eta}_2^2}{2} - \frac{k_1}{2}\eta_1^2 - \frac{k_2}{2}(\eta_2 - \eta_1)^2 \tag{2.90}$$

Ecuaţiile de mişcare sunt determinate dacă se rezolvă ecuaţiile Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_2} = 0$$

Acestea devin:

$$m_1 \ddot{\eta}_1 + k_1 \eta_1 - k_2(\eta_2 - \eta_1) = 0 \tag{2.91}$$

$$m_2 \ddot{\eta}_2 + k_2(\eta_2 - \eta_1) = 0 \tag{2.92}$$

Pentru rezolvarea acestui sistem de ecuaţii diferenţiale se aleg η_1 şi η_2 de forma:

$$\eta_1 = A_1 \sin(\omega t + \phi)$$

$$\eta_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi)$$

Prin introducerea acestor expresii în relaţiile 2.91 şi 2.92 se obţine sistemul omogen:

$$\left(k_1 + k_2 - m_1\omega^2\right) A_1 - k_2 A_2 = 0$$

$$-k_2 A_1 + \left(k_2 - m_2\omega^2\right) A_2 = 0$$

Sistemul este compatibil dacă determinantul său este nul.

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Se obţine astfel ecuaţia bipătrată:

$$m_1 m_2 \omega^4 - \left[(m_1 + m_2) k_2 + m_2 k_1\right]\omega^2 + k_1 k_2 = 0$$

În cazul considerat $m_1 = m_2 = m$ şi $k_1 = k_2 = k$. Soluţiile ecuaţiei de mai sus sunt:

$$\omega_1^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\frac{k}{m}$$

$$\omega_2^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\frac{k}{m}$$

În cazul când $\omega = \omega_1$ soluţiile sistemului algebric sunt:

$$A_1 = A$$

$$A_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}A$$

unde A este o constantă.

În cazul când $\omega = \omega_2$ soluţiile sistemului algeric sunt

$$A_1 = B$$

$$A_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}B$$

unde B este o constantă.

Atunci:

$$\eta_1 = A\sin(\omega_1 t + \phi_1) + B\sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$\eta_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}A\sin(\omega_1 t + \phi_1) + \frac{1-\sqrt{5}}{2}B\sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

Constantele A, B, ϕ_1 şi ϕ_2 se determină din condiţiile iniţiale.

PROBLEMA 2.14 Să se determine funcţia lui Lagrange în cazul unui pendul dublu, format din două pendule suspendate unul de celălalat cu masele m_1 respectiv m_2 şi lungimile l_1 şi l_2 (Fig. **??**). Pentru cazul particular când tijele au lungimi egale să se determine pulsaţiile micilor oscilaţii iar în cazul maselor egale să se determine şi ecuaţiile de mişcare.

SOLUŢIE

Se aleg drept coordonate generalizate unghiurile de deviaţie ale celor două pendule faţă de verticală θ_1 şi θ_2. Atunci coordonatele maselor m_1 şi m_2 sunt:

$$x_1 = l_1\sin\theta_1$$

$$y_1 = -l_1\cos\theta_1$$

$$x_2 = l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2$$

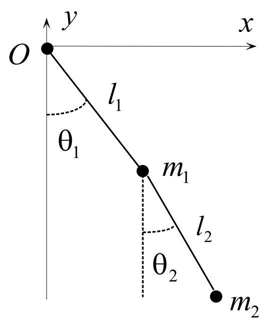

Figura 2.11: Pendulul dublu

$$y_2 = -l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2$$

Derivatele în raport cu timpul ale acestor coordonate sunt:

$$\dot{x}_1 = l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1$$
$$\dot{y}_1 = l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1$$
$$\dot{x}_2 = l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2$$
$$\dot{y}_2 = l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2$$

Energia cinetică totală este suma energiilor cinetice ale celor două particule

$$E_c = E_{c1} + E_{c2} \tag{2.93}$$

unde

$$E_{c1} = \frac{m_1\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right)}{2} = \frac{m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2}{2} \tag{2.94}$$

şi

$$E_{c2} = \frac{m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right)}{2} = \frac{m_2}{2}\left[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\left(\theta_2 - \theta_1\right)\right] \tag{2.95}$$

Energia potenţială este:

$$E_p = -m_1 g l_1 \cos\theta_1 - m_2 g\left(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2\right) \tag{2.96}$$

Atunci funcţia lui Lagrange este:

$$\begin{aligned} L &= \frac{m_1+m_2}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos\left(\theta_2 - \theta_1\right) + \\ &+ \left(m_1+m_2\right) g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g l_2 cos\theta_2 \end{aligned} \tag{2.97}$$

În cazul în care θ_1 şi θ_2 sunt foarte mici sinusurile se pot aproxima cu unghiurile iar $\cos\theta \simeq 1 - 2\sin^2\theta/2$. Atunci relaţia 2.97 devine:

$$\begin{aligned} L &= \frac{m_1+m_2}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \\ &- \frac{\left(m_1+m_2\right) g l_1 \theta_1^2}{2} - \frac{m_2 g l_2 \theta_2^2}{2} + \left(m_1+m_2\right) g l_1 + m_2 g l_2 \end{aligned} \tag{2.98}$$

Din

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$$

şi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

rezultă:

$$l_1\left(m_1+m_2\right)\ddot{\theta}_1 + l_2 m_2 \ddot{\theta}_2 + \left(m_1+m_2\right) g\theta_1 = 0 \tag{2.99}$$

respectiv

$$l_2 m_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 m_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 g \theta_2 = 0 \tag{2.100}$$

Dacă se consideră cazul $l_1 = l_2 = l$ ecuaţiile 2.99 şi 2.100 devin:

$$l\left(m_1+m_2\right)\ddot{\theta}_1 + l m_2 \ddot{\theta}_2 + \left(m_1+m_2\right) g\theta_1 = 0$$

$$l m_2 \ddot{\theta}_1 + l m_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g \theta_2 = 0$$

Dacă pentru acest sistem se aleg soluţii de forma:

$$\theta_1 = A_1 \sin(\omega t + \gamma)$$

$$\theta_2 = A_2 \sin(\omega t + \gamma)$$

se obţine următorul sistem omogen:

$$\left(m_1+m_2\right)\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right) A_1 - m_2 \omega^2 A_2 = 0$$

$$-m_2\omega^2 A_1 + m_2\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)A_2 = 0$$

Pentru ca sistemul să aibă soluţii nebanale deteminantul său trebuie să fie egal cu zero:

$$\begin{vmatrix} (m_1+m_2)\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right) & m_2\omega^2 \\ -m_2\omega^2 & m_2\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right) \end{vmatrix} = 0$$

Rezultă ecuaţia:

$$\omega^4 - 2\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{l}\omega^2 + \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{g}{l}\right)^2 = 0 \tag{2.101}$$

Soluţiile ecuaţiei 2.101 sunt:

$$\left(\omega^2\right)_{12} = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{l} \pm \sqrt{\frac{m_2}{m\ 1}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}\frac{g}{l} \tag{2.102}$$

Pentru $m_1 = m_2 = m$ soluţiile ecuaţiei devin:

$$\omega_1^2 = \left(2 + \sqrt{2}\right)\frac{g}{l}$$

$$\omega_2^2 = \left(2 - \sqrt{2}\right)\frac{g}{l}$$

Pentru $\omega = \omega_1$ prin rezolvarea sistemului de ecuaţii algebrice se obţine $A_1 = A$ şi $A_2 = -\sqrt{2}A$. Pentru $\omega = \omega_2$, $A_1 = B$ iar $A_2 = \sqrt{2}B$

Atunci expresiile pentru θ_1 şi θ_2 sunt:

$$\theta_1 = A\sin(\omega_1 t + \gamma_1) + Bsin(\omega_2 t + \gamma_2)$$

$$\theta_2 = -\sqrt{2}A\sin(\omega_1 t + \gamma_1) + \sqrt{2}Bsin(\omega_2 t + \gamma_2)$$

unde constantele A, B, γ_1, şi γ_2 se determină din condiţiile iniţiale.

PROBLEMA 2.15 O particulă de masă m se mişcă în lungul axei Ox într-un câmp pentru care hamiltonianul este dat de expresia:

$$H = \frac{1}{2m}p^2 - F_0 tx$$

unde F_0 este o constantă. Să se utilizeze ecuaţia Hamilton - Jacobi pentru a obţine legea de mişcare. Se va presupune că $x(0) = x_0$ şi $v(0) = v_0$.

SOLUŢIE

Ecuaţia Hamilton - Jacobi este:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - F_0 t x = 0 \tag{2.103}$$

Deoarece nu putem separa variabilele iar energia potenţială depinde doar liniar de x, se va căuta o integrală de forma:

$$S = f(t)x + g(t) \tag{2.104}$$

Atunci ecuaţia 2.103 devine:

$$x\left[\dot{f}(t) - F_0 t\right] + \dot{g} + \frac{1}{2m} f^2 = 0 \tag{2.105}$$

Ecuaţia 2.105 trebuie satisfăcută pentru orice x. Acest lucru implică satisfacerea simultană a ecuaţiilor

$$\dot{f}(t) - F_0 t = 0 \tag{2.106}$$

şi

$$\dot{g} + \frac{1}{2m} f^2 = 0 \tag{2.107}$$

Soluţia ecuaţiei 2.106 este:

$$f = \frac{1}{2} F_0 t^2 + a \tag{2.108}$$

unde a este o constantă

Soluţia ecuaţiei 2.107 este:

$$g = -\frac{1}{2m}\left[\frac{F_0^2 t^5}{20} + \frac{F_0 a t^3}{3} + a^2 t\right] \tag{2.109}$$

Atunci funcţia S se poate scrie:

$$S = \left(\frac{1}{2} F_0 t^2 + a\right) x - \frac{1}{2m}\left[\frac{F_0^2 t^5}{20} + \frac{F_0 a t^3}{3} + a^2 t\right] \tag{2.110}$$

De aici rezultă o nouă constantă b:

$$b = \frac{\partial S}{\partial a} = x - \frac{1}{6m} F_0 t^3 - \frac{a t}{m}$$

Atunci legea de mişcare este:

$$x = b + \frac{1}{6m}F_0t^3 + \frac{at}{m} \tag{2.111}$$

iar impulsul asociat coordonatei x este:

$$p = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{2}F_0t^2 + a \tag{2.112}$$

Pentru determinarea constantelor se ţine cont de condiţile iniţiale. Deoarece la $t = 0$, $x = x_0$ rezultă $x_0 = b$ iar din faptul că la $t = 0$, $v = v_0$ rezultă $mv_0 = a$.

Legea de mişcare este:

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{6m}F_0t^3$$

$$p = mv_0 + \frac{1}{2}F_0t^2$$

PROBLEMA 2.16 Pentru ce valori ale parametrilor a şi b transformarea:

$$Q = q^a \cos bp, \quad P = q^a \sin bp$$

este canonică? Determinaţi funcţia generatoare în cazul că funcţia este complet canonică.

SOLUŢIE

Pentru aceasta este necesar ca:

$$\{P, Q\}_{p.q} = \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1 \tag{2.113}$$

Se vor calcula derivatele parţiale:

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = aq^{a-1}\cos bp$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = -q^a b \sin bp$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = aq^{a-1}\sin bp$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = q^a b\cos bp$$

Cu aceste valori paranteza Poisson $\{P, Q\}_{p.q}$ devine:

$$\{P, Q\}_{p.q} = baq^{2a-1} \tag{2.114}$$

Ţinând cont de 2.113 rezultă că $a = 1/2$ iar $b = 2$
Astfel transformarea canonică devine:

$$Q = \sqrt{q}\cos 2p \tag{2.115}$$

$$P = \sqrt{q}\sin 2p \tag{2.116}$$

Condiţia de canonicitate se scrie:

$$pdq - (H - \widetilde{H})dt - PdQ = dF$$

Deaorece transformarea este complet canonică $H = \widetilde{H}$ şi rezultă

$$pdq - PdQ = dF \tag{2.117}$$

Deoarece

$$dQ = \frac{1}{2\sqrt{q}}\cos 2p\, dq - 2\sqrt{q}\sin 2p\, dp$$

din 2.117 rezultă:

$$dF = pdq - \frac{\sin 2p\cos 2p\, dq}{2} + 2q\sin^2 2p\, dp \tag{2.118}$$

De aici se obţin ecuaţiile:

$$\frac{\partial F}{\partial q} = p - \frac{\sin 4p}{4} \tag{2.119}$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 2q\sin^2 2p \tag{2.120}$$

Prin integrarea celor două ecuaţii rezultă:

$$F = q\left(p - \frac{\sin 4p}{4}\right)$$

PROBLEMA 2.17 Să se demonstreze că transformarea:

$$X = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(m\omega x + ip)e^{i\omega t}$$

$$P = \frac{i}{\sqrt{2m\omega}}(m\omega x - ip)e^{-i\omega t}$$

este o transformare canonică şi să se determine funcţia generatoare F.

SOLUŢIE

Pentru a demonstra canonicitatea transformării este necesar să se arate că:

$$\{P, X\}_{p,x} = \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial p} = 1 \tag{2.121}$$

Pentru aceasta se calculează derivatele parţiale

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{m\omega e^{i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}}$$

$$\frac{\partial X}{\partial p} = \frac{ie^{i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{im\omega e^{-i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}}$$

care introduse în relaţia 2.121 o satisfac.

$$\{P, X\}_{p,x} = \frac{m\omega}{2m\omega} - \frac{i^2 m\omega}{2m\omega} = 1$$

Rezultă că transformarea este canonică.

Din condiţia de canonicitate a transformării:

$$pdx - (H - \widetilde{H})dt - PdX = dF \tag{2.122}$$

rezultă:

$$p = \frac{\partial F}{\partial x} \tag{2.123}$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial X} \tag{2.124}$$

Din relaţia:

$$X = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(m\omega x + ip)e^{i\omega t}$$

rezultă:

$$p = im\omega x - i\sqrt{2m\omega}Xe^{-i\omega t} \tag{2.125}$$

Ţinând cont de relaţia 2.123 se obţine:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = im\omega x - i\sqrt{2m\omega}Xe^{-i\omega t} \tag{2.126}$$

Pentru a obţine $P = P(x, X)$, în relaţia

$$P = \frac{i}{2m\omega}(m\omega x - ip)e^{-i\omega t}$$

se substitue p dat de 2.125. Se obţine:

$$P = i\sqrt{2m\omega}\, xe^{-i\omega t} - iXe^{-2i\omega t} = -\frac{\partial F}{\partial X} \tag{2.127}$$

Prin integrarea ecuaţiilor 2.126 şi 2.127 se obţine pentru funcţia generatoare expresia:

$$F = \frac{im\omega x^2}{2} - i\sqrt{2m\omega}\, e^{-i\omega t}Xx + \frac{iX^2}{2}e^{-2i\omega t} \tag{2.128}$$

PROBLEMA 2.18 Să se arate că pentru un sistem cu un singur grad de libertate, o rotaţie în spaţiul fazelor

$$Q = q\cos\alpha - p\sin\alpha$$

$$P = q\sin\alpha + p\cos\alpha$$

este o transformare canonică şi să se determine funcţia generatoare a transformării.

SOLUŢIE

Condiţia de canonicitate este:

$$\{P,Q\}_{p,q} = \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} = 1 \tag{2.129}$$

Se calculează derivatele parţiale:

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = -\sin\alpha$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = \sin\alpha$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \cos\alpha$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \cos\alpha$$

Înlocuind aceste derivate în expresia 2.129 aceasta este satisfăcută.

Din condiţia de canonicitate:

$$pdq - PdQ - (H - \widetilde{H})dt = dF$$

rezultă

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial Q}$$

Din relaţiile de definiţie a transformării vom exprima $p = p\,(q, Q)$ şi $P = P\,(q, Q)$. Se obţine

$$P = \frac{q}{\sin\alpha} - Q\text{ctg }\alpha = \frac{\partial F}{\partial Q} \tag{2.130}$$

$$p = q\text{ctg }\alpha - \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{\partial F}{\partial q} \tag{2.131}$$

Prin integrarea ecuaţiilor 2.130 şi 2.131 se obţine funcţia generatoare

$$F = \frac{1}{2}(q^2 + Q^2)\text{ctg}^2\alpha - \frac{qQ}{\sin\alpha}$$

Capitolul 3

TERMODINAMICĂ

PROBLEMA 3.1 a) Să se demonstreze că în cazul unui proces adiabatic aplicat unui gaz ideal este adevărată relaţia:

$$pV^{\gamma} = \text{const} \tag{3.1}$$

b) Să se calculeze lucrul mecanic efectuat în cursul unui astfel de proces, când gazul trece din starea caracterizată prin parametri p_1 , V_1 , T_1 în starea caracterizată prin parametri p_2 , V_2 , T_2.

SOLUŢIE

a) Se utilizează principiul I al termodinamicii:

$$dU = \delta Q - pdV \tag{3.2}$$

în care $dU = \nu C_V dT$ şi $\delta Q = 0$ deoarece procesul este adiabatic.

Atunci relaţia 3.2 devine:

$$\nu C_V dT = -pdV \tag{3.3}$$

Cum pentru gazul ideal ecuaţia termică de stare este $pV = \nu RT$, unde ν este numărul de kmoli, relaţia 3.3 devine:

$$\nu C_V dT = -\nu RT\frac{dV}{V} \tag{3.4}$$

Prin integrarea acestei relaţii se obţine:

$$\frac{C_V}{R}\ln T = -\ln V + a \tag{3.5}$$

unde a este o constantă. Cum relaţia Robert-Mayer pentru gazul ideal este $C_p = C_V + R$ şi $\gamma = C_p/C_V$ rezultă:

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1} \tag{3.6}$$

Astfel din relaţia 3.5 se obţine:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \tag{3.7}$$

Substituind p din ecuaţia termică de stare rezultă:

$$pV^{\gamma} = \text{const} \tag{3.8}$$

b)

$$L = \int_{V_1}^{V_2} pdV \tag{3.9}$$

unde $p = \text{const}/V^{\gamma}$. Atunci:

$$L = \int_{V_1}^{V_2} \text{const}\frac{dV}{V^{\gamma}} = -\text{const}\frac{V_2^{-\gamma+1} - V_1^{-\gamma+1}}{\gamma - 1} \tag{3.10}$$

Deoarece $p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma} = \text{const}$, se obţine

$$L = -\frac{p_2V_2 - p_1V_1}{\gamma - 1} \tag{3.11}$$

PROBLEMA 3.2 Un gaz ideal trece din starea caracterizată de parametri p_1 , V_1 în starea caracterizată de parametri p_2 , V_2 printr-un proces descris de ecuaţia

$$p = a - bV \tag{3.12}$$

unde a şi b sunt constante pozitive.

a) Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de gaz în cursul acestui proces.

b) Să se stabilească dependenţa temperaturii de presiune.

SOLUŢIE

a) Avem

$$L = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2} (a - bV)\, dV$$

$$L = a(V_2 - V_1) - b\frac{(V_2^2 - V_1^2)}{2} \tag{3.13}$$

b) Se elimină V din ecuaţia termică de stare ($pV = \nu RT$) şi ecuaţia procesului considerat ($p = a - bV$). Rezultă:

$$T = \frac{(ap - p^2)}{\nu Rp} = \frac{a - p}{\nu R} \tag{3.14}$$

PROBLEMA 3.3 Să se determine o expresie pentru lucrul mecanic efectuat de mediul extern asupra unui corp solid atunci când presiunea creşte de la valoarea p_1 la valoarea p_2, iar temperatura rămâne constantă. Coeficientul de compresibilitate izoterm

$$K_T = -\left(\frac{1}{V}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \tag{3.15}$$

se consideră constant.

SOLUŢIE

$\delta L = -pdV$ deoarece lucrul mecanic este efectuat de mediul extern asupra sistemului. Deoarece $V = V(p, T)$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp \tag{3.16}$$

Compresia fiind izotermă $dT = 0$ şi relaţia 3.16 devine:

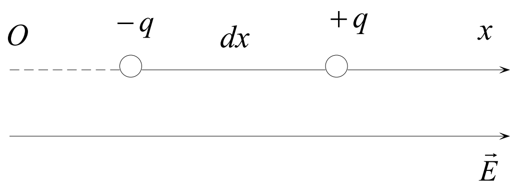

Figura 3.1: Dipol în câmp electric

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp = -VK_T dp \tag{3.17}$$

Atunci:

$$\delta L = VK_T p dp \tag{3.18}$$

Dacă se neglijează variaţia volumului în cursul transformării:

$$L = VK_T \int_{p_1}^{p_2} p dp = K_T V \frac{p_2^2 - p_1^2}{2} \tag{3.19}$$

PROBLEMA 3.4 Să se determine lucrul mecanic elementar de polarizare a unităţii de volum a unui dielectric dacă:

a) Sistemul este adus de la infinit în câmpul generat de o sarcină fixă.

b) Dacă se aplică o diferenţă de potenţial pe plăcile unui condensator plan având ca dielectric substanţa considerată.

SOLUŢIE

a) Dacă se notează cu n concentraţia de dipoli cu momentul dipolar $\vec{p}$, densitatea de polarizare este $\vec{P} = n\vec{p}$. Considerând un dipol într-un câmp electric orientat ca în Fig. 3.1 forţa ce acţionează asupra acestuia pe direcţia Ox este:

$$f_x = -qE_x(x) + qE_x(x + dx) \tag{3.20}$$

Dezvoltând în serie cel de-al doilea termen din 3.20 se obţine:

$$f_x = -qE_x\left(x\right) + q\left[E_x\left(x\right) + \frac{dE_x}{dx}dx\right] = q\frac{dE_x}{dx}dx$$

$$f_x = p_x\left(\frac{dE_x}{dx}\right) \tag{3.21}$$

deoarece câmpul electric este orientat de-a lungul axei Ox.

Se consideră dipolii orientaţi pe direcţia axei Ox şi câmpul orientat după aceiaşi direcţie. Forţa totală ce va acţiona asupra dipolilor din unitatea de volum este:

$$F_x = np\left(\frac{dE}{dx}\right) = P\frac{dE}{dx} \tag{3.22}$$

Lucrul mecanic efectuat când sistemul de dipoli este deplasat cu dx în câmpul electric este:

$$\delta L = -F_x dx = -\vec{P}d\vec{E} \tag{3.23}$$

semnul minus intervenind deoarece mediul extern efectuează un lucru mecanic asupra sistemului.

b) În cazul considerat dielectricul este plasat între plăcile unui condensator plan cu aria armăturilor egală cu S şi distanţa dintre ele egală cu h. Se presupune că dielectricul umple complet spaţiul dintre armături iar condensatorul este suficient de mare pentru a neglija efectele de margine. Când se aplică o diferenţă de potenţial, la trecerea sarcinii dq de pe o armătură pe alta se efectuează un lucru mecanic din exterior $\delta L = -Udq$ unde $U = Eh$ iar $dq = d\sigma S = SdD$ (E este intensitatea câmpului electric iar $\sigma = D$, unde D este inducţia electrică). Atunci:

$$\delta L = -EhSdD = -VEdD \tag{3.24}$$

unde $V = Sh$. Generalizând putem scrie că:

$$\delta L = -V\vec{E}d\vec{D} \tag{3.25}$$

Cum $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$, 3.25 devine:

$$\delta L = -V\vec{E}(\varepsilon_0 d\vec{E} + d\vec{P}) = -Vd\left(\varepsilon_0 \frac{\vec{E}^{\,2}}{2}\right) - V\vec{E}d\vec{P} \tag{3.26}$$

Pe unitatea de volum:

$$\frac{\delta L}{V} = -d\left(\varepsilon_0 \frac{\vec{E}^{\,2}}{2}\right) - \vec{E}d\vec{P} \tag{3.27}$$

Primul termen reprezintă lucrul mecanic necesar pentru generarea câmpului electric care ar exista şi în absenţa dielectricului iar cel de-al doilea termen reprezintă lucrul mecanic efectuat pentru polarizarea unităţii de volum al unui dielectric izotrop.

PROBLEMA 3.5 Să se determine lucrul mecanic elementar efectuat de o sursă de tensiune electromotoare pentru a realiza magnetizarea unităţii de volum a unei substanţe din care este realizat miezul unei bobine. Se presupune că intensitatea câmpului magnetic H şi densitatea de magnetizare M sunt uniforme, iar corpul nu se deformează în timpul magnetizării sale.

SOLUŢIE

Intensitatea câmpului magnetic creat în interiorul unei bobine cu aria secţiunii S şi cu lungimea d suficient de mare este:

$$H = \frac{NI}{d} \tag{3.28}$$

unde N este numărul de spire iar I este intensitatea curentului electric ce trece prin bobină.

Fluxul inducţiei magnetice prin bobină este:

$$\Phi = NSB \tag{3.29}$$

Când I creşte, cresc deasemenea H şi M şi deci şi B. Aceasta duce la apariţia unei tensiuni electromotoare autoinduse:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -SN\frac{dB}{dt} \tag{3.30}$$

Energia furnizată de sursă în circuit în acest caz este:

$$dW = Iedt = SNIdB \tag{3.31}$$

Atunci lucrul mecanic efectuat de sursă este:

$$\delta L = -SNIdB = -\left(Sd\right)\left(\frac{NI}{d}\right)dB = -VHdB \tag{3.32}$$

Semnul minus apare deoarece lucrul mecanic calculat este un lucru mecanic efectuat de mediul exterior asupra sistemului considerat.

Cum $B = \mu_0(H + M)$ relaţia 3.32 devine

$$\delta L = -VH\left(\mu_0 dH + \mu_0 dM\right) = -Vd\left(\mu_0\frac{H^2}{2}\right) - \mu_0 VHdM \tag{3.33}$$

şi lucrul mecanic necesar magnetizării unităţii de volum este:

$$\frac{\delta L}{V} = -d\left(\mu_0\frac{H^2}{2}\right) - \mu_0 HdM \tag{3.34}$$

Primul termen din relaţia 3.34 reprezintă lucrul mecanic necesar pentru a crea câmpul H independent de existenţa corpului magnetic. Al doilea termen este lucrul mecanic efectuat pentru a magnetiza unitatea de volum a substanţei date.

PROBLEMA 3.6 Pentru un gaz ideal să se determine:

a) Coeficientul de dilatare izobar

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

b) Coeficientul de variaţie a presiunii cu temperatura

$$\beta = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

c) Coeficientul de compresibilitate izotermă

$$K_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

SOLUŢIE

Se utilizează ecuaţia termică de stare a gazului ideal $pV = \nu RT$. Din aceasta rezultă:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{\nu R}{p} \tag{3.35}$$

Atunci:

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{\nu R}{pV} = \frac{1}{T} \tag{3.36}$$

Deoarece:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\nu\frac{RT}{p^2} \tag{3.37}$$

Atunci:

$$K_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{p} \tag{3.38}$$

Deoarece:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{\nu R}{V} \tag{3.39}$$

Atunci:

$$\beta = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T} \tag{3.40}$$

PROBLEMA 3.7 Să se demonstreze următoarea relaţie între coeficientul de compresibilitate adiabatică şi coeficientul de compresibilitate izoterm:

$$K_S = -\left(\frac{C_V}{C_p}\right) K_T \tag{3.41}$$

(formula lui Reech)

Coeficienţii de compresibilitate adiabatică K_S, respectiv izotermă K_T sunt daţi de expresiile:

$$K_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S \tag{3.42}$$

$$K_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \tag{3.43}$$

SOLUŢIE

În cazul unui proces adiabatic $\delta Q = 0$ şi atunci:

$$dU + pdV = 0 \tag{3.44}$$

Se consideră $U = U(p\ ,\ V)$ şi atunci:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_V dp + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p dV \tag{3.45}$$

Relaţia 3.44 devine:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_V dp + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p + p\right] dV = 0 \tag{3.46}$$

şi

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S = -\frac{\left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p\right]}{\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_V} \tag{3.47}$$

Se pun sub o altă formă expresiile care apar la numitor, respectiv la numărătorul relaţiei 3.47:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = C_V \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \tag{3.48}$$

unde

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \tag{3.49}$$

este capacitatea calorică a sistemului la volum constant.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \tag{3.50}$$

Ţinând cont de relaţia 3.50 numărătorul expresiei 3.47 se poate scrie:

$$p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p = p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \tag{3.51}$$

sau

$$p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right] \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \tag{3.52}$$

Din $\delta Q = dU + pdV$ rezultă:

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{3.53}$$

Atunci relaţia 3.52 devine:

$$p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p = C_p\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \tag{3.54}$$

Se utilizează relaţiile 3.48 şi 3.54 şi atunci relaţia 3.47 devine:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S = -\frac{C_p}{C_V}\frac{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p}{\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V} = \frac{C_p}{C_V}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \tag{3.55}$$

astfel că:

$$-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = \frac{C_V}{C_p}\left[-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\right] \tag{3.56}$$

Introducând în 3.56 relaţiile 3.42 şi 3.43 se obţine:

$$K_S = \frac{C_V}{C_p}K_T \tag{3.57}$$

PROBLEMA 3.8 În cazul unei substanţe a cărei ecuaţie termică de stare este de forma $p = p\,(V, T)$, să se arate că

$$p\beta = \frac{\alpha}{K_T} \tag{3.58}$$

unde β este coeficientul de variaţie al presiunii cu temperatura, α este coeficientul de dilatare liniar iar K_T este coeficientul de compresibilitate izoterm.

SOLUŢIE

Din relaţia $p = p(V\ ,\ T)$ rezultă:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T dV \tag{3.59}$$

iar din 3.40

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = p\beta \tag{3.60}$$

precum şi

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{1}{VK_T} \tag{3.61}$$

Substituind 3.60 şi 3.61 în 3.59 rezultă:

$$dp = p\beta dT - \frac{1}{K_T}\frac{dV}{V} \tag{3.62}$$

Când $p = \text{const}$, $dp = 0$ şi relaţia 3.62 devine:

$$p\beta dT - \frac{1}{K_T}\frac{dV}{V} = 0 \tag{3.63}$$

de unde:

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = p\beta K_T \tag{3.64}$$

De aici rezultă imediat relaţia cerută:

$$p\beta = \frac{\alpha}{K_T} \tag{3.65}$$

PROBLEMA 3.9 Să se demonstreze identitatea

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = -1 \tag{3.66}$$

folosind proprietăţile jacobienilor.

SOLUŢIE

Derivatele parţiale se pot scrie

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = \frac{[p,T]}{[V,T]} \tag{3.67}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{[V,p]}{[T,p]} \tag{3.68}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = \frac{[T,V]}{[p,V]} \tag{3.69}$$

Atunci:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = \frac{[p,T]}{[V,T]}\frac{[V,p]}{[T,p]}\frac{[T,V]}{[p,V]} \tag{3.70}$$

şi

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = -\frac{[p,T]}{[V,T]}\frac{[p,V]}{[p,T]}\frac{[T,V]}{[p,V]} = -1 \tag{3.71}$$

PROBLEMA 3.10 Dintr-un vas izolat termic se pompează aerul realizându-se un vid înaintat. Vasul este în contact termic cu atmosfera unde presiunea este p_0 şi temperatura T_0. La un moment dat robinetul de evacuare se deschide şi are loc umplerea vasului cu aer. Ce temperatură va avea gazul din interiorul vasului după umplerea acestuia?

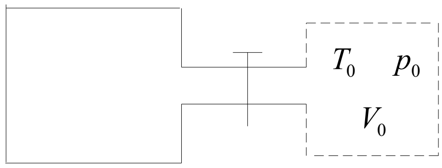

Figura 3.2: Recipient vidat în care pătrunde aer

SOLUŢIE

Prin deschiderea robinetului, un volum V_0 de aer din atmosferă intră în recipient împins de restul atmosferei care efectuează un lucru mecanic $L = p_0V_0$ (Fig. 3.2). În figură a fost delimitat formal volumul de aer V_0 care va intra în vas prin deschiderea robinetului.

Procesul suferit de volumul V_0 de aer este un proces adiabatic: schimbul de căldură nu are loc. Se aplică principiul I al termodinamicii. În acest proces $\Delta U = Q - L$. Cum $Q = 0$ iar lucrul mecanic are expresia calculată mai sus se obţine:

$$\Delta U = p_0V_0 \tag{3.72}$$

Fie T temperatura aerului ce a intrat în recipient. Atunci:

$$\Delta U = \nu C_V T - \nu C_V T_0 \tag{3.73}$$

Din relaţiile 3.72 şi 3.73 se obţine:

$$\nu C_V(T - T_0) = p_0V_0 \tag{3.74}$$

care ţinând cont de ecuaţia de stare a gazului ideal $p_0V_0 = \nu RT_0$ devine:

$$\nu C_V(T - T_0) = \nu RT_0 \tag{3.75}$$

De aici rezultă:

$$T = \frac{C_V + R}{C_V}T_0 = \frac{C_p}{C_V}T_0 = \gamma T_0 \tag{3.76}$$

PROBLEMA 3.11 Să se determine ecuaţia termică de stare în cazul unei substanţe pentru care se cunosc coeficientul termic al presiunii

$$\beta = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = f(T) \tag{3.77}$$

şi coeficientul de compresibilitate izoterm

$$K_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{p} \tag{3.78}$$

SOLUŢIE

Se porneşte de la relaţia stabilită în problema 3.8:

$$\alpha = p\beta K_T \tag{3.79}$$

Se exprimă α - coeficientul de dilatare izobar sub forma:

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial T}\ln V\right)_p \tag{3.80}$$

şi se ţine cont că $1/p = K_T$. Relaţia 3.79 devine:

$$\left(\frac{\partial}{\partial T}\ln V\right)_p = \beta = f\left(T\right) \tag{3.81}$$

Pornind de la definiţia coeficientului de compresibilitate izoterm:

$$K_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial}{\partial p}\ln V\right)_T \tag{3.82}$$

atunci:

$$\left(\frac{\partial}{\partial T}\ln V\right)_T = -\frac{1}{p} \tag{3.83}$$

Deoarece

$$d\left(\ln V\right) = \left(\frac{\partial}{\partial T}\ln V\right)_p dT + \left(\frac{\partial}{\partial p}\ln V\right)_T dp \tag{3.84}$$

rezultă:

$$d(\ln V) = f(T)\,dT - \frac{1}{p}dp \tag{3.85}$$

iar prin integrare se obţine:

$$\ln V = \int f(T)\,dT - \ln p + \text{const} \tag{3.86}$$

PROBLEMA 3.12 Să se deducă ecuaţia termică de stare a unei substanţe pentru care coeficientul de dilatare volumică α şi coeficientul de compresibilitate izoterm K_T sunt daţi de expresiile:

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{(V-a)}{VT} \tag{3.87}$$

$$K_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \frac{3(V-a)}{4pV} \tag{3.88}$$

unde a este un volum constant.

SOLUŢIE

Se consideră $V = V(T,p)$ şi prin diferenţiere se obţine:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp \tag{3.89}$$

Ţinând cont de definiţiile lui α şi K_T rezultă:

$$dV = \alpha V\,dT - K_T V\,dp \tag{3.90}$$

Introducând expresiile lui α şi K_T date în enunţul problemei relaţia 3.90 devine:

$$dV = (V-a)\frac{dT}{T} - 3(V-a)\frac{dp}{p} \tag{3.91}$$

sau:

$$\frac{dV}{V-a} = \frac{dT}{T} - 3\frac{dp}{p} \tag{3.92}$$

Prin integrare se obţine:

$$p^{3/4}\left(\frac{V-a}{T}\right)=\text{const} \tag{3.93}$$

PROBLEMA 3.13 Să se găsească relaţia dintre C_p şi C_V (relaţia Robert - Mayer) pentru un sistem termodinamic ce poate fi caracterizat de parametri p , V , T (dintre care doi sunt independenţi) iar $U = U(T,V)$

SOLUŢIE

Se utilizează primul principiu al termodinamicii sub formă diferenţială:

$$dU = \delta Q - pdV \tag{3.94}$$

Cum

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \tag{3.95}$$

Din relaţiile 3.94 şi 3.95 se obţine:

$$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV \tag{3.96}$$

Se consideră $V = \text{const}$ $(dV = 0)$ şi atunci relaţia 3.96 devine:

$$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT \tag{3.97}$$

de unde rezultă:

$$C_V = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \tag{3.98}$$

Cum $V = V(p,T)$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT \tag{3.99}$$

Ţinând cont de relaţiile 3.98 şi 3.99 relaţia 3.96 devine:

$$\delta Q = C_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\left[\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp\right] \quad (3.100)$$

Se consideră $p =$ const. Atunci dp =0 iar relaţia 3.100 devine:

$$\delta Q = C_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT \quad (3.101)$$

Din 3.101 se obţine:

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_p = C_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad (3.102)$$

PROBLEMA 3.14 Să se demonstreze identitatea

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = C_p \quad (3.103)$$

SOLUŢIE

Se aplică primul principiu al termodinamicii $dU = \delta Q - pdV$; rezultă:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_p - p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad (3.104)$$

Cum

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_p \quad (3.105)$$

se obţine:

$$C_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad (3.106)$$

PROBLEMA 3.15 Pentru un gaz să se demonstreze relaţia

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V = \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T + p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \tag{3.107}$$

SOLUŢIE

Pentru un gaz

$$H = U + pV \tag{3.108}$$

$$dH = dU + pdV + Vdp \tag{3.109}$$

de unde:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T + p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T + V \tag{3.110}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V = \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T + p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \tag{3.111}$$

PROBLEMA 3.16 Să se demonstreze relaţia

$$(C_p - C_V)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial p \partial V}\right) + \left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p - \left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = 1 \tag{3.112}$$

SOLUŢIE

Din relaţia Robert - Mayer (problema 3.13) rezultă:

$$(C_p - C_V)\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p \tag{3.113}$$

Se derivează această relaţie în raport cu p când $V = \text{const}$ şi se obţine:

$$(C_p - C_V)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial V \partial p}\right) + \left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p - \left(\frac{\partial C_V}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = \\ = \left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right]_V + 1 \qquad (3.114)$$

dar:

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial p}\right)_V = \left(\frac{\partial C_V}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \qquad (3.115)$$

şi:

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = \left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \qquad (3.116)$$

Ţinând cont de relaţiile 3.115 şi 3.116, relaţia 3.114 devine:

$$(C_p - C_V)\frac{\partial^2 T}{\partial p \partial V} + \left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p - \\ - \left[\left(\frac{\partial C_V}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p + \left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T\right]\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = 1$$

Se consideră $C_V = C_V(T, V)$. Atunci:

$$dC_V = \left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial C_V}{\partial T}\right)_V dT$$

Rezultă:

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_p = \left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_p + \left(\frac{\partial C_V}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \qquad (3.117)$$

astfel că

$$(C_p - C_V)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial p \partial V}\right) + \left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p - \left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = 1 \qquad (3.118)$$

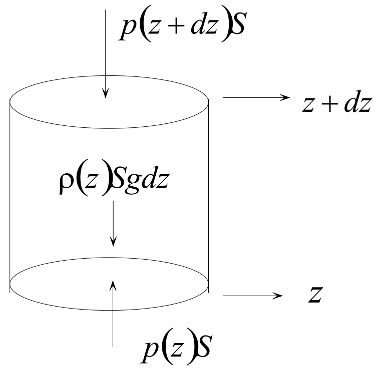

Figura 3.3: Cilindru de aer la înălţimea z

PROBLEMA 3.17 Se presupune că atunci când aerul (considerat gaz ideal) se ridică suferă un proces de destindere adiabatică. Să se determine variaţia temperaturii cu creşterea altitudinii. Să se evalueze rata variaţiei temperaturii cu altitudinea dT/dz considerând γ= 1,41, μ = 28,9 g/mol şi g= 9,8 m/s^2.

SOLUŢIE

Considerăm aerul dintr-un volum cilindric de înălţime dz şi baza S (Fig.3.3).

Condiţia de echilibru pentru această porţiune de gaz este:

$$p(z)S - p(z + dz)S - \rho(z)Sgdz = 0 \tag{3.119}$$

de unde rezultă:

$$-dp(z) = \rho(z)gdz \tag{3.120}$$

sau:

$$\frac{dp\,(z)}{dz} = -\rho\,(z)\,g \tag{3.121}$$

Cum în cazul unui gaz ideal:

$$\rho = \frac{\mu p}{RT} \tag{3.122}$$

unde μ este masa molară a gazului, relaţia 3.121 devine:

$$\frac{dp\,(z)}{dz} = -\frac{p\mu g}{RT} \tag{3.123}$$

sau:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT}dz \tag{3.124}$$

Cum transformarea la care este supus gazul este adiabatică:

$$p^{1-\gamma}T^{\gamma} = \mathrm{const} \tag{3.125}$$

Prin diferenţierea acestei relaţii se obţine:

$$(1-\gamma)\,p^{-\gamma}T^{\gamma}dp + \gamma p^{1-\gamma}T^{\gamma-1}dT = 0$$

$$(1-\gamma)\,Tdp + pdT = 0 \tag{3.126}$$

adică:

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{dT}{T} \tag{3.127}$$

Din relaţiile 3.124 şi 3.127 rezultă:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}dT = -\frac{\mu\rho}{R}dz \tag{3.128}$$

de unde:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu g}{R} \tag{3.129}$$

Aceasta înseamnă că odată cu creşterea altitudinii temperatura scade. Din relaţia de mai sus se obţine pentru rata scăderii temperaturii cu altitudinea o valoare de aproximativ 10 ^{0}C/km. Totuşi scăderea reală este doar de 6 ^{0}C/km, neconcordanţa datorându-se altor fenomene.

PROBLEMA 3.18 Propagarea sunetului în aer are loc adiabatic cu viteza

$$v_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \qquad (3.130)$$

(unde ρ este densitatea aerului)

a) Să se determine relaţia care există între exponentul adiabatic γ şi viteza sunetului v_s.

b) Să se determine variaţia lui v_s în funcţie de temperatură şi să se evalueze viteza sunetului la 0 ^{0}C la presiunea de 1 atm.

SOLUŢIE

Din ecuaţia transformării adiabatice pentru gazul ideal $pV^\gamma = \mathrm{const}$ scrisă în variabilele p , V , se obţine prin diferenţiere:

$$V^\gamma dp + \gamma V^{\gamma-1} dV = 0 \qquad (3.131)$$

$$\frac{dp}{p} + \gamma\frac{dV}{V} = 0 \qquad (3.132)$$

Cum $\rho = m/V$ rezultă:

$$d\rho = -m\frac{dV}{V^2} = -\rho\frac{dV}{V} \qquad (3.133)$$

sau

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} \qquad (3.134)$$

Din relaţiile 3.132 şi 3.134 rezultă:

$$\frac{dp}{p} - \gamma\frac{d\rho}{\rho} = 0 \qquad (3.135)$$

de unde:

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma\frac{p}{\rho} \qquad (3.136)$$

Atunci:

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \qquad (3.137)$$

Astfel prin măsurarea vitezei sunetului prin metode uzuale în condiţii cunoscute se poate determina exponentul adiabatic.
b) Din ecuaţia termică de stare a gazului ideal

$$pV = \frac{mRT}{\mu} \tag{3.138}$$

se obţine:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu} \tag{3.139}$$

şi atunci utilizând relaţia 3.130 şi 3.136 se obţine:

$$v_s = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}} \tag{3.140}$$

În cazul aerului $\gamma = 1{,}41$, $T = 273$ K , $R = 8310$ J/Kmol K . Se obţine:

$$v_s = 332\mathrm{m/s}$$

PROBLEMA 3.19 Admiţând că proprietăţile radiaţiei termice sunt similare unui gaz să se determine ecuaţia transformării adiabatice ştiind că densitatea energiei interne este:

$$u = \sigma T^4 \tag{3.141}$$

iar presiunea

$$p = \frac{u}{3} \tag{3.142}$$

SOLUŢIE

Energia internă a radiaţiei termice dintr-un volum V este:

$$U = uV = \sigma V T^4 \tag{3.143}$$

În plus:

$$p = \frac{u}{3} = \frac{\sigma T^4}{3} \tag{3.144}$$

Utilizând expresia primului principiu al termodinamicii sub formă diferenţială $\delta Q = dU + pdV$ precum şi relaţiile 3.143 şi 3.144 se obţine:

$$\delta Q = d(\sigma V T^4) + pdV \tag{3.145}$$

sau

$$\delta Q = \sigma T^4 dV + 4\sigma V T^3 dT + \frac{\sigma T^4}{3} dV \tag{3.146}$$

$$\delta Q = \frac{4\sigma T^4 dV}{3} + 4\sigma T^3 V dT \tag{3.147}$$

În cazul transformării adiabatice $\delta Q = 0$ şi considerând relaţia 3.147 se obţine:

$$\frac{dV}{V} + 3\frac{dT}{T} = 0 \tag{3.148}$$

Prin integrare rezultă:

$$\ln V + 3 \ln T = \text{const} \tag{3.149}$$

Se obţine astfel ecuaţia transformării adiabatice:

$$VT^3 = \text{const} \tag{3.150}$$

PROBLEMA 3.20 Să se calculeze lucrul mecanic şi căldura schimbate cu mediul extern de către radiaţia termică care se destinde izoterm volumul variind de la V_1 la volumul V_2

SOLUŢIE

Lucrul mecanic este:

$$L = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\sigma T^4}{3} dV = \frac{\sigma T^4}{3} (V_2 - V_1) \tag{3.151}$$

(În calculul de mai sus am ţinut cont de relaţia 3.142) Cum:

$$Q = \Delta U + L \tag{3.152}$$

rezultă că pentru determinarea lui Q este necesară cunoaşterea lui ΔU. Dar

$$\Delta U = \sigma T^4 (V_2 - V_1) \tag{3.153}$$

Ţinând cont de relaţiile 3.151 , 3.152 şi 3.153 rezultă:

$$Q = \frac{4}{3} \sigma T^4 (V_2 - V_1) \tag{3.154}$$

PROBLEMA 3.21 Care este temperatura finală a unui mol de gaz care se destinde adiabatic în vid de la volumul V_1 la volumul V_2 considerând că:

a) gazul este ideal iar expresia energiei interne este de forma

$$U = \frac{3RT}{2} \tag{3.155}$$

b) gazul este real iar expresia energiei interne este de forma

$$U = \frac{3RT}{2} - \frac{a}{V} \tag{3.156}$$

unde a este o constantă

SOLUŢIE

În cazul destinderii adiabatice în vid $\delta Q = 0$, $\delta L = 0$, deoarece ocuparea de către gaz a noului volum se face datorită agitaţiei termice.

Rezultă $\Delta U = 0$ adică $U =$ const şi $U_1 = U_2$.

a) în cazul gazului ideal:

$$\frac{3RT_2}{2} = \frac{3RT_1}{2} \tag{3.157}$$

de unde:

$$T_1 = T_2$$

Pentru gazul real:

$$\frac{3RT_2}{2} - \frac{a}{V_2} = \frac{3RT_1}{2} - \frac{a}{V_1} \tag{3.158}$$

de unde

$$T_2 = T_1 + \frac{2a}{3R}\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) \tag{3.159}$$

Cum $V_2 > V_1$ rezultă că $T_2 < T_1$

Pentru gazul real destinderea are loc cu scăderea temperaturii sale.

PROBLEMA 3.22 În cursul unui proces Joule - Thomson gazul aflat la presiunea p_1 este lăsat să treacă printr-un dop poros într-un compartiment în care presiunea este p_2. Când gazul din volumul V_1 se destinde în volumul V_2 să se arate că în cursul acestui proces entalpia $H = U + pV$ se conservă. Se presupune că pereţii exteriori izolează adiabatic sistemul.

SOLUŢIE

Procesul este ilustratat în Fig. 3.4. Peretele din stânga este împins uşor astfel încât volumul compartimentului din stânga să scadă de la valoarea V_1 la valoarea 0 iar volumul compartimentului din dreapta să crească de la valoarea 0 la valoarea V_2.

Lucrul mecanic efectuat de sistem este:

$$L = \int_{V1}^{0} p_1 dV + \int_{0}^{V_2} p_2 dV = -p_1 V_1 + p_2 V_2 \tag{3.160}$$

Se aplică primul principiu al termodinamicii acestui proces şi se obţine:

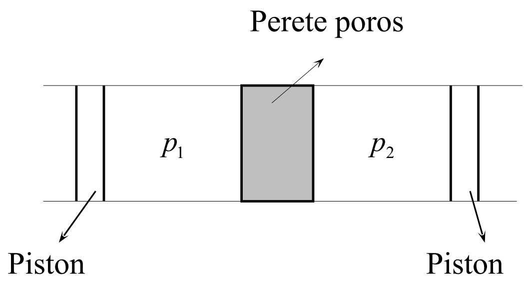

Figura 3.4: Procesul Joule - Thomson

$$U_2 - U_1 = -L = p_1V_1 - p_2V_2 \tag{3.161}$$

de unde:

$$U_2 + p_2V_2 = U_1 + p_1V_1 \tag{3.162}$$

adică:

$$H_1 = H_2 \tag{3.163}$$

PROBLEMA 3.23 Să se arate că variaţia de temperatură în cursul unui proces Joule-Thomson pentru un gaz oarecare se poate exprima astfel:

$$\Delta T = -\frac{1}{C_p}\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \Delta p \tag{3.164}$$

SOLUŢIE

Într-un proces Joule-Thomson $\Delta H = 0$. Pentru un astfel de proces se consideră entalpia funcţie de parametri p ,T şi atunci:

$$\Delta H = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p \Delta T + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T \Delta p = 0 \tag{3.165}$$

de unde se obţine:

$$\Delta T = -\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T}{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p}\Delta p \tag{3.166}$$

Deoarece:

$$H = U + pV \tag{3.167}$$

$$dH = \delta Q + V dp \tag{3.168}$$

Când $p =$ const rezultă că $dH = \delta Q$ şi

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$$

Atunci

$$\Delta T = -\frac{1}{C_p}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T \Delta p \tag{3.169}$$

Pentru $H = H(p, V)$

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp \tag{3.170}$$

Dar cum $p = p\,(V, T)$

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T dV$$

Astfel relaţia 3.170 devine:

$$dH = \left[\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\right] dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T dV \tag{3.171}$$

Pentru $H = H(V, T)$

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_V dT \tag{3.172}$$

Comparând relaţiile 3.171 cu 3.172 obţinem:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$$

De aici rezultă:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \tag{3.173}$$

Astfel relaţia 3.169 devine:

$$\Delta T = -\frac{1}{C_p}\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \Delta p \tag{3.174}$$

Deoarece creşterea presiunii conduce la micşorarea volumului

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T < 0$$

se pot trage următoarele concluzii:

Dacă

$$\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T > 0$$

atunci ΔT şi Δp au acelaşi semn

Dacă

$$\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T < 0$$

atunci ΔT şi Δp au semne contrare

Dacă

$$\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T = 0$$

atunci $\Delta T = 0$

PROBLEMA 3.24 Asupra unei bare realizată dintr-un material elastic de lungime L_1, având secţiunea S_1, aflată la temperatura T_1, acţionează o forţă F_1. Dacă se cunoaşte coeficientul de dilatare liniar

$$\lambda = \left(\frac{1}{L}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_F \tag{3.175}$$

precum şi modulul lui Young

$$E = \left(\frac{L}{S}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_T \tag{3.176}$$

să se determine lungimea L_2 când temperatura creşte la valoarea T_2, iar forţa devine egală cu F_2.

SOLUŢIE

Considerând $L = L(T, F)$ se obţine:

$$dL = \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_F dT + \left(\frac{\partial L}{\partial F}\right)_T dF$$

şi introducând 3.175 şi 3.176:

$$dL = \lambda L dT + \frac{L}{ES} dF \tag{3.177}$$

de unde:

$$\int_{L_1}^{L_2} \frac{dL}{L} = \lambda \int_{T_1}^{T_2} dT + \frac{1}{SE} \int_{F_1}^{F_2} dF$$

Rezultă:

$$\ln\left(\frac{L_2}{L_1}\right) = \lambda\left(T_2 - T_1\right) + \frac{F_2 - F_1}{SE} \tag{3.178}$$

Observaţii:
a) $F = \text{const}$

$$\ln\left(\frac{L_2}{L_1}\right) = \lambda\left(T_2 - T_1\right) \tag{3.179}$$

$$L_2 = L_1 \exp\left[\lambda\left(T_2 - T_1\right)\right]$$

Pentru variaţii mici de temperatură se poate dezvolta în serie exponenţiala reţinând primii termeni şi rezultă:

$$L_2 = L_1[1 + \lambda (T_2 - T_1)]$$

b) $T = \text{const}$

$$\ln \frac{L_2}{L_1} = \frac{F_2 - F_1}{SE}$$

$$L_2 = L_1 \exp\left(\frac{F_2 - F_1}{SE}\right) \tag{3.180}$$

În cazul în care $F_1 = 0$, iar

$$\frac{F_2}{ES} \ll 1$$

relaţia 3.180 se poate scrie:

$$L_2 = L_1\left(1 + \frac{F_2}{ES}\right)$$

şi se obţine:

$$\Delta L = L_2 - L_1 = L_1 \frac{F_2}{ES}$$

adică o expresie care constituie legea lui Hooke.

PROBLEMA 3.25 Să se arate că pentru un metal elastic sub formă de sârmă cu lungimea L la temperatura T şi asupra căruia acţionează forţa F este satisfăcută relaţia

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_L = -ES\lambda \tag{3.181}$$

unde E este modulul lui Young iar λ este coeficientul de dilatare liniar (semnificaţiile mărimilor care apar în problemă au fost date în problema precedentă)

SOLUŢIE

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_L = -\frac{\left(\dfrac{\partial L}{\partial T}\right)_F}{\left(\dfrac{\partial L}{\partial F}\right)_T} = \frac{-\dfrac{1}{L}\left(\dfrac{\partial L}{\partial T}\right)_F}{\dfrac{S}{L}\left(\dfrac{\partial L}{\partial F}\right)_T} S = -ES\lambda$$

PROBLEMA 3.26 Să se arate că pentru un gaz ideal este satisfăcută relaţia

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T = 0 \tag{3.182}$$

SOLUŢIE

Pentru $U = U(T, V)$ se obţine:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \tag{3.183}$$

Pentru o transformare izotermă $dT = 0$, şi:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \tag{3.184}$$

Atunci

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \tag{3.185}$$

Deoarece în cazul unui gaz ideal energia internă depinde doar de temperatură

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$$

iar din relaţia 3.185 rezultă:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T = 0$$

PROBLEMA 3.27 Să se arate că în cazul unui proces adiabatic într-un sistem a cărui energie internă depinde de T şi p are loc relaţia:

$$C_p \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S = - \left[\left(\frac{\partial U}{\partial p} \right)_T + p \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \right] \tag{3.186}$$

SOLUŢIE

Considerând $U = U(p,T)$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial U}{\partial p} \right)_T dp \tag{3.187}$$

Dar:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T dp \tag{3.188}$$

Atunci din primul principiu al termodinamicii

$$\delta Q = dU + \delta L = dU + pdV$$

şi din relaţiile 3.187 şi 3.188 rezultă:

$$\delta Q = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_p + p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \right] dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial p} \right)_T + p \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \right] dp \tag{3.189}$$

Deoarece:

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_p + p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \tag{3.190}$$

relaţia 3.189 devine pentru un proces adiabatic

$$C_p dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial p} \right)_T + p \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \right] dp = 0 \tag{3.191}$$

de unde:

$$C_p\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = -\left[\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T + p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\right]$$

PROBLEMA 3.28 Să se studieze forma izotermelor pentru un gaz real care satisface ecuaţia Van-der-Waals:

$$\left(p+\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V-\nu b)=\nu RT \tag{3.192}$$

unde ν este numărul de kmoli iar a şi b sunt constante pozitive. Să se determine presiunea critică p_c , volumul critic V_c precum şi temperatura critică T_c.

SOLUŢIE

Dacă se notează cu $v = V/\nu$ volumul molar ecuaţia de stare devine:

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT$$

sau:

$$p=\frac{RT}{v-b}-\frac{a}{v^2} \tag{3.193}$$

de unde:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = -\frac{RT}{(v-b)^2}+\frac{2a}{v^3}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = \frac{2a}{(v-b)^2}\left[\frac{(v-b)^2}{v^3}-\frac{RT}{2a}\right] \tag{3.194}$$

Pentru a studia semnul acestei derivate se consideră funcţia:

$$f(v)=\frac{(v-b)^2}{v^3} \tag{3.195}$$

definită pentru $v > b$

Se studiază variaţia acestei funcţii. Pentru aceasta se consideră derivata sa în funcţie de v :

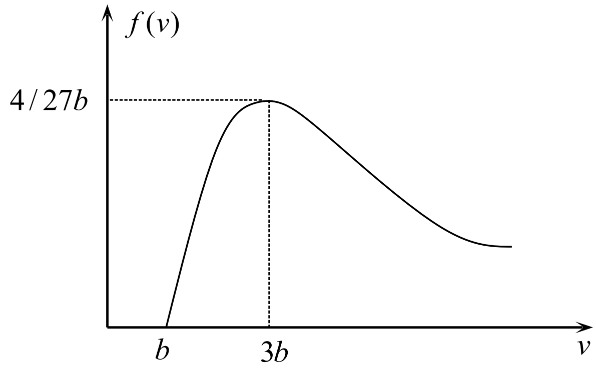

Figura 3.5: Funcţia f(v)

$$\frac{df}{dv} = \frac{v-b}{v^4}(3b-v) \tag{3.196}$$

Când $v < 3b$ funcţia este crescătoare deoarece prima ei derivata este pozitivă.

Când $v > 3b$ funcţia este descrescătoare deoarece derivata ei este negativă. Când $v = 3b$ se obţine valoarea maximă a lui $f(v)$ şi anume:

$$f(3b) = \frac{4}{27b}$$

Menţionăm că dacă: $v \to b \quad f(v) \to 0$ iar dacă: $v \to \infty \quad f(v) \to 0$

Graficul acestei funcţii este reprezentat în Fig.3.5.

Dacă:

$$\frac{4}{27b} < \frac{RT}{2a} \tag{3.197}$$

atunci:

$$\frac{(v-b)^2}{v^3} - \frac{RT}{2a} < 0$$

Rezultă:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T < 0$$

ceea ce înseamnă că presiunea scade monoton cu creşterea volumului. Din relaţia 3.197 rezultă că:

$$T > \frac{8a}{27Rb}$$

Dacă:

$$\frac{4}{27b} > \frac{RT}{2a}$$

adică

$$T < \frac{8a}{27bR}$$

ecuaţia:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = \frac{2a}{(v-b)^2}\left[\frac{(v-b)^2}{v^3} - \frac{RT}{2a}\right] = 0 \tag{3.198}$$

are două soluţii v_1, v_2, $(v_1 < v_2)$, unde $v_1 \in (b, 3b)$ şi $v_2 > 3b$

Când $v \in (b, v_1)$,

$$\frac{(v-b)^2}{v^3} - \frac{RT}{2a} < 0$$

şi:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T < 0$$

Când $v \in (v_1, v_2)$

$$\frac{(v-b)^2}{v^3} - \frac{RT}{2a} > 0$$

şi:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T > 0$$

Când $v > v_2$

$$\frac{(v-b)^2}{v^3} - \frac{RT}{2a} < 0$$

şi:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T < 0$$

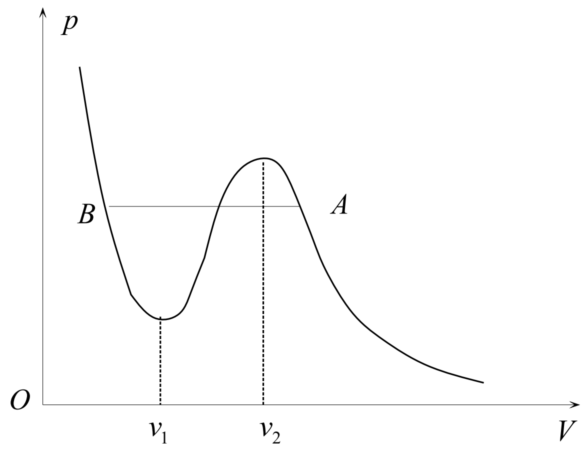

Figura 3.6: Izotermă Van-der-Walls

Când $v_1 = v_2 = v$

$$v = \frac{8a}{27Rb}$$

Alura unei izoterme este cea prezentată în Fig.3.6.

Se observă că în punctul v_1, presiunea are un minim iar când volumul este egal cu v_2, presiunea are un maxim. Când temperatura creşte $v_1 \to 3b \quad , \quad v_2 \to 3b$ adică punctele de extrem se apropie din ce în ce mai mult până ajung să coincidă. Acest lucru are loc la o temperatură critică T_c. Când $T < T_c$ trebuie remarcat că experimental maximele şi minimele de pe izoterme nu se observă. Sub temperatura critică într-un anumit punct, A gazul începe să se condenseze. Când volumul descreşte, presiunea rămâne constantă (linia AB), până în punctul B când întreg gazul este transformat în lichid. Dincolo de punctul B când volumul descreşte, este comprimat un lichid, astfel încât apare o creştere abruptă a presiunii chiar când există variaţii mici de volum. Punctul critic corespunde cazului când cele două extreme coincid ($v_1 = v_2$). Volumul critic molar şi temperatura critică sunt:

$$v_c = 3b \tag{3.199}$$

$$T_c = \frac{8a}{27Rb} \tag{3.200}$$

Presiunea critică se obţine din relaţia 3.193.

$$p_c = \frac{a}{27b^2}$$

Rezultatul acesta se obţine direct atunci când se pun condiţiile:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_T = 0$$

PROBLEMA 3.29 Să se arate că dacă se neglijează variaţia volumului la magnetizarea unei substanţe magnetice omogene căldura specifică este dată de expresia

$$c_H = \left(\frac{\partial u}{\partial H}\right)_T - \mu_0 H \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H \tag{3.201}$$

când intensitatea câmpului magnetic este constantă. M este densitatea de magnetizare, H este intensitatea câmpului magnetic, c_H este căldura specifică a unităţii de volum, u energia internă a unităţii de volum, iar μ_0 permitivitatea vidului.

SOLUŢIE

Pentru unitatea de volum variaţia energiei interne a unei substanţe magnetice este:

$$du = \delta Q + \mu_0 H dM$$

sau

$$\delta Q = du - \mu_0 H dM \tag{3.202}$$

Pentru $u = u(T, H)$

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_H dT + \left(\frac{\partial u}{\partial H}\right)_T dH \tag{3.203}$$

Pentru $M = M(T, H)$

$$dM = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H dT + \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T dH \tag{3.204}$$

Ţinând cont de relaţiile 3.203 şi 3.204 relaţia 3.202 devine:

$$\delta Q = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_H - \mu_0 H \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H\right] dT + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial H}\right)_T - \mu_0 H \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H\right] dH$$

şi atunci:

$$c_H = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_H = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_H - \mu_o H \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H$$

PROBLEMA 3.30 Dacă se neglijează variaţia volumului când are loc magnetizarea să se demonstreze că pentru o substanţă omogenă are loc relaţia:

$$\chi_S = \left(\frac{c_M}{c_H}\right) \chi_T \tag{3.205}$$

unde

$$\chi_T = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T \tag{3.206}$$

este susceptibilitatea magnetică izotermă iar

$$\chi_S = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_S \tag{3.207}$$

este susceptibilitatea magnetică adiabatică.

În 3.205 c_M este căldura specifică a unităţii de volum la densitate de magnetizare constantă, iar c_H este căldura specifică a unităţii de volum la intensitate constantă a câmpului magnetic.

SOLUŢIE

Starea sistemului este caracterizată de parametri T, H , M care sunt legaţi printr-o ecuaţie de stare. Atunci $u = u(H, M)$ unde u este energia internă a unităţii de volum. Pentru unitatea de volum principiul I al termodinamicii se scrie:

$$\delta Q = du - \mu_0 H dM \tag{3.208}$$

Pentru o transformare adiabatică ($\delta Q = 0$) se obţine:

$$du = \mu_0 H dM$$

sau:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial M}\right)_H dM + \left(\frac{\partial u}{\partial H}\right)_M dH - \mu_0 H dM = 0$$

şi regrupând termenii:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial H}\right)_M dH + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial M}\right)_H - \mu_0 H\right] dM = 0 \tag{3.209}$$

de unde:

$$\chi_S = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_S = -\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial H}\right)_M}{\left(\frac{\partial u}{\partial M}\right)_H - \mu_0 H} \tag{3.210}$$

Dar:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial H}\right)_M = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_M \left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_M = c_M \left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_M \tag{3.211}$$

şi:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial M}\right)_H - \mu_0 H = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_H - \mu_0 H \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H\right] \left(\frac{\partial T}{\partial M}\right)_H \tag{3.212}$$

Cum în problema precedentă am demostrat că:

$$c_H = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_H = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_H - \mu_0 H \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H\right]$$

expresia 3.212 devine:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial M}\right)_H - \mu_0 H = c_H \left(\frac{\partial T}{\partial M}\right)_H \tag{3.213}$$

Ţinând cont de relaţiile 3.211 şi 3.213, 3.210 devine:

$$\chi_S = -\frac{c_M \left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_M}{c_H \left(\frac{\partial T}{\partial M}\right)_H} = \frac{c_M}{c_H}\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T = \frac{c_M}{c_H}\chi_T$$

PROBLEMA 3.31 Să se arate că într-un proces ciclic izoterm reversibil căldura schimbată cu mediul extern şi lucrul mecanic sunt nule. Se va utiliza:

a) egalitatea lui Clausius

b) formularea Thomson a principiului al doilea.

SOLUŢIE

a) În cazul unui proces ciclic izoterm reversibil:

$$\frac{1}{T}\oint \delta Q = 0$$

adică:

$$Q = \oint \delta Q = 0 \tag{3.214}$$

Cum:

$$\Delta U = Q - L \tag{3.215}$$

Deoarece procesul este ciclic $\Delta U = 0$ şi rezultă că şi $L = 0$.

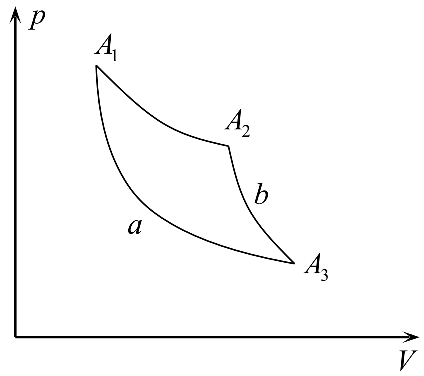

Figura 3.7: Ciclu format din doua adiabate şi o

b) Din formularea Thomson a principiului al II-lea rezultă că sistemul nu poate efectua lucru mecanic asupra mediului. Atunci:

$$L \leq 0 \tag{3.216}$$

Dacă $L < 0$ înseamnă că mediul extern efectuează un lucru mecanic asupra sistemului.

Se consideră acelaşi proces ciclic izoterm parcurs în sens invers. În cursul acestui proces lucrul mecanic efectuat de mediu este -L . Atunci:

$$-L \leq 0 \tag{3.217}$$

Din relaţiile 3.216 şi 3.217 rezultă că $L = 0$.

PROBLEMA 3.32 Să se arate că pentru aceeaşi cantitate de substanţă două adiabate nu se pot intersecta.

SOLUŢIE

Fie două transformări adiabatice a şi b precum şi transformarea izotermă A_1A_2 reprezentate în Fig.3.7 . A_3 este punctul de intersecţie al celor două adiabate.

Se consideră ciclul $A_1A_2A_3$ parcurs în sensul acelor de ceasornic. Sistemul preia căldură doar în cursul transformării A_1A_2 şi, în plus, $L > 0$.

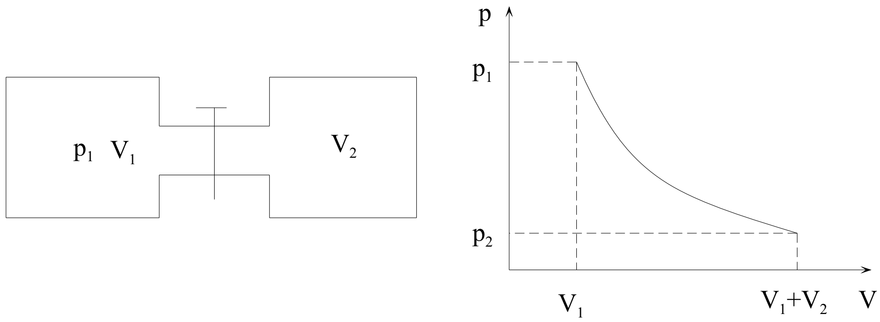

Figura 3.8: Destindere adiabatică în vid

Aceasta înseamnă că sistemul ia căldură de la o singură sursă şi poate efectua lucru mecanic asupra mediului extern, însă acest lucru este interzis de principiul II al termodinamicii şi ipoteza făcută nu este adevărată. (Se observă şi faptul că dacă A_1A_2 nu este izotermă, nu avem o singură sursă de căldură)

Rezultă că două adiabate ale aceleiaşi cantităţi de substanţă nu se pot intersecta.

PROBLEMA 3.33 Să se arate că procesul de destindere adiabatică a unui gaz ideal dintr-o incintă cu volumul V_1 şi temperatura T_1, într-o incintă vidată cu volumul V_2 este ireversibil. Să se calculeze variaţia de entropie în cursul acestui proces.

SOLUŢIE

Deoarece destinderea este adiabatică şi s-a realizat în vid $Q = 0$ şi $L = 0$. Rezultă că $\Delta U = 0$ şi cum pentru un gaz ideal $\Delta U = C_V \Delta T$ rezultă că $\Delta T = 0$, adică temperatura finală este egală cu cea iniţială. Procesul este reprezentat în Fig.3.8.

Procesul ar fi reversibil dacă sistemul şi mediul ar putea reveni la starea iniţială prin aceleaşi stări intermediare, lucru care nu este posibil deoarece gazul ar trebui să treacă de la sine în incinta cu volum V_1 în incinta cu volumul V_2 rămânând vid. Procesul este ireversibil şi este asociat cu creştere de entropie.

Calculul variaţiei de entropie se realizează pornind de la faptul că aceasta este o funcţie de stare şi există posibilitatea evaluării ei în cursul unui proces reversibil între cele două stări. În această situaţie se consideră o transformare izotermă reversibilă între cele două stări.

Atunci:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \tag{3.218}$$

Cum transformarea este izotermă iar pentru gazul ideal:

$$dU = \delta Q - \delta L = 0$$

se obţine:

$$\delta Q = \delta L = pdV \tag{3.219}$$

Se utilizează ecuaţia termică de stare a gazului ideal

$$pV = \nu RT$$

şi rezultă:

$$\frac{p}{T} = \frac{\nu R}{V} \tag{3.220}$$

Ţinând cont de 3.219 şi 3.220 relaţia 3.218 devine:

$$dS = \nu R \frac{dV}{V}$$

Integrând:

$$\Delta S = \nu R \int_{V_1}^{V_1+V_2} \frac{dV}{V} = \nu R \ln \frac{(V_1 + V_2)}{V_1} > 0$$

PROBLEMA 3.34 Două cantităţi de apă de masă M se găsesc la temperaturile T_1 şi T_2 ($T_1 > T_2$). Cele două cantităţi de apă se introduc într-un calorimetru care le conferă o izolare adiabatică. Să se calculeze variaţia de entropie în procesul de atingere a echilibrului termic.

SOLUŢIE

Deoarece în cursul procesului de atingere a stării de echilibru, cantităţii de apă cu temperatura mai mică i se transmite o cantitate de căldură de la apa cu temperatură mai mare, pentru ca procesul să fie reversibil căldura cedată ar trebui să treacă înapoi de la sine. Din formularea lui Clausius a principiului II rezultă că acest lucru nu este posibil; în consecinţă procesul nu poate fi decât unul ireversibil. Ca şi în problema precedentă, pentru calculul variaţiei de entropie se consideră un proces reversibil între cele două stări.

Se utilizează ecuaţia calorimetrică:

$$Mc\,(T_e - T_2) = Mc\,(T_1 - T_e)$$

Pentru temperatura de echilibru rezultă:

$$T_e = \frac{T_1 + T_2}{2} \tag{3.221}$$

Se consideră că are loc un proces de răcire reversibil pentru cantitatea de apă de la temperatura T_1 la temperatura T_e ($T_1 > T_e$). Variaţia de entropie este:

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{Te} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{Te} \frac{McdT}{T} = Mc \ln \frac{T_e}{T_1} \tag{3.222}$$

În mod analog pentru cantitatea de apă aflată la temperatura T_2 se consideră un proces reversibil de încălzire la temperatura T_e

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{T_e} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_2}^{T_e} \frac{McdT}{T} = Mc \ln \frac{T_e}{T_2} \tag{3.223}$$

Din 3.222 şi 3.223 rezultă:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = Mc \left(\ln \frac{T_e}{T_1} + \ln \frac{T_e}{T_1} \right)$$

şi considerând 3.221 se obţine:

$$\Delta S = Mc \ln \frac{T_e^2}{T_1 T_2} = Mc \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} > 0 \tag{3.224}$$

PROBLEMA 3.35 Să se arate că în cazul unei substanţe a cărei ecuaţie termică de stare are forma $p = p\,(V, T)$, este adevărată relaţia

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \tag{3.225}$$

SOLUŢIE

În cazul unui proces reversibil:

$$dS = \frac{dU + pdV}{T} \tag{3.226}$$

Dacă $U = U(T, V)$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT \tag{3.227}$$

relaţia 3.226 devine:

$$dS = \left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \frac{p}{T}\right] dV + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT \tag{3.228}$$

Cum entropia poate fi considerată ca funcţie de V şi T şi cum dS este o diferenţială totală exactă

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$$

se obţine:

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \frac{p}{T}\right]_V = \frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V\right]_T$$

de unde rezultă:

$$-\frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T+\frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial T\partial V}-\frac{p}{T^2}+\frac{1}{T}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V=\frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial V\partial T} \tag{3.229}$$

U fiind şi ea o diferenţială totală exactă

$$\frac{\partial^2 U}{\partial T\partial V}=\frac{\partial^2 U}{\partial V\partial T}$$

şi din 3.229 rezultă relaţia cerută:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V-p$$

PROBLEMA 3.36 Să se arate că energia internă a unei substanţe pentru care ecuaţia de stare are forma $p=Tf(V)$ este independentă de volum.

SOLUŢIE

În problema precedentă s-a dedus că:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V-p \tag{3.230}$$

Cum:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V=f\left(V\right) \tag{3.231}$$

atunci:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=0$$

adică energia internă nu depinde de volum.

PROBLEMA 3.37 Să se demonstreze pentru un fluid relaţia:

$$C_p - C_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = TV\frac{\alpha^2}{K_T} \tag{3.232}$$

unde α este coeficientul de dilatare izobar iar K_T este coeficientul de compresibilitate izoterm.

SOLUŢIE

Se ţine cont de relaţia lui Robert - Mayer

$$C_p - C_V = \left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{3.233}$$

şi de relaţia

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \tag{3.234}$$

Se obţine:

$$C_p - C_v = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{3.235}$$

dar:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = -\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T} \tag{3.236}$$

Atunci 3.235 devine:

$$C_p - C_V = -T\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p^2}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T} \tag{3.237}$$

Cum:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \alpha V$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -K_T V$$

se obţine:

$$C_p - C_V = TV\frac{\alpha^2}{K_T}$$

PROBLEMA 3.38 Să se determine energia internă a unui gaz pentru care ecuaţia termică de stare este

$$p = \frac{u}{3} \tag{3.238}$$

unde u este energia unităţii de volum care depinde doar de temperatură.

SOLUŢIE

Pentru un gaz care ocupă volumul V la temperatura T energia internă este:

$$U = Vu(T) \tag{3.239}$$

Cum:

$$p = \frac{u\,(T)}{3} \tag{3.240}$$

folosind relaţia:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \tag{3.241}$$

densitatea de energie internă devine:

$$u\,(T) = \frac{1}{3}T\frac{du\,(T)}{dT} - \frac{u\,(T)}{3} \tag{3.242}$$

De aici rezultă:

$$\frac{du(T)}{u(T)} = \frac{4dT}{T} \tag{3.243}$$

Integrând se obţine:

$$\ln u(T) = 4 \ln T + \text{const}$$

$$u(T) = \text{const} T^4$$

PROBLEMA 3.39 Utilizând relaţia lui Stefan-Boltzmann care pentru sistemul radiaţie termică leagă densitatea de energie de temperatură $u = \sigma T^4$ (σ este o constantă) precum şi relaţia ce leagă densitatea de energie de presiune $p = u/3$, să se determine entropia şi ecuaţia transformării adiabatice pentru acest sistem.

SOLUŢIE

Energia internă a unui volum V ocupat de radiaţia termică este:

$$U = Vu$$

de unde:

$$dU = udV + Vdu \tag{3.244}$$

Atunci diferenţiala entropiei

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU + pdV}{T}$$

devine ţinând cont de relaţia 3.244

$$dS = \frac{udV + Vdu + pdV}{T} \tag{3.245}$$

Cum expresia densităţi de energie este:

$$u = \sigma T^4 \qquad \text{iar presiunea este} \qquad p = \frac{u}{4} = \frac{\sigma T^4}{4}$$

relaţia 3.245 devine:

$$dS = 4\sigma VT^2 dT + \frac{4}{3}\sigma T^3 dV \tag{3.246}$$

Prin integrare se obţine:

$$S = \frac{4}{3}T^3 V \tag{3.247}$$

Ecuaţia adiabatei se obţine punând $S = \text{const}$.

$$T^3 V = \text{const}$$

PROBLEMA 3.40 Să se determine expresia entropiei unui gaz ideal alcătuit din ν kmoli, cunoscându-se C_V – căldura molară la volum constant şi C_p – căldura molară la presiune constantă.

SOLUŢIE

Utilizăm ecuaţia fundamentală pentru procese reversibile:

$$TdS = dU + pdV \tag{3.248}$$

în care

$$dU = \nu C_V dT$$

iar

$$p = \frac{\nu RT}{V}$$

Atunci:

$$dS = \nu C_V \frac{dT}{T} + \nu R \frac{dV}{V} \tag{3.249}$$

Integrând rezultă:

$$S(T, V) = \nu C_V \ln T + \nu R \ln V + \text{const} \tag{3.250}$$

Pentru a obţine expresia entropiei în funcţie de parametri p şi T se înlocuieşte în relaţia 3.250 volumul obţinut din ecuaţia termică de stare:

$$V = \frac{\nu RT}{p} \tag{3.251}$$

Rezultă:

$$S(T,p) = \nu C_V \ln T + \nu R \ln\left(\frac{\nu RT}{p}\right) + \text{const}$$

$$S(T,p) = \nu C_p \ln T - \nu R \ln p + \text{const} \tag{3.252}$$

Pentru a obţine expresia entropiei în coordonate p şi V se înlocuieşte temperatura T din ecuaţia de stare:

$$T = \frac{pV}{\nu R}$$

în ecuaţia 3.250. Se obţine:

$$S(p,V) = \nu C_V \ln\left(\frac{pV}{\nu R}\right) + \nu R \ln V + \text{const}$$

$$S(p,V) = \nu C_V \ln p + \nu C_p \ln V + \text{const}$$

PROBLEMA 3.41 Fie un gaz real care satisface ecuaţia de stare Van-der -Waals:

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT \tag{3.253}$$

Considerând constantă căldura molară la volum constant C_V să se stabilească:

a) expresia energiei interne

b) expresia entropiei

c) ecuaţia transformării adiabatice.

SOLUŢIE

a) Se consideră energia funcţie de volum şi temperatură:

$$U = U(V, T)$$

Atunci:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT \tag{3.254}$$

În această relaţie:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \nu C_V \tag{3.255}$$

unde C_V este căldura molară la volum constant. În plus

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \tag{3.256}$$

Din ecuaţia de stare a gazului real rezultă:

$$p = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{\nu^2 a}{V^2} \tag{3.257}$$

Atunci:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{\nu R}{V - \nu b} \tag{3.258}$$

Ţinând cont de relaţiile 3.257 şi 3.258 relaţia 3.256 devine:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{\nu^2 a}{V^2} \tag{3.259}$$

Considerând 3.255 şi 3.259 relaţia 3.254 devine:

$$dU = \nu C_V dT + \nu^2 a\frac{dV}{V^2} \tag{3.260}$$

Prin integrare se obţine:

$$U = \nu C_V T - \frac{\nu^2 a}{V} + \text{const} \tag{3.261}$$

Se observă că în cazul gazului real în afara termenului $\nu C_V T$ în expresia energiei interne intră şi termenul $-\nu^2 a/V$ care exprimă contribuţia energiilor potenţiale de interacţie dintre moleculele gazului.

b) Din relaţia fundamentală pentru procesele reversibile rezultă:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU + pdV}{T} \tag{3.262}$$

Considerând relaţiile 3.257 şi 3.260, relaţia 3.262 devine:

$$dS = \frac{\nu C_V dT}{T} + \frac{\nu R dV}{V - \nu b} \tag{3.263}$$

Se integrează această relaţie şi se obţine:

$$S = \nu C_V \ln T + \nu R \ln (V - \nu b) + S_0 \tag{3.264}$$

c) În cazul unui proces adiabatic $S = \text{const}$. Din relaţia 3.264 se obţine ecuaţia procesului adiabatic.

$$T^{\frac{C_V}{R}} (V - \nu b) = \text{const}$$

PROBLEMA 3.42 Să se demonstreze relaţiile lui Maxwell în cazul unor procese reversibile pentru un fluid oarecare caracterizat de parametri p, V, T.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V \tag{3.265}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p \tag{3.266}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \tag{3.267}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{3.268}$$

SOLUŢIE

Demostraţiile se fac pornind de la faptul că U , F , G , H sunt funcţii de stare. Atunci dU , dF , dG , dH sunt diferenţiale totale exacte. Aceasta implică faptul că dacă forma diferenţială

$$dF = Xdx + Ydy$$

este o diferenţială exactă este valabilă relaţia:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

a)

$$dU = TdS - pdV$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V \tag{3.269}$$

b)

$$H = U + pV$$

$$dH = dU + Vdp + pdV = TdS - pdV + Vdp + pdV = TdS + Vdp$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p \tag{3.270}$$

c)

$$F = U - TS$$

$$dF = dU - SdT - TdS = TdS - pdV - SdT - TdS = -pdV - SdT$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \tag{3.271}$$

d)

$$G = U - TS - pV$$

$$dG = -SdT + Vdp$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{3.272}$$

PROBLEMA 3.43 Să se determine variaţia mărimilor T , V , U şi H în cazul unei comprimări adiabatice.

SOLUŢIE

Variabilele independente pe care le considerăm în acest caz sunt S şi p . Acesta înseamnă că $T = T(S, p)$ şi atunci:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p dS + \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S dp$$

Dar cum $dS = 0$ pentru o transformare adiabatică, pentru variaţia temperaturii se obţine:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S dp$$

Conform relaţiei 3.270:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p$$

astfel că relaţia de mai sus devine:

$$dT = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p dp = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p dp \tag{3.273}$$

Ţinând cont de expresia coeficientului de dilatare izobar:

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

rezultă:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \alpha V \tag{3.274}$$

Din:

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$$

rezultă:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p = \frac{T}{C_p} \tag{3.275}$$

Ţinând cont de relaţiile 3.274 şi 3.275, relaţia 3.273 devine:

$$dT = \frac{V\alpha T}{C_p}dp \tag{3.276}$$

Din expresia coeficientului de compresie adiabatic:

$$K_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S$$

rezultă:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = -K_S V$$

şi variaţia volumului este:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S dp = -K_S V dp \tag{3.277}$$

Variaţia energiei interne se scrie:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_S dp = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S dp \tag{3.278}$$

Din relaţia:

$$dU = TdS - pdV$$

rezultă:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -p$$

În plus:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = -K_S V$$

Astfel relaţia 3.278 devine:

$$dU = pVK_S dp \tag{3.279}$$

Variaţia entalpiei este:

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S dp \tag{3.280}$$

Cum:

$$dH = TdS + Vdp$$

atunci:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S = V$$

Astfel relaţia 3.280 devine:

$$dH = Vdp$$

PROBLEMA 3.44 Să se determine variaţia entropiei S, volumului V, energiei interne U, şi a entalpiei H în cazul unei comprimări izoterme.

SOLUŢIE

Variabilele independente sunt T şi p. În cazul unui proces izoterm variaţia entropiei este:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp \tag{3.281}$$

Dar conform relaţiei 3.270:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -V\alpha$$

Atunci relaţia 3.281 devine:

$$dS = -V\alpha dp \tag{3.282}$$

Variaţia volumului este:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp = -VK_T dp \tag{3.283}$$

Pentru a exprima variaţia energiei interne se consideră $S = S(T,p)$ şi $V = V(T,p)$.

Atunci:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT \tag{3.284}$$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT \tag{3.285}$$

Cum

$$dU = TdS - pdV \tag{3.286}$$

dacă se consideră relaţiile 3.284 şi 3.285 relaţia 3.286 devine:

$$dU = T\left[\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT\right] - p\left[\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT\right]$$

$$dU = \left[T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T - p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\right] dp + \left[T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p - p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right] dT \tag{3.287}$$

Atunci:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T - p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \tag{3.288}$$

Cum:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\alpha V \tag{3.289}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -VK_T \tag{3.290}$$

relaţia 3.288 devine:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T = -\alpha VT + pVK_T \tag{3.291}$$

Astfel într-un proces izoterm:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T dp = V\left(-\alpha T + pK_T\right) dp \tag{3.292}$$

Variaţia entalpiei este:

$$dH = TdS + Vdp$$

iar cu ajutorul relaţiei 3.284 se obţine:

$$dH = T\left[\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT\right] + Vdp$$

$$dH = \left[T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T + V\right] dp + T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT$$

Deoarece H este o diferenţială totală exactă, folosind relaţia 3.289 se obţine:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T + V = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V = -TV\alpha + V$$

Astfel într-un proces izoterm:

$$dH = V\left(1 - T\alpha\right) dp$$

PROBLEMA 3.45 Să se determine variaţia energiei interne U, entropiei S şi a temperaturii T în cazul dilatării izobare.

SOLUŢIE

În acest caz variabilele independente sunt presiunea şi volumul. Cum $S(p,V)$ se obţine:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_V dp + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p dV \tag{3.293}$$

Deoarece

$$dU = TdS - pdV \tag{3.294}$$

considerând relaţia 3.293 se obţine:

$$dU = T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_V dp + \left[T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p - p\right] dV \tag{3.295}$$

Cum presiunea este constantă:

$$dU = \left[T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p - p\right] dV \tag{3.296}$$

şi

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = \frac{C_p}{T}\frac{1}{\alpha V} \tag{3.297}$$

iar

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$$

Atunci relaţia 3.296 devine:

$$dU = \left(\frac{C_p}{TV\alpha} - p\right) dV \tag{3.298}$$

Variaţia entropiei

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p dV$$

se poate pune sub forma:

$$dS = \frac{C_p}{TV\alpha}dV$$

dacă se consideră relaţia 3.297.

Variaţia temperaturii se poate exprima în funcţie de coeficientul de dilatare izobar:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV = \frac{1}{\alpha V}dV$$

PROBLEMA 3.46 Să se determine $\delta Q = TdS$ în funcţie de variabilele (p,V), (p,T), (V,T) considerând cunoscuţi coeficienţii calorici şi termici ai sistemului.

SOLUŢIE

a) În variabilele V , T diferenţiala entropiei este:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT \tag{3.299}$$

Utilizăm relaţia 3.271:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = -\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T} = \frac{\alpha}{K_T} \tag{3.300}$$

unde s-a ţinut cont de definiţiile lui α şi K_T.

În plus:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{C_V}{T} \tag{3.301}$$

Relaţia este justificată deoarece:

$$C_V = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$$

Atunci 3.299 devine:

$$dS = \frac{C_V}{T}dT + \frac{\alpha}{K_T}dV \tag{3.302}$$

şi

$$\delta Q = C_V dT + \frac{T\alpha}{K_T}dV$$

b) În coordonate p şi T diferenţiala entropiei este:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT \tag{3.303}$$

Se utilizează relaţia 3.272 şi se obţine:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\alpha V \tag{3.304}$$

precum şi relaţia

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{C_p}{T} \tag{3.305}$$

demonstrată in problema precedentă

Atunci 3.303 devine:

$$dS = \frac{C_p}{T}dT - \alpha V T dp \tag{3.306}$$

şi:

$$\delta Q = C_p dT - \alpha V dp \tag{3.307}$$

c) În coordonate V , p diferenţiala entropiei este:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_V dp + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p dV \tag{3.308}$$

Se utilizează relaţia 3.272 şi se obţine:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_V = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S = \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V}{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T} \tag{3.309}$$

unde:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{C_V}{T} \tag{3.310}$$

iar:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = -\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T} = \frac{\alpha}{K_T} \tag{3.311}$$

În 3.311 s-a ţinut cont de definiţiile lui α şi K_T (date în problema 3.6).

Atunci 3.309 devine:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_V = \frac{C_V}{T}\frac{K_T}{\alpha} \tag{3.312}$$

Deoarece:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_S = -\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T} \tag{3.313}$$

şi:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{C_p}{T}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -V\alpha \tag{3.314}$$

atunci relaţia 3.313 devine:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p = \frac{C_p}{\alpha T V} \tag{3.315}$$

Considerând relaţiile 3.312 şi 3.313 expresia 3.308 devine:

$$dS = \frac{C_V K_T}{T\alpha} dp + \frac{C_p}{VT\alpha} dV \tag{3.316}$$

de unde rezultă:

$$\delta Q = TdS = \frac{C_V K_T}{\alpha} dp + \frac{C_p}{V\alpha} dV \tag{3.317}$$

PROBLEMA 3.47 Să se arate că ciclul Carnot ireversibil are randamentul cel mai mare în comparaţie cu orice alt ciclu ce funcţionează între două temperaturi extreme date.

SOLUŢIE

Din inegalitatea pentru procese ireversibile:

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} \tag{3.318}$$

se obţine pentru un ciclu:

$$\oint dS > \oint \frac{\delta Q}{T} \tag{3.319}$$

Cum entropia este o funcţie de stare

$$\oint dS = 0 \tag{3.320}$$

atunci din 3.319 se obţine:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \tag{3.321}$$

Se notează cu:

$$Q_1 = \int_p \delta Q > 0 \tag{3.322}$$

căldura primită în cursul ciclului.

Se notează cu:

$$|Q_2| = -\int_C \delta Q > 0 \tag{3.323}$$

căldura cedată în cursul ciclului.

Atunci dacă se ţine cont de relaţiile 3.322 şi 3.323, relaţia 3.321 se poate scrie:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_p \frac{\delta Q}{T} + \int_C \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \tag{3.324}$$

sau:

$$\int_p \frac{\delta Q}{T} \leq -\int_C \frac{\delta Q}{T} \tag{3.325}$$

Se notează cu T_M temperatura maximă atinsă în cursul ciclului. Atunci

$$\int_p \frac{\delta Q}{T} \geq \frac{\int_p \delta Q}{T_M} = \frac{Q_1}{T_M} \tag{3.326}$$

sau:

$$\frac{Q_1}{T_M} \leq \int_p \frac{\delta Q}{T} \tag{3.327}$$

Se notează cu T_m temperatura minimă atinsă în cursul ciclului. Atunci:

$$-\int_c \frac{\delta Q}{T} \leq \frac{-\int_c \delta Q}{T_m} = \frac{|Q_2|}{T_m} \tag{3.328}$$

Din relaţiile 3.325 , 3.327 , 3.328 obţinem:

$$\frac{Q_1}{T_M} \leq \frac{|Q_2|}{T_m} \tag{3.329}$$

$$\frac{T_m}{T_M} \leq \frac{|Q_2|}{Q_1}$$

$$1 - \frac{T_m}{T_M} \geq 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$$

adică randamentul ciclului Carnot este randamentul cel mai mare pentru ciclurile care se desfăşoară între două temperaturi date.

PROBLEMA 3.48 În cazul unei maşini termice ce lucrează după un ciclu Carnot există posibilitatea ca diferenţa $T_1 - T_2$ dintre temperaturile sursei calde şi reci să fie mărită cu ΔT prin încălzirea sursei calde şi prin răcirea sursei reci. Cum trebuie distribuită variaţia ΔT pe cele două surse pentru ca randamentul să fie maxim?

SOLUŢIE

Se consideră:

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 \tag{3.330}$$

unde ΔT_1 reprezintă creşterea de temperatură a sursei calde iar ΔT_2 reprezintă scăderea în temperatură a sursei reci.

În aceste condiţii randamentul devine:

$$\eta = 1 - \frac{T_2 - \Delta T_2}{T_1 + \Delta T_1} \tag{3.331}$$

Din relaţia 3.330 se obţine:

$$\Delta T_2 = \Delta T - \Delta T_1$$

astfel că relaţia 3.331 devine:

$$\eta = 1 - \frac{T_2 - \Delta T + \Delta T_1}{T_1 + \Delta T_1} = \frac{T_1 + \Delta T - T_2}{T_1 + \Delta T_1} \tag{3.332}$$

Randamentul este maxim când numitorul este minim, adică $\Delta T_1 = 0$.

Aceasta înseamnă că este mai eficient să se scadă temperatura sursei reci pentru a mări randamentul maşinii termice.

PROBLEMA 3.49 Să se determine randamentul ciclului Otto format din două adiabate şi două izocore (Fig. 3.9) având ca substanţă de lucru un gaz ideal. Se cunosc $V_1/V_2 = \varepsilon$ şi $\gamma = C_p/C_V$.

SOLUŢIE

Căldurile schimbate de sistem pentru fiecare transformare în parte sunt:

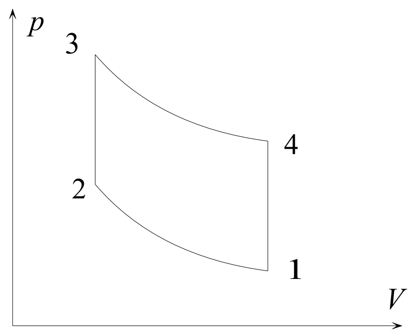

Figura 3.9: Ciclul Otto

$$Q_{12} = 0$$
$$Q_{23} = \nu C_p \left(T_3 - T_2\right)$$
$$Q_{34} = 0$$
$$Q_{41} = \nu C_p \left(T_1 - T_4\right)$$

Atunci:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{41}|}{Q_{12}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \frac{\left(\frac{T_4}{T_1} - 1\right)}{\left(\frac{T_3}{T_1} - 1\right)} \tag{3.333}$$

Din transformarea 1-2 se obţine:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}} \tag{3.334}$$

Se scriu transformările 1-2 , 3-4 în coordonate $p,\ T$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \tag{3.335}$$

$$T_4 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_2^{\gamma-1} \tag{3.336}$$

Din aceste ultime două relaţii prin împărţire se obţine:

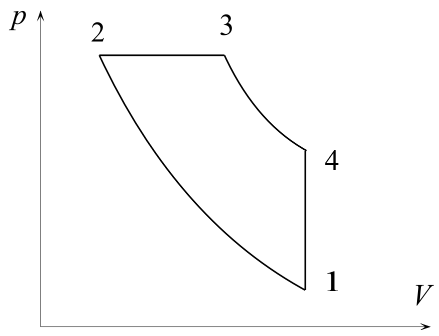

Figura 3.10: Ciclul Diesel

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} \tag{3.337}$$

Ţinând cont de relaţiile 3.334 şi 3.57 relaţia 3.333 devine:

$$\eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma}}$$

PROBLEMA 3.50 Să se determine randamentul ciclului Diesel format din două adiabate, o izobară şi o izocoră (Fig.3.10) având ca substanţă de lucru un gaz ideal. Se cunosc $\gamma = C_p/C_V$, $V_1/V_2 = \varepsilon$ şi $V_3/V_2 = \rho$.

SOLUŢIE

Se calculează căldurile schimbate de sistem pentru fiecare transformare în parte corespunzătoare ciclului reprezentat în Fig. 3.10.

Rezultă:

$$Q_{12} = 0$$

$$Q_{23} = \nu C_p \left(T_3 - T_2\right) > 0$$

$$Q_{34} = 0$$

$$Q_{41} = \nu C_V \left(T_1 - T_4\right) < 0$$

Randamentul este:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{41}|}{Q_{23}} = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{T_1}{T_2}\left(\frac{\dfrac{T_4}{T_1} - 1}{\dfrac{T_3}{T_2} - 1}\right) \tag{3.338}$$

Din transformarea 1-2 rezultă:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}} \tag{3.339}$$

iar din transformarea 2 - 3:

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_2} = \rho \tag{3.340}$$

Pentru a calcula raportul T_4/T_1 acesta va fi exprimat sub forma:

$$\frac{T_4}{T_1} = \left(\frac{T_4}{T_3}\right)\left(\frac{T_3}{T_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \tag{3.341}$$

Din transformarea adiabatică 3 - 4 rezultă:

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_2}\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)^{\gamma-1} \tag{3.342}$$

Ţinând cont de relaţiile 3.339 şi 3.340 relaţia 3.341 devine:

$$\frac{T_4}{T_1} = \rho^{\gamma} \tag{3.343}$$

Atunci randamentul este:

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{(\rho^{\gamma} - 1)}{\varepsilon^{\gamma-1}(\rho - 1)}$$

PROBLEMA 3.51 Să se calculeze randamentul unei maşini termice ce lucrează după un ciclul Joule care este compus din două adiabate şi din două izobare (p_1, p_2), substanţa de lucru fiind un gaz ideal cu exponentul adiabatic γ. Se cunoaşte raportul $\varepsilon = p_2/p_1$, $(p_2 > p_1)$.

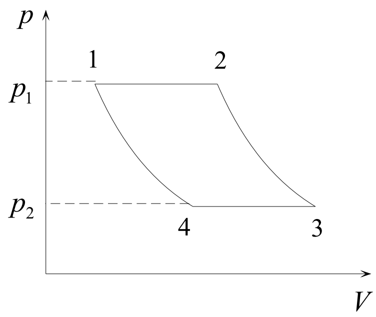

Figura 3.11: Ciclul Joule

SOLUŢIE

Reprezentarea ciclului în coordonate (p, V) este dată în Fig. 3.11
Căldurile schimbate de sistem cu mediul extern sunt:

$$Q_{12} = \nu C_p (T_2 - T_1) > 0$$
$$Q_{23} = 0$$
$$Q_{34} = \nu C_V (T_4 - T_3) < 0$$
$$Q_{41} = 0$$

Atunci randamentul este:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{34}|}{Q_{12}} = 1 - \frac{T_3 - T_4}{T_2 - T_1} = 1 - \frac{T_3}{T_2}\frac{\left(1 - \frac{T_4}{T_3}\right)}{\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)} \tag{3.344}$$

Din transformările 1 - 4 , 2 -3 se obţine:

$$T_2 p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_3 p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \tag{3.345}$$

$$T_1 p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_4 p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \tag{3.346}$$

de unde prin împărţire rezultă:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} \tag{3.347}$$

Ţinând cont de relaţiile 3.345, 3.346 şi 3.347, relaţia 3.341 devine:

$$\eta = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 1 - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

PROBLEMA 3.52 Să se demonstreze relaţia:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V \tag{3.348}$$

SOLUŢIE

Se porneşte de la expresia entalpiei:

$$H = U + pV \tag{3.349}$$

Prin diferenţiere obţinem:

$$dH = TdS + Vdp \tag{3.350}$$

$$dS = \frac{dH - Vdp}{T} \tag{3.351}$$

dar:

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp \tag{3.352}$$

astfel încât:

$$dS = \left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - \frac{V}{T}\right] dp + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT \tag{3.353}$$

Cum dS este o diferenţială totală exactă:

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - \frac{V}{T}\right]_p = \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p\right]_T \tag{3.354}$$

de unde rezultă:

$$\frac{1}{T}\frac{\partial^2 H}{\partial T \partial p} - \frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T + \frac{V}{T^2} - \frac{1}{T}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{T}\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial T}$$

Atunci:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V$$

PROBLEMA 3.53 Să se găsească expresia diferenţială pentru entropia unui gaz pentru care:

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \text{const} \tag{3.355}$$

$$C_p = \text{const} \tag{3.356}$$

SOLUŢIE

Cum:

$$H = U + pV \tag{3.357}$$

$$dH = TdS + Vdp \tag{3.358}$$

Atunci:

$$dS = \frac{dH}{T} - \frac{V}{T}dp \tag{3.359}$$

Considerând $H = H(T\ ,p)$:

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp = C_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp \tag{3.360}$$

Aşa cum s-a demonstrat în problema 3.52:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V \tag{3.361}$$

Atunci relaţia 3.360 devine:

$$dH = C_p dT + \left[-T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V\right] dp \tag{3.362}$$

Ţinând cont de 3.362, 3.359 devine:

$$dS = \frac{C_p}{T} dT - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp \tag{3.363}$$

Utilizând expresia coeficientului de dilatare izoterm

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{3.364}$$

relaţia 3.363 devine:

$$dS = \frac{C_p}{T} dT - V\alpha dp \tag{3.365}$$

PROBLEMA 3.54 Să se demonstreze că

$$\alpha_S = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S \tag{3.366}$$

coeficientul de dilatare adiabatic poate fi exprimat şi sub forma:

$$\alpha_S = -\frac{C_V}{VT}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \tag{3.367}$$

SOLUŢIE

Se consideră $S = S(\ T\ ,\ V\ )$:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV \tag{3.368}$$

Rezultă:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S = -\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V}{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T} \tag{3.369}$$

Dar:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{C_V}{T} \tag{3.370}$$

şi cum:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \tag{3.371}$$

relaţia 3.368 devine:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S = -\frac{C_V}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \tag{3.372}$$

Atunci:

$$\alpha_S = -\frac{C_V}{VT}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V$$

PROBLEMA 3.55 Să se demonstreze relaţiile:

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V \tag{3.373}$$

$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_p \tag{3.374}$$

SOLUŢIE

Cum:

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \tag{3.375}$$

se obţine:

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = \frac{\partial}{\partial V}\left[T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V\right]_T = T\frac{\partial}{\partial T}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T\right]_V \tag{3.376}$$

Cum:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \tag{3.377}$$

din relaţia 3.376 se obţine:

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V \tag{3.378}$$

Deoarece:

$$C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \tag{3.379}$$

se obţine:

$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T = \frac{\partial}{\partial p}\left[T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p\right]_T = T\frac{\partial}{\partial T}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T\right]_p \tag{3.380}$$

Cum:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{3.381}$$

se obţine:

$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_V$$

PROBLEMA 3.56 La o substanţă paramagnetică susceptibilitatea variază cu temperatura după o lege de forma $\chi = C/T$ unde C este o constantă pozitivă. Să se determine căldura schimbată de unitatea de volum a substanţei cu mediul extern când temperatura este menţinută la valoarea T_1 iar intensitatea câmpului magnetic creşte de la 0 la H_1. Variaţia volumului se va considera neglijabilă.

SOLUŢIE

Se utilizează forma primului principiu al termodinamicii pentru substanţe magnetice (mărimile se consideră raportate la unitatea de volum)

$$du = \delta q - pdv + \mu_0 H dM \tag{3.382}$$

Lucrul mecanic la magnetizare a fost calculat în problema 3.4 .

Cum $T = \text{const}$, $v = \text{const}$ rezultă $du = 0$ astfel că din relaţia 3.382 rezultă:

$$\delta q = -\mu_0 H dM \tag{3.383}$$

Dar:

$$M = \chi H = \frac{CH}{T} \tag{3.384}$$

Atunci:

$$dM = \frac{CdH}{T} \tag{3.385}$$

Cum $T = T_1$ din relaţiile 3.383 şi 3.385 rezultă:

$$\delta q = -\mu_0 \frac{CH}{T_1} dH \tag{3.386}$$

Se integrează şi se obţine:

$$q = -\int_0^{H_1} \mu_0 \frac{CH}{T_1} dH = -\frac{\mu_0 C}{2T_1} H_1^2$$

PROBLEMA 3.57 Pentru o substanţă s-a găsit că densitatea de magnetizare este funcţie de raportul H/T. Să se arate că energia internă a unităţii de volum este independentă de M şi să se determine expresia entropiei (se va neglija variaţia volumului).

SOLUŢIE

Aplicând primul principiu al termodinamicii pentru substanţe magnetice:

$$du = Tds - \mu_0 H dM$$

rezultă:

$$ds = \frac{du + \mu_0 H dM}{T} \tag{3.387}$$

unde s, u se referă la entropia şi energia unităţii de volum.

Se consideră $u = u(T, M)$ şi se arată că

$$\left(\frac{\partial u}{\partial M}\right)_T = 0$$

Într-adevăr:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_M dT + \left(\frac{\partial u}{\partial M}\right)_T dM \tag{3.388}$$

şi relaţia 3.387 devine:

$$ds = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_M dT + \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial M}\right)_T - \mu_0 H\right] dM \tag{3.389}$$

Deoarece ds este o diferenţială totală exactă, din relaţia 3.390 rezultă:

$$\frac{\partial}{\partial M}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_M\right]_T = \frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial M}\right)_T - \mu_0 H\right]\right\}_M$$

sau:

$$\frac{1}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial M \partial T} = -\frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial u}{\partial M}\right)_T + \frac{1}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial T \partial M} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{H}{T}\right)_M$$

de unde:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial M}\right)_T = -\mu_0 T^2 \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{H}{T}\right)_M \tag{3.390}$$

Cum $M = f\left(H/T\right)$ şi $M = \text{const}$ rezultă că $H/T = \text{const}$ şi:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial M}\right)_T = 0 \tag{3.391}$$

Aceasta relaţie arată că energia internă a unităţii de volum este independentă de magnetizare.

Deoarece:

$$dM = f'\left(\frac{H}{T}\right) d\left(\frac{H}{T}\right) \tag{3.392}$$

relaţia 3.387 devine:

$$ds = \frac{du\,(T)}{T} - \mu_0 \frac{H}{T} f'\left(\frac{H}{T}\right) d\left(\frac{H}{T}\right) \tag{3.393}$$

Pentru $x = H/T$ se obţine:

$$s = \int \frac{du\,(T)}{T} - \mu_0 \int_0^{H/T} x f'(x)\, dx$$

Integrând prin părţi cel de-al doilea termen obţinem:

$$s = \int \frac{du\,(T)}{T} - \mu_0 \frac{H}{T} f\left(\frac{H}{T}\right) + \mu_0 \int_0^{H/T} f(x)\, dx$$

PROBLEMA 3.58 În cazul unei substanţe paramagnetice ideale densitatea de magnetizare variază cu temperatură după legea Curie:

$$M = \frac{CH}{T} \tag{3.394}$$

unde C este o constantă.

Să se arate că în condiţiile în care câmpul magnetic variază iar sistemul este izolat adiabatic:

$$dT = \mu_0 \left(\frac{CH}{c_H T}\right) dH \tag{3.395}$$

unde c_H este capacitatea calorică a unităţii de volum.

SOLUŢIE

Se consideră u , s energia internă şi entropia unităţii de volum dependente doar de T şi H (deoarece variaţia de volum poate fi considerată neglijabilă)

$$\delta q = Tds = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_H dT + T\left(\frac{\partial s}{\partial H}\right)_T dH \tag{3.396}$$

rezultă:

$$c_H = \left(\frac{\delta q}{dT}\right)_H = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_H \tag{3.397}$$

Se exprimă diferenţiala entropiei:

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_H dT + \left(\frac{\partial s}{\partial H}\right)_T dH \tag{3.398}$$

Se ţine cont de relaţia 3.397 şi se obţine:

$$ds = \frac{c_H}{T}dT + \left(\frac{\partial s}{\partial H}\right)_T dH \tag{3.399}$$

Cum într-o transformare adiabatică $ds = 0$ din relaţia 3.399 rezultă:

$$dT = -\frac{T}{c_H}\left(\frac{\partial s}{\partial H}\right)_T dH \tag{3.400}$$

Pentru a exprima ultima derivată parţială se consideră diferenţiala densităţii de magnetizare.

$$dM = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H dT + \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T dH \tag{3.401}$$

Ţinând cont de relaţiile 3.398 şi 3.401, diferenţiala energiei interne

$$du = Tds + \mu_0 H dM \tag{3.402}$$

se poate exprima astfel:

$$\begin{aligned} du &= \left[T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_H + \mu_o H\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H\right]dT + \\ &+ \left[T\left(\frac{\partial s}{\partial H}\right)_T + \mu_0 H\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T\right]dH \end{aligned} \tag{3.403}$$

Cum du este o diferenţială totală exactă rezultă că:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial H}\left[T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_H + \mu_0 H\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H\right]_T = \\ \frac{\partial}{\partial T}\left[T\left(\frac{\partial s}{\partial H}\right)_T + \mu_0 H\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T\right]_H \end{gathered} \tag{3.404}$$

Se obţine:

$$\mu_0\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H = \left(\frac{\partial s}{\partial H}\right)_T \tag{3.405}$$

Atunci relaţia 3.400 devine:

$$dT = -\frac{\mu_0 T}{c_H}\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H dH \tag{3.406}$$

Deoarece $M = CH/T$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H = -\frac{CH}{T^2} \tag{3.407}$$

astfel 3.406 devine:

$$dT = \mu_0 \frac{CH}{c_H T} dH \tag{3.408}$$

PROBLEMA 3.59 Să se demonstreze relaţia

$$\left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)_{T,p} = -\mu_0\left(\frac{\partial M}{\partial p}\right)_{T,H} \tag{3.409}$$

unde

$$\left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)_{T,p} \tag{3.410}$$

se numeşte coeficient de magnetizare iar

$$\mu_0\left(\frac{\partial M}{\partial p}\right)_{T,H} \tag{3.411}$$

se numeşte coeficient paramagnetic (M este magnetizarea totală).

SOLUŢIE

Forma diferenţială a primului principiu al termodinamicii în acest caz este:

$$dU = TdS - pdV + \mu_0 HdM \tag{3.412}$$

La temperatură constantă:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_H dp + \left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_p dH \tag{3.413}$$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H dp + \left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)_p dH \tag{3.414}$$

$$dM = \left(\frac{\partial M}{\partial p}\right)_H dp + \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_p dH \tag{3.415}$$

Atunci relaţia 3.412 devine:

$$dU = T\left[\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_H dp + \left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_p dH\right] - p\left[\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H dp + \left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)_p dH\right] +$$

$$+\mu_0 H\left[\left(\frac{\partial M}{\partial p}\right)_H dp + \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_p dH\right]$$

sau

$$dU = \left[T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_H - p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H + \mu_0 H\left(\frac{\partial M}{\partial p}\right)_H\right] dp$$

$$\left[T\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_p - p\left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)_p + \mu_0 H\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_p\right] dH$$

Cum dU este o diferenţială totală exactă:

$$\frac{\partial}{\partial H}\left[T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_H - p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H + \mu_0 H\left(\frac{\partial M}{\partial p}\right)_H\right] =$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[T\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_p - p\left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)_p + \mu_0 H\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_p\right]$$

Rezultă:

$$\mu_0\left(\frac{\partial M}{\partial p}\right)_{T,H} = -\left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)_{T,p}$$

PROBLEMA 3.60 Să se arate că atunci când câmpul magnetic este variat izoterm de la valoarea 0 la H, variaţia volumului ($\Delta V \ll V_0$) este dată de relaţia:

$$\Delta V = \mu_0 V_0 \left(\frac{H^2}{2}\right)\left\{\beta\chi - \left(\frac{\partial \chi}{\partial p}\right)_T\right\} \tag{3.416}$$

unde

$$\beta = -\left(\frac{1}{V}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{H,T} \tag{3.417}$$

şi

$$\chi = \frac{M}{VH} \tag{3.418}$$

Se va presupune că în interiorul probei câmpul este uniform iar β şi χ nu depind de intensitatea câmpului magnetic (M - este magnetizarea totală, χ - susceptibilitatea, β- coeficientul de compresibilitate).

SOLUŢIE

Deoarece:

$$M = \chi V H \tag{3.419}$$

ţinând cont de rezultatul obţinut la problema precedentă:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)_{T,p} = -\mu_0 \left(\frac{\partial M}{\partial p}\right)_{T,H} = -\mu_0 H \left[\chi \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,H} + V \left(\frac{\partial \chi}{\partial p}\right)_{T,H}\right]$$

sau

$$\left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)_{T,p} = -\mu_0 H \left[-\chi V \beta + V \left(\frac{\partial \chi}{\partial p}\right)_{T}\right] = \mu_0 V H \left[\chi \beta - \left(\frac{\partial \chi}{\partial p}\right)_{T}\right] \tag{3.420}$$

Se notează pentru simplificare:

$$k = \chi \beta - \left(\frac{\partial \chi}{\partial p}\right)_{T}$$

şi 3.420 devine:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)_{T,p} = k \mu_0 H V \tag{3.421}$$

sau:

$$\frac{dV}{V} = k \mu_o H dH \tag{3.422}$$

Prin integrare se obţine:

$$\int_{V_0}^{V} \frac{dV}{V} = k \mu_o \int_{0}^{H} H dH$$

Rezultă:

$$\ln \frac{V}{V_0} = \mu_0 k \frac{H^2}{2} \tag{3.423}$$

Cum $V = V_0 + \Delta V$ şi $\Delta V \ll V_0$

$$\ln \frac{V}{V_0} = \ln \frac{(V_0 + \Delta V)}{V_0} = \ln \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right) \cong \frac{\Delta V}{V_0} \tag{3.424}$$

Deci:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \mu_0 \frac{H^2}{2} k = \mu_0 \frac{H^2}{2} \left[\chi\beta - \left(\frac{\partial \chi}{\partial p} \right)_T \right]$$

PROBLEMA 3.61 Să se arate că energia internă şi entropia pe unitatea de volum a unei substanţe feromagnetice, a cărei susceptibilitate în faza paramagnetică satisface legea Curie – Weiss:

$$\chi = \frac{C}{T - T_0} \tag{3.425}$$

unde C şi T_0 sunt constante, pot fi scrise astfel:

$$u = \int_0^T c_M dT - \frac{\mu_0 T_0 M^2}{2C} + \text{const} \tag{3.426}$$

$$s = \int_0^T c_M \frac{dT}{T} - \frac{\mu_0 M^2}{2} + \text{const} \tag{3.427}$$

unde c_M este căldura specifică a unităţii de volum la densitate de magnetizare constantă.

SOLUŢIE

Conform relaţiei 3.390:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial M} \right)_T = -\mu_0 T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{H}{T} \right)_M \tag{3.428}$$

Cum:

$$M = \chi H \qquad \text{şi} \qquad \chi = \frac{C}{T - T_0}$$

rezultă:

$$H = \frac{M\,(T - T_0)}{C} \tag{3.429}$$

Atunci:

$$\frac{H}{T} = \frac{M}{C}\frac{(T - T_0)}{T} \tag{3.430}$$

Se derivează relaţia 3.430 şi se obţine:

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{H}{T}\right) = \frac{M}{C}\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{T - T_0}{T}\right) = \frac{M}{C}\frac{T_0}{T^2}$$

Atunci relaţia 3.428 devine:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial M}\right)_T = -\mu_0 \frac{MT_0}{C} \tag{3.431}$$

Considerând $s = s (T , M)$

$$du = Tds + \mu_0 HdM = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_M dT + \left[T\left(\frac{\partial s}{\partial M}\right)_T + \mu_0 H\right] dM \tag{3.432}$$

Cum du este o diferenţială totală exactă:

$$\frac{\partial}{\partial M}\left[T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_M\right]_T = \frac{\partial}{\partial T}\left[T\left(\frac{\partial s}{\partial M}\right)_T + \mu_0 H\right]_M$$

sau

$$T\frac{\partial^2 s}{\partial M \partial T} = \left(\frac{\partial s}{\partial M}\right)_T + T\frac{\partial^2 s}{\partial T \partial M} + \mu_0\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M$$

rezultă:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial M}\right)_T = -\mu_0\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M \tag{3.433}$$

Cum:

$$c_M = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_M$$

atunci:

$$\left(\frac{\partial c_M}{\partial M}\right)_T = T\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_M = T\frac{\partial^2 s}{\partial M \partial T} = T\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial s}{\partial M}\right)_T$$

sau ţinând cont de 3.433:

$$\left(\frac{\partial c_M}{\partial M}\right)_T = -T\mu_0\frac{\partial^2 H}{\partial T^2}$$

Ţinând cont de relaţia 3.429 rezultă:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial T^2} = 0$$

şi

$$\left(\frac{\partial c_M}{\partial M}\right)_T = 0$$

adică c_M este independent de M . Atunci:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_M dT + \left(\frac{\partial u}{\partial M}\right)_T dM = c_M dT - \mu_0\frac{T_0 M}{C}dM$$

şi:

$$u = \int_0^T c_M dT - \mu_0\frac{T_0}{C}\int_0^M M dM + \text{const}$$

$$u = \int_0^T c_M dT - \mu_0\frac{T_0}{C}\frac{M^2}{2} + \text{const} \tag{3.434}$$

Pentru calculul entropiei se porneşte de la diferenţiala acesteia:

$$ds = \frac{du - \mu_0 H dM}{T} = c_M\frac{dT}{T} - \mu_0\frac{M dM}{C} \tag{3.435}$$

Prin integrare se obţine:

$$s = \int c_M\frac{dT}{T} - \frac{\mu_0 M^2}{2C} + \text{const}$$

PROBLEMA 3.62 Să se stabilească formula:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\left(\frac{E^2}{2}\right)\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_\varphi \tag{3.436}$$

care dă variaţia relativă a volumului unui corp dielectric supus acţiunii unui câmp electric (φ - este diferenţa de potenţial).

SOLUŢIE

Electrostricţiunea reprezintă fenomenul de deformare a unui dielectric sub acţiunea câmpului electric. Considerând un dielectric ce umple un condensator cu aria armăturilor S şi distanţa dintre armături d, lucrul mecanic furnizat sistemului pentru a varia volumul cu dV şi a modifica sarcina cu dq este:

$$\delta L = -pdV + \varphi dq$$

unde φ este diferenţa de potenţial dintre armăturile condensatorului.

Atunci:

$$dU = TdS + \delta L = TdS - pdV + \varphi dq \tag{3.437}$$

Se introduce funcţia caracteristică numită entalpie liberă:

$$G = U - TS + pV - \varphi q \tag{3.438}$$

Se diferenţiază relaţia 3.438 şi ţinând cont de relaţia 3.437 se obţine:

$$dG = SdT + Vdp - qd\varphi \tag{3.439}$$

Considerând un proces izoterm $dT = 0$, deoarece dG este o diferenţială totală exactă:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_p = -\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_\varphi \tag{3.440}$$

Menţionăm că:

$$q = C\varphi = \varepsilon\frac{S}{d}\varphi = \varepsilon SE \tag{3.441}$$

unde C este capacitatea iar E intensitatea câmpului electric. Cum $\varphi = Ed$, φ şi d fiind constante rezultă că şi E este constant. Atunci ţinând cont de relaţia 3.441 rezultă:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_\varphi = ES\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_\varphi \tag{3.442}$$

Se utilizează relaţia 3.442 şi relaţia 3.440 devine:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_p = -ES\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_\varphi = -E\frac{V}{d}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_\varphi$$

Menţionăm că $V = Sd$. Rezultă

$$dV = -\frac{EV}{d}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_\varphi d\varphi \qquad (3.443)$$

Cum $\varphi = Ed$, $d\varphi = d\,(dE)$, relaţia 3.443 se poate scrie:

$$\frac{dV}{V} = -\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_\varphi EdE \qquad (3.444)$$

Se integrează această relaţie şi se ţine cont că

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_\varphi$$

este un coeficient care nu depinde de intensitatea câmpului electric. Se obţine:

$$\ln\frac{V}{V_0} = -\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_\varphi \frac{E^2}{2} \qquad (3.445)$$

Se notează $V = V_0 + \Delta V$şi ţinând cont că $\Delta V \ll V_0$ (variaţiile de volum sunt mici în cazul acestui fenomen) se obţine:

$$\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = \ln\left(\frac{V+V_0}{V_0}\right) = \ln\left(1+\frac{\Delta V}{V_0}\right) \cong \frac{\Delta V}{V_0} \qquad (3.446)$$

Din 3.445 şi 3.446 rezultă:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_\varphi \frac{E^2}{2}$$

PROBLEMA 3.63 Să se calculeze efectul termic care apare datorită polarizării unităţii de volum a unui dielectric. Se va neglija variaţia volumului la temperatură constantă. Se consideră că densitatea de polarizare este dată de relaţia $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$ unde $\chi = \varepsilon_r(T) - 1$ Se va particulariza rezultatul pentru cazul în care

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{\text{const}}{T} \tag{3.447}$$

SOLUŢIE

Se notează cu u energia unităţii de volum, iar cu s entropia unităţii de volum. Utilizând expresia lucrului mecanic de polarizare, evaluat în problema (3.4), variaţia energiei interne este:

$$du = Tds + EdP \tag{3.448}$$

Se consideră un proces izoterm care are loc ca urmare a aplicării unui câmp electric ce variază de la valoarea 0 la valoarea E. Atunci:

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial E}\right)_T dE$$

astfel încât:

$$\delta q = T \left(\frac{\partial s}{\partial E}\right)_T dE \tag{3.449}$$

Pentru a exprima derivata

$$\left(\frac{\partial s}{\partial E}\right)_T$$

se introduce entalpia liberă a unitaţii de volum:

$$g = u - Ts - EP \tag{3.450}$$

Prin diferenţierea lui g , ţinând cont de relaţia 3.448 se obţine:

$$dg = -sdT - PdE \tag{3.451}$$

Cum dg este o diferenţială totală exactă:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial E}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E = \left[\frac{\partial\left(\varepsilon_0 \chi E\right)}{\partial T}\right]_E = \varepsilon_0 E \left(\frac{\partial \chi}{\partial T}\right)_E = \varepsilon_0 E \left(\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial T}\right)_E \tag{3.452}$$

Atunci:

$$\delta q = Tds = \varepsilon_0 T \left(\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial T}\right)_E EdE \tag{3.453}$$

Prin integrarea aceastei relaţii rezultă:

$$\Delta Q = \int_o^E T\varepsilon_0 \left(\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial T}\right)_E EdE = \frac{1}{2} T\varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_r}{dT} E^2 \tag{3.454}$$

Admiţând cazul particular:

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{\text{const}}{T}$$

şi evaluând derivata:

$$\frac{d\varepsilon_r}{dT} = -\frac{\text{const}}{T^2} \tag{3.455}$$

relaţia 3.454 devine:

$$\Delta Q = -\frac{1}{2} E^2 \varepsilon_0 \frac{\text{const}}{T} < 0$$

De aici rezultă că dielectricul cedează căldură în cursul polarizării sale.

PROBLEMA 3.64 Să se demonstreze că în procesele reversibile în care T şi V sunt constante variaţia energiei libere $F = U - TS$, cu semn schimbat, este egală cu lucrul mecanic efectuat de forţele generalizate altele decât presiunea.

SOLUŢIE

Cum:

$$dF = dU - TdS - SdT \tag{3.456}$$

iar conform principiului I al termodinamicii

$$dU = TdS - \delta L \tag{3.457}$$

Vom exprima lucrul mecanic sub forma:

$$\delta L = pdV + \delta\tilde{L} \tag{3.458}$$

unde $\delta\tilde{L}$ reprezintă lucrul mecanic al forţelor generalizate altele decât presiunea. Atunci relaţia 3.456 devine:

$$dF = -SdT - pdV - \delta\tilde{L} \tag{3.459}$$

Pentru $T = \text{const}$ şi $V = \text{const}$ rezultă $dF = -\delta\tilde{L}$

PROBLEMA 3.65 Să se demonstreze că în procesele reversibile în care S şi p sunt constante, variaţia cu semn schimbat a entalpiei $H = U + pV$ este egală cu lucrul mecanic al forţelor generalizate altele decât presiunea.

SOLUŢIE

Deoarece:

$$dH = dU + pdV + Vdp \tag{3.460}$$

şi

$$dU = TdS - \delta L \tag{3.461}$$

unde

$$\delta L = pdV + \delta\tilde{L} \tag{3.462}$$

$\delta\tilde{L}$ este lucrul mecanic al forţelor generalizate altele decât presiunea. Se obţine:

$$dH = TdS + Vdp - \delta\tilde{L} \tag{3.463}$$

Când $p = \text{const}$ şi $T = \text{const}$ rezultă:

$$dH = -\delta\tilde{L}$$

PROBLEMA 3.66 Să se arate că în procesele reversibile variaţia cu semn schimbat a entalpiei libere $G = U - TS + pV$ când p şi T sunt constante este egală cu lucrul mecanic al forţelor generalizate altele decât presiunea.

SOLUŢIE

Pornind de la expresia entalpiei libere:

$$G = U - TS + pV \tag{3.464}$$

se obţine:

$$dG = dU - TdS - SdT + pdV + Vdp \tag{3.465}$$

Cum:

$$dU = TdS - pdV - \delta\tilde{L} \tag{3.466}$$

unde $\delta\tilde{L}$ este lucrul mecanic al forţelor generalizate altele decât presiunea se obţine:

$$dG = Vdp - SdT - \delta\tilde{L} \tag{3.467}$$

Când $p =$ const şi $T =$ const

$$dG = -\delta\tilde{L}$$

PROBLEMA 3.67 Să se demonstreze că într-un proces ireversibil realizat de un sistem în contact cu un termostat aflat la temperatura T, variaţia energiei libere reprezintă lucrul maxim ce poate fi efectuat de sistem.

SOLUŢIE

În cazul proceselor ireversibile:

$$\frac{\delta Q_{irev}}{T} < dS \tag{3.468}$$

şi:

$$\int_i^f \frac{\delta Q_{irev}}{T} < S_f - S_i \tag{3.469}$$

unde indicii i şi f se referă la starea iniţială, respectiv starea finală.

În relaţia de mai sus T reprezintă temperatura termostatului cu care sistemul este în contact. T nu este temperatura sistemului deoarece pentru eventualele stări de neechilibru prin care trece sistemul aceasta nici nu poate fi definită. Rezultă:

$$\frac{1}{T}\int_i^f \delta Q_{irev} < S_f - S_i \tag{3.470}$$

adică:

$$Q_{irev} < TS_f - TS_i \tag{3.471}$$

Cum:

$$Q_{irev} = \Delta U + L_{irev} = U_f - U_i + L_{irev} \tag{3.472}$$

atunci:

$$U_f - U_i + L_{irev} < TS_f - TS_i$$

$$+L_{irev} < (U_i - TS_i) - (U_f - TS_f)$$

$$+L_{irev} < F_i - F_f = -(F_f - F_i)$$

Rezultatul arată că sistemul nu poate efectua asupra mediului un lucru mecanic care să depăşească o valoare maximă. Din acest motiv F a primit denumirea de energie liberă deoarece variaţia ei (şi nu a energiei interne) determină valoarea maximă a lucrului mecanic pe care sistemul îl poate furniza în exterior.

PROBLEMA 3.68 Să se arate că pentru un sistem care nu efectuează lucru mecanic şi care este în contact cu un termostat, energia sa liberă nu poate creşte.

SOLUŢIE

Se ţine cont de rezultatul obţinut în problema precedentă:

$$L_{irev} < F_i - F_f \tag{3.473}$$

cum $L_{irev} = 0$ rezultă că:

$$F_f < F_i \tag{3.474}$$

sau:

$$\Delta F < 0 \tag{3.475}$$

Într-o astfel de situaţie starea de echilibru se atinge când energia liberă este minimă.

Capitolul 4

FIZICĂ STATISTICĂ

PROBLEMA 4.1 Să se determine constanta "C" din distribuţia lui Maxwell a moleculelor după viteze şi să se scrie explicit această distribuţie.

SOLUŢIE

Constanta "C" poate fi determinată din condiţia ca integrala din dn *(v_x,v_y,v_z),* pe toate vitezele posibile, să ne dea numărul total de molecule n din unitatea de volum. Legea de distribuţie Maxwell a moleculelor după viteze este

$$dn(v_x, v_y, v_z) = nCe^{-m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)/2k_BT} dv_x dv_y dv_z \tag{4.1}$$

sau

$$dn\left(v_x, v_y, v_z\right) = nf\left(v_x, v_y, v_z\right) dv_x dv_y dv_z \tag{4.2}$$

unde $f\left(v_x, v_y, v_z\right)$ este funcţia de distribuţie după viteze.

Avem astfel:

$$nC \int\int\int e^{-m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)/2k_BT} dv_x dv_y dv_z = n$$

sau

$$C\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-mv^2/2k_BT}\right)^3 = 1 \tag{4.3}$$

Ţinând cont de integrala Poisson,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

rezultă:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-mv^2/2k_BT} = \sqrt{\frac{2\pi k_BT}{m}} \tag{4.4}$$

Relaţia 4.3 devine:

$$C\left(\frac{2\pi k_BT}{m}\right)^{3/2} = 1$$

şi

$$C = \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}$$

PROBLEMA 4.2 Să se găsească funcţia de distribuţie a moleculelor după viteza absolută.

SOLUŢIE

În acest scop se scrie expresia funcţiei de distribuţie Maxwell în coordonate sferice:

$$v_x = v\sin\theta\cos\varphi$$
$$v_y = v\sin\theta\sin\varphi$$
$$v_z = v\cos\theta$$

unde

$$v \in [0, +\infty)$$
$$\theta \in [0, \pi]$$

$$\varphi \in [0, 2\pi]$$

Atunci:

$$dv_x dv_y dv_x = v^2 \sin\theta d\theta d\varphi dv$$

Rezultă:

$$f(v_x, v_y, v_z) = Ce^{-\frac{mv^2}{2k_BT}} v^2 \sin\theta dv d\theta d\varphi$$

$$= Ce^{-\frac{mv^2}{2k_BT}} v^2 \sin\theta dv d\theta d\varphi = f(v, \theta, \varphi)\, dv d\theta d\varphi$$

Din relaţia de mai sus se obţine forma funcţiei de distribuţie în coordonate sferice:

$$f(v, \theta, \varphi) = Ce^{-\frac{mv^2}{2k_BT}} v^2 \sin\theta$$

Atunci:

$$f(v) = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(v, \theta, \varphi)\, v^2 d\theta d\varphi = Ce^{-\frac{mv^2}{2k_BT}} v^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta d\varphi$$

de unde rezultă funcţia de distribuţie după viteza absolută.

$$f(v) = C4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}} \tag{4.5}$$

PROBLEMA 4.3 Să se determine constanta "C" din legea de distribuţie a moleculelor după viteza absolută şi să se scrie în mod explicit aceasta.

SOLUŢIE

Metoda I.

O variantă a funcţiei lui Maxwell de distribuţie a moleculelor după modulul vitezelor este:

$$dn(v) = nCe^{-mv^2/2k_BT} 4\pi v^2 dv \tag{4.6}$$

Constanta *"C"* se obţine integrând *dn(v)* pe toate vitezele posibile (modulul vitezelor poate fi cuprins între 0 si ∞) şi egalând cu numărul total de molecule *"n"* din unitatea de volum. *dn(v)* reprezintă numărul de molecule din unitatea de volum care au viteza cuprinsă în intervalul *(v, v + dv)* .

Pentru determinarea constantei C se pune condiţia de normare:

$$\int_0^\infty dn(v) = n$$

Atunci:

$$4\pi nC \int_0^\infty e^{-mv^2/2k_BT} v^2 dv = n$$

sau

$$4\pi C \int_0^\infty e^{-mv^2/2k_BT} v^2 dv = 1 \tag{4.7}$$

Cunoscând că:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Prin derivarea sub semnul integralei în raport cu parametrul α, se obţine

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{4}\pi^{1/2}\alpha^{-3/2}$$

Introducând

$$\alpha = \frac{m}{2k_BT}$$

şi folosind relaţia 4.7 se obţine:

$$C = \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} \tag{4.8}$$

Metoda a II-a.

Conform condiţiei de normare

$$\int_0^\infty f(v)dv = 1 \tag{4.9}$$

unde *f(v)* este dată de relaţia 4.5

$$\int_0^\infty C4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}} dv = 1$$

Avem astfel

$$C = \frac{1}{4\pi \int_0^\infty v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}} dv}.$$

Prin urmare

$$C = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}$$

Forma funcţie de distribuţie după modulul vitezelor este:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2k\pi T}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}} \tag{4.10}$$

PROBLEMA 4.4 Să se găsească viteza cea mai probabilă în cazul distribuţiei lui Maxwell a moleculelor după viteza absolută.

SOLUŢIE

Viteza cea mai probabilă corespunde maximului funcţiei de distribuţie *f(v)* dată de relaţia 4.10:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}} \tag{4.11}$$

Condiţia

$$\frac{df}{dv} = 0$$

implică

$$4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}\left(2v-\frac{mv^2}{k_BT}\right)=0 \tag{4.12}$$

Se obţine:

$$v_p=\sqrt{\frac{2k_BT}{m}} \tag{4.13}$$

Dar

$$\frac{k_B}{m}=\frac{R}{\mu}$$

unde R este constanta universală a gazelor şi μ este masa molară a gazului.

Atunci relaţia 4.13 devine:

$$v_p=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \tag{4.14}$$

Observaţie. Maximul funcţiei de distribuţie $f_{max}=f\left(v=v_p\right)$ are valoarea

$$f_{max}=\frac{4}{e\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{m}{2k_BT}}=\frac{4}{e\sqrt{\pi}}\frac{1}{v_p}$$

PROBLEMA 4.5 Să se găsească viteza medie în cazul distribuţiei Maxwell a moleculelor după viteza absolută.

SOLUŢIE

Conform definiţiei valorii medii:

$$\overline{v}=\int_0^\infty vf(v)dv \tag{4.15}$$

unde *f(v)* este dată de relaţia 4.11. Atunci relaţia 4.15 devine:

$$\overline{v} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int\limits_0^\infty v^3 e^{-mv^2/2k_B T} dv \tag{4.16}$$

Folosind un rezultat cunoscut

$$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^{2r+1} dx = \frac{r!}{2\alpha^{r+1}} \tag{4.17}$$

integrala din 4.16, pentru $r = 1$, $\alpha = m/2k_B T$ şi $x = v$ are valoarea:

$$\int\limits_0^\infty v^3 e^{-mv^2/2k_B T} dv = \frac{1}{2} \left(\frac{2k_B T}{m} \right)^2 \tag{4.18}$$

Se ţine cont de relaţia 4.18 şi atunci relaţia 4.16 devine:

$$\overline{v} = 2\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \left(\frac{2k_B T}{m} \right)^2 = 2 \left(\frac{2k_B T}{\pi m} \right)^{1/2} \tag{4.19}$$

adică:

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \tag{4.20}$$

Cum

$$\frac{m}{k} = \frac{\mu}{R}$$

relaţia 4.20 se mai scrie astfel:

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \tag{4.21}$$

PROBLEMA 4.6 Să se găsească viteza pătratică medie în cazul distribuţiei lui Maxwell a moleculelor după viteza absolută.

SOLUŢIE

Conform definiţiei valorii medii:

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 f(v) dv \tag{4.22}$$

unde *f(v)* este dată de relaţia 4.11

$$\overline{v^2} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v^4 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv \tag{4.23}$$

Se cunoaşte valoarea integralelor de tipul:

$$I_{2r} = \int_0^\infty x^{2r} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{(2r-1)!!}{2^{r+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2r+1}}} \tag{4.24}$$

iar integrala din 4.24, pentru $x = v$, $r = 2$ si $\alpha = m/2k_B T$, va avea valoarea:

$$\int_0^\infty v^4 e^{-mv^2/2k_B T} dv = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}} \tag{4.25}$$

Se obţine astfel:

$$\overline{v^2} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{3}{8}\pi^{1/2} \left(\frac{m}{2k\pi T}\right)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3k_B T}{m} \tag{4.26}$$

$$\overline{v^2} = \frac{3k_B T}{m} \tag{4.27}$$

sau

$$\overline{v^2} = \frac{3RT}{\mu} \tag{4.28}$$

Observaţie. Uneori se foloseşte denumirea de viteză termică

$$v_T = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

Discuţie. Dispunem acum de rezultatele care stabilesc o relaţie de ordonare între cele trei mărimi determinate v_p, $\overline{v}$, v_T. Avem $v_p < \overline{v} < v_T$.

PROBLEMA 4.7 Să se stabilească o variantă a legii lui Maxwell, unde distribuţia se exprimă ţinând cont de viteza redusă, $u = v/v_p$.

SOLUŢIE

Se pleacă de la distribuţia

$$dn\left(v\right) = n\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2k_BT} 4\pi v^2 dv \tag{4.29}$$

Se efectuează schimbarea de variabilă:

$$u = \frac{v}{v_p} \tag{4.30}$$

unde

$$v_p = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

După calcule simple, se obţine:

$$dn\left(u\right) = n\frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 du \tag{4.31}$$

Observaţie. Aşa cum

$$dn\left(v\right) = nf\left(v\right) dv$$

avem şi

$$dn\left(u\right) = nf\left(u\right) du.$$

Utilitatea folosirii unei astfel de funcţii constă în faptul că $f\left(u\right)$ este o funcţie universală, independentă de m şi T.

PROBLEMA 4.8 Să se găsească numărul de molecule din unitatea de volum care au vitezele reduse cuprinse in intervalul $[u_1, u_2]$.

SOLUŢIE

Numărul de molecule se obţine prin integrarea lui $dn\,(u)$ între limitele date

$$n\,(u_1, u_2) = \int_{u_1}^{u_2} dn\,(u) = n\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} u^2 du \tag{4.32}$$

Se introduce funcţia:

$$F\,(u) = \int_{u}^{\infty} f\,(t)\,dt = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{u}^{\infty} e^{-t^2} t^2 dt \tag{4.33}$$

şi rezultă:

$$n\,(u_1, u_2) = n\,[F\,(u_1) - F\,(u_2)] \tag{4.34}$$

După cum se observă, $nF\,(u)$ reprezintă numărul moleculelor din unitatea de volum care au viteza redusă mai mare decât u. Pentru $u \gg 1$ (practic pentru $u > 3$) se poate folosi o formulă aproximativă:

$$F\,(u) \approx 1,128 u e^{-u^2}$$

PROBLEMA 4.9 Să se găsească valoarea medie a puterii a n-a a valorii absolute a vitezei, în cazul distribuţiei maxwelliene.

SOLUŢIE

Prin definiţie avem

$$\overline{v^n} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \int_{0}^{\infty} e^{-mv^2/2k_B T} v^{n+2} dv \tag{4.35}$$

Folosind rezultatele matematice cunoscute:

$$\overline{v^n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2k_B T}{m}\right)^{n/2} \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) \tag{4.36}$$

Se deosebesc două cazuri:
i) $n = 2r$, adică n este număr par şi relaţia 4.36 devine:

$$\overline{v^{2r}} =< v^{2r} >= \left(\frac{k_B T}{m}\right)^r (2r+1)!! \tag{4.37}$$

ii) $n = 2r+1$, adică n este număr impar şi relaţia 4.36 devine:

$$\overline{v^{2r+1}} =< v^{2r+1} >= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2k_B T}{m}\right)^{\frac{2r+1}{2}} (r+1)! \tag{4.38}$$

PROBLEMA 4.10 Să se găsească media pătratului abaterii vitezei absolute de la valoarea ei medie $\overline{(\Delta v)^2} = \overline{(v-\overline{v})^2}$, adică abaterea pătratică medie a vitezei absolute, în cazul distribuţiei maxwelliene.

SOLUŢIE

Se folosesc proprietăţile mediei şi se calculează abaterea pătratică medie a vitezei absolute:

$$\overline{(\Delta v)^2} = \overline{(v^2)} + (\overline{v})^2 - 2\overline{v}\overline{v} = \overline{(v^2)} - (\overline{v})^2$$

În cazul distribuţiei Maxwell, s-a obţinut anterior:

$$\overline{v^2} = \frac{3k_B T}{m}$$

$$(\overline{v})^2 = \frac{8k_B T}{\pi m}.$$

Atunci:

$$\overline{(\Delta v)^2} = \left(3 - \frac{8}{\pi}\right)\frac{k_B T}{m}.$$

PROBLEMA 4.11 Să se calculeze abaterea pătratică medie a energiei cinetice de translaţie a moleculelor unui gaz ideal $\overline{(\Delta\varepsilon)^2} = \overline{(\varepsilon - \overline{\varepsilon})^2}$, în cazul distribuţiei maxwelliene.

SOLUŢIE

Se folosesc proprietăţile mediei şi se calculează abaterea pătratică medie a energiei cinetice:

$$\overline{(\Delta\varepsilon)^2} = \overline{(\varepsilon - \overline{\varepsilon})^2} = \overline{(\varepsilon^2)} - (\overline{\varepsilon})^2.$$

Ţinem cont de rezultatele obţinute în problema 4.10. Atunci:

$$\overline{(\Delta\varepsilon)^2} = \frac{1}{4}m^2\left(\overline{v^4}\right) - \frac{1}{4}m^2\left(\overline{v^2}\right)^2.$$

Se au în vedere rezultatele unor probleme anterioare şi se obţine:

$$\overline{(\Delta\varepsilon)^2} = \frac{15}{4}(k_BT)^2 - \frac{9}{4}(k_BT)^2 = \frac{3}{2}(k_BT)^2$$

adică

$$\overline{(\Delta\varepsilon)^2} = \frac{3}{2}(k_BT)^2.$$

PROBLEMA 4.12 Arătaţi că pentru o distribuţie Maxwell, a moleculelor după viteze, este valabil rezultatul general:

$$|v_x|^n = |v_y|^n = |v_z|^n.$$

SOLUŢIE

Conform definiţiei valorilor medii

$$\overline{|v_i|^n} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|v_i|^n F(v)\,dv_x dv_y dv_z,$$

unde $i = x, y, z$

Datorită izotropiei, nici o direcţie nu e privilegiată. Valoarea integralei nu se schimbă dacă se face o schimbare de variabilă:

$$\overline{|v_x|^n} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |v_x|^n F(v)\, dv_x dv_y dv_z =$$

$$= C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |v_x|^n e^{-\frac{m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}{2k_BT}} dv_x dv_y dv_z =$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |v_x|^n e^{-\frac{mv_x^2}{2k_BT}} dv_x\right) e^{-\frac{m\left(v_y^2+v_x^2\right)}{2k_BT}} dv_y dv_z =$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |v_x|^n e^{-\frac{mv_x^2}{2k_BT}} dv_x\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_y^2}{2k_BT}} dv_y\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_z^2}{2k_BT}} dv_z\right)$$

Cum ultimele două ecuaţii sunt integrale Poisson se obţine:

$$|v_x|^n = \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\frac{2\pi k_BT}{m}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |v_x|^n e^{-\frac{mv_x^2}{2k_BT}} dv_x \tag{4.39}$$

În mod analog:

$$|v_y|^n = \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\frac{2\pi k_BT}{m}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |v_y|^n e^{-\frac{mv_y^2}{2k_BT}} dv_y \tag{4.40}$$

şi

$$|v_z|^n = \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\frac{2\pi k_BT}{m}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |v_z|^n e^{-\frac{mv_z^2}{2k_BT}} dv_z \tag{4.41}$$

Rezultă:

$$\overline{|v_x|^n} = \overline{|v_y|^n} = \overline{|v_z|^n} \tag{4.42}$$

PROBLEMA 4.13 Stabiliţi legătura dintre $\overline{|v_z|^n}$ şi $\overline{|v|^n}$, unde n este un întreg.

SOLUŢIE

Se determină forma funcţiei de distribuţie a lui Maxwell după viteze în coordonate sferice. Pentru aceasta se ţine cont de definiţia coordonatelor sferice şi de forma funcţiei de distribuţie a lui Maxwell.

Atunci:

$$f\left(v_x, v_y, v_z\right) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv_x dv_y dv_z =$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 \sin\theta dv d\theta d\varphi = f\left(v, \theta, \varphi\right) dv d\theta d\varphi$$

de unde:

$$f\left(v, \theta, \varphi\right) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 \sin\theta \tag{4.43}$$

În coordonate sferice

$$v_z = v\cos\theta \tag{4.44}$$

Se calculează media $\overline{|v_z|^n}$, atât pentru n par $(n = 2r)$ cât şi pentru n impar $(n = 2r + 1)$.

$$\overline{v_z^{2r}} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \cos^{2r}\theta \sin\theta d\theta \int\limits_0^{\infty} v^{2r} \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 dv \tag{4.45}$$

Pentru efectuarea calculului se foloseşte funcţia de distribuţie după viteza absolută.

$$f\left(v\right) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2$$

Se obţine:

$$\overline{|v_z|^{2r}} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \left(\cos\theta\right)^{2r} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{\infty} v^{2r} f\left(v\right) dv \tag{4.46}$$

Deoarece:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

şi

$$\int_0^{\pi} \cos^{2r}\theta \sin\theta d\theta = -\left.\frac{\cos^{2r+1}\theta}{2r+1}\right|_0^{\pi} = \frac{2}{2r+1}$$

relaţia 4.46 devine:

$$\overline{|v_z|^{2r}} = \frac{1}{2r+1}\int_o^{\infty} v^{2r} f(v) = \frac{1}{2r+1}\overline{v^{2r}} \tag{4.47}$$

În mod analog se obţine:

$$\overline{|v_z|^{2r+1}} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (\cos\theta)^{2r+1} \sin\theta d\theta \int_0^{\infty} v^{2r+1} f(v)\, dv =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2r+1} \sin\theta d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} (\cos\theta)^{2r+1} \sin\theta d\theta\right]$$

$$\overline{|v_z|^{2r+1}} = \frac{1}{2(r+1)}\overline{v^{2r+1}} \tag{4.48}$$

cu $r \neq -1$

Atunci:

$$\overline{|v_z|^n} = \frac{1}{n+1}\overline{v^n}, \quad n \neq -1,$$

Dar cum $\overline{|v_x|^n} = \overline{|v_y|^n} = \overline{|v_z|^n}$, avem deci $\overline{|v_x|^n} = \frac{1}{n+1}\overline{v^n}$, $n \neq -1$.

Cazuri particulare:

1) $n = 1$

$$|\overline{v_x}| = |\overline{v_y}| = |\overline{v_z}| = \frac{1}{2}\overline{v}$$

2) $n = 2$

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$$

PROBLEMA 4.14 Un gaz, compus din molecule de mase m, este în repaus şi în echilibru termic la temperatura absolută T. Să se găsească următoarele valori medii:

a) $\overline{v_x}$, $\overline{v_x^2}$, $\overline{v^2 v_x}$, $\overline{v_x^2 v_y}$

b) $\overline{(v_x + bv_y)^2}$, unde b este o constantă.

SOLUŢIE

a) Prin definiţie

$$\overline{v_x^n} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} v_x^n f(v)\, dv_x dv_y dv_z \tag{4.49}$$

cu

$$f(v) = Ce^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}$$

unde

$$C = \left(\frac{m}{2k_B\pi T}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\overline{v_x} = C\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2k_BT}} e^{-\frac{m\left(v_y^2+v_z^2\right)}{2k_BT}} dv_x dv_y dv_z =$$

$$= C\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2k_BT}} dv_x\right) e^{-\frac{m\left(v_y^2+v_z^2\right)}{2k_BT}} dv_y dv_z = 0,$$

deoarece

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2k_BT}} dv_x = 0$$

(Integrala unei funcţii impare care se efectuează pe un interval simetric faţă de origine este nulă.)

Atunci:

$$\overline{v_x} = 0 \tag{4.50}$$

$$\overline{v_x^2} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\frac{m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}{2k_B T}} dv_x dv_y dv_z =$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}} dv_x\right) e^{-\frac{mv_y^2}{2k_B T}} e^{-\frac{mv_z^2}{2k_B T}} dv_y dv_z =$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \left(\frac{2\pi k_B T}{m}\right) \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \left(\frac{2k_B T}{m}\right)^{3/2}$$

Astfel că:

$$\overline{v_x^2} = \frac{k_B T}{m} \tag{4.51}$$

Rezultă:

$$\overline{v^2 v_x} = \overline{\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) v_x} = \overline{v_x^3 + v_y^2 v_x + v_z^2 v_x} =$$
$$= \overline{v_x^3} + \overline{v_y^2 v_x} + \overline{v_z^2 v_x} = 0,$$

deoarece

$$\overline{v_x^3} = C \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_x^3 e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}} e^{-\frac{m\left(v_y^2+v_z^2\right)}{2k_B T}} dv_x dv_y dv_z = 0,$$

întrucât

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_x^3 e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}} dv_x = 0$$

este funcţie impară integrată pe un interval simetric. În mod similar rezultă că:

$$\overline{v_y^2 v_x} = 0$$

$$\overline{v_z^2 v_x} = 0$$

deoarece

$$\overline{v_y^2 v_x} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_y^2 v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}} e^{-\frac{mv_y^2}{2k_B T}} e^{-\frac{mv_z^2}{2k_B T}} dv_x dv_y dv_z =$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}} dv_x \right) {v_y}^2 e^{-\frac{mv_y^2}{2k_B T}} dv_y \right) e^{-\frac{mv_z^2}{2k_B T}} dv_z = 0$$

Analog,

$$\overline{v_x^2 v_y} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_y e^{-\frac{mv_y^2}{2k_B T}} dv_y \right) v_x^2 e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}} dv_x \right) e^{-\frac{mv_z^2}{2k_B T}} dv_z = 0$$

b) Se aplică rezultatele de mai sus şi se obţine:

$$\overline{(v_x + bv_y)^2} = \overline{\left(v_x^2 + 2bv_x v_y + b^2 v_y^2\right)} =$$
$$= \overline{v_x^2} + 2b\overline{v_x v_y} + b^2 \overline{v_y^2} = \frac{k_B T}{m} + b^2 \frac{k_B T}{m} =$$
$$= \frac{k_B T}{m}\left(1 + b^2\right),$$

PROBLEMA 4.15 În cadrul fizicii statistice clasice să se găsească distribuţia de probabilitate a vitezelor unghiulare de rotaţie şi distribuţia de probabilitate pentru componentele momentului de rotaţie ale unei molecule.

SOLUŢIE

Distribuţia probabilităţilor pentru mişcarea de rotaţie a fiecărei molecule se poate scrie separat. Energia cinetică de rotaţie a unei molecule, considerată un solid rigid, este

$$\varepsilon_{rot} = \frac{1}{2}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3}\right) \tag{4.52}$$

unde I_1, I_2, I_3 sunt momentele principale de inerţie, Ω_1, Ω_2, Ω_3 sunt proiecţiile vitezei unghiulare pe axele principale de inerţie, iar $M_1 = I_1\Omega_1$, $M_2 = I_2\Omega_2$, $M_3 = I_3\Omega_3$ sunt componentele momentului de rotaţie, care joacă (în mecanica analitică) rolul impulsurilor generalizate pentru vitezele generalizate Ω_1, Ω_2, Ω_3.

Distribuţia de probabilitate pentru componentele momentului este

$$d\omega_M = C_1 \exp\left[-\frac{1}{2k_BT}\left(\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3}\right)\right] dM_1 dM_2 dM_3. \tag{4.53}$$

funcţia de distribuţie fiind:

$$f\left(M_1, M_2, M_3\right) = C_1 \exp\left[-\frac{1}{2k_BT}\left(\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3}\right)\right] \tag{4.54}$$

Se face înlocuirea $M_i = I_i\Omega_i$, i=1,2,3, şi se obţine distribuţia de probabilitate pentru vitezele unghiulare

$$d\omega_\Omega = C_2 \exp\left[-\frac{1}{2k_BT}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right)\right] d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3 \tag{4.55}$$

Atunci funcţia de distribuţie este:

$$f\left(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\right) = C_2 \exp\left[-\frac{1}{2k_BT}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right)\right] \tag{4.56}$$

PROBLEMA 4.16 Să se găsească constantele de normare C_1 şi C_2 din formula de definiţie a distribuţiei de probabilitate normată la unitate pentru componentele momentului, respectiv a distribuţiei de probabilitate normată la unitate pentru vitezele unghiulare.

SOLUŢIE

Condiţiile de normare impun:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C_1 e^{-\frac{1}{2k_BT}\left(\frac{M_1^2}{I_1}+\frac{M_2^2}{I_2}+\frac{M_3^2}{I_3}\right)} dM_1 dM_2 dM_3 = 1 \tag{4.57}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C_2 e^{-\frac{1}{2k_BT}\left(I_1\Omega_1^2+I_2\Omega_2^2+I_3\Omega_3^2\right)} d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3 = 1 \tag{4.58}$$

unde s-a ţinut cont de formele funcţiilor de distribuţie după componentele momentului de rotaţie (relaţia 4.55) şi după vitezele unghiulare (relaţia 4.56).

Astfel:

$$C_1 = \frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2k_BT}\left(\frac{M_1^2}{I_1}+\frac{M_2^2}{I_2}+\frac{M_3^2}{I_3}\right)} dM_1 dM_2 dM_3}$$

$$C_1 = \frac{1}{\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{M_1^2}{2k_BTI_1}} dM_1\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{M_2^2}{2k_BTI_2}} dM_2\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{M_3^2}{2k_BTI_3}} dM_3\right)} \tag{4.59}$$

Deoarece

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{M_i^2}{2k_BTI_i}} dM_i = (2\pi k_BTI_i)^{1/2} \quad n = 1, 2, 3$$

Valoarea constantei este:

$$C_1 = (2\pi k_BT)^{-3/2}(I_1I_2I_3)^{-1/2} \tag{4.60}$$

Analog,

$$C_2 = \frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{I_1\Omega_1^2}{2k_BT}} e^{-\frac{I_2\Omega_2^2}{2k_BT}} e^{-\frac{I_3\Omega_3^2}{2k_BT}} d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3} =$$

$$= \frac{1}{\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{I_1\Omega_1^2}{2k_BT}} d\Omega_1\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{I_2\Omega_2^2}{2k_BT}} d\Omega_2\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{I_3\Omega_3^2}{2k_BT}} d\Omega_3\right)} =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{2\pi k_BT}{I_1}\right)^{1/2}\left(\frac{2\pi k_BT}{I_2}\right)^{1/2}\left(\frac{2\pi k_BT}{I_3}\right)^{1/2}}$$

$$C_2 = (2\pi k_BT)^{-3/2}(I_1I_2I_3)^{1/2} \tag{4.61}$$

deoarece

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{I_i\Omega_i^2}{2k_BT}} d\Omega_i = \left(\frac{2\pi k_BT}{I_i}\right)^{1/2}$$

În concluzie constantele de normare au valorile

$$C_1 = (2\pi k_BT)^{-3/2}(I_1I_2I_3)^{-1/2}$$

şi

$$C_2 = (2\pi k_BT)^{-3/2}(I_1I_2I_3)^{1/2}.$$

PROBLEMA 4.17 Folosind distribuţia de probabilitate normată pentru componentele momentului de rotaţie, să se găsească media pătratului valorii absolute a momentului de rotaţie a moleculei.

SOLUŢIE

Distribuţia de probabilitate normată, pentru componentele momentului de rotaţie, este

$$d\omega_M = (2\pi k_BT)^{-3/2}(I_1I_2I_3)^{-1/2}[\exp(-A)]\,dM_1dM_2dM_3 \tag{4.62}$$

unde

$$A = \frac{1}{2k_BT}\left(\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3}\right)$$

Media pătratului valorii absolute a momentului de rotaţie este prin definiţie:

$$\overline{M^2} = \int\limits_D M^2 d\omega_M \tag{4.63}$$

unde D este domeniul de definiţie.

Atunci:

$$\overline{M^2} = (2\pi k_BT)^{-3/2}(I_1I_2I_3)^{-1/2} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2\right)e^{-\frac{1}{2k_BT}\left(\frac{M_1^2}{I_1}+\frac{M_2^2}{I_2}+\frac{M_3^2}{I_3}\right)}dM_1dM_2dM_3 =$$

$$= (2\pi k_BT)^{-3/2}(I_1I_2I_3)^{-1/2}\sum_{i=1}^{3}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} M_i \exp(A)\, dM_1dM_2dM_3\right]$$

Să rezolvăm una din integralele din sumă, pentru i =1:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} M_1^2 e^{-\frac{1}{2k_BT}\left(\frac{M_1^2}{I_1}+\frac{M_2^2}{I_2}+\frac{M_3^2}{I_3}\right)}dM_1dM_2dM_3 =$$

$$= \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} M_1^2 e^{-\frac{1}{2k_BT}\frac{M_1^2}{I_1}}dM_1\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2k_BT}\frac{M_2^2}{I_2}}dM_2\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2k_BT}\frac{M_3^2}{I_3}}dM_3\right) =$$

$$= \frac{\pi^{1/2}}{2}(2k_BTI_1)^{3/2}(2\pi k_BTI_2)^{1/2}(2\pi k_BTI_3)^{1/2} =$$

$$= (2\pi k_BT)^{3/2}(I_1I_2I_3)^{1/2} I_1k_BT.$$

Rezultă:

$$\overline{M^2} = (2\pi k_BT)^{-3/2}(I_1I_2I_3)^{-1/2}\sum_{i=1}^{3}\left[(2\pi k_BT)^{3/2}(I_1I_2I_3)^{1/2} I_ik_BT\right]$$

$$\overline{M^2} = k_B T \sum_{i=1}^{3} I_i = k_B T \left(I_1 + I_2 + I_3\right)$$

Rezultatul căutat este

$$< M^2 >= \overline{M^2} = k_B T \left(I_1 + I_2 + I_3\right) \tag{4.64}$$

PROBLEMA 4.18 Folosind distribuţia de probabilitate normată pentru vitezele unghiulare de rotaţie, să se găsească media pătratului valorii absolute a vitezei unghiulare de rotaţie a moleculei.

SOLUŢIE

Distribuţia de probabilitate normată pentru vitezele unghiulare de rotaţie, este

$$d\omega_\Omega = \left(2\pi k_B T\right)^{-3/2} \left(I_1 I_2 I_3\right)^{1/2} A d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3$$

unde

$$A = \exp\left[-\frac{1}{2k_B T}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right)\right]$$

Media pătratului valorii absolute a vitezei unghiulare prin definiţie, este dată de

$$\overline{\Omega^2} = \left(2\pi k_B T\right)^{-3/2} \left(I_1 I_2 I_3\right)^{1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\Omega_1^2 + {\Omega_2}^2 + \Omega_3^2\right) A d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3$$

$$\overline{\Omega^2} = \left(2\pi k_B T\right)^{-3/2} \left(I_1 I_2 I_3\right)^{1/2} \sum_{i=1}^{3} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Omega_i^2 A d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3\right]$$

$$\overline{\Omega^2} = \left(2\pi k_B T\right)^{-3/2} \left(I_1 I_2 I_3\right)^{1/2} \sum_{i=1}^{3} \left[\left(2\pi k_B T\right)^{3/2} \left(I_1 I_2 I_3\right)^{-1/2} \frac{k_B T}{I_i}\right]$$

$$\overline{\Omega^2} = k_B T \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{I_i}$$

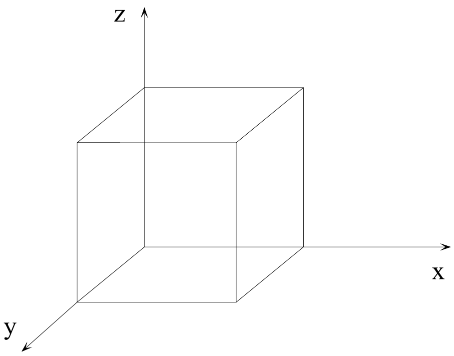

Figura 4.1: Incintă paralelipipedică

Calculele se efectuează în mod similar cu cele din problema precedentă.

Rezultatul cerut este

$$< \Omega^2 >= \overline{\Omega^2} = k_B T \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_3} \right).$$

PROBLEMA 4.19 Într-o cutie paralelipipedică se află un gaz la temperatura T. Considerând că moleculele gazului având fiecare masa m se supun legii de distribuţie a lui Maxwell, să se determine viteza medie a moleculelor ce părăsesc incinta printr-un orificiu mic, practicat în unul din colţuri.

SOLUŢIE

Fie un sistem de axe xOyz cu axele paralele cu muchiile cutiei (Fig. 4.1). Se consideră orificiul în colţul unei muchii perpendiculară pe axa Oy. Atunci viteza cerută este $\overline{v_y}$.

Prin definiţie

$$\overline{v_y} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_y e^{-\frac{m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}{2k_B T}} dv_x dv_y dv_z \qquad (4.65)$$

După cum se observă s-a considerat $v_y \in (0, \infty)$, deoarece prin acel orificiu vor ieşi numai moleculele cu viteza paralelă cu axa Oy, dar orientate în sensul pozitiv al axei (acolo unde este practicat orificiul).

Prin urmare

$$\overline{v_y} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}} dv_x\right) \left(\int\limits_{0}^{\infty} v_y e^{-\frac{mv_y^2}{2k_B T}} dv_y\right) \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_z^2}{2k_B T}} dv_z\right)$$

$$\overline{v_y} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \left(\sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m}}\right)^2 \frac{k_B T}{m} = \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}}.$$

Rezultă că viteza medie a moleculelor ce părăsesc incinta este

$$\overline{v_y} = \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}} \tag{4.66}$$

PROBLEMA 4.20 Aplicând distribuţia Maxwell să se determine probabilitatea ca direcţia vitezei să fie cuprinsă într-un unghi solid dat.

SOLUŢIE

Se foloseşte funcţia de distribuţie a lui Maxwell după viteze scrisă în coordonate sferice (relaţia 4.43). Cum

$$d\Omega = \sin^2\theta d\theta d\varphi \tag{4.67}$$

distribuţia de probabilitate devine:

$$dP = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 dv d\Omega \tag{4.68}$$

Pentru a se obţine distribuţia după unghiul solid se integrează după modulul vitezei:

$$dP\left(\Omega\right) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \left(\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 dv\right) d\Omega \tag{4.69}$$

Pentru a calcula integrala se porneşte de la identitatea:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

care se derivează în funcţie de parametrul a. Se obţine:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{1}{a^{3/2}}$$

Se derivează încă o dată şi se obţine:

$$\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2}dx = \frac{3}{8}\frac{\sqrt{\pi}}{a^{\frac{5}{2}}}$$

Astfel se poate determina:

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax}dx = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)!!\frac{1}{a^{\frac{2n+1}{2}}} \tag{4.70}$$

În cazul dat $a = m/2k_BT$ şi $n = 1$ astfel că:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}v^2dv = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{2k_BT}{m}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{4.71}$$

Atunci relaţia 4.69 devine:

$$dP = \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{2k_BT}{m}\right)^{\frac{3}{2}}d\Omega = \frac{1}{4\pi}d\Omega \tag{4.72}$$

PROBLEMA 4.21 În apă se află o suspensie de particule foarte fine de densitate $\rho > \rho_0$, ρ_0 fiind densitatea apei. În două straturi paralele aflate la distanţa h se măsoară concentraţia particulelor şi se găseşte că raportul acestora este n_1/n_2. Să se determine numărul lui Avogadro. (Se va ţine seamă că dimensiunile particulelor sunt de ordinul micrometrilor iar h de ordinul sutelor de micrometri).

SOLUŢIE

Particulele aflate în suspensie se comportă ca un gaz ideal a cărui distribuţie este de tip Boltzmann.

$$n = n_0 e^{-E_p/k_B T}$$

iar energia potenţială este:

$$E_p = m_0 h g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

S-a ţinut cont că asupra particulelor acţionează forţa arhimedică. La distanţele h_1 , respectiv h_2 numărul de molecule este:

$$n_1 = n_0 \exp\left[-\frac{m_0 g h_1}{k_B T}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)\right]$$

$$n_2 = n_0 \exp\left[-\frac{m_0 g h_2}{k_B T}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)\right]$$

iar raportul lor este:

$$\frac{n_1}{n_2} = \exp\left[\frac{m_0 g}{k_B T}(h_2 - h_1)\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\right]$$

Se logaritmează expresia de mai sus şi observând că $1/k_B = N_A/R$ se obţine:

$$\ln\frac{n_1}{n_2} = \frac{N_A m_0 g}{RT}(h_2 - h_1)\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

Atunci:

$$N_A = \frac{RT \ln n_1/n_2}{m_0 g (h_2 - h_1)\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)}$$

PROBLEMA 4.22 Un gaz ideal se găseşte într-un cilindru vertical de înălţime h_0 şi rază r_0 care se roteşte în jurul axei sale verticale în câmpul gravitaţional terestru cu viteza unghiulară constantă ω. Să se calculeze distribuţia moleculelor după coordonate.

SOLUŢIE

Distribuţia moleculelor este de tip Boltzmann

$$dN(\vec{r}) = C\exp\left(-\frac{\varepsilon_p}{k_B T}\right) dxdydz$$

Se alege un sistem de coordonate cilindrice cu axa Oz verticală de-a lungul cilindrului. Atunci:

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

Dar:

$$dxdydz = rdrd\varphi dz$$

Atunci:

$$dN(r,\varphi,z) = C\exp\left(-\frac{E_p}{k_B T}\right) rdrd\varphi dz \tag{4.73}$$

Energia potenţială este datorată energiei gravitaţionale (E_{p1}) şi energiei potenţiale în câmpul forţei centrifuge (E_{p2}). Energia potenţială se scrie astfel:

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} \tag{4.74}$$

unde:

$$E_{p1} = mgh \tag{4.75}$$

Pentru determinarea energiei potenţiale datorate forţei centrifuge se porneşte de la relaţia:

$$dE_{p2} = -dL = -Fdr = -m\omega^2 rdr$$

Prin integrare:

$$E_{p2} = -\int m\omega^2 rdr$$

$$E_{p2} = -\frac{m\omega^2 r^2}{2} + \text{const} \tag{4.76}$$

În 4.76 constanta se poate presupune nulă. Ţinând cont de 4.75 şi 4.76 relaţia 4.74 devine:

$$E_p = mgz - \frac{m\omega^2 r^2}{2} \tag{4.77}$$

atunci:

$$dN(r,\varphi,z) = \exp\left[\frac{-mgz + \left(m\omega^2 r^2\right)/2}{k_B T}\right] r dr d\varphi dz \tag{4.78}$$

Constanta C se determină din condiţia de normare. Se pune condiţia ca în interiorul vasului de volum V numărul de molecule să fie N.

$$N = C\int_0^{r_0}\left[\exp\left(\frac{m\omega^2 r^2}{2k_B T}\right)\right] r dr \int_0^{h_0}\left[\exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right)\right] dz \int_0^{2\pi} d\varphi \tag{4.79}$$

Integralele au următoarele valori:

$$\int_0^{r_0} \exp\left(\frac{m\omega^2 r^2}{2k_B T}\right) r dr = \frac{k_B T}{m\omega^2}\left[\exp\left(\frac{m\omega^2 r_0^2}{2k_B T}\right) - 1\right] \tag{4.80}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \tag{4.81}$$

$$\int_0^{h_0} \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right) dz = \frac{k_B T}{mg}\left[1 - \exp\left(-\frac{mgh_0}{k_B T}\right)\right] \tag{4.82}$$

Se obţine:

$$N = C\left(\frac{k_B T}{m\omega}\right)^2 \frac{2\pi}{g}\left[1 - \exp\left(-\frac{mgh_0}{k_B T}\right)\right]\left[\exp\left(\frac{m\omega^2 r_0^2}{2k_B T}\right) - 1\right] \tag{4.83}$$

Atunci:

$$C = N\left\{\left(\frac{k_B T}{m\omega}\right)^2 \frac{2\pi}{g}\left[1 - \exp\left(-\frac{mgh_0}{k_B T}\right)\right]\left[\exp\left(\frac{m\omega^2 r_0^2}{2k_B T}\right) - 1\right]\right\}^{-1}$$

PROBLEMA 4.23 În cazul problemei precedente să se determine distribuţia densităţii în interiorul cilindrului.

SOLUŢIE

Considerăm distribuţia particulelor obţinută în problema precedentă

$$dN\left(r,\varphi,z\right) = C\left[\exp\left(\frac{-mgz+\frac{m\omega^2r^2}{2}}{k_BT}\right)\right]rdrd\varphi dz \tag{4.84}$$

Deoarece în situaţia dată simetria este cilindrică se poate integra după φ

$$dN\left(r,\varphi,z\right) = 2\pi C\left[\exp\left(\frac{-mgz+\frac{m\omega^2r^2}{2}}{k_BT}\right)\right]rdrdz \tag{4.85}$$

Elementul de volum fiind $2\pi rdrdz$ concentraţia moleculelor din sistem este:

$$n(r,z) = \frac{dN\left(r,\varphi,z\right)}{2\pi rdrdz} = C\exp\left[\frac{-mgz+\frac{m\omega^2r^2}{2}}{k_BT}\right] \tag{4.86}$$

Deoarece densitatea este proporţională cu concentraţia particulelor (densitatea este produsul dintre masa unei molecule şi concentraţia de molecule) se obţine:

$$\rho(r,z) = C\exp\left[\frac{mgz-\frac{m\omega^2r^2}{2}}{k_BT}\right]$$

PROBLEMA 4.24 Să se determine traiectoria punctului reprezentativ în spaţiul fazelor în cazul unui oscilator armonic liniar.

SOLUŢIE

Coordonatele canonice sunt coordonata q corespunzătoare axei de oscilaţii şi impulsul p. Legătura dintre acestea este dată de legea conservării energiei

$$E_c + E_p = E_0 \tag{4.87}$$

unde

$$E_c = \frac{p^2}{2m}$$

este energia cinetică a particulei ce oscilează iar

$$E_p = \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

este energia potenţială a oscilatorului de masă m şi pulsaţie ω. E_0 este energia totală (care rămâne constantă în timp). Rezultă:

$$\frac{p^2}{2mE_0} + \frac{q^2 m\omega^2}{2E_0} = 1 \tag{4.88}$$

Traiectoria în spaţiul fazelor este o elipsă cu semiaxele

$$a = \sqrt{2mE_0}$$

şi

$$b = \sqrt{\frac{2E_0}{m\omega^2}}$$

PROBLEMA 4.25 Să se studieze cu ajutorul distribuţiei microcanonice un sistem format din N particule libere (gaz monoatomic) conţinute în volumul V.

SOLUŢIE

Gazul ideal monoatomic se caracterizează prin aceea că particulele sunt punctiforme şi nu interacţionează între ele.

Fiecare particulă are câte trei grade de libertate. Astfel întreg sistemul posedă $3N$ grade de libertate. Se aleg ca variabile canonice ansamblul format din coordonatele carteziene ale particulelor precum şi proiecţiile impulsului fiecărei particule după axele de coordonate.

Se notează cu (q_i, p_i) , $i = 1, 2, ..., 3N$, ansamblul variabilelor canonice şi se aleg:

$$q_{3i-2} = x_i \quad q_{3i-1} = y_i \quad q_{3i} = z_i \tag{4.89}$$

coordonatele carteziene ale particulei i. Analog pentru impulsul particulei i avem:

$$P_{3i-2} = p_{xi} \quad P_{3i-1} = p_{yi} \quad P_{3i} = p_{zi} \tag{4.90}$$

Deoarece particulele nu interacţionează între ele, energia sistemului, care în acest caz este dată doar de natură cinetică, are expresia:

$$W_0 = H_0 = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_{xi}^2 + p_{yi}^2 + p_{zi}^2}{2m} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{P_i^2}{2m} \tag{4.91}$$

Volumul din spaţiul fazelor cuprins în interiorul suprafeţei de energie constantă $H = W_0$ este:

$$\Omega_0 = \Omega\left(W_0\right) = \int ... \int_{H \leq W} dq_1 ... dq_{3N} dP_i ... dP_{3N} \tag{4.92}$$

Ţinând cont că fiecare particulă se mişcă doar în volumul V expresia de mai sus se scrie ca:

$$\Omega_0 = \left(\int_V dq_1 dq_2 dq_3 ... \int_V dq_{3N-2} dq_{3N-1} dq_{3N} \right) \times$$

$$\times \left(\int_{H \leq W_0} \left(dP_1 dP_2 dP_3\right) ... \left(dP_{3N-2} dP_{3N-1} dP_{3N}\right) \right)$$

Cum:

$$\int_V dq_{3i-2} dq_{3i-1} dq_{3i} = \int_V dx_i dy_i dz_i = V$$

$$i = 1., 2, ..., N$$

Atunci:

$$\Omega_0 = V^N \int_{H \leq W_0} ... \int \left(dP_1 dP_2 dP_3\right) ... \left(dP_{3N-2} dP_{3N-1} dP_{3N}\right) \tag{4.93}$$

Condiţia ca $H \leq W_0$ se scrie:

$$\sum_{i=1}^{3N} (P_i)^2 \le 2mW_0 \tag{4.94}$$

Atunci integrala de mai sus reprezintă practic volumul unei sfere situate într-un spaţiu $3N$ - dimensional de rază $\sqrt{2mW_0}$.

Nu se va calcula cu exactitate acest volum, ci se va face o evaluare. Dacă în spaţiul tridimensional volumul sferei este proporţional cu R^3, prin generalizare, se presupune că şi în spaţiul $3N$- dimensional volumul sferei va fi proporţional cu R^{3N} . Atunci:

$$\Omega_0 = CV^N (2mW_0)^{\frac{3N}{2}} \tag{4.95}$$

unde C este un factor de proporţionalitate. Astfel:

$$\left.\frac{\partial \Omega_0}{\partial W}\right|_{W=W_0} = C\frac{3N}{2}(2m)^{\frac{3N}{2}} V^N W_0^{\frac{3N}{2}-1} \tag{4.96}$$

Atunci entropia sistemului va fi:

$$S = k_B \ln\left[\left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial W}\right)_{W=W_0}\right] = k_B \ln\left[CV^N W_0^{\frac{3N}{2}-1}\frac{3N}{2}(2m)^{\frac{3N}{2}}\right] \tag{4.97}$$

sau:

$$S = k_B N \ln V + k_B\left(\frac{3N}{2}-1\right)\ln W_0 + k_B \ln\left[\frac{3N}{2}(2m)^{\frac{3N}{2}}\right] + k_B \ln C \tag{4.98}$$

Numărul de particule fiind foarte mare se poate considera că:

$$\frac{3N}{2} - 1 \cong \frac{3N}{2} \tag{4.99}$$

Ţinând cont că W_0 este energia internă a sistemului, pentru a folosi notaţii consacrate vom nota W_0 cu U. Atunci

$$S = k_B N \ln V + \frac{3N}{2}k_B \ln U + k_B \ln\frac{3N}{2}(2m)^{\frac{3N}{2}} + \text{const} \tag{4.100}$$

Cum numărul de particule din sistem este constant se obţine

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}$$

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{3k_B N}{2}\frac{1}{U} = \frac{1}{T} \tag{4.101}$$

sau

$$U = \frac{3}{2}k_B NT \tag{4.102}$$

Aceasta reprezintă ecuaţia calorică de stare a gazului ideal. Deoarece

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{p}{T}$$

se derivează relaţia 4.100 şi rezultă:

$$\frac{p}{T} = \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{k_B N}{V}$$
$$pV = Nk_B T$$

Aceasta reprezintă ecuaţia termică de stare a gazului ideal.

Se poate calcula şi capacitatea calorică la volum constant. Rezultă:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2}Nk_B$$

PROBLEMA 4.26 Să se studieze cu ajutorul distribuţiei canonice un sistem format din N particule conţinute în volumul V care nu interacţionează între ele (gaz monoatomic ideal)

SOLUŢIE

Se aleg ca variabile canonice coordonatele carteziene ale particulelor precum şi componentele impulsului fiecărei particule.

$$q_{3i-2} = x_i$$

$$q_{3i-1} = y_i$$

$$q_{3i} = z_i$$

şi

$$P_{3i-2} = p_{xi}$$
$$P_{3i-1} = p_{yi}$$
$$P_{3i} = p_{zi}$$

Hamiltonianul sistemului este:

$$H = \sum_{i=1}^{3N} \frac{P_i^2}{2m} \tag{4.103}$$

Atunci funcţia de partiţie este:

$$Z = \int ... \int e^{-\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{P_i^2}{2mk_BT}} dq_1 dq_2 ... dq_{3N} dP_1 dP_2 ... dP_{3N} \tag{4.104}$$

sau:

$$Z = \left(\prod_{i=1}^{3N} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{P_i^2}{2mk_BT}} dP_i \right) \left(\prod_{i=1}^{N} \int\limits_V dq_{3i-2} dq_{3i-1} dq_{3i} \right) \tag{4.105}$$

deoarece componentele impulsului fiecărei particule pot lua valori de la $-\infty$ la $+\infty$. Fiecare particulă poate să se mişte doar în interiorul volumului V. Atunci:

$$\int\limits_V dq_{3i-2} dq_{3i-1} dq_{3i} = V \tag{4.106}$$

$$Z = V^N \prod_{i=1}^{3N} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{P_i^2}{2mk_BT}} dP_i \tag{4.107}$$

Deoarece:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \tag{4.108}$$

atunci:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p_i^2}{2mk_BT}} dp_i = \sqrt{2\pi m k_B T} \tag{4.109}$$

iar 4.107 devine:

$$Z = V^N \left(2\pi m k_B T\right)^{\frac{3N}{2}} \tag{4.110}$$

Se obţine energia liberă:

$$F = -k_B T \ln Z = -k_B T \ln \left[V^N \left(2\pi m k_B T\right)^{3N/2}\right]$$

$$F = -k_B T \left[N \ln V + \frac{3N}{2} \ln \left(2\pi m k_B T\right)\right] \tag{4.111}$$

şi de aici entropia, energia internă, capacitatea calorică specifică şi presiunea:

$$S = \frac{\partial F}{\partial T} = -\left[N \ln V + \frac{3N}{2} \ln \left(2\pi m k_B T\right)\right] + \frac{3Nk_B}{2} \tag{4.112}$$

$$U = F + TS = \frac{3Nk_BT}{2}$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{3N}{2} k_B$$

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{k_B T N}{V}$$

Se regăseşte teoretic legea gazelor ideale $pV = k_B N T$ şi proprietatea specifică acestuia: energia internă depinde numai de T.

PROBLEMA 4.27 Un sistem are un spectru de energie nedegenerat de forma

$$\varepsilon_l = l\varepsilon \qquad \text{unde } l = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{4.113}$$

Să se studieze proprietăţile termodinamice ale unui astfel de sistem.

SOLUŢIE

Funcţia de partiţie a sistemului este

$$Z = \sum_{l=0}^{n-1} \exp(-\beta\varepsilon l) = \frac{1 - e^{-\beta\varepsilon n}}{1 - e^{-\beta\varepsilon}} \tag{4.114}$$

unde $\beta = 1/k_B T$.

Energia liberă a sistemului este:

$$F = -k_B T \ln \frac{1 - e^{-\beta\varepsilon n}}{1 - e^{-\beta\varepsilon}} \tag{4.115}$$

Energia internă se obţine ţinând cont de faptul că energia $\varepsilon_l = l\varepsilon$ se realizează cu probabilitatea

$$P(\varepsilon_l) = \frac{1}{Z} e^{-\beta\varepsilon l} \tag{4.116}$$

Atunci:

$$U = \frac{1}{Z} \sum_{l=0}^{n-1} \varepsilon l \exp(-\beta\varepsilon l) \tag{4.117}$$

Pentru a calcula suma de mai sus se va deriva relaţia 4.114. Se obţine

$$-\sum_{l=0}^{n-1} \varepsilon l \exp(-\beta\varepsilon l) = \frac{\varepsilon n e^{-\beta\varepsilon n}}{1 - e^{-\beta\varepsilon}} - \frac{\varepsilon e^{-\beta\varepsilon}(1 - e^{-\beta\varepsilon n})}{(1 - e^{-\beta\varepsilon})^2} \tag{4.118}$$

Atunci

$$U = -\varepsilon \left[\frac{n e^{-\beta\varepsilon n}}{1 - e^{-\beta\varepsilon n}} - \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{1 - e^{-\beta\varepsilon}} \right] \tag{4.119}$$

$$U = \varepsilon \left[\frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1} - \frac{n}{e^{\beta\varepsilon n} - 1} \right] \tag{4.120}$$

Capacitatea calorică la volum constant este:

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\varepsilon^2}{k_B T^2} \left[-\frac{n^2 e^{\beta\varepsilon n}}{(e^{\beta\varepsilon n} - 1)^2} + \frac{e^{\beta\varepsilon}}{(e^{\beta\varepsilon} - 1)^2} \right] \tag{4.121}$$

PROBLEMA 4.28 Să se studieze cu ajutorul distribuţiei canonice un sistem format din N oscilatori clasici independenţi.

SOLUŢIE

Deoarece oscilatorii sunt independenţi funcţia de partiţie Z a sistemului Z depinde de funcţia de partiţie Z_i a unui singur oscilator astfel:

$$Z = (Z_i)^N \tag{4.122}$$

Pentru a calcula pe Z_i se consideră hamiltonianul unui singur oscilator:

$$H_i = \frac{1}{2m} p_i^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x_i^2 \tag{4.123}$$

Atunci

$$Z_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta\left[\frac{1}{2m}p_i^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_i^2\right]} dp_i dx_i, \tag{4.124}$$

unde $\beta = 1/k_B T$.

$$Z_i = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}\omega^2 x_i^2} dx_i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta}{2m}p_i^2} dp_i \tag{4.125}$$

$$Z_i = \left(\frac{2\pi}{\beta m\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{\beta\omega} = \frac{2\pi k_B T}{\omega} \tag{4.126}$$

Rezultă:

$$Z = (Z_i)^N = \left(\frac{2\pi k_B T}{\omega}\right)^N \tag{4.127}$$

Energia liberă este:

$$F = -k_B T \ln Z = -k_B T N \ln \frac{2\pi k_B T}{\omega} \tag{4.128}$$

iar entropia este:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = k_B N \ln \frac{2\pi k_B T}{\omega} + k_B N \tag{4.129}$$

Energia internă este:

$$U = F + TS = Nk_BT \tag{4.130}$$

iar capacitatea calorică a sistemului este:

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = k_BN \tag{4.131}$$

PROBLEMA 4.29 Un sistem fizic este format din N oscilatori armonici independenţi şi are un spectru de energie dat de expresia:

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad n = 0, 1, 2\ldots \tag{4.132}$$

Să se studieze proprietăţile termodinamice ale acestui sistem.

SOLUŢIE

Deoarece oscilatorii sunt independenţi se calculează funcţia de partiţie pentru un singur oscilator.

$$Z_0 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega} \tag{4.133}$$

unde $\beta = 1/k_BT$. Se obţine:

$$Z_0 = e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\hbar\omega} = \frac{e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \tag{4.134}$$

Pentru întreg sistemul funcţia de partiţie este:

$$Z = (Z_0)^N = \frac{e^{-\frac{\beta N\hbar\omega}{2}}}{\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right)^N} \tag{4.135}$$

iar energia liberă:

$$F = -k_BT\ln Z = -k_BT\ln\frac{e^{-\frac{\beta N\hbar\omega}{2}}}{\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right)^N} \tag{4.136}$$

$$F = N\left[\frac{\hbar\omega}{2} + k_B T \ln\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right)\right] \tag{4.137}$$

Entropia este:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = -Nk_B \ln\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right) + \frac{1}{T}\left(\frac{N\hbar\omega}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \cdot e^{-\beta\hbar\omega}\right) \tag{4.138}$$

$$S = N\left[\frac{\hbar\omega}{T\left(e^{\beta\hbar\omega} - 1\right)} - k_B \ln\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right)\right] \tag{4.139}$$

iar energia internă:

$$U = F + TS = N\left[\frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\right] \tag{4.140}$$

Capacitatea calorică este:

$$C_p = C_v = \frac{\partial U}{\partial T} = Nk_B(\beta\hbar\omega)^2 \frac{e^{\beta\hbar\omega}}{\left(e^{\beta\hbar\omega} - 1\right)^2} \tag{4.141}$$

PROBLEMA 4.30 Când o particulă cu spinul $\frac{1}{2}$ este plasată în câmpul magnetic B, nivelul energetic al acestuia se despică în două nivele μB şi $-\mu B$, unde μ este momentul magnetic al particulei respective.

Se presupune că un astfel de sistem care constă din N particule este menţinut într-un câmp magnetic B la temperatura T. Să se găsească energia internă, entropia şi capacitatea calorică a sistemului.

SOLUŢIE

Funcţia de partiţie pentru o particulă este:

$$Z_i = e^{\beta\mu B} + e^{-\beta\mu B} = 2\mathrm{ch}\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right) \tag{4.142}$$

Deoarece spinii particulelor sunt independenţi funcţia de partiţie este egală cu puterea a N-a a funcţiei de partiţie pentru o singură particulă.

Atunci

$$Z = Z_i^N = 2^N\left[\mathrm{ch}\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right)\right]^N \tag{4.143}$$

Energia liberă este:

$$F = -Nk_BT \ln\left[2\text{ch}\left(\frac{\mu B}{k_BT}\right)\right] \tag{4.144}$$

iar entropia sistemului este:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right) = Nk_B \ln\left[2\text{ch}\left(\frac{\mu B}{k_BT}\right)\right] - \frac{\mu BN}{T}\text{th}\left(\frac{\mu B}{k_BT}\right) \tag{4.145}$$

Energia internă a sistemului este:

$$U = F + TS = -N\mu B\text{th}\left(\frac{\mu B}{k_BT}\right) \tag{4.146}$$

PROBLEMA 4.31 Să se arate că densitatea de polarizare P a unui gaz constând din N molecule biatomice ce au un moment dipolar p, este dată de:

$$P = \frac{N}{V}\left[\text{cth}\left(\frac{pE}{k_BT}\right) - \frac{k_BT}{pE}\right]p \tag{4.147}$$

unde V este volumul gazului, iar E este intensitatea câmpului electric. Să se demonstreze că dacă

$$pE \ll k_BT \tag{4.148}$$

constanta dielectrică a gazului este

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{N}{V}\frac{p^2}{3k_BT\varepsilon_0} \tag{4.149}$$

SOLUŢIE

Se presupune că în această situaţie câmpul electric local ce acţionează asupra unei molecule este egal cu câmpul electric extern E, interacţia dintre molecule fiind presupusă neglijabilă.

Datorită agitaţiei termice $\vec{E}$ nu este paralel cu $\vec{p}$ şi formează între ele un unghi θ. Energia potenţială a unui dipol în câmp electric este:

$$E_p = -Ep\cos\theta \tag{4.150}$$

În cazul distribuţiei canonice probabilitatea ca direcţia dipolului $\vec{p}$ să fie în unghiul solid $d\Omega$ este:

$$\rho(\theta)d\Omega = Ce^{-\frac{Ep}{k_BT}}d\Omega = Ce^{\frac{Ep\cos\theta}{k_BT}}d\Omega \tag{4.151}$$

În expresia de mai sus C este constanta de normare care se obţine din condiţia:

$$\int \rho(\theta)d\Omega = 1 \tag{4.152}$$

Atunci

$$C = \frac{1}{\int \exp\left[\frac{Ep\cos\theta}{k_BT}\right]d\Omega} \tag{4.153}$$

Valoarea medie a proiecţiei momentului electric dipolar în direcţia lui $\vec{E}$ este dată de:

$$\overline{p\cos\theta} = p\int \rho(\theta)\cos\theta d\Omega \tag{4.154}$$

sau explicit:

$$\overline{p\cos\theta} = \frac{p\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} cos\theta \exp\left[\frac{Ep\cos\theta}{k_BT}\right]\sin\theta d\theta}{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \exp\left[\frac{Ep\cos\theta}{k_BT}\right]\sin\theta d\theta} \tag{4.155}$$

Pentru a calcula integralele se face schimbarea de variabilă

$$\xi = \cos\theta \tag{4.156}$$

$$d\xi = -\sin\theta d\theta\pi \tag{4.157}$$

şi se obţine:

$$\overline{p\cos\theta} = p\frac{\int\limits_{-1}^{1} \xi \exp\left[\frac{Ep\xi}{k_BT}\right]d\xi}{\int\limits_{-1}^{1} \exp\left[\frac{Ep\xi}{k_BT}\right]d\xi} \tag{4.158}$$

Se notează cu $a = Ep/k_BT$ şi se observă că:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} e^{a\xi}d\xi = \frac{e^a - e^{-a}}{2a} = \frac{\mathrm{sh}a}{a} \tag{4.159}$$

Se derivează 4.159 în raport cu parametrul a

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\xi e^{a\xi}d\xi = \frac{1}{2}\frac{d}{da}\left(\int\limits_{-1}^{1}e^{a\xi}d\xi\right) \tag{4.160}$$

Atunci

$$\overline{p\cos\theta} = \frac{\frac{d}{da}\left(\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}e^{a\xi}d\xi\right)}{\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}e^{a\xi}d\xi} \tag{4.161}$$

Rezultă:

$$\overline{p\cos\theta} = \frac{d}{da}\ln\left(\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}e^{a\xi}d\xi\right) = \frac{d}{da}\ln\left(\frac{1}{a}\mathrm{sh}a\right) \tag{4.162}$$

$$\overline{p\cos\theta} = \mathrm{cth}a - \frac{1}{a} = L(a), \tag{4.163}$$

unde $L(a)$ este funcţia lui Langevin.

Atunci:

$$\overline{p\cos\theta} = p\left[\mathrm{cth}\left(\frac{Ep}{k_BT}\right) - \frac{k_BT}{Ep}\right] \tag{4.164}$$

$$\overline{p\cos\theta} = pL\left(\frac{Ep}{k_BT}\right) \tag{4.165}$$

Deoarece densitatea de polarizare P pe unitatea de volum este egală cu momentul electric dipolar al celor N/V molecule rezultă:

$$P = \frac{Np}{V}L\left(\frac{Ep}{k_BT}\right) \tag{4.166}$$

În cazul în care $Ep \ll k_BT$

$$L\left(\frac{Ep}{k_BT}\right) \simeq \frac{Ep}{3k_BT} \tag{4.167}$$

Pentru $a \ll 1$

$$L(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a}$$

$$L(a) \simeq \frac{1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{6} + 1 - a + \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{6}}{1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{6} - 1 + a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{6}} - \frac{1}{a} \approx \frac{a}{3}$$

$$L(a) \simeq \frac{2 + a^2}{2a + \frac{a^3}{3}} - \frac{1}{a} = \frac{2a}{6 + a^2} \simeq \frac{a}{3} \tag{4.168}$$

Astfel

$$P = \frac{N}{V}\frac{Ep^2}{3k_BT} \tag{4.169}$$

Introducând inducţia electrică D prin relaţia:

$$D = \varepsilon_0 E + P \tag{4.170}$$

şi ţinând cont de 4.169

$$\varepsilon_r \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 E + \frac{N}{V}\frac{Ep^2}{3k_BT} \tag{4.171}$$

Se obţine astfel constanta dielectrică:

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{N}{V}\frac{p^2}{3k_BT\varepsilon_0} \tag{4.172}$$

Capitolul 5

CÂMPUL ELECTROMAGNETIC

PROBLEMA 5.1 O sarcină q pozitivă este distribuită uniform în interiorul unei sfere dielectrice omogene cu permitivitatea ε. Se cere intensitatea câmpului electric în afara sferei şi în interiorul ei.

SOLUŢIE

Din considerente de simetrie câmpul electric în interiorul şi în exteriorul sferei are direcţia razei sferei (Fig. 5.1). Se foloseşte forma integrală a legii lui Gauss:

$$\iint \vec{D} d\vec{S} = q \tag{5.1}$$

Deoarece pentru un mediu omogen $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ relaţia 5.1 devine pentru punctele din exteriorul sferei:

$$\varepsilon_0 \iint \vec{E} \vec{n} dS = q$$

Atunci:

$$E 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

de unde

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \tag{5.2}$$

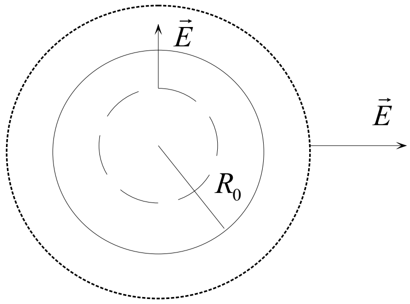

Figura 5.1: Câmpul electric al unei sfere dielectrice încărcate uniform cu sarcină electrică

Pentru punctele din interiorul sferei relaţia 5.1 devine

$$E4\pi r^2 = \frac{q'}{\varepsilon} \tag{5.3}$$

unde q' reprezintă sarcina din interiorul sferei de rază r. Cum:

$$q' = q\frac{\frac{4}{3}\pi r'^3}{\frac{4}{3}\pi R_0^3} = q\left(\frac{r}{R_0}\right)^3$$

utilizând 5.3 se obţine intensitatea câmpului electric în interiorul sferei:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{qr}{R_0^3}$$

PROBLEMA 5.2 Se dă o distribuţie liniară de sarcină, a cărei densitate este λ (sarcina pe unitatea de lungime). Să se găsească expresia intensităţii câmpului electric la distanţa r de aceasta dacă distribuţia de sarcină se găseşte în vid.

SOLUŢIE

Din considerente de simetrie, $\vec{E}$ are o direcţie radială ca în Fig. 5.2. Pentru a determina câmpul electric se consideră o suprafaţă cilindrică a cărei axă de simetrie o constituie distribuţia liniară de sarcină. Se

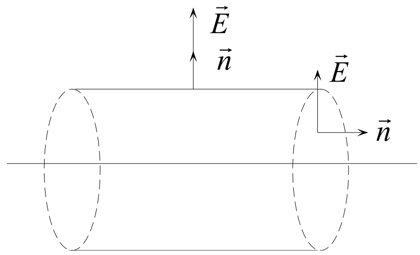

Figura 5.2: Câmpul electric al unei distribuţii liniare de sarcină

observă ca fluxul câmpului electric este diferit de zero doar pe suprafaţa laterală a cilindrului. Pe baze fluxul este nul deoarece unghiul dintre normală şi intensitatea câmpului electric este $\pi/2$. Deoarece $D = \varepsilon_0 E$ legea lui Gauss se scrie

$$\varepsilon_0 \iint \vec{E}\vec{n}dS = q$$

Rezultă:

$$\varepsilon_0 E\,(2\pi r h) = \lambda h$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{5.4}$$

PROBLEMA 5.3 Într-un plan există o distribuţie infinită de sarcină, cu densitatea superficială σ. Să se determine câmpul electric creat de aceasta.

SOLUŢIE

Din considerente de simetrie vectorul intensitate câmp electric este perpendicular pe planul încărcat electric (Fig. 5.3). Aceasta se datorează faptului că pentru orice element de sarcină din plan se poate găsi un element simetric. Pentru aceste două elemente componentele orizontale ale câmpurilor create se anulează şi nu rămân să se însumeze decât componentele verticale. Pentru aplicarea legii lui Gauss se alege ca suprafaţă

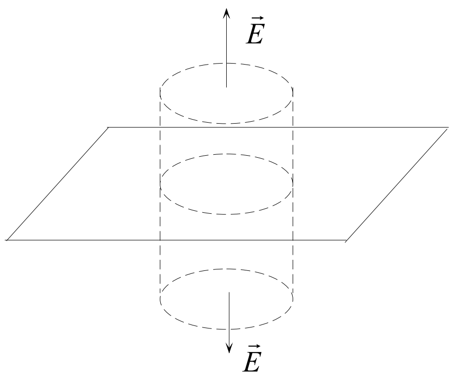

Figura 5.3: Câmpul unei distribuţii plane de sarcină

închisă un cilindru cu bazele ΔS simetrice faţă de planul încărcat electric şi cu generatoarea perpendiculară pe acest plan. Se observă ca doar pe baze există un flux diferit de zero. Pe suprafaţa laterală normala şi vectorul intensitate câmp electric sunt perpendiculare. Aplicând legea lui Gauss:

$$\varepsilon_0 \left(E\Delta S + E\Delta S\right) = \sigma\Delta S$$

rezultă:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

PROBLEMA 5.4 Permitivitatea unei sfere neomogene de rază R aflată în vid variază după legea

$$\varepsilon\left(r\right) = \varepsilon_0 \left(\frac{r}{R} + 2\right) \tag{5.5}$$

Să se calculeze câmpul electric creat de o sarcină Q distribuită în întregul volum al sferei.

SOLUŢIE

Aplicăm legea lui Gauss

$$\iint \vec{D}\vec{n}dS = Q$$

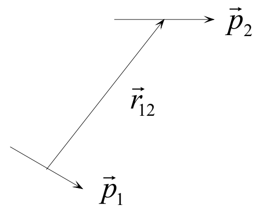

Figura 5.4: Dipoli ce interacţionează între ei

Pentru $r < R$ unde R este raza sferei rezultă:

$$D4\pi r^2 = Q_{int} \tag{5.6}$$

Ţinând cont de variaţia permitivităţii mediului şi de 5.5 se obţine:

$$\varepsilon_0 \left(\frac{r}{R} + 2\right) E4\pi r^2 = Q_{int} = \frac{r^3}{R^3} Q$$

Rezultă:

$$E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^2 (r + 2R)} \tag{5.7}$$

Pentru $r > R_0$ aplicarea legii lui Gauss pe o suprafaţă sferică concentrică cu sfera data conduce la:

$$\varepsilon_0 E4\pi r^2 = Q$$

Rezultă:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{5.8}$$

PROBLEMA 5.5 Să se determine energia potenţială de interacţie dintre doi dipoli $\vec{p}_1$ şi $\vec{p}_2$ aflaţi la distanţa $\vec{r}_{12}$ unul de altul (Fig. 5.4).

SOLUŢIE

Energia potenţială a unui dipol în câmp electric este:

$$W = -\vec{p}\vec{E} \tag{5.9}$$

Considerăm dipolul $\vec{p}_2$ în câmpul electric $\vec{E}_1$ al dipolului $\vec{p}_1$ unde:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\left(\vec{p}_1\vec{r}_{12}\right)\vec{r}_{12}}{r_{12}^5} - \frac{\vec{p}_1}{r_{12}^3}\right] \tag{5.10}$$

Atunci energia de interacţie se scrie:

$$W = -\vec{p}_2\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{p}_1\vec{p}_2}{r_{12}^3} - 3\frac{\left(\vec{p}_1\vec{r}_{12}\right)\left(\vec{p}_2\vec{r}_{12}\right)}{r_{12}^5}\right] \tag{5.11}$$

PROBLEMA 5.6 Un mediu neomogen dar izotrop, caracterizat prin constantele ε si σ este străbătut de un curent staţionar de densitate $\vec{j}$. Să se arate că în mediul respectiv există sarcini de volum şi să se calculeze densitatea ρ a acestora.

SOLUŢIE

Conform legii lui Gauss:

$$\nabla\vec{D} = \rho \tag{5.12}$$

Cum:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \tag{5.13}$$

şi

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \tag{5.14}$$

rezultă:

$$\rho = \nabla\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\vec{j}\right) \tag{5.15}$$

Utilizând identiatea

$$\nabla\left(a\vec{b}\right) = a\nabla\vec{b} + \vec{b}\nabla a$$

se obţine:

$$\nabla\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\vec{j}\right) = \frac{\varepsilon}{\sigma}\nabla\vec{j} + \vec{j}\nabla\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \tag{5.16}$$

Deoarece densitatea de curent $\vec{j}$ este aceiaşi în orice punct al mediului $\nabla\vec{j} = 0$, relaţia 5.16 devine:

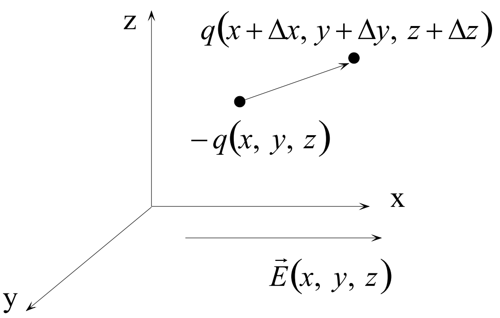

Figura 5.5: Dipol în câmp electric neuniform

$$\rho = \vec{j}\,\nabla\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \tag{5.17}$$

PROBLEMA 5.7 Să se calculeze forţa ce acţionează asupra unui dipol arbitrar orientat într-un câmp electric neuniform $\vec{E}(x, y, z)$.

SOLUŢIE

Se consideră că distanţa dintre cele două sarcini ale dipolului este Δl, iar segmentul respectiv este orientat în aşa fel încât proiecţiile acestei distanţe pe axele de coordonate Δx, Δy, Δz să fie diferite de zero (Fig. 5.5). Forţa care acţionează asupra dipolului pe direcţia Ox este:

$$F_x = qE_x\left(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z\right) - qE_x\left(x, y, z\right) \tag{5.18}$$

Deoarece:

$$E_x\left(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z\right) = E_x\left(x, y, z\right) + \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial E_x}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial E_x}{\partial z}\Delta z$$

se obţine:

$$F_x = q\Delta x\frac{\partial E_x}{\partial x} + q\Delta y\frac{\partial E_x}{\partial y} + q\Delta z\frac{\partial E_x}{\partial z} \tag{5.19}$$

Dar:

$$\vec{p} = (q\Delta x)\,\vec{e}_x + (q\Delta y)\,\vec{e}_y + (q\Delta z)\,\vec{e}_z \tag{5.20}$$

şi relaţia 5.19 devine:

$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z} = \vec{p}\,\nabla E_x \tag{5.21}$$

În mod analog se obţin şi celelalte componente ale forţei ce acţionează asupra dipolului:

$$F_y = \vec{p}\,\nabla E_y \tag{5.22}$$

$$F_z = \vec{p}\,\nabla E_z \tag{5.23}$$

În concluzie:

$$\vec{F} = (\vec{p}\,\nabla)\,\vec{E}$$

PROBLEMA 5.8 Să se determine potenţialul creat de un dipol cu momentul dipolar $\vec{p}$ şi cu distanţa dintre cele două sarcini egală cu $2a$ (Fig. 5.6).

SOLUŢIE

Conform Fig. 5.6 potenţialul în punctul P este suma potenţialelor celor două sarcini

$$V = V_1 + V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \tag{5.24}$$

Dacă $r \gg 2a$ atunci:

$$r_1 r_2 \simeq r^2$$

unde r este distanţa de la centrul dipolului la punctul considerat. Deoarece:

$$r_2 - r_1 \simeq 2a\cos\theta$$

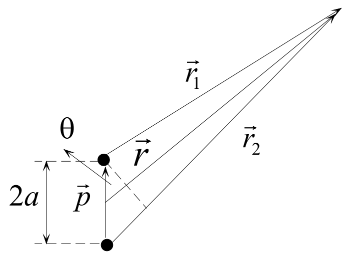

Figura 5.6: Schema pentru calculul potenţialului creat de un dipol

relaţia 5.24 devine:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a\cos\theta}{r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{5.25}$$

Deoarece

$$\vec{p}\,\vec{r} = p\,r\cos\theta$$

potenţialul se exprimă astfel:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\,\vec{r}}{r^3} \tag{5.26}$$

PROBLEMA 5.9 Să se determine câmpul electric creat de un dipol, (ale cărui sarcini q şi $-q$ se află la distanţa $2a$), într-un punct P situat la distanţa r în lungul perpendicularei dusă la jumătatea distanţei dintre cele două sarcini (Fig. **??**).

SOLUŢIE

Câmpul electric rezultant este:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \tag{5.27}$$

unde

$$E_1 = E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\,(a^2 + r^2)} \tag{5.28}$$

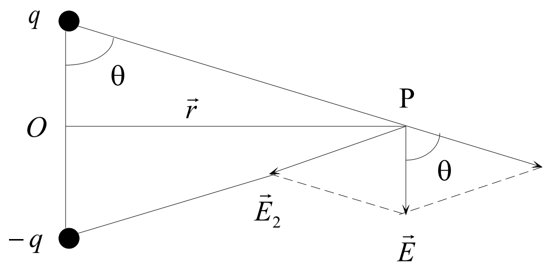

Figura 5.7: Câmpul electric creat de un dipol într-un punct P situat pe perpendiculara dusă la jumătatea distanţei dintre cele două sarcini

Câmpul electric rezultant (Fig. **??**) este perpendicular pe dreapta OP şi

$$E = 2E_1 \cos\theta = 2E_1 \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} \tag{5.29}$$

Atunci

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2a}{\left(a^2 + r^2\right)^{3/2}} \tag{5.30}$$

Dacă $r \gg a$ atunci:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2aq}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p}{r^3} \tag{5.31}$$

PROBLEMA 5.10 Potenţialul câmpului electrostatic creat de un dipol de moment dipolar $\vec{p}$ aflat în vid este

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}\,\vec{r}}{r^3}$$

Să se calculeze intensitatea câmpului electric.

SOLUŢIE

Pentru aceasta se utilizează formula:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \frac{\vec{p}\,\vec{r}}{r^3} \tag{5.32}$$

Vom demonstra identitatea

$$\nabla (AB) = A\nabla B + B\nabla A \tag{5.33}$$

unde A şi B sunt scalari

$$\nabla (AB) = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} (AB) + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} (AB) + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} (AB)$$

$$\nabla (AB) = \vec{e}_x \left(A\frac{\partial B}{\partial x} + B\frac{\partial A}{\partial x} \right) + \vec{e}_y \left(A\frac{\partial B}{\partial y} + B\frac{\partial A}{\partial y} \right) + \vec{e}_z \left(A\frac{\partial B}{\partial z} + B\frac{\partial A}{\partial z} \right)$$

$$\nabla (AB) = A \left(\frac{\partial B}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial B}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial B}{\partial z}\vec{e}_z \right) + B \left(\frac{\partial A}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial A}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{e}_z \right)$$

Astfel identitatea 5.33 este demonstrată

În cazul problemei propuse se consideră $A = \vec{p}\,\vec{r}$ şi $B = 1/r^3$ şi se obţine:

$$\nabla \left(\frac{\vec{p}\,\vec{r}}{r^3} \right) = (\vec{p}\,\vec{r})\, \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) + \frac{1}{r^3} \nabla (\vec{p}\vec{r}) \tag{5.34}$$

Dar:

$$\nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r^3} \right) \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r^3} \right) \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r^3} \right) \vec{e}_y \tag{5.35}$$

Deoarece

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3}{r^4} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{3x}{r^5} \tag{5.36}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3y}{r^5} \tag{5.37}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3z}{r^5} \tag{5.38}$$

putem exprima relaţia 5.35 astfel:

$$\nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3x\vec{e}_x + 3y\vec{e}_y + 3z\vec{e}_z}{r^5} = -\frac{3\vec{r}}{r^5} \tag{5.39}$$

Cum:

$$\nabla\left(\vec{p}\,\vec{r}\right) = \nabla\left(xp_x + yp_y + zp_z\right) = \vec{p}_x\vec{e}_x + \vec{p}_y\vec{e}_y + \vec{p}_z\vec{e}_z = \vec{p} \tag{5.40}$$

atunci din relaţiile 5.39 şi 5.40 se obţine:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\left(\vec{p}\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right] \tag{5.41}$$

PROBLEMA 5.11 Să se găsească capacitatea unui condensator având electrozii de formă sferică cu razele a şi b dacă permitivitatea absolută a mediului dintre cei doi electrozi este:

$$\varepsilon\left(r\right) = \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{când} \quad a \le r < c \\ \varepsilon_2 & \text{când} \quad c \le r \le b \end{cases}$$

SOLUŢIE

Aplicând legea lui Gauss pentru suprafaţa S_1 când $a \le r < c$ se obţine:

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2} \tag{5.42}$$

Aplicând legea lui Gauss pentru suprafaţa S_2 când $c \le r < b$ se obţine:

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2} \tag{5.43}$$

Tensiunea dintre armăturile condensatorului este:

$$U = \int_a^b E dr = \int_a^c E_1 dr + \int_c^b E_2 dr$$

Rezultă:

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)$$

Astfel se poate calcula capacitatea condensatorului.

$$C = \frac{Q}{U} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)\right]^{-1}$$

PROBLEMA 5.12 Un condensator cilindric este realizat din doi cilindri concentrici cu razele a şi $b > a$ şi lungimea l. Cunoscând că cei doi cilindri sunt în vid să se calculeze capacitatea acestui dispozitiv considerând că lungimea lui este foarte mare.

SOLUŢIE

Se calculează câmpul electric în interiorul condensatorului respectiv. Pentru aceasta se utilizează legea lui Gauss sub formă integrală. Pentru efectuarea integralei de suprafaţă se consideră o suprafaţă cilindrică coaxială cu cei doi cilindri, de lungime l şi rază r. Datorită simetriei, câmpul electric are aceiaşi valoare pe suprafaţa laterală. Pe bazele cilindrului considerat fluxul este nul.

Atunci relaţia

$$\varepsilon_0 \int\int \vec{E} d\vec{S} = q \tag{5.44}$$

devine:

$$\varepsilon_0 2\pi r l E = q$$

de unde:

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l r} \tag{5.45}$$

Tensiunea dintre armături este:

$$U = \int_a^b \vec{E} d\vec{r} = \int_a^b \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a} \tag{5.46}$$

iar capacitatea condensatorului este:

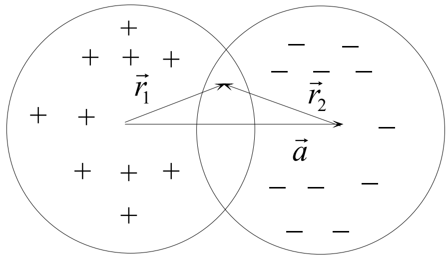

Figura 5.8: Cavitate formată prin intersecţia a două sfere încărcate

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(b/a)} \tag{5.47}$$

PROBLEMA 5.13 Care este câmpul electric într-o cavitate formată prin intersecţia a două sfere încărcate cu densităţile de sarcină ρ şi $-\rho$ uniform distribuite în volumul lor. Distanţa dintre centrele celor două sfere este a (Fig. 5.8).

SOLUŢIE

Aşa cum am discutat anterioar câmpul electric într-o sferă uniform încărcată la distanţa $r < R$ este:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} \tag{5.48}$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziţie din centrul sferei la punctul de observaţie, Q este sarcina totală, ρ este densitatea de sarcină şi R este raza sferei.

Astfel în interiorul cavităţii câmpul electric este dat de suprapunerea câmpurilor datorate celor două sfere considerate uniform încărcate.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1 - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a} \tag{5.49}$$

Rezultă că în interiorul cavităţii câmpul este uniform

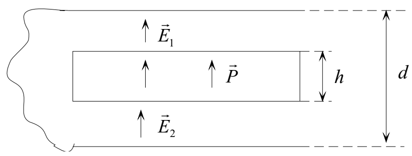

Figura 5.9: Placă dielectrică plasată între placile unui condensator aflate la acelaşi potenţial

PROBLEMA 5.14 O placă de dielectric de grosime h având o polarizare P = const este plasată în interiorul unui condensator cu feţe plan paralele, armăturile condensatorului fiind legate printr-un conductor. Vectorul polarizare este perpendicular pe cele două feţe ale dielectricului. Să se determine câmpul electric şi inducţia în interiorul plăcii dielectrice. Distanţa dintre armăturile condensatorului este d.

SOLUŢIE

Notăm cu $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$ intensităţile câmpului electric în cele trei regiuni şi cu $\vec{D}_1$, $\vec{D}_2$, $\vec{D}_3$ inducţiile câmpului electric (Fig. 5.9).

Vom pune condiţia de continuitate a componentei normale a vectorului inducţie câmp electric

$$D_1 = D_2 = D_3 \tag{5.50}$$

Deoarece

$$D_1 = \varepsilon_0 E_1$$

$$D_3 = \varepsilon_0 E_3$$

Rezultă că $E_1 = E_3$. Cum:

$$D_2 = \varepsilon_0 E_2 + P \tag{5.51}$$

condiţia de continitate 5.50 se scrie:

$$\varepsilon_0 E_1 = \varepsilon_0 E_2 + P \tag{5.52}$$

de unde

$$E_1 = E_2 + \frac{P}{\varepsilon_0} \tag{5.53}$$

Condiţia ca diferenţa de potenţial dintre cele două plăci să fie nulă este:

$$E_1 (d - h) + E_2 h = 0$$

şi substituind E_1 din 5.53 se obţine:

$$\left(E_2 + \frac{P}{\varepsilon_0} \right) (d - h) + E_2 h = 0 \tag{5.54}$$

Rezultă:

$$E_2 = -\frac{P}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{h}{d} \right) \tag{5.55}$$

$$D_2 = \varepsilon_0 E_2 + P = P \frac{h}{d} \tag{5.56}$$

PROBLEMA 5.15 Fie o placă deformată de grosime $2d$. Datorită acestui fapt polarizarea nu este uniformă: polarizarea în mijlocul plăcii este P_0 şi în rest este daţa de expresia:

$$P = P_0 \left(1 - \frac{x^2}{d^2} \right) \tag{5.57}$$

unde x este distanţa de la mijlocul plăcii la punctul considerat. Vectorul polarizare este orientat de-a lungul axei Ox perpendiulară pe feţele plăcii dielectrice. Să se determine câmpul electric în interiorul şi în exteriorul plăcii, precum şi diferenţa de potenţial dintre suprafeţele laterale ale acesteia.

SOLUŢIE

Deoarece nici în interiorul plăcii nici în exteriorul plăcii nu există sarcină electrică liberă:

$$\vec{D} = 0 \tag{5.58}$$

Cum

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{5.59}$$

în exteriorul plăcii dielectrice polarizarea este nulă şi rezultă $\vec{E} = 0$.

În interiorul plăcii $P \neq 0$ şi atunci din relaţiile 5.58 şi 5.59 se obţine:

$$E = -\frac{1}{\varepsilon_0} P = -\frac{P_0}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{x^2}{d^2} \right) \tag{5.60}$$

Diferenţa de potenţial dintre plăci este:

$$V_2 - V_1 = - \int\limits_{-d}^{d} E dx = \frac{P_0}{\varepsilon_0} \int\limits_{-d}^{d} \left(1 - \frac{x^2}{d^2} \right) dx = \frac{4}{3\varepsilon_0} P d \tag{5.61}$$

PROBLEMA 5.16 Să se arate că într-un conductor omogen densitatea de sarcină electrică liberă tinde la zero.

SOLUŢIE

Se consideră ecuaţia de continuitate:

$$\nabla \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{5.62}$$

Deoarece

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \tag{5.63}$$

ecuaţia 5.62 devine:

$$\sigma \nabla \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{5.64}$$

sau

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \nabla \left(\varepsilon_0 \vec{E} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\nabla\vec{D} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{5.65}$$

Notăm

$$\frac{\varepsilon_0}{\sigma} = +\Im$$

Cum $\nabla\vec{D} = \rho$ ecuaţia 5.65 devine:

$$\frac{1}{\Im}\rho + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Prin integrarea acestei ecuaţii rezultă:

$$\ln\frac{\rho}{\rho_0} = -\frac{t}{\Im}$$

adică:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\Im}}$$

Rezultă că densitatea de sarcină electrică liberă din interiorul unui conductor scade exponenţial în timp şi după un timp suficient de lung se va anula.

PROBLEMA 5.17 Două plăci dielectrice paralele sunt plasate în interiorul unui condensator cu feţe plan paralele (Fig. 5.10). Grosimile celor două plăci sunt h_1 *şi* h_2 conductivităţile σ_1 şi σ_2 iar permitivităţile ε_1 *şi* ε_2. Între armăturile condensatorului este menţinută o diferenţă de potenţial U. Să se determine câmpul electric E, inducţia D, densitatea curentului j şi densitatea de sarcini libere şi sarcini legate pe cele trei suprafeţe de separare.

SOLUŢIE

La suprafaţa de separare dintre plăcile 1 şi 2 punem condiţia de continuitate a densităţii de curent.

$$j = \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2 \tag{5.66}$$

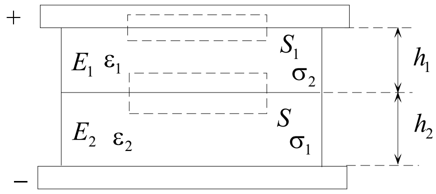

Figura 5.10: Condensator cu două plăci dielectrice plasate în interiorul său

În plus

$$U = E_1 h_1 + E_2 h_2 \tag{5.67}$$

De aici

$$E_1 = \frac{\sigma_2 U}{\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1}$$
$$E_2 = \frac{\sigma_1 U}{\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1}$$

Atunci

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 = \frac{\varepsilon_1 \sigma_2 U}{\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1} \tag{5.68}$$

$$D_2 = \varepsilon_2 E_2 = \frac{\varepsilon_2 \sigma_1 U}{\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1} \tag{5.69}$$

Densitatea de curent este:

$$j = \sigma_1 E_1 = \frac{\sigma_1 \sigma_2 U}{\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1}$$

Condiţia de continuitate a componentelor normale ale inducţiei electrice la suprafaţa de separare dintre cele două plăci este:

$$D_1 - D_2 = \sigma_l \tag{5.70}$$

unde σ_l este densitatea superficială de sarcini libere. Introducând 5.68 şi 5.69 rezultă:

$$\sigma_l = \frac{(\varepsilon_1 \sigma_{2-} \varepsilon_2 \sigma_1) U}{\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1}$$

Se aplică legea lui Gauss pe suprafaţa S.

$$SE_1 - SE_2 = \frac{S\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{S\left(\sigma_l + \sigma_p\right)}{\varepsilon_0}$$

unde σ este densitatea totală de sarcini iar σ_p este densitatea de sarcini de polarizare.

De aici rezultă, ţinând cont de 5.70:

$$\varepsilon_0\left(E_1 - E_2\right) = \left(D_1 - D_2\right) + \sigma_p$$

sau:

$$\sigma_p = \left(\varepsilon_0 E_1 - D_1\right) + \left(D_2 - \varepsilon_0 E_2\right)$$

Atunci:

$$\sigma_p = \frac{\sigma_2\left(\varepsilon_0 - \varepsilon_1\right) - \sigma_1\left(\varepsilon_0 - \varepsilon_2\right)}{\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1} U \tag{5.71}$$

La suprafaţa de separare dintre electrodul aflat la potenţial pozitiv şi dielectric:

$$D_1 - D_+ = \sigma_l^{(1)}$$

În interiorul plăcii metalice $D_+ = 0$. În relaţia de mai sus $\sigma_l^{(1)}$ este densitatea de sarcini libere pe această suprafaţă.

$$D_1 = \sigma_l^{(1)}$$

Aplicăm legea lui Gauss pentru suprafaţa de separaţie S_1.

$$E_1 S = \frac{\left(\sigma_l^{(1)} + \sigma_p^{(1)}\right) S}{\varepsilon_0}$$

Rezultă:

$$\sigma_p^{(1)} = \varepsilon_0 E_1 - \sigma_l^{(1)}$$

$$\sigma_p^{(1)} = \varepsilon_0 E_1 - \varepsilon_1 E_1 = \left(\varepsilon_0 - \varepsilon_1\right) E_1$$

La cea de a doua frontieră se procedează la fel. Se obţine:

$$\begin{aligned}\sigma_l^{(2)} &= -D_2 \\ \sigma_p^{(2)} &= -(\varepsilon_0 - \varepsilon_2) E_2\end{aligned}$$

PROBLEMA 5.18 O sferă de rază a încărcată cu sarcina Q este învelită într-un strat dielectric cu permitivitatea relativă ε_r astfel încât raza sferei astfel construită este b. Să se determine potenţialul la care se află sfera.

SOLUŢIE

Se aplică legea lui Gauss pentru o suprafaţă sferică cu raza r, unde $a < r < b$.

$$\iint \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} d\vec{S} = Q \tag{5.72}$$

Rezultă câmpul din interiorul dielectricului:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2} \tag{5.73}$$

Se aplică legea lui Gauss în afara dielectricului pentru o suprafaţă sferică cu raza $r > b$.

$$\iint \varepsilon_0 \vec{E} d\vec{S} = Q \tag{5.74}$$

Rezultă:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{5.75}$$

Atunci potenţialul este:

$$V = \int_a^\infty \vec{E}\, d\vec{r} = \int_a^b \vec{E}\, d\vec{r} + \int_b^\infty \vec{E}\, d\vec{r} \tag{5.76}$$

Ţinând cont de relaţiile 5.73 şi 5.75, 5.76 devine:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b} \quad (5.77)$$

PROBLEMA 5.19 Care trebuie să fie densitatea de volum a unui nor electronic uniform repartizat în spaţiul dintre plăcile unui condensator plan-paralel cu distanţa d dintre plăci astfel încât una dintre plăci să se afle la un potenţial nul iar cealaltă la potenţialul V_0. Pe placa aflată la potenţial nul câmpul electric este nul.

SOLUŢIE

Se alege axa Ox perpendiculară pe plăci, originea ei fiind pe una din acestea. Conform ecuaţiei Poisson

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (5.78)$$

Prin integrare se obţine:

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{\rho}{\varepsilon}x + C_1 \quad (5.79)$$

Cum $\vec{E} = -dV/dx$ rezultă că $dV/dx = 0$ când $x = 0$. Atunci $C_1 = 0$ Integrând cu aceste condiţii ecuaţia 5.79 se obţine:

$$V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{x^2}{2} + C_2 \quad (5.80)$$

Deoarece pentru $x = 0$ şi $V = 0$ rezultă $C_2 = 0$. Atunci:

$$V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{x^2}{2}$$

Când $x = d$, $V = V_0$ rezultă:

$$\rho = -\frac{2\varepsilon_0 V_0}{d^2}$$

PROBLEMA 5.20 Să se arate că într-un tub electronic curentul electronic care pleacă de la catod (potenţialul 0) şi ajunge la anod (potenţialul V_0) satisface ecuaţia:

$$I = KV_0^{\frac{3}{2}}$$

Se va ţine cont că emisia de electroni este continuă iar densitatea curentului electronic în spaţiul dintre armături este constantă în timp.

SOLUŢIE

Notăm cu S suprafaţa electrozilor şi cu d distanţa dintre electrozi.

Axa Ox se consideră perpendiculară pe electrozi. În cazul regimului staţionar densitatea de curent j este constantă de-a lungul axei Ox.

Deoarece V variază numai în direcţia perpendiculară pe electrozi, adică depinde numai de coordonata x, ecuaţia Poisson se scrie:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{5.81}$$

În cazul emisiei termoelectronice electronii pleacă de la catod cu viteze de ordinul vitezei de agitaţie termică, care sunt mici în comparaţie cu vitezele atinse de electroni sub influenţa câmpurilor electrice exterioare. De aceea vom considera vitezele iniţiale ale electronilor egale cu zero. Când electronul părăseşte catodul şi se află într-un punct în care potenţialul are valoarea V, viteză v este dată de expresia:

$$\frac{mv^2}{2} = eV$$

Densitatea curentului ce ajunge la anod este:

$$j = -\rho v$$

unde $\rho = ne$, n fiind densitatea de electroni.

Semnul minus apare deoarece curentul este determinat de sarcini negative.

Rezultă:

$$j = -\rho\sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

de unde

$$\rho = -j\sqrt{\frac{m}{2e}}V^{-\frac{1}{2}} \tag{5.82}$$

şi ecuaţia 5.81 devine:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}V^{-\frac{1}{2}} \tag{5.83}$$

Înmulţim ambii membri cu $\dfrac{dV}{dx}dx$ şi integrăm

$$\int_0^x \frac{d^2V}{dx^2}\frac{dV}{dx}dx = -\frac{j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}\int_0^x V^{-\frac{1}{2}}\frac{dV}{dx}dx$$

Deoarece la $x = 0$, $V(x) = 0$ şi $dV/dx = 0$ rezultă:

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = \frac{4j}{\varepsilon}\sqrt{\frac{m}{2e}}V^{\frac{1}{2}}$$

de unde:

$$\frac{dV}{dx} = 2\sqrt{\frac{j}{\varepsilon_0}}\sqrt[4]{\frac{m}{2e}}\cdot V^{\frac{1}{4}} \tag{5.84}$$

sau

$$\frac{dV}{V^{\frac{1}{4}}} = 2\sqrt{\frac{j}{\varepsilon_0}}\sqrt[4]{\frac{m}{2e}}\cdot dx$$

Integrând

$$\int_0^{V_0}\frac{dV}{V^{\frac{1}{4}}} = 2\sqrt{\frac{j}{\varepsilon_0}}\sqrt[4]{\frac{m}{2e}}\int_0^d dx$$

se obţine:

$$\frac{4}{3}V_0^{\frac{3}{4}} = 2\sqrt{\frac{j}{\varepsilon_0}}\sqrt[4]{\frac{m}{2e}}d \tag{5.85}$$

Din 5.85 rezultă:

$$j = \frac{4}{9}\sqrt{\frac{2e}{m}}\frac{\varepsilon_0}{d^2}V_0^{\frac{3}{2}} \tag{5.86}$$

Atunci intensitatea curentului este:

$$I = jS = \frac{4}{9}\sqrt{\frac{2e}{m}}\frac{\varepsilon_0 S}{d^2}V_0^{\frac{3}{2}} = KV_0^{\frac{3}{2}}$$

Aceasta este aşa numita lege "3/2"

PROBLEMA 5.21 Să se arate că unui câmp electrostatic uniform $\vec{E}_0$ îi corespunde potenţialul $V = -\vec{E}_0\vec{r}$

SOLUŢIE

Deoarece

$$\vec{E} = -\nabla\left(-\vec{E}_0\vec{r}\right) = \nabla\left(xE_{0x} + yE_{0y} + zE_{oz}\right) \tag{5.87}$$

Atunci:

$$E_x = \frac{\partial V}{\partial x} = E_{0x}$$

$$E_y = \frac{\partial V}{\partial y} = E_{0y}$$

$$E_z = \frac{\partial V}{\partial z} = E_{0z}$$

Rezultă:

$$\vec{E}_0 = E_{0x}\vec{e}_x + E_{0y}\vec{e}_y + E_{0z}\vec{e}_z$$

PROBLEMA 5.22 Să se determine câmpul magnetic produs de un curent I care parcurge un conductor rectiliniu infinit într-un punct P la distanţa R de acesta.

SOLUŢIE

Câmpul magnetic creat de elementul de curent $d\vec{x}$ are direcţia perpendiculară pe planul figurii 5.11 şi este date de:

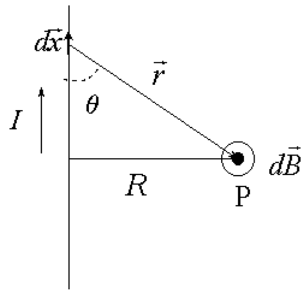

Figura 5.11: Câmpul magnetic produs de un curent rectiliniu infinit de lung

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \sin\theta}{r^2} \tag{5.88}$$

Cum orientarea câmpului magnetic este aceiaşi pentru toate elementele de curent, inducţia magnetică este dată de integrala expresiei 5.88:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx \sin\theta}{r^2} \tag{5.89}$$

Deoarece

$$r = \sqrt{x^2 + R^2}$$

$$\sin\theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

rezultă:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{R dx}{\left(x^2 + R^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \tag{5.90}$$

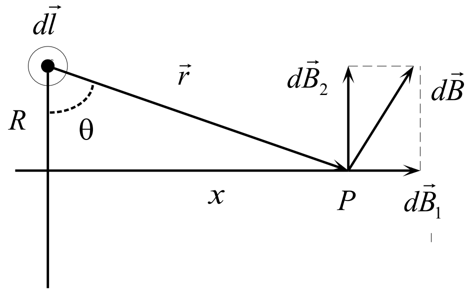

Figura 5.12: Câmpul creat de o spiră de curent

PROBLEMA 5.23 Fie o spiră de rază R prin care trece un curent I. Să se calculeze câmpul magnetic determinat de aceasta în punctele situate pe axa sa de simetrie.

SOLUŢIE

Se consideră un vector $d\vec{l}$ tangent la spira de rază R (Fig. 5.12). Unghiul dintre $d\vec{l}$ şi $\vec{r}$ este de 90^0. Vectorul $d\vec{B}$ este perpendicular pe planul format de $d\vec{l}$ şi $\vec{r}$ şi este situat în planul figurii.

$d\vec{B}$ se poate descompune în două componente: $d\vec{B}_1$ având direcţia normalei la planul spirei şi $d\vec{B}_2$ perpendiculară pe axa de simetrie. În punctul P contribuie doar componenta $d\vec{B}_1$ deoarece componentele $d\vec{B}_1$ la inducţia totală $\vec{B}$ corespunzătoare tuturor elementelor de curent sunt în sensul axei de simetrie şi se însumează; componenetele $d\vec{B}_2$ sunt perpendiculare pe această axă dar având sensuri contrare rezultanta lor este nulă.

Pentru elementul de curent considerat

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl\sin(\pi/2)}{r^2} \tag{5.91}$$

$$dB_1 = dB\cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\cos\theta dl}{r^2} \tag{5.92}$$

Cum:

$$r = \sqrt{R^2 + x^2}$$

$$\cos\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

Rezultă:

$$dB_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R dl}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

Integrând peste toate elementele de circuit şi ţinând cont că $\int dl = 2\pi R$, rezultă:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}} \tag{5.93}$$

Dacă $x \gg R$ atunci:

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I\pi R^2}{x^3} \tag{5.94}$$

Deoarece $m = I\pi R^2$ este momentul magnetic dipolar al spirei respective:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{x^3} \tag{5.95}$$

PROBLEMA 5.24 Să se arate că un câmp magnetostatic uniform admite potenţialul vector

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\left(\vec{B} \times \vec{r}\right) \tag{5.96}$$

SOLUŢIE

Proiectând produsului vectorial pe axele unui triedru cartezian se obţine:

$$A_x = \frac{1}{2}\left(B_y z - B_z y\right)$$

$$A_y = \frac{1}{2}\left(B_z x - B_x z\right)$$

$$A_z = \frac{1}{2}\left(B_x y - B_y x\right)$$

Cum B_x , B_y , B_z sunt constante rezultă:

$$\left(\nabla \times \vec{A}\right)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = B_x$$

$$\left(\nabla \times \vec{A}\right)_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = B_y$$

$$\left(\nabla \times \vec{A}\right)_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_z$$

Atunci:

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

PROBLEMA 5.25 Cunoscând potenţialul vector determinat de un moment magnetic dipolar $\vec{m}$

$$\vec{A}\left(\vec{r}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

să se calculeze câmpul magnetic corespunzător. Se va considera că momentul magnetic $\vec{m}$ este orientat de-a lungul axei Oz.

SOLUŢIE

Pentru simplificare se consideră că momentul de dipol magnetic are direcţia axei Oz:

$$\vec{m} = m\vec{e}_z \tag{5.97}$$

$$\vec{m} \times \vec{r} = -my\vec{e}_x + mx\vec{e}_y \tag{5.98}$$

Atunci

$$A_x = -\frac{\mu_0 m y}{4\pi r^3}$$

$$A_y = \frac{\mu_0 m x}{4\pi r^3}$$

$$A_z = 0$$

Cum

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{5.99}$$

$$B_x = \left(\nabla \times \vec{A}\right)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$B_x = -\frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right] = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{3xz}{r^5} \tag{5.100}$$

$$B_y = \left(\nabla \times \vec{A}\right)_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$B_y = -\frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right] = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{3yz}{r^5} \tag{5.101}$$

$$B_z = \left(\nabla \times \vec{A}\right)_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{3z^2 - r^2}{r^5} \tag{5.102}$$

unde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Atunci:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\left(mz\right)\vec{r}}{r^5} - \frac{m\vec{e}_z}{r^3}\right] \tag{5.103}$$

Generalizând:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\left(\vec{m}\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right] \tag{5.104}$$

PROBLEMA 5.26 Să se determine câmpul magnetic în interiorul unei bobine toroidale. O bobină toroidală este un solenoid de lungime finită curbat în forma unui tor. Se cunosc N (numărul de spire) şi curentul care trece prin bobină (Fig.5.13).

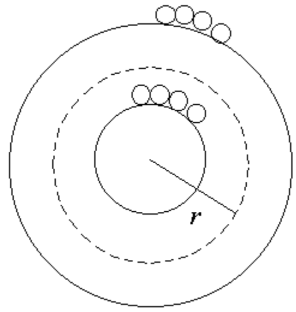

Figura 5.13: Bobină toroidală; liniile de câmp sunt cercuri

SOLUŢIE

Liniile câmpului magnetic formează cercuri concentrice în interiorul torului. Se aplică legea lui Ampère pe un contur circular de rază r.

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I \tag{5.105}$$

unde $I = I_0 N$. Se obţine:

$$B2\pi r = \mu_0 N I_0$$

Rezultă:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_0 N}{r} \tag{5.106}$$

PROBLEMA 5.27 Să se determine momentul magnetic al unei sfere cu raza R încărcate cu sarcina q uniform distribuită în volum care se roteşte cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe care trece prin centru.

SOLUŢIE

În elementul de volum $dV = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr$ sarcina este distribuită cu densitatea ρ:

$$dq = \rho dV \tag{5.107}$$

unde

$$\rho = \frac{3q}{4\pi R^3}$$

este densitatea volumică de sarcină.

Rezultă:

$$dq = \frac{3q}{4\pi R^3} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr \tag{5.108}$$

Curentul generat în rotaţie de sarcina dq este

$$dI = \frac{dq}{2\pi}\omega = \frac{3q\omega}{8\pi^2 R^3} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr \tag{5.109}$$

iar momentul magnetic asociat:

$$dm = \left(\pi r^2 \sin^2\theta\right) dI$$

sau

$$dm = \frac{3q\omega}{8\pi R^3} r^4 \sin^3\theta d\theta d\varphi dr \tag{5.110}$$

Momentul magnetic total este

$$m = \frac{3q\omega}{8\pi R^3} \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{q\omega R^2}{5}$$

PROBLEMA 5.28 Să se determine momentul magnetic al unei sfere cu raza R încărcate cu sarcina q uniform distribuită pe suprafaţa ei, care se roteşte în jurul axei proprii cu viteza unghiulară ω.

SOLUŢIE

Se ţine cont că dacă o sarcină q se roteşte în jurul unei axe la distanţa r de aceasta ea este echivalentă cu o buclă de curent cu intensitatea:

$$I = \frac{q}{T} = \frac{q\omega}{2\pi} \tag{5.111}$$

unde $\omega = 2\pi/T$ este viteza unghiulară cu care sarcina se roteşte pe orbita circulară.

Fie o zonă sferică cu raza $r = R\sin\theta$ şi aria $dS = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$
Sarcina superficială a acesteia este egală cu

$$dq = \sigma dS \tag{5.112}$$

Deoarece:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

Rezultă:

$$dq = \frac{q}{2}\sin\theta d\theta \tag{5.113}$$

Curentul generat de această sarcină în mişcare este

$$dI = dq\frac{\omega}{2\pi} = \frac{q\omega}{4\pi}\sin\theta d\theta \tag{5.114}$$

iar momentul magnetic produs:

$$dm = \left(\pi R^2 \sin^2\theta\right) dI = \pi R^2 \sin^2\theta \, \frac{q\omega}{4\pi} \sin\theta d\theta \tag{5.115}$$

Atunci momentul magnetic total este:

$$m = \frac{qR^2\omega}{4}\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{qR^2\omega}{3}$$

PROBLEMA 5.29 Să se determine câmpul magnetic în interiorul şi în exteriorul unui cilindru de rază R prin care circulă un curent de densitate j, ştiind că liniile de câmp sunt cercuri concentrice în plane perpendiculare pe axa cilindrului.

SOLUŢIE

a) Pentru calculul câmpului magnetic în interiorul cilindrului se aplică legea lui Ampère pe un contur circular cu centrul pe axa cilindrului aflat într-un plan perpendicular pe cilindru de rază $r < R$.

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \int\int \vec{j}d\vec{S} \tag{5.116}$$

unde S este suprafaţa care se spijină pe conturul C.

Rezultă:

$$2\pi r B = \mu_0 j \pi r^2$$

de unde:

$$B = \frac{\mu_0 j r}{2} \tag{5.117}$$

b) Pentru calculul câmpului magnetic în exteriorul cilindrului se aplică legea lui Ampère pe un contur circular cu centrul pe axa cilindrului cu raza $r > R$.

Se obţine:

$$2\pi r B = \mu_0 j \pi R^2$$

de unde:

$$B = \frac{\mu_0 R^2 j}{2r} \tag{5.118}$$

PROBLEMA 5.30 Într-o regiune din spaţiu există un câmp magnetic uniform paralel cu axa Oz. Mărimea lui variază în timp astfel:

$$B = B_0 \sin \omega t \tag{5.119}$$

Să se determine câmpul electric în fiecare punct.

SOLUŢIE

Pentru a calcula câmpul electric vom alege un contur circular de rază r într-un plan perpendicular pe axa Oz. Se aplică legea inducţiei electromagnetice:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt} \tag{5.120}$$

unde ϕ este fluxul magnetic prin suprafaţa $S = \pi r^2$ Dar:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = 2\pi r E$$

şi

$$\Phi = BS = \pi r^2 B_0 \sin \omega t$$

Atunci relaţia 5.120 devine:

$$2\pi r E = -\pi r^2 B_0 \omega \cos \omega t \tag{5.121}$$

De aici rezultă valoarea câmpului electric:

$$E = -\frac{1}{2} r B_0 \omega \cos \omega t$$

PROBLEMA 5.31 Un condensator plan cu plăcile circulare de rază R paralele este conectat la un generator de curent alternativ astfel încât pe plăci sarcina care se acumulează variază în timp după legea:

$$q = q_0 \sin \omega t$$

Liniile câmpului electric sunt cercuri concentrice având ca axă de simetrie axa cilindrului. Se cere câmpul electric în punctele situate la distanţa r de axa condensatorului când
a) $r \leq R$
b) $r > R$

SOLUŢIE

Se consideră un contur circular cu centrul pe axa cilindrului într-un plan paralel cu plăcile condensatorului. Aplicând legea lui Ampère se obţine:

$$\int_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \int \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} \tag{5.122}$$

a) Dacă $r < R$ rezultă:

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 \varepsilon_0 r \frac{dE}{dt} \tag{5.123}$$

Deoarece

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 A} = \frac{q_0}{\varepsilon_0 A} \sin \omega t$$

unde $A = \pi R^2$ este aria armăturilor condensatorului, atunci:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q_0}{\varepsilon_0 A}\omega \cos \omega t \tag{5.124}$$

Atunci relaţia 5.123 devine:

$$B = \frac{\mu_0 \omega r q_0}{2\pi R^2} \cos \omega t \tag{5.125}$$

a) Dacă $r > R$ din relaţia 5.122 se obţine:

$$B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 R^2}{2r} \frac{dE}{dt} \tag{5.126}$$

Astfel ţinând cont de relaţia 5.124 rezultă:

$$B = \frac{\mu_0 q_0 \omega \cos \omega t}{2\pi r} \tag{5.127}$$

Bibliografie

[1] V. V. Batygin, I. N. Toptygin – *Problems in Electrodynamics* , Academic Press, London and New York, 1964

[2] Cornelia Motoc – *Fizică* , Editura All. Bucureşti 1994

[3] Ion M. Popescu – *Fizică* , Editura didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982

[4] Ion M. Popescu, Gabriela Cone, Gheorghe Stanciu – *Probleme rezolvate de fizică* , Editura didactică şi Pedagocgică, Bucureşti, 1993

[5] H. Goldstein – *Classical Mechanics* , Addison - Wesley Publishing Co. Mass. 1980

[6] G. L .Kotkin, V. G. Serbo – *Collection of Problems in Classical Mechanics* , Pergamon Press, 1971

[7] L. D. Landau, E. M. Lifsitz – *Fizică statistică* , Editura Tehnică, Bucureşti 1998

[8] Ryogo Kubo – *Thermodynamics* , North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968

[9] Ryogo Kubo – *Statistical Mechanics* , North Holland Publising Company, Amsterdam, 1965