Probleme de fizică

Emil Petrescu Viorel Păun

October 6, 2004

Cuprins

Capitolul 5

CÂMPUL ELECTROMAGNETIC

PROBLEMA 5.1 O sarcină q pozitivă este distribuită uniform în interiorul unei sfere dielectrice omogene cu permitivitatea ε. Se cere intensitatea câmpului electric în afara sferei şi în interiorul ei.

SOLUŢIE

Din considerente de simetrie câmpul electric în interiorul şi în exteriorul sferei are direcţia razei sferei (Fig. 5.1). Se foloseşte forma integrală a legii lui Gauss:

$$\iint \vec{D} d\vec{S} = q \tag{5.1}$$

Deoarece pentru un mediu omogen $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ relaţia 5.1 devine pentru punctele din exteriorul sferei:

$$\varepsilon_0 \iint \vec{E} \vec{n} dS = q$$

Atunci:

$$E 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

de unde

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \tag{5.2}$$

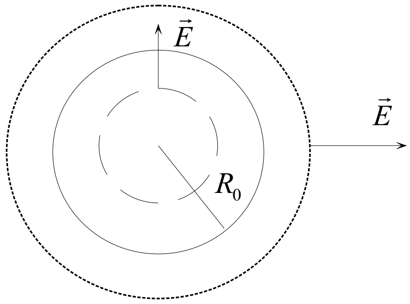

Figura 5.1: Câmpul electric al unei sfere dielectrice încărcate uniform cu sarcină electrică

Pentru punctele din interiorul sferei relaţia 5.1 devine

$$E4\pi r^2 = \frac{q'}{\varepsilon} \tag{5.3}$$

unde q' reprezintă sarcina din interiorul sferei de rază r. Cum:

$$q' = q\frac{\frac{4}{3}\pi r'^3}{\frac{4}{3}\pi R_0^3} = q\left(\frac{r}{R_0}\right)^3$$

utilizând 5.3 se obţine intensitatea câmpului electric în interiorul sferei:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{qr}{R_0^3}$$

PROBLEMA 5.2 Se dă o distribuţie liniară de sarcină, a cărei densitate este λ (sarcina pe unitatea de lungime). Să se găsească expresia intensităţii câmpului electric la distanţa r de aceasta dacă distribuţia de sarcină se găseşte în vid.

SOLUŢIE

Din considerente de simetrie, $\vec{E}$ are o direcţie radială ca în Fig. 5.2. Pentru a determina câmpul electric se consideră o suprafaţă cilindrică a cărei axă de simetrie o constituie distribuţia liniară de sarcină. Se

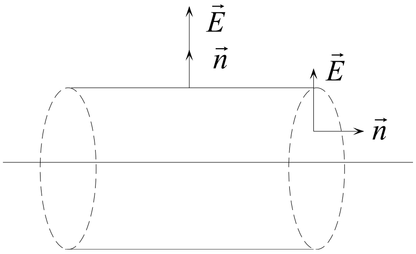

Figura 5.2: Câmpul electric al unei distribuţii liniare de sarcină

observă ca fluxul câmpului electric este diferit de zero doar pe suprafaţa laterală a cilindrului. Pe baze fluxul este nul deoarece unghiul dintre normală şi intensitatea câmpului electric este $\pi/2$. Deoarece $D = \varepsilon_0 E$ legea lui Gauss se scrie

$$\varepsilon_0 \int\!\!\int \vec{E}\vec{n} dS = q$$

Rezultă:

$$\varepsilon_0 E \left(2\pi r h\right) = \lambda h$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{5.4}$$

PROBLEMA 5.3 Într-un plan există o distribuţie infinită de sarcină, cu densitatea superficială σ. Să se determine câmpul electric creat de aceasta.

SOLUŢIE

Din considerente de simetrie vectorul intensitate câmp electric este perpendicular pe planul încărcat electric (Fig. 5.3). Aceasta se datorează faptului că pentru orice element de sarcină din plan se poate găsi un element simetric. Pentru aceste două elemente componentele orizontale ale câmpurilor create se anulează şi nu rămân să se însumeze decât componentele verticale. Pentru aplicarea legii lui Gauss se alege ca suprafaţă

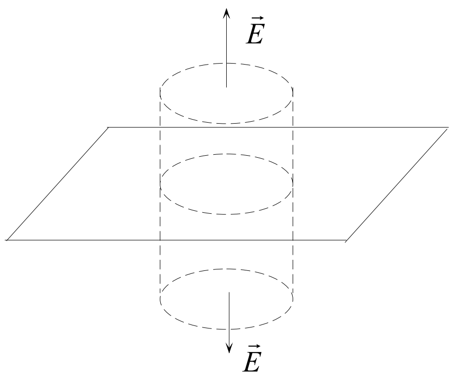

Figura 5.3: Câmpul unei distribuţii plane de sarcină

închisă un cilindru cu bazele ΔS simetrice faţă de planul încărcat electric şi cu generatoarea perpendiculară pe acest plan. Se observă ca doar pe baze există un flux diferit de zero. Pe suprafaţa laterală normala şi vectorul intensitate câmp electric sunt perpendiculare. Aplicând legea lui Gauss:

$$\varepsilon_0 \left(E\Delta S + E\Delta S\right) = \sigma\Delta S$$

rezultă:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

PROBLEMA 5.4 Permitivitatea unei sfere neomogene de rază R aflată în vid variază după legea

$$\varepsilon\left(r\right) = \varepsilon_0\left(\frac{r}{R} + 2\right) \tag{5.5}$$

Să se calculeze câmpul electric creat de o sarcină Q distribuită în întregul volum al sferei.

SOLUŢIE

Aplicăm legea lui Gauss

$$\iint \vec{D}\vec{n}dS = Q$$

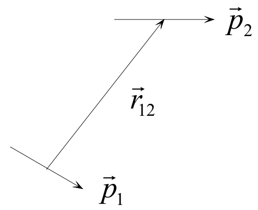

Figura 5.4: Dipoli ce interacţionează între ei

Pentru $r < R$ unde R este raza sferei rezultă:

$$D4\pi r^2 = Q_{int} \tag{5.6}$$

Ţinând cont de variaţia permitivităţii mediului şi de 5.5 se obţine:

$$\varepsilon_0 \left(\frac{r}{R} + 2\right) E4\pi r^2 = Q_{int} = \frac{r^3}{R^3} Q$$

Rezultă:

$$E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^2 (r + 2R)} \tag{5.7}$$

Pentru $r > R_0$ aplicarea legii lui Gauss pe o suprafaţă sferică concentrică cu sfera data conduce la:

$$\varepsilon_0 E4\pi r^2 = Q$$

Rezultă:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{5.8}$$

PROBLEMA 5.5 Să se determine energia potenţială de interacţie dintre doi dipoli $\vec{p}_1$ şi $\vec{p}_2$ aflaţi la distanţa $\vec{r}_{12}$ unul de altul (Fig. 5.4).

SOLUŢIE

Energia potenţială a unui dipol în câmp electric este:

$$W = -\vec{p}\vec{E} \tag{5.9}$$

Considerăm dipolul $\vec{p}_2$ în câmpul electric $\vec{E}_1$ al dipolului $\vec{p}_1$ unde:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\left(\vec{p}_1\vec{r}_{12}\right)\vec{r}_{12}}{r_{12}^5} - \frac{\vec{p}_1}{r_{12}^3}\right] \tag{5.10}$$

Atunci energia de interacţie se scrie:

$$W = -\vec{p}_2\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{p}_1\vec{p}_2}{r_{12}^3} - 3\frac{\left(\vec{p}_1\vec{r}_{12}\right)\left(\vec{p}_2\vec{r}_{12}\right)}{r_{12}^5}\right] \tag{5.11}$$

PROBLEMA 5.6 Un mediu neomogen dar izotrop, caracterizat prin constantele ε si σ este străbătut de un curent staţionar de densitate $\vec{j}$. Să se arate că în mediul respectiv există sarcini de volum şi să se calculeze densitatea ρ a acestora.

SOLUŢIE

Conform legii lui Gauss:

$$\nabla\vec{D} = \rho \tag{5.12}$$

Cum:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \tag{5.13}$$

şi

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \tag{5.14}$$

rezultă:

$$\rho = \nabla\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\vec{j}\right) \tag{5.15}$$

Utilizând identiatea

$$\nabla\left(a\vec{b}\right) = a\nabla\vec{b} + \vec{b}\nabla a$$

se obţine:

$$\nabla\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\vec{j}\right) = \frac{\varepsilon}{\sigma}\nabla\vec{j} + \vec{j}\nabla\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \tag{5.16}$$

Deoarece densitatea de curent $\vec{j}$ este aceiaşi în orice punct al mediului $\nabla\vec{j} = 0$, relaţia 5.16 devine:

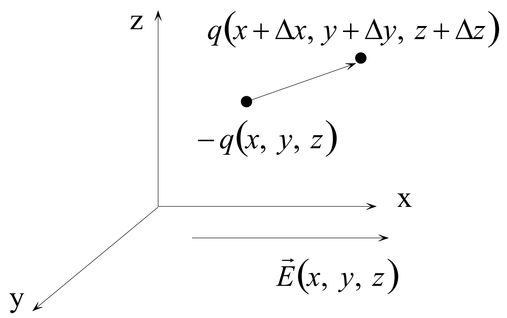

Figura 5.5: Dipol în câmp electric neuniform

$$\rho = \vec{j}\,\nabla\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \tag{5.17}$$

PROBLEMA 5.7 Să se calculeze forţa ce acţionează asupra unui dipol arbitrar orientat într-un câmp electric neuniform $\vec{E}(x, y, z)$.

SOLUŢIE

Se consideră că distanţa dintre cele două sarcini ale dipolului este Δl, iar segmentul respectiv este orientat în aşa fel încât proiecţiile acestei distanţe pe axele de coordonate Δx, Δy, Δz să fie diferite de zero (Fig. 5.5). Forţa care acţionează asupra dipolului pe direcţia Ox este:

$$F_x = qE_x\left(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z\right) - qE_x\left(x, y, z\right) \tag{5.18}$$

Deoarece:

$$E_x\left(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z\right) = E_x\left(x, y, z\right) + \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial E_x}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial E_x}{\partial z}\Delta z$$

se obţine:

$$F_x = q\Delta x\frac{\partial E_x}{\partial x} + q\Delta y\frac{\partial E_x}{\partial y} + q\Delta z\frac{\partial E_x}{\partial z} \tag{5.19}$$

Dar:

$$\vec{p} = (q\Delta x)\,\vec{e}_x + (q\Delta y)\,\vec{e}_y + (q\Delta z)\,\vec{e}_z \tag{5.20}$$

şi relaţia 5.19 devine:

$$F_x = p_x\frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y\frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z\frac{\partial E_x}{\partial z} = \vec{p}\;\nabla E_x \tag{5.21}$$

În mod analog se obţin şi celelalte componente ale forţei ce acţionează asupra dipolului:

$$F_y = \vec{p}\;\nabla E_y \tag{5.22}$$

$$F_z = \vec{p}\;\nabla E_z \tag{5.23}$$

În concluzie:

$$\vec{F} = (\vec{p}\;\nabla)\,\vec{E}$$

PROBLEMA 5.8 Să se determine potenţialul creat de un dipol cu momentul dipolar $\vec{p}$ şi cu distanţa dintre cele două sarcini egală cu $2a$ (Fig. 5.6).

SOLUŢIE

Conform Fig. 5.6 potenţialul în punctul P este suma potenţialelor celor două sarcini

$$V = V_1 + V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \tag{5.24}$$

Dacă $r \gg 2a$ atunci:

$$r_1 r_2 \simeq r^2$$

unde r este distanţa de la centrul dipolului la punctul considerat. Deoarece:

$$r_2 - r_1 \simeq 2a\cos\theta$$

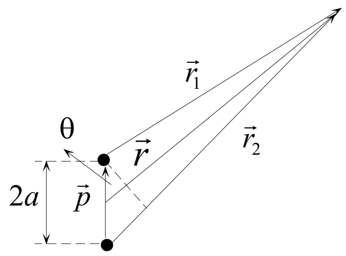

Figura 5.6: Schema pentru calculul potenţialului creat de un dipol

relaţia 5.24 devine:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a\cos\theta}{r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{5.25}$$

Deoarece

$$\vec{p}\,\vec{r} = p\,r\cos\theta$$

potenţialul se exprimă astfel:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\,\vec{r}}{r^3} \tag{5.26}$$

PROBLEMA 5.9 Să se determine câmpul electric creat de un dipol, (ale cărui sarcini q şi $-q$ se află la distanţa $2a$), într-un punct P situat la distanţa r în lungul perpendicularei dusă la jumătatea distanţei dintre cele două sarcini (Fig. **??**).

SOLUŢIE

Câmpul electric rezultant este:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \tag{5.27}$$

unde

$$E_1 = E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2 + r^2\right)} \tag{5.28}$$

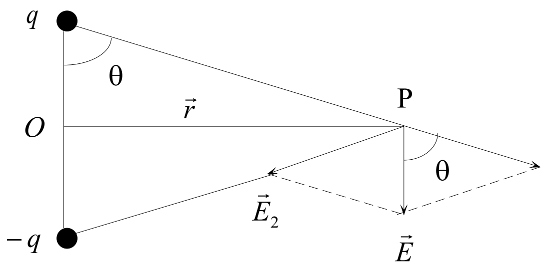

Figura 5.7: Câmpul electric creat de un dipol într-un punct P situat pe perpendiculara dusă la jumătatea distanţei dintre cele două sarcini

Câmpul electric rezultant (Fig. **??**) este perpendicular pe dreapta OP şi

$$E = 2E_1 \cos\theta = 2E_1 \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} \tag{5.29}$$

Atunci

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2a}{\left(a^2 + r^2\right)^{3/2}} \tag{5.30}$$

Dacă $r \gg a$ atunci:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2aq}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p}{r^3} \tag{5.31}$$

PROBLEMA 5.10 Potenţialul câmpului electrostatic creat de un dipol de moment dipolar $\vec{p}$ aflat în vid este

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}\,\vec{r}}{r^3}$$

Să se calculeze intensitatea câmpului electric.

SOLUŢIE

Pentru aceasta se utilizează formula:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \frac{\vec{p}\,\vec{r}}{r^3} \tag{5.32}$$

Vom demonstra identitatea

$$\nabla (AB) = A\nabla B + B\nabla A \tag{5.33}$$

unde A şi B sunt scalari

$$\nabla (AB) = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x}(AB) + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y}(AB) + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}(AB)$$

$$\nabla (AB) = \vec{e}_x \left(A\frac{\partial B}{\partial x} + B\frac{\partial A}{\partial x} \right) + \vec{e}_y \left(A\frac{\partial B}{\partial y} + B\frac{\partial A}{\partial y} \right) + \vec{e}_z \left(A\frac{\partial B}{\partial z} + B\frac{\partial A}{\partial z} \right)$$

$$\nabla (AB) = A \left(\frac{\partial B}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial B}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial B}{\partial z}\vec{e}_z \right) + B \left(\frac{\partial A}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial A}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{e}_z \right)$$

Astfel identitatea 5.33 este demonstrată

În cazul problemei propuse se consideră $A = \vec{p}\,\vec{r}$ şi $B = 1/r^3$ şi se obţine:

$$\nabla \left(\frac{\vec{p}\,\vec{r}}{r^3} \right) = (\vec{p}\,\vec{r})\,\nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) + \frac{1}{r^3}\nabla (\vec{p}\vec{r}) \tag{5.34}$$

Dar:

$$\nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3} \right)\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^3} \right)\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^3} \right)\vec{e}_y \tag{5.35}$$

Deoarece

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3}{r^4}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{3x}{r^5} \tag{5.36}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3y}{r^5} \tag{5.37}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3z}{r^5} \tag{5.38}$$

putem exprima relaţia 5.35 astfel:

$$\nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3x\vec{e}_x + 3y\vec{e}_y + 3z\vec{e}_z}{r^5} = -\frac{3\vec{r}}{r^5} \tag{5.39}$$

Cum:

$$\nabla\left(\vec{p}\vec{r}\right)=\nabla\left(xp_x+yp_y+zp_z\right)=\vec{p}_x\vec{e}_x+\vec{p}_y\vec{e}_y+\vec{p}_z\vec{e}_z=\vec{p} \tag{5.40}$$

atunci din relaţiile 5.39 şi 5.40 se obţine:

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\left(\vec{p}\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{p}}{r^3}\right] \tag{5.41}$$

PROBLEMA 5.11 Să se găsească capacitatea unui condensator având electrozii de formă sferică cu razele a şi b dacă permitivitatea absolută a mediului dintre cei doi electrozi este:

$$\varepsilon\left(r\right)=\begin{cases}\varepsilon_1 & \text{când} \quad a\le r<c\\ \varepsilon_2 & \text{când} \quad c\le r\le b\end{cases}$$

SOLUŢIE

Aplicând legea lui Gauss pentru suprafaţa S_1 când $a\le r<c$ se obţine:

$$E_1=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2} \tag{5.42}$$

Aplicând legea lui Gauss pentru suprafaţa S_2 când $c\le r<b$ se obţine:

$$E_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2} \tag{5.43}$$

Tensiunea dintre armăturile condensatorului este:

$$U=\int_a^b Edr=\int_a^c E_1dr+\int_c^b E_2dr$$

Rezultă:

$$U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)$$

Astfel se poate calcula capacitatea condensatorului.

$$C = \frac{Q}{U} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)\right]^{-1}$$

PROBLEMA 5.12 Un condensator cilindric este realizat din doi cilindri concentrici cu razele a şi $b > a$ şi lungimea l. Cunoscând că cei doi cilindri sunt în vid să se calculeze capacitatea acestui dispozitiv considerând că lungimea lui este foarte mare.

SOLUŢIE

Se calculează câmpul electric în interiorul condensatorului respectiv. Pentru aceasta se utilizează legea lui Gauss sub formă integrală. Pentru efectuarea integralei de suprafaţă se consideră o suprafaţă cilindrică coaxială cu cei doi cilindri, de lungime l şi rază r. Datorită simetriei, câmpul electric are aceiaşi valoare pe suprafaţa laterală. Pe bazele cilindrului considerat fluxul este nul.

Atunci relaţia

$$\varepsilon_0 \int\int \vec{E}d\vec{S} = q \tag{5.44}$$

devine:

$$\varepsilon_0 2\pi r l E = q$$

de unde:

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l r} \tag{5.45}$$

Tensiunea dintre armături este:

$$U = \int_a^b \vec{E}d\vec{r} = \int_a^b \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a} \tag{5.46}$$

iar capacitatea condensatorului este:

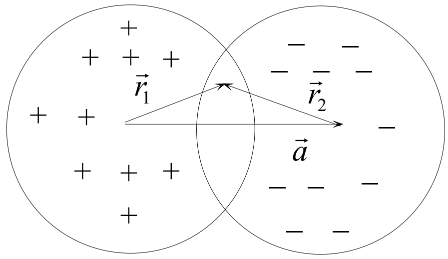

Figura 5.8: Cavitate formată prin intersecţia a două sfere încărcate

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(b/a)} \tag{5.47}$$

PROBLEMA 5.13 Care este câmpul electric într-o cavitate formată prin intersecţia a două sfere încărcate cu densităţile de sarcină ρ şi $-\rho$ uniform distribuite în volumul lor. Distanţa dintre centrele celor două sfere este a (Fig. 5.8).

SOLUŢIE

Aşa cum am discutat anterioar câmpul electric într-o sferă uniform încărcată la distanţa $r < R$ este:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} \tag{5.48}$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziţie din centrul sferei la punctul de observaţie, Q este sarcina totală, ρ este densitatea de sarcină şi R este raza sferei.

Astfel în interiorul cavităţii câmpul electric este dat de suprapunerea câmpurilor datorate celor două sfere considerate uniform încărcate.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1 - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a} \tag{5.49}$$

Rezultă că în interiorul cavităţii câmpul este uniform

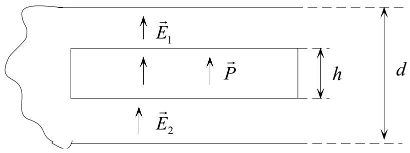

Figura 5.9: Placă dielectrică plasată între placile unui condensator aflate la acelaşi potenţial

PROBLEMA 5.14 O placă de dielectric de grosime h având o polarizare P = const este plasată în interiorul unui condensator cu feţe plan paralele, armăturile condensatorului fiind legate printr-un conductor. Vectorul polarizare este perpendicular pe cele două feţe ale dielectricului. Să se determine câmpul electric şi inducţia în interiorul plăcii dielectrice. Distanţa dintre armăturile condensatorului este d.

SOLUŢIE

Notăm cu $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$ intensităţile câmpului electric în cele trei regiuni şi cu $\vec{D}_1$, $\vec{D}_2$, $\vec{D}_3$ inducţiile câmpului electric (Fig. 5.9).

Vom pune condiţia de continuitate a componentei normale a vectorului inducţie câmp electric

$$D_1 = D_2 = D_3 \tag{5.50}$$

Deoarece

$$D_1 = \varepsilon_0 E_1$$

$$D_3 = \varepsilon_0 E_3$$

Rezultă că $E_1 = E_3$. Cum:

$$D_2 = \varepsilon_0 E_2 + P \tag{5.51}$$

condiţia de continitate 5.50 se scrie:

$$\varepsilon_0 E_1 = \varepsilon_0 E_2 + P \tag{5.52}$$

de unde

$$E_1 = E_2 + \frac{P}{\varepsilon_0} \tag{5.53}$$

Condiţia ca diferenţa de potenţial dintre cele două plăci să fie nulă este:

$$E_1 (d - h) + E_2 h = 0$$

şi substituind E_1 din 5.53 se obţine:

$$\left(E_2 + \frac{P}{\varepsilon_0}\right)(d - h) + E_2 h = 0 \tag{5.54}$$

Rezultă:

$$E_2 = -\frac{P}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h}{d}\right) \tag{5.55}$$

$$D_2 = \varepsilon_0 E_2 + P = P\frac{h}{d} \tag{5.56}$$

PROBLEMA 5.15 Fie o placă deformată de grosime $2d$. Datorită acestui fapt polarizarea nu este uniformă: polarizarea în mijlocul plăcii este P_0 şi în rest este daţa de expresia:

$$P = P_0 \left(1 - \frac{x^2}{d^2}\right) \tag{5.57}$$

unde x este distanţa de la mijlocul plăcii la punctul considerat. Vectorul polarizare este orientat de-a lungul axei Ox perpendiulară pe feţele plăcii dielectrice. Să se determine câmpul electric în interiorul şi în exteriorul plăcii, precum şi diferenţa de potenţial dintre suprafeţele laterale ale acesteia.

SOLUŢIE

Deoarece nici în interiorul plăcii nici în exteriorul plăcii nu există sarcină electrică liberă:

$$\vec{D} = 0 \tag{5.58}$$

Cum

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{5.59}$$

în exteriorul plăcii dielectrice polarizarea este nulă şi rezultă $\vec{E} = 0$.

În interiorul plăcii $P \neq 0$ şi atunci din relaţiile 5.58 şi 5.59 se obţine:

$$E = -\frac{1}{\varepsilon_0} P = -\frac{P_0}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x^2}{d^2}\right) \tag{5.60}$$

Diferenţa de potenţial dintre plăci este:

$$V_2 - V_1 = -\int\limits_{-d}^{d} E dx = \frac{P_0}{\varepsilon_0}\int\limits_{-d}^{d}\left(1 - \frac{x^2}{d^2}\right) dx = \frac{4}{3\varepsilon_0} P d \tag{5.61}$$

PROBLEMA 5.16 Să se arate că într-un conductor omogen densitatea de sarcină electrică liberă tinde la zero.

SOLUŢIE

Se consideră ecuaţia de continuitate:

$$\nabla \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{5.62}$$

Deoarece

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \tag{5.63}$$

ecuaţia 5.62 devine:

$$\sigma \nabla \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{5.64}$$

sau

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \nabla \left(\varepsilon_0 \vec{E}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\nabla\vec{D} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{5.65}$$

Notăm

$$\frac{\varepsilon_0}{\sigma} = +\Im$$

Cum $\nabla\vec{D} = \rho$ ecuaţia 5.65 devine:

$$\frac{1}{\Im}\rho + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Prin integrarea acestei ecuaţii rezultă:

$$\ln\frac{\rho}{\rho_0} = -\frac{t}{\Im}$$

adică:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\Im}}$$

Rezultă că densitatea de sarcină electrică liberă din interiorul unui conductor scade exponenţial în timp şi după un timp suficient de lung se va anula.

PROBLEMA 5.17 Două plăci dielectrice paralele sunt plasate în interiorul unui condensator cu feţe plan paralele (Fig. 5.10). Grosimile celor două plăci sunt h_1 *şi* h_2 conductivităţile σ_1 şi σ_2 iar permitivităţile ε_1 *şi* ε_2. Între armăturile condensatorului este menţinută o diferenţă de potenţial U. Să se determine câmpul electric E, inducţia D, densitatea curentului j şi densitatea de sarcini libere şi sarcini legate pe cele trei suprafeţe de separare.

SOLUŢIE

La suprafaţa de separare dintre plăcile 1 şi 2 punem condiţia de continuitate a densităţii de curent.

$$j = \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2 \tag{5.66}$$

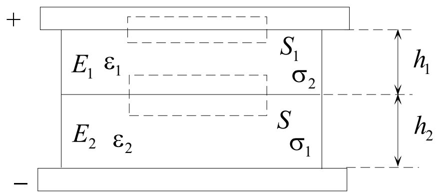

Figura 5.10: Condensator cu două plăci dielectrice plasate în interiorul său

În plus

$$U = E_1 h_1 + E_2 h_2 \tag{5.67}$$

De aici

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\sigma_2 U}{\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1} \\ E_2 &= \frac{\sigma_1 U}{\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1} \end{aligned}$$

Atunci

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 = \frac{\varepsilon_1 \sigma_2 U}{\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1} \tag{5.68}$$

$$D_2 = \varepsilon_2 E_2 = \frac{\varepsilon_2 \sigma_1 U}{\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1} \tag{5.69}$$

Densitatea de curent este:

$$j = \sigma_1 E_1 = \frac{\sigma_1 \sigma_2 U}{\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1}$$

Condiţia de continuitate a componentelor normale ale inducţiei electrice la suprafaţa de separare dintre cele două plăci este:

$$D_1 - D_2 = \sigma_l \tag{5.70}$$

unde σ_l este densitatea superficială de sarcini libere. Introducând 5.68 şi 5.69 rezultă:

$$\sigma_l = \frac{(\varepsilon_1 \sigma_{2-} \varepsilon_2 \sigma_1) U}{\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1}$$

Se aplică legea lui Gauss pe suprafaţa S.

$$SE_1 - SE_2 = \frac{S\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{S\left(\sigma_l + \sigma_p\right)}{\varepsilon_0}$$

unde σ este densitatea totală de sarcini iar σ_p este densitatea de sarcini de polarizare.

De aici rezultă, ţinând cont de 5.70:

$$\varepsilon_0\left(E_1 - E_2\right) = \left(D_1 - D_2\right) + \sigma_p$$

sau:

$$\sigma_p = \left(\varepsilon_0 E_1 - D_1\right) + \left(D_2 - \varepsilon_0 E_2\right)$$

Atunci:

$$\sigma_p = \frac{\sigma_2\left(\varepsilon_0 - \varepsilon_1\right) - \sigma_1\left(\varepsilon_0 - \varepsilon_2\right)}{\sigma_1 h_2 + \sigma_2 h_1} U \tag{5.71}$$

La suprafaţa de separare dintre electrodul aflat la potenţial pozitiv şi dielectric:

$$D_1 - D_+ = \sigma_l^{(1)}$$

În interiorul plăcii metalice $D_+ = 0$. În relaţia de mai sus $\sigma_l^{(1)}$ este densitatea de sarcini libere pe această suprafaţă.

$$D_1 = \sigma_l^{(1)}$$

Aplicăm legea lui Gauss pentru suprafaţa de separaţie S_1.

$$E_1 S = \frac{\left(\sigma_l^{(1)} + \sigma_p^{(1)}\right) S}{\varepsilon_0}$$

Rezultă:

$$\sigma_p^{(1)} = \varepsilon_0 E_1 - \sigma_l^{(1)}$$

$$\sigma_p^{(1)} = \varepsilon_0 E_1 - \varepsilon_1 E_1 = \left(\varepsilon_0 - \varepsilon_1\right) E_1$$

La cea de a doua frontieră se procedează la fel. Se obţine:

$$\sigma_l^{(2)} = -D_2$$
$$\sigma_p^{(2)} = -(\varepsilon_0 - \varepsilon_2) E_2$$

PROBLEMA 5.18 O sferă de rază a încărcată cu sarcina Q este învelită într-un strat dielectric cu permitivitatea relativă ε_r astfel încât raza sferei astfel construită este b. Să se determine potenţialul la care se află sfera.

SOLUŢIE

Se aplică legea lui Gauss pentru o suprafaţă sferică cu raza r, unde $a < r < b$.

$$\iint \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} d\vec{S} = Q \tag{5.72}$$

Rezultă câmpul din interiorul dielectricului:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2} \tag{5.73}$$

Se aplică legea lui Gauss în afara dielectricului pentru o suprafaţă sferică cu raza $r > b$.

$$\iint \varepsilon_0 \vec{E} d\vec{S} = Q \tag{5.74}$$

Rezultă:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{5.75}$$

Atunci potenţialul este:

$$V = \int_a^\infty \vec{E}\, d\vec{r} = \int_a^b \vec{E}\, d\vec{r} + \int_b^\infty \vec{E}\, d\vec{r} \tag{5.76}$$

Ţinând cont de relaţiile 5.73 şi 5.75, 5.76 devine:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b} \quad (5.77)$$

PROBLEMA 5.19 Care trebuie să fie densitatea de volum a unui nor electronic uniform repartizat în spaţiul dintre plăcile unui condensator plan-paralel cu distanţa d dintre plăci astfel încât una dintre plăci să se afle la un potenţial nul iar cealaltă la potenţialul V_0. Pe placa aflată la potenţial nul câmpul electric este nul.

SOLUŢIE

Se alege axa Ox perpendiculară pe plăci, originea ei fiind pe una din acestea. Conform ecuaţiei Poisson

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (5.78)$$

Prin integrare se obţine:

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{\rho}{\varepsilon}x + C_1 \quad (5.79)$$

Cum $\vec{E} = -dV/dx$ rezultă că $dV/dx = 0$ când $x = 0$. Atunci $C_1 = 0$ Integrând cu aceste condiţii ecuaţia 5.79 se obţine:

$$V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{x^2}{2} + C_2 \quad (5.80)$$

Deoarece pentru $x = 0$ şi $V = 0$ rezultă $C_2 = 0$. Atunci:

$$V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{x^2}{2}$$

Când $x = d$, $V = V_0$ rezultă:

$$\rho = -\frac{2\varepsilon_0 V_0}{d^2}$$

PROBLEMA 5.20 Să se arate că într-un tub electronic curentul electronic care pleacă de la catod (potenţialul 0) şi ajunge la anod (potenţialul V_0) satisface ecuaţia:

$$I = KV_0^{\frac{3}{2}}$$

Se va ţine cont că emisia de electroni este continuă iar densitatea curentului electronic în spaţiul dintre armături este constantă în timp.

SOLUŢIE

Notăm cu S suprafaţa electrozilor şi cu d distanţa dintre electrozi.

Axa Ox se consideră perpendiculară pe electrozi. În cazul regimului staţionar densitatea de curent j este constantă de-a lungul axei Ox.

Deoarece V variază numai în direcţia perpendiculară pe electrozi, adică depinde numai de coordonata x, ecuaţia Poisson se scrie:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{5.81}$$

În cazul emisiei termoelectronice electronii pleacă de la catod cu viteze de ordinul vitezei de agitaţie termică, care sunt mici în comparaţie cu vitezele atinse de electroni sub influenţa câmpurilor electrice exterioare. De aceea vom considera vitezele iniţiale ale electronilor egale cu zero. Când electronul părăseşte catodul şi se află într-un punct în care potenţialul are valoarea V, viteză v este dată de expresia:

$$\frac{mv^2}{2} = eV$$

Densitatea curentului ce ajunge la anod este:

$$j = -\rho v$$

unde $\rho = ne$, n fiind densitatea de electroni.

Semnul minus apare deoarece curentul este determinat de sarcini negative.

Rezultă:

$$j = -\rho\sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

de unde

$$\rho = -j\sqrt{\frac{m}{2e}}\,V^{-\frac{1}{2}} \tag{5.82}$$

şi ecuaţia 5.81 devine:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}V^{-\frac{1}{2}} \tag{5.83}$$

Înmulţim ambii membri cu $\dfrac{dV}{dx}dx$ şi integrăm

$$\int_0^x \frac{d^2V}{dx^2}\frac{dV}{dx}dx = -\frac{j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}\int_0^x V^{-\frac{1}{2}}\frac{dV}{dx}dx$$

Deoarece la $x = 0$, $V(x) = 0$ şi $dV/dx = 0$ rezultă:

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = \frac{4j}{\varepsilon}\sqrt{\frac{m}{2e}}V^{\frac{1}{2}}$$

de unde:

$$\frac{dV}{dx} = 2\sqrt{\frac{j}{\varepsilon_0}}\sqrt[4]{\frac{m}{2e}}\cdot V^{\frac{1}{4}} \tag{5.84}$$

sau

$$\frac{dV}{V^{\frac{1}{4}}} = 2\sqrt{\frac{j}{\varepsilon_0}}\sqrt[4]{\frac{m}{2e}}\cdot dx$$

Integrând

$$\int_0^{V_0}\frac{dV}{V^{\frac{1}{4}}} = 2\sqrt{\frac{j}{\varepsilon_0}}\sqrt[4]{\frac{m}{2e}}\int_0^d dx$$

se obţine:

$$\frac{4}{3}V_0^{\frac{3}{4}} = 2\sqrt{\frac{j}{\varepsilon_0}}\sqrt[4]{\frac{m}{2e}}d \tag{5.85}$$

Din 5.85 rezultă:

$$j = \frac{4}{9}\sqrt{\frac{2e}{m}}\frac{\varepsilon_0}{d^2}V_0^{\frac{3}{2}} \tag{5.86}$$

Atunci intensitatea curentului este:

$$I = jS = \frac{4}{9}\sqrt{\frac{2e}{m}}\frac{\varepsilon_0 S}{d^2}V_0^{\frac{3}{2}} = KV_0^{\frac{3}{2}}$$

Aceasta este aşa numita lege ”3/2”

PROBLEMA 5.21 Să se arate că unui câmp electrostatic uniform $\vec{E}_0$ îi corespunde potenţialul $V = -\vec{E}_0\vec{r}$

SOLUŢIE

Deoarece

$$\vec{E} = -\nabla\left(-\vec{E}_0\vec{r}\right) = \nabla\left(xE_{0x} + yE_{0y} + zE_{oz}\right) \tag{5.87}$$

Atunci:

$$E_x = \frac{\partial V}{\partial x} = E_{0x}$$

$$E_y = \frac{\partial V}{\partial y} = E_{0y}$$

$$E_z = \frac{\partial V}{\partial z} = E_{0z}$$

Rezultă:

$$\vec{E}_0 = E_{0x}\vec{e}_x + E_{0y}\vec{e}_y + E_{0z}\vec{e}_z$$

PROBLEMA 5.22 Să se determine câmpul magnetic produs de un curent I care parcurge un conductor rectiliniu infinit într-un punct P la distanţa R de acesta.

SOLUŢIE

Câmpul magnetic creat de elementul de curent $d\vec{x}$ are direcţia perpendiculară pe planul figurii 5.11 şi este date de:

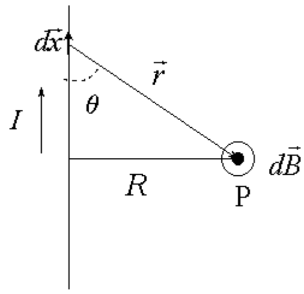

Figura 5.11: Câmpul magnetic produs de un curent rectiliniu infinit de lung

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dx \sin\theta}{r^2} \tag{5.88}$$

Cum orientarea câmpului magnetic este aceiaşi pentru toate elementele de curent, inducţia magnetică este dată de integrala expresiei 5.88:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx \sin\theta}{r^2} \tag{5.89}$$

Deoarece

$$r = \sqrt{x^2 + R^2}$$

$$\sin\theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

rezultă:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R dx}{\left(x^2 + R^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \tag{5.90}$$

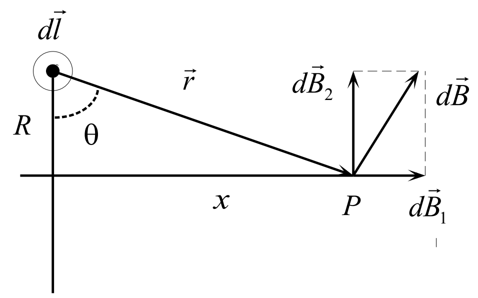

Figura 5.12: Câmpul creat de o spiră de curent

PROBLEMA 5.23 Fie o spiră de rază R prin care trece un curent I. Să se calculeze câmpul magnetic determinat de aceasta în punctele situate pe axa sa de simetrie.

SOLUŢIE

Se consideră un vector $d\vec{l}$ tangent la spira de rază R (Fig. 5.12). Unghiul dintre $d\vec{l}$ şi $\vec{r}$ este de 90^0. Vectorul $d\vec{B}$ este perpendicular pe planul format de $d\vec{l}$ şi $\vec{r}$ şi este situat în planul figurii.

$d\vec{B}$ se poate descompune în două componente: $d\vec{B}_1$ având direcţia normalei la planul spirei şi $d\vec{B}_2$ perpendiculară pe axa de simetrie. În punctul P contribuie doar componenta $d\vec{B}_1$ deoarece componentele $d\vec{B}_1$ la inducţia totală $\vec{B}$ corespunzătoare tuturor elementelor de curent sunt în sensul axei de simetrie şi se însumează; componenetele $d\vec{B}_2$ sunt perpendiculare pe această axă dar având sensuri contrare rezultanta lor este nulă.

Pentru elementul de curent considerat

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl \sin(\pi/2)}{r^2} \tag{5.91}$$

$$dB_1 = dB\cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\cos\theta dl}{r^2} \tag{5.92}$$

Cum:

$$r = \sqrt{R^2 + x^2}$$

$$\cos\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

Rezultă:

$$dB_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R dl}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

Integrând peste toate elementele de circuit şi ţinând cont că $\int dl = 2\pi R$, rezultă:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}} \tag{5.93}$$

Dacă $x \gg R$ atunci:

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I\pi R^2}{x^3} \tag{5.94}$$

Deoarece $m = I\pi R^2$ este momentul magnetic dipolar al spirei respective:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{x^3} \tag{5.95}$$

PROBLEMA 5.24 Să se arate că un câmp magnetostatic uniform admite potenţialul vector

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\left(\vec{B} \times \vec{r}\right) \tag{5.96}$$

SOLUŢIE

Proiectând produsului vectorial pe axele unui triedru cartezian se obţine:

$$A_x = \frac{1}{2}\left(B_y z - B_z y\right)$$

$$A_y = \frac{1}{2}\left(B_z x - B_x z\right)$$

$$A_z = \frac{1}{2}\left(B_x y - B_y x\right)$$

Cum B_x , B_y , B_z sunt constante rezultă:

$$\left(\nabla \times \vec{A}\right)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = B_x$$

$$\left(\nabla \times \vec{A}\right)_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = B_y$$

$$\left(\nabla \times \vec{A}\right)_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_z$$

Atunci:

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

PROBLEMA 5.25 Cunoscând potenţialul vector determinat de un moment magnetic dipolar $\vec{m}$

$$\vec{A}\left(\vec{r}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

să se calculeze câmpul magnetic corespunzător. Se va considera că momentul magnetic $\vec{m}$ este orientat de-a lungul axei Oz.

SOLUŢIE

Pentru simplificare se consideră că momentul de dipol magnetic are direcţia axei Oz:

$$\vec{m} = m\vec{e}_z \tag{5.97}$$

$$\vec{m} \times \vec{r} = -my\vec{e}_x + mx\vec{e}_y \tag{5.98}$$

Atunci

$$A_x = -\frac{\mu_0 m y}{4\pi r^3}$$

$$A_y = \frac{\mu_0 m x}{4\pi r^3}$$

$$A_z = 0$$

Cum

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{5.99}$$

$$B_x = \left(\nabla \times \vec{A}\right)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$B_x = -\frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \right] = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{3xz}{r^5} \tag{5.100}$$

$$B_y = \left(\nabla \times \vec{A}\right)_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$B_y = -\frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{y}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \right] = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{3yz}{r^5} \tag{5.101}$$

$$B_z = \left(\nabla \times \vec{A}\right)_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{3z^2 - r^2}{r^5} \tag{5.102}$$

unde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Atunci:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3\,(mz)\,\vec{r}}{r^5} - \frac{m\vec{e}_z}{r^3} \right] \tag{5.103}$$

Generalizând:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3\,(\vec{m}\vec{r})\,\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right] \tag{5.104}$$

PROBLEMA 5.26 Să se determine câmpul magnetic în interiorul unei bobine toroidale. O bobină toroidală este un solenoid de lungime finită curbat în forma unui tor. Se cunosc N (numărul de spire) şi curentul care trece prin bobină (Fig.5.13).

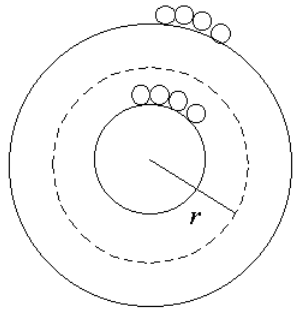

Figura 5.13: Bobină toroidală; linile de câmp sunt cercuri

SOLUŢIE

Liniile câmpului magnetic formează cercuri concentrice în interiorul torului. Se aplică legea lui Ampère pe un contur circular de rază r.

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I \tag{5.105}$$

unde $I = I_0 N$. Se obţine:

$$B 2\pi r = \mu_0 N I_0$$

Rezultă:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_0 N}{r} \tag{5.106}$$

PROBLEMA 5.27 Să se determine momentul magnetic al unei sfere cu raza R încărcate cu sarcina q uniform distribuită în volum care se roteşte cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe care trece prin centru.

SOLUŢIE

În elementul de volum $dV = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr$ sarcina este distribuită cu densitatea ρ:

$$dq = \rho dV \tag{5.107}$$

unde

$$\rho = \frac{3q}{4\pi R^3}$$

este densitatea volumică de sarcină.

Rezultă:

$$dq = \frac{3q}{4\pi R^3} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr \tag{5.108}$$

Curentul generat în rotaţie de sarcina dq este

$$dI = \frac{dq}{2\pi}\omega = \frac{3q\omega}{8\pi^2 R^3} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr \tag{5.109}$$

iar momentul magnetic asociat:

$$dm = \left(\pi r^2 \sin^2\theta\right) dI$$

sau

$$dm = \frac{3q\omega}{8\pi R^3} r^4 \sin^3\theta d\theta d\varphi dr \tag{5.110}$$

Momentul magnetic total este

$$m = \frac{3q\omega}{8\pi R^3}\int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{q\omega R^2}{5}$$

PROBLEMA 5.28 Să se determine momentul magnetic al unei sfere cu raza R încărcate cu sarcina q uniform distribuită pe suprafaţa ei, care se roteşte în jurul axei proprii cu viteza unghiulară ω.

SOLUŢIE

Se ţine cont că dacă o sarcină q se roteşte în jurul unei axe la distanţa r de aceasta ea este echivalentă cu o buclă de curent cu intensitatea:

$$I = \frac{q}{T} = \frac{q\omega}{2\pi} \tag{5.111}$$

unde $\omega = 2\pi/T$ este viteza unghiulară cu care sarcina se roteşte pe orbita circulară.

Fie o zonă sferică cu raza $r = R \sin\theta$ şi aria $dS = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$
Sarcina superficială a acesteia este egală cu

$$dq = \sigma dS \tag{5.112}$$

Deoarece:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

Rezultă:

$$dq = \frac{q}{2} \sin\theta d\theta \tag{5.113}$$

Curentul generat de această sarcină în mişcare este

$$dI = dq\frac{\omega}{2\pi} = \frac{q\omega}{4\pi} \sin\theta d\theta \tag{5.114}$$

iar momentul magnetic produs:

$$dm = \left(\pi R^2 \sin^2\theta\right) dI = \pi R^2 \sin^2\theta \, \frac{q\omega}{4\pi} \sin\theta d\theta \tag{5.115}$$

Atunci momentul magnetic total este:

$$m = \frac{qR^2\omega}{4} \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{qR^2\omega}{3}$$

PROBLEMA 5.29 Să se determine câmpul magnetic în interiorul şi în exteriorul unui cilindru de rază R prin care circulă un curent de densitate j, ştiind că liniile de câmp sunt cercuri concentrice în plane perpendiculare pe axa cilindrului.

SOLUŢIE

a) Pentru calculul câmpului magnetic în interiorul cilindrului se aplică legea lui Ampère pe un contur circular cu centrul pe axa cilindrului aflat într-un plan perpendicular pe cilindru de rază $r < R$.

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \iint \vec{j} d\vec{S} \tag{5.116}$$

unde S este suprafaţa care se spijină pe conturul C.

Rezultă:

$$2\pi r B = \mu_0 j \pi r^2$$

de unde:

$$B = \frac{\mu_0 j r}{2} \tag{5.117}$$

b) Pentru calculul câmpului magnetic în exteriorul cilindrului se aplică legea lui Ampère pe un contur circular cu centrul pe axa cilindrului cu raza $r > R$.

Se obţine:

$$2\pi r B = \mu_0 j \pi R^2$$

de unde:

$$B = \frac{\mu_0 R^2 j}{2r} \tag{5.118}$$

PROBLEMA 5.30 Într-o regiune din spaţiu există un câmp magnetic uniform paralel cu axa Oz. Mărimea lui variază în timp astfel:

$$B = B_0 \sin \omega t \tag{5.119}$$

Să se determine câmpul electric în fiecare punct.

SOLUŢIE

Pentru a calcula câmpul electric vom alege un contur circular de rază r într-un plan perpendicular pe axa Oz. Se aplică legea inducţiei electromagnetice:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt} \tag{5.120}$$

unde ϕ este fluxul magnetic prin suprafaţa $S = \pi r^2$ Dar:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = 2\pi r E$$

şi

$$\Phi = BS = \pi r^2 B_0 \sin \omega t$$

Atunci relaţia 5.120 devine:

$$2\pi r E = -\pi r^2 B_0 \omega \cos \omega t \tag{5.121}$$

De aici rezultă valoarea câmpului electric:

$$E = -\frac{1}{2} r B_0 \omega \cos \omega t$$

PROBLEMA 5.31 Un condensator plan cu plăcile circulare de rază R paralele este conectat la un generator de curent alternativ astfel încât pe plăci sarcina care se acumulează variază în timp după legea:

$$q = q_0 \sin \omega t$$

Liniile câmpului electric sunt cercuri concentrice având ca axă de simetrie axa cilindrului. Se cere câmpul electric în punctele situate la distanţa r de axa condensatorului când
a) $r \leq R$
b) $r > R$

SOLUŢIE

Se consideră un contur circular cu centrul pe axa cilindrului într-un plan paralel cu plăcile condensatorului. Aplicând legea lui Ampère se obţine:

$$\int_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \int \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} \tag{5.122}$$

a) Dacă $r < R$ rezultă:

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 \varepsilon_0 r \frac{dE}{dt} \tag{5.123}$$

Deoarece

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 A} = \frac{q_0}{\varepsilon_0 A} \sin \omega t$$

unde $A = \pi R^2$ este aria armăturilor condensatorului, atunci:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q_0}{\varepsilon_0 A}\omega \cos \omega t \tag{5.124}$$

Atunci relaţia 5.123 devine:

$$B = \frac{\mu_0 \omega r q_0}{2\pi R^2} \cos \omega t \tag{5.125}$$

a) Dacă $r > R$ din relaţia 5.122 se obţine:

$$B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 R^2}{2r} \frac{dE}{dt} \tag{5.126}$$

Astfel ţinând cont de relaţia 5.124 rezultă:

$$B = \frac{\mu_0 q_0 \omega \cos \omega t}{2\pi r} \tag{5.127}$$