Probleme de fizică

Emil Petrescu Viorel Păun

October 6, 2004

Cuprins

Capitolul 2

MECANICĂ ANALITICĂ

PROBLEMA 2.1 Să se scrie ecuaţiile diferenţiale de mişcare ale unui pendul matematic de masă m_2 şi lungime l al cărui punct de suspensie de masă m_1 se deplasează orizontal (Fig. 2.1).

SOLUŢIE

Se aleg coordonatele generalizate ca fiind x – coordonata pe axa Ox a punctului cu masă m_1 şi φ – unghiul făcut de firul pendului cu verticala.

$$x_1 = x \qquad x_2 = x + l\sin\varphi$$
$$y_1 = 0 \qquad y_2 = l\cos\varphi$$

Componentele vitezelor sunt:

$$\dot{x_1} = \dot{x} \qquad \dot{x_2} = \dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi$$
$$\dot{y_1} = 0 \qquad \dot{y_2} = -l\dot{\varphi}\sin\varphi$$

Energia cinetică a sistemului este:

$$E_c = \frac{m_1}{2}(\dot{x_1}^2 + \dot{y_1}^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x_2}^2 + \dot{y_2}^2) \tag{2.1}$$

sau

$$E_c = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{\varphi}^2 l^2) \tag{2.2}$$

Energia potenţială este datorată câmpului gravitaţional:

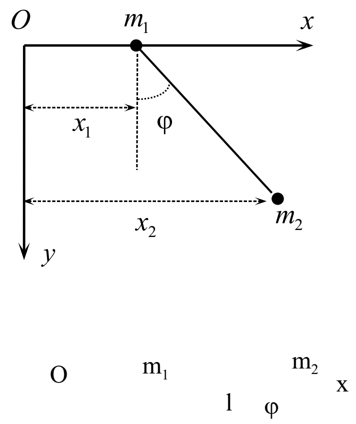

Figura 2.1: Pendul al cărui punct de suspensie se deplasează orizontal

$$E_p = -m_2 g y_2 = -m_2 g l \cos\varphi \tag{2.3}$$

Funcţia lui Lagrange se obţine din relaţiile 2.2 şi 2.3

$$L = E_c - E_p = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{\varphi}^2 l^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi) + m_2 g l \cos\varphi \tag{2.4}$$

Ecuaţiile de mişcare sunt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \tag{2.6}$$

Pentru a determina forma concretă a acestor ecuaţii se va calcula fiecare termen separat.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l \dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi)$$

Deoarece funcţia lui Lagrange nu depinde de x

$$(\partial L/\partial x) = 0$$

şi ecuaţia 2.5 devine:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi) = 0 \tag{2.7}$$

Ecuaţia 2.7 se poate integra în raport cu timpul. Se obţine:

$$(m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi = \text{const} \tag{2.8}$$

Se observă că expresia din stânga reprezintă componenta după direcţia Ox a impulsului total. Relaţia 2.8 exprimă conservarea componentei impulsului după axa Ox.

Pentru a obţine forma concretă a ecuaţiei 2.6 se vor calcula următoarele derivate parţiale:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \dot{\varphi} + m_2 l\dot{x}\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l\ddot{x}\cos\varphi - m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi - m_2 g l\sin\varphi$$

Atunci ecuaţia 2.7 devine:

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l\ddot{x}\cos\varphi + m_2 g l\sin\varphi = 0 \tag{2.9}$$

Ecuaţiile de mişcare sunt date de relaţiile 2.7 şi 2.9.

PROBLEMA 2.2 Să se determine ecuaţia de mişcare a unui electron în câmpul creat de un nucleu cu numărul atomic Z presupus fix (Fig. 2.2).

SOLUŢIE

Când nucleul este fix, forţa de interacţiune este o forţă centrală:

$$\vec{F}(r) = F(r)\vec{r}$$

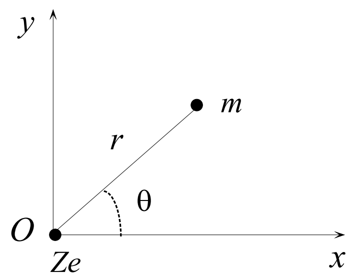

Figura 2.2: Electronul în câmpul electric al nucleului

Mişcarea are loc într-un plan. Astfel, prin derivarea egalităţii $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ rezultă:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}(r) = 0$$

ceea ce arată că momentul cinetic se conservă. Rezultă că $\vec{r}$ se află într-un plan care este perpendicular pe $\vec{l}$. Mişcarea se face într-un plan şi există doar două grade de libertate. Se aleg coordonatele polare r şi θ ca fiind coordonatele generalizate. Centrul O al sistemului de coordonate se consideră nucleul cu sarcina Ze. Atunci

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

Energia cinetică este:

$$E_c = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \tag{2.10}$$

Energia potenţială se determină pornind de la faptul că forţele electrostatice sunt conservative. Deoarece

$$dE_p = -F dr = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

prin integrare se obţine:

$$E_p(r) = \int_{\infty}^{r} \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = - \left. \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \right|_{\infty}^{r} = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{2.11}$$

Funcţia lui Lagrange este:

$$L = E_c - E_p = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{2.12}$$

Ecuaţiile de mişcare sunt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{2.13}$$

şi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \tag{2.14}$$

Pentru a determina forma concretă a acestor ecuaţii se va calcula fiecare termen în parte.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mr^2\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta}r$$

Deoarece L nu depinde explicit de θ

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Relaţia 2.13 devine:

$$mr^2\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta}r = 0 \tag{2.15}$$

Prin integrarea acestei relaţii se obţine:

$$mr^2\dot{\theta} = mr^2\omega = mrv = \text{const}$$

Relaţia reprezintă legea de conservare a momentului cinetic.

$$l = mr^2\dot{\theta} = mvr = \text{const} \tag{2.16}$$

Mărimea $mr^2\dot{\theta}$ este o integrală primă a mişcării.

Pentru a obţine forma concretă a ecuaţiei 2.14 se calculează:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Ecuaţia 2.15 devine:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0 \tag{2.17}$$

Această ecuaţie poate fi scrisă doar în funcţie de r. Pentru aceasta se ţine cont de relaţiile 2.16 şi 2.17. Rezultă:

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0 \tag{2.18}$$

PROBLEMA 2.3

Să se demonstreze că în cazul în care L nu depinde de timp (sisteme conservative) mărimea

$$H = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L \tag{2.19}$$

este o integrală primă a mişcării şi reprezintă energia totală a sistemului.

SOLUŢIE

Deoarece $L = L(q_k, \dot{q}_k)$ atunci:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d\dot{q}_k}{dt} \tag{2.20}$$

Se ţine cont de ecuaţiile de mişcare

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

şi se obţine:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d\dot{q}_k}{dt}$$

sau

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right)$$

de unde rezultă:

$$\frac{d}{dt}\left[L - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right] = 0 \tag{2.21}$$

Atunci:

$$H = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = \text{const}$$

Mărimea H poartă denumirea de hamiltonian, iar în cazul de faţă este o integrală primă a mişcării.

În plus:

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} = 2E_c$$

deoarece E_c este o funcţie omogenă (formă pătratică) în raport cu $\dot{q}_k$.

Atunci

$$H = \; = 2E_c - L = 2E_c - E_c + E_p = E_c + E_p = \text{const}$$

Rezultă că hamiltonianul sistemului în acest caz coincide cu energia mecanică a sistemului considerat.

PROBLEMA 2.4 Pe o parabolă (Fig. 2.3) cu vârful în jos, având ca axă de simetrie verticala şi care se roteşte cu viteza unghiulară $\omega =$ const în jurul acestei axe, se poate mişca fără frecare un punct material de masă m. Să se determine la ce înălţime h se poate ridica punctul material dacă la momentul iniţial acesta se află în vârful parabolei şi are viteza v_0.

SOLUŢIE

Problema se va discuta într-un sistem neinerţial cu centrul în vârful parabolei şi care se roteşte odată cu aceasta.

Deoarece punctul material se poate mişca doar pe această parabolă sistemul are un singur grad de libertate. Coordonata generalizată este

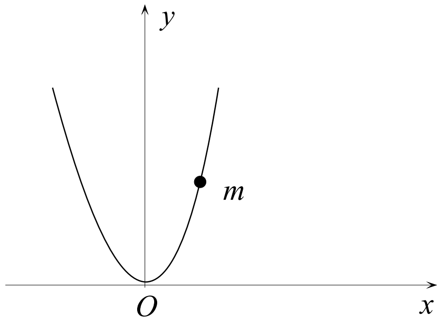

Figura 2.3: Particulă care se misca pe o parabolă

coordonata x a punctului în sistemul considerat. Ordonata punctului material este: $y = ax^2$. Aceasta reprezintă şi ecuaţia parabolei ($a > 0$). Energia cinetică a punctului material este:

$$E_c = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(1 + 4a^2x^2\right)\dot{x}^2 \tag{2.22}$$

Mişcarea de rotaţie face ca asupra punctului să acţioneze o forţă centrifugă $F_c = m\omega^2 x$. Energia potenţială datorată rotaţiei este:

$$E_{pc} = -\int_0^x F_c dx = -\int_0^x m\omega^2 x dx = -\frac{m\omega^2 x^2}{2} \tag{2.23}$$

Particula se află în câmp gravitaţional iar energia potenţială gravitaţională este:

$$E_{pg} = mgy = amgx^2 \tag{2.24}$$

Energia potenţială totală a punctului material este

$$E_p = E_{pc} + E_{pg} = -\frac{m\omega^2 x^2}{2} + amgx^2 \tag{2.25}$$

Atunci funcţia lui Lagrange este:

$$L = E_c - E_p = \frac{m}{2}(1 + 4a^2x^2)\dot{x}^2 + \frac{m\omega^2 x^2}{2} - mgax^2 \tag{2.26}$$

Deoarece L nu depinde explicit de timp, hamiltonianul sistemului

$$H = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L \tag{2.27}$$

se conservă şi reprezintă energia punctului material. Cum:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(1 + 4a^2x^2)\dot{x}$$

relaţia 2.27 devine:

$$H = \frac{m}{2}(1 + 4a^2x^2)\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2x^2}{2} + gmax^2 = \text{const} \tag{2.28}$$

La momentul iniţial $\dot{x} = v_0$ şi $x = 0$. La momentul final $\dot{x} = 0$ (punctul material s-a oprit) şi $x = x_f$.

Deoarece hamiltonianul este o mărime care se conservă valoarea lui este aceiaşi în starea iniţială şi finală. Atunci:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2x_f^2 + gmax_f^2 \tag{2.29}$$

de unde

$$x_f^2 = \frac{v_0^2}{2ag - \omega^2}$$

şi

$$h = ax_f^2 = \frac{av_0^2}{2ag - \omega^2} \tag{2.30}$$

Dacă $\omega^2 > 2ag$ atunci expresia lui h din 2.30 nu are sens. Aceasta înseamnă că viteza punctului nu poate deveni nulă şi el urcă până ajunge la marginea parabolei.

Se observă că dacă $\omega^2 < 2ag$ şi $\omega^2 \longrightarrow 2ag$ atunci $h \rightarrow \infty$, iar particula se deplasează la infinit pe ramura principală.

Pentru ca particula să se ridice la o înalţime finită este necesar ca $\omega^2 < 2ag$.

PROBLEMA 2.5 Un tub foarte lung aflat într-un plan vertical se roteşte în jurul capătului său O, cu viteza unghiulară constantă ω (Fig. 2.4). La momentul $t = 0$ tubul se află în poziţie orizontală. În interiorul tubului se mişcă fară frecare o bilă de masă m care la momentul iniţial se află în punctul O. Tubul se mişcă în sensul acelor de ceasornic. Să se determine ecuaţia de mişcare a bilei.

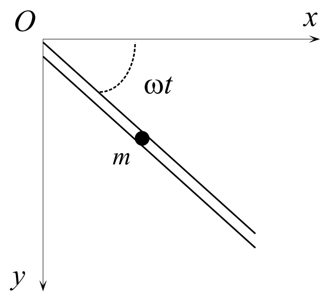

Figura 2.4: Bilă de masă m ce se mişcă într-un tub care se roteşte în planul vertical Oxy în jurul punctului O

SOLUŢIE

Sistemul are un singur grad de libertate deoarece bila nu se poate mişca decât în lungul tubului. În figura 2.4 este ilustrat sistemul de coordonate ales. Coordonata generalizată este r (distanţa de la punctul O la bila de masă m).

Atunci:

$$x = r\cos\omega t$$
$$y = r\sin\omega t$$
$$\dot{x} = \dot{r}\cos\omega t - r\omega\sin\omega t$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin\omega t + r\omega\cos\omega t$$

Energia cinetică este:

$$E_c = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\right) \tag{2.31}$$

Energia potenţială este doar de natură gravitaţională :

$$E_p = -mgy = -mgr\sin\omega t \tag{2.32}$$

Funcţia lui Lagrange este:

$$L = E_c - E_p = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\right) + mgr\sin\omega t \tag{2.33}$$

iar ecuaţia de mişcare:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \tag{2.34}$$

Calculând fiecare termen în parte se obţine:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\omega^2 + mg\sin\omega t$$

iar ecuaţia 2.34 devine:

$$\ddot{r} - \omega^2 r - g\sin\omega t = 0 \tag{2.35}$$

Ecuaţia 2.35 este o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea neomogenă. Soluţia generală este dată de suma dintre soluţia generală a ecuaţiei omogene şi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene.

Ecuaţia omogenă este:

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0 \tag{2.36}$$

Cum soluţiile ecuaţiei caracteristice $t^2 - \omega^2 = 0$ sunt $t_1 = \omega$ şi $t_2 = -\omega$, soluţia generală a ecuaţiei omogene 2.36 este:

$$r = Ae^{-\omega t} + Be^{\omega t} \tag{2.37}$$

unde A şi B sunt constante.

Pentru ecuaţia neomogenă se consideră o soluţie de forma:

$$r = a\sin\omega t$$

unde a este o constantă. Înlocuind în ecuaţia 2.35 se obţine:

$$-a\omega^2\sin\omega t - a\omega^2\sin\omega t - g\sin\omega t = 0 \tag{2.38}$$

Rezultă:

$$a = -\frac{g}{2\omega^2}$$

şi

$$r = -\frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t$$

Soluţia generală a ecuaţiei 2.35 este:

$$r = Ae^{-\omega t} + Be^{\omega t} - \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t \tag{2.39}$$

Viteza punctului material este:

$$\dot{r}(t) = -\omega Ae^{-\omega t} + \omega Be^{\omega t} - \frac{g}{2\omega}\cos\omega t$$

Constantele A şi B se determină din condiţiile iniţiale $r(0) = 0$ şi $\dot{r}(0) = 0$ (iniţial corpul este în repaus). Rezultă:

$$A + B = 0$$
$$-\omega A + \omega B - \frac{g}{2\omega} = 0$$

Prin rezolvarea acestui sistem de ecuaţii se obţine:

$$A = -B = -\frac{g}{4\omega^2}$$

Atunci ecuaţia de mişcare este:

$$r = \frac{g}{4\omega^2}\left[e^{\omega t} - e^{-\omega t} - 2\sin\omega t\right]$$

PROBLEMA 2.6 Un tub de lungime foarte mare se roteşte cu viteza unghiulară ω_0 în jurul unui ax vertical cu care face un unghi θ_0 în tot cursul mişcării. Axul intersectează tubul considerat (Fig.2.5). În interiorul tubului se află o bilă de diametru aproape egal cu cel al tubului şi care se mişcă în interiorul acestuia fără frecare şi fără viteză iniţială. Să se determine legea de mişcare a bilei.

SOLUŢIE

Alegem coordonata generalizată r – distanţa din punctul O la bilă. Atunci în raport cu sistemul de coordonate din Fig. 2.5:

$$x_1 = r\sin\theta_0\cos\omega_0 t$$

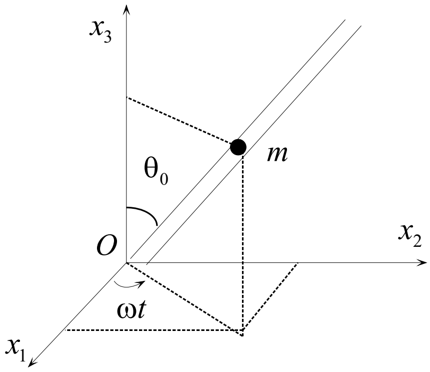

Figura 2.5: Bilă într-un tub vertical care se roteşte în jurul axei Ox_3 cu viteză unghiulară constantă

$$x_2 = r \sin\theta_0 \sin\omega_0 t$$

$$x_3 = r\cos\theta_0$$

Derivatele coordonatelor în raport cu timpul sunt:

$$\dot{x}_1 = \dot{r}\sin\theta_0\cos\omega_0 t - r\omega_0\sin\theta_0\sin\omega_0 t$$

$$\dot{x}_2 = \dot{r}\sin\theta_0\sin\omega_0 t + r\omega_0\sin\theta_0\cos\omega_0 t$$

$$\dot{x}_3 = \dot{r}\cos\theta_0$$

Energia cinetică a bilei este:

$$E_c = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\omega_0^2\sin^2\theta_0\right) \tag{2.40}$$

Energia potenţială este de natură gravitaţională şi are expresia:

$$E_p = mgx_3 = mgr\cos\theta_0 \tag{2.41}$$

Funcţia lui Lagrange este:

$$L = E_c - E_p = \frac{m}{2}[\dot{r}^2 + r^2\omega_0^2\sin^2\theta_0] - mgr\cos\theta_0 \tag{2.42}$$

Ecuaţia de mişcare este:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \tag{2.43}$$

Calculând fiecare termen în parte se obţine:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\omega_0^2 \sin^2\theta_0 - mg\cos\theta_0$$

şi ecuaţia 2.43 devine:

$$\ddot{r} - r\omega_0^2 \sin^2\theta_0 = -g\cos\theta_0 \tag{2.44}$$

Ecuaţia obţinută este o ecuaţie diferenţială de ordinul doi neomogenă. Ecuaţia omogenă este:

$$\ddot{r} - r\omega_0^2 \sin^2\theta_0 = 0$$

şi are ecuaţia caracteristică:

$$t^2 - \omega_0^2 \sin^2\theta_0 = 0$$

cu soluţiile $t_{1,2} = \pm\omega_0 \sin\theta_0$

Astfel soluţia ecuaţiei omogene este:

$$r = Ae^{\omega_0 t \sin\theta_0} + Be^{-\omega_0 t \sin\theta_0} \tag{2.45}$$

Soluţia generală o vom găsi folosind metoda variaţiei constantelor. Considerând A şi B dependente de t, se obţine:

$$\dot{A}e^{\omega_0 t \sin\theta_0} + \dot{B}e^{-\omega_0 t \sin\theta_0} = 0$$

$$\dot{A}\omega_0 \sin\theta_0 e^{\omega_0 t \sin\theta_0} - \dot{B}\omega_0 \sin\theta_0 e^{-\omega_0 t \sin\theta_0} = -g\cos\theta_0$$

Rezultă:

$$\dot{A} = -\frac{g\cos\theta_0}{2\omega_0 \sin\theta_0} \exp^{-\omega_0 t \sin\theta_0}$$

$$\dot{B} = \frac{g\cos\theta_0}{2\omega_0 \sin\theta_0} e^{\omega_0 t \sin\theta_0}$$

Astfel:

$$A = \left(\frac{g\cos\theta_0}{2\omega_0^2 \sin^2\theta_0} e^{-\omega_0 t \sin\theta_0} + A_1\right)$$

$$B = \left(\frac{g \cos \theta_0}{2\omega_0^2 \sin^2 \theta_0} e^{\omega_0 t \sin \theta_0} + B_1 \right)$$

Soluţia generală este:

$$r = A_1 e^{\omega_0 t \sin \theta_0} + B_1 e^{-\omega_0 t \sin \theta_0} + \frac{g \cos \theta_0}{\omega_0^2 \sin^2 \theta_0} \tag{2.46}$$

Considerând că la momentul iniţial $r(0) = R_0$ şi $\dot{r}(0) = 0$ (bila este în repaus), rezultă că:

$$A_1 = B_1 = \frac{1}{2} \left[R_0 - \frac{g \cos \theta_0}{\omega_0^2 \sin^2 \theta_0} \right]$$

Cu condiţiile iniţiale de mai sus soluţia ecuaţiei de mişcare este:

$$r = \left[R_0 - \frac{g \cos \theta_0}{\omega_0^2 \sin^2 \theta_0} \right] [\mathrm{ch}(\omega_0 \sin \theta_0 t)] + \frac{g \cos \theta_0}{\omega_0^2 \sin \theta_0} \tag{2.47}$$

Discuţie:
a) $\theta_0 < \pi/2$
Dacă:

$$R_0 < \frac{g \cos \theta_0}{\omega_0^2 \sin^2 \theta_0}$$

r descreşte în timp şi bila se apropie de origine.
Dacă:

$$R_0 = \frac{g \cos \theta_0}{\omega_0^2 \sin^2 \theta_0}$$

bila este în echilibru instabil în raport cu tubul.
Dacă:

$$R_0 > \frac{g \cos \theta_0}{\omega_0^2 \sin^2 \theta_0}$$

r creşte în timp şi bila urcă în tub.
b) $\theta_0 = \pi/2$

$$r = R_0 \mathrm{ch} \omega_0 t$$

tubul este orizontal şi bila se depărtează de origine.
c) $\theta_0 > \pi/2$
Tubul este orientat în jos astfel că bila va coborî depărtându-se de origine.

PROBLEMA 2.7 Să se discute mişcarea unui punct material greu, de masă m care se deplasează, fără frecare, de-a lungul unei cicloide, aflată în plan vertical care are ecuaţiile parametrice:

$$x = a(\zeta + \sin\zeta)$$

$$y = a(1 - \cos\zeta)$$

unde $\zeta \in [-\pi, \pi]$

SOLUŢIE

Se alege drept coordonata generalizată parametrul ζ.
Atunci:

$$\dot{x} = a\dot{\zeta}(1 + \cos\zeta)$$
$$\dot{y} = a\dot{\zeta}\sin\zeta$$

Energia cinetică este:

$$E_c = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = ma^2\dot{\zeta}^2\left(1 + \cos\zeta\right) \tag{2.48}$$

iar energia potenţială:

$$E_p = mgy = mga(1 - \cos\zeta) \tag{2.49}$$

Funcţia lui Lagrange este:

$$L = E_c - E_p = ma^2\dot{\zeta}^2\left(1 + \cos\zeta\right) - mga(1 - \cos\zeta) \tag{2.50}$$

sau

$$L = 2ma^2\dot{\zeta}^2\cos^2\frac{\zeta}{2} - 2mga\sin^2\frac{\zeta}{2} \tag{2.51}$$

Se efectuează schimbarea de variabilă:

$$z = \sin\frac{\zeta}{2} \quad \text{şi} \quad \dot{z} = \frac{\dot{\zeta}}{2}\cos\frac{\zeta}{2}$$

Atunci funcţia lui Lagrange devine:

$$L = 8a^2m\dot{z}^2 - 2mgaz^2 \tag{2.52}$$

Considerând z noua coordonată generalizată ecuaţia de mişcare se va scrie astfel:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

Se calculează fiecare termen în parte:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 16a^2m\dot{z}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = 16a^2m\ddot{z}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -4mgaz$$

Atunci forma ecuaţiei de mişcare devine:

$$4a\ddot{z} + gz = 0 \tag{2.53}$$

Ecuaţia obţinută este o ecuaţie diferenţială omogenă de ordinul al doilea. Soluţiile ecuaţiei caracteristice sunt $\pm i\sqrt{g/4a}$

Soluţia ecuaţiei de mişcare se poate pune sub forma:

$$z = a_1 \sin\sqrt{\frac{g}{4a}}\ t + b_1 \cos\sqrt{\frac{g}{4a}}\ t \tag{2.54}$$

Să considerăm că la momentul iniţial $\zeta = \zeta_0$ şi $\dot{\zeta} = 0$. Atunci la $t = 0,\ z = z_0 = \sin(\zeta_0/2),\ \dot{z}(0) = 0$

Ţinând cont de condiţiile iniţiale obţinem:

$$a_1 = 0$$

$$b_1 = z_0$$

Atunci relaţia 2.54 devine:

$$z = z_0 \cos\sqrt{\frac{g}{4a}}\ t = \sin\frac{\zeta_0}{2}\cos\sqrt{\frac{g}{4a}}\ t \tag{2.55}$$

Cum:

$$\sin\frac{\zeta}{2} = \sin\frac{\zeta_0}{2}\cos\sqrt{\frac{g}{4a}}\ t$$

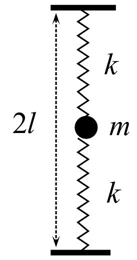

Figura 2.6: Particula ce oscilează între două resoarte

din 2.55 obţinem:

$$\zeta = 2 \arcsin \left[\frac{\zeta_0}{2} \cos \sqrt{\frac{g}{4a}}\ t \right]$$

PROBLEMA 2.8 Să se determine perioada micilor oscilaţii executate de o particulă de masă m legată de două resoarte precum şi legea de mişcare a acesteia (Fig. 2.6). Sistemul se află în câmp gravitaţional, particula se poate mişca numai pe verticală iar lungimea nedeformată a fiecărui resort este l. La momentul iniţial particula se află în repaus între cele două resoarte nedeformate.

SOLUŢIE

Alegem ca sistem de referinţă axa Oy cu originea în punctul de legătură cu suportul a resortului inferior. Fie y – coordonata particulei de masă m. Energia sa cinetică este:

$$E_c = \frac{m\dot{y}^2}{2} \tag{2.56}$$

Energia potenţială este suma dintre energia potenţială gravitaţională a particulei şi energia potenţială a resoartelor:

$$E_p = mgy + \frac{k}{2}(y-l)^2 + \frac{k}{2}(l-y)^2 = mgy + k(y-l)^2 \tag{2.57}$$

Poziţia de echilibru stabil se determină din condiţia de minim a energiei potenţiale:

$$\frac{dE_p}{dy} = 0 \tag{2.58}$$

Din 2.57 şi 2.58 rezultă:

$$y_0 = l - \frac{mg}{2k} \tag{2.59}$$

Funcţia lui Lagrange a sistemului este:

$$L = \frac{m\dot{y}^2}{2} - mgy - k(y-l)^2 \tag{2.60}$$

Se introduce o nouă coordonată:

$$z = y - y_0$$

care reprezintă deplasarea particulei faţă de poziţia de echilibru. Atunci 2.60 devine:

$$L = \frac{m\dot{z}^2}{2} - kz^2 - mgl + \frac{3m^2g^2}{4k} \tag{2.61}$$

Ecuaţia de mişcare este:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \tag{2.62}$$

adică

$$\ddot{z} + \frac{2k}{m}z = 0$$

Aceasta este ecuaţia unui oscilator armonic liniar cu soluţia:

$$z = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{cu} \qquad \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Rezultă:

$$y = y_0 + A\sin(\omega t + \varphi)$$

Viteza particulei este:

$$v = \dot{y} = \omega A\cos(\omega t + \varphi)$$

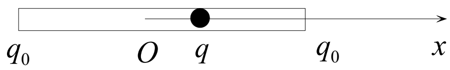

Figura 2.7: Particulă încărcată electric care oscilează într-un tub la capetele căruia se află sarcini de acelaşi semn cu cele a particulei

Constantele A şi φ se determină din condiţiile iniţiale $y(0) = l$ şi $v(0) = 0$.

Rezultă

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \qquad \text{şi} \qquad A = \frac{mg}{2k}$$

PROBLEMA 2.9 La capetele unui tub neconductor de lungime $2l$ sunt fixate două sarcini q_0 (Fig 2.7). În centrul tubului se poate mişca fără frecare o bilă de masă m încărcată cu sarcina q de acelaşi semn ca sarcinile q_0. Să se determine pulsaţia micilor oscilaţii ale bilei.

SOLUŢIE

Se alege ca sistem de referinţă o axă în lungul tubului cu originea în centrul tubului. Coordonata generalizată este coordonata x la care se află particula şi ea reprezintă deplasarea faţă de poziţia de echilibru.

Energia cinetică este:

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{2.63}$$

Energia potenţială a particulei de masă m este datorată interacţiei acesteia cu sarcinile q_0 de la capetele tubului.

$$E_p = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{l-x} + \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{l+x} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{l-x} + \frac{1}{l+x}\right)$$

$$E_p = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{2l}{l^2-x^2} = \frac{qq_0}{2\pi\epsilon_0 l}\left(\frac{1}{1-(x^2/l^2)}\right) \tag{2.64}$$

Considerând cazul micilor oscilaţii ($x \ll l$) se obţine pentru expresia energiei potenţiale:

$$E_p \simeq \frac{qq_0}{2\pi\epsilon_0 l}\left(1+\frac{x^2}{l^2}\right) \tag{2.65}$$

Funcţia lui Lagrange este:

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{qq_0}{2\pi\epsilon_0 l}\left(1+\frac{x^2}{l^2}\right) \tag{2.66}$$

Ecuaţia de mişcare poate fi pusă sub forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Calculând pe rând fiecare termen din ecuaţia de mişcare se obţine:

$$\ddot{x} + \frac{qq_0}{m\pi\varepsilon_0 l^3}x = 0 \tag{2.67}$$

Relaţia 2.67 este ecuaţia unui oscilator armonic liniar cu pulsaţia:

$$\omega = \sqrt{\frac{qq_0}{m\pi\varepsilon_0 l^3}}$$

Ecuaţia de mişcare este:

$$y = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

unde A şi B sunt constante care se determină din condiţiile iniţiale.

PROBLEMA 2.10 Să se găsească frecvenţa oscilaţiilor unui corp de masă m ce se poate deplasa pe o dreaptă şi este fixat de un resort a cărui extremitate este fixată într-un punct A la o distanţă l de dreaptă (Fig. 2.8). Când lungimea resortului este egală cu l el este solicitat de o forţă F.

SOLUŢIE

Considerăm coordonata generalizată ca fiind x – deplasarea corpului faţă de punctul O. Energia cinetică a acestuia este:

$$E_c = \frac{m\dot{x}^2}{2} \tag{2.68}$$

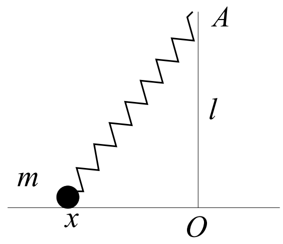

Figura 2.8: Corp legat de un resort care oscilează pe o dreaptă orizontală

iar energia potenţială este:

$$E_p = F\Delta l \tag{2.69}$$

unde Δl este alungirea resortului considerată foarte mică. Atunci:

$$\Delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l = l\sqrt{1 + \frac{x^2}{l^2}} - l \simeq l\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2}\right) - l = \frac{1}{2}\frac{x^2}{l}$$

Astfel relaţia 2.69 devine:

$$E_p = \frac{Fx^2}{2l} \tag{2.70}$$

Funcţia lui Lagrange este:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{Fx^2}{2l} \tag{2.71}$$

Ecuaţia de mişcare este:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{2.72}$$

Rezultă:

$$\ddot{x} + \frac{F}{ml}x = 0 \tag{2.73}$$

Relaţia 2.73 este ecuaţia unui oscilator armonic liniar cu pulsaţia:

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{ml}}$$

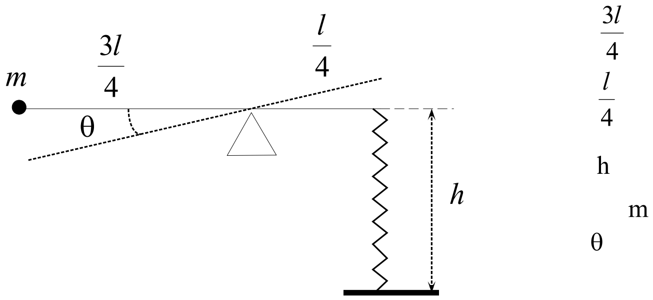

Figura 2.9: Bara care la un capăt este legată de un resort iar la celălalt capăt are un corp de masă m care oscilează

PROBLEMA 2.11 Să se găsească perioada micilor oscilaţii ale sistemului din Fig. 2.9. Bara de lungime l are o masă neglijabilă. Lungimea resortului nedeformat este h.

SOLUŢIE

Alegem coordonata generalizată ca fiind θ – unghiul de înclinare al barei faţă de orizontală. Energia cinetică este:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{3l}{4}\dot{\theta}\right)^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{3l}{4}\right)^2\dot{\theta}^2 \tag{2.74}$$

Energia potenţială este dată de suma dintre energia potenţială gravitaţională şi cea elastică. Valoarea de zero a energiei potenţiale gravitaţionale se poate alege în poziţia în care bara este orizontală.

$$E_p = \frac{k}{2}\left(\frac{l}{4}\theta\right)^2 - mg\frac{3l}{4}\theta \tag{2.75}$$

unde k este constanta de elasticitate.

În expresia de mai sus s-a considerat de la început că θ este mic. Poziţia de echilibru a sistemului se determină prin punerea condiţiei ca energia potenţială să fie minimă:

$$\left.\frac{dE_p}{d\theta}\right|_{\theta_0} = 0$$

adică

$$\frac{l^2}{16}k\theta_0 - mg\frac{3l}{4} = 0$$

Rezultă:

$$\theta_0 = \frac{12mg}{kl} \tag{2.76}$$

Introducând schimbarea de variabilă:

$$\varphi = \theta - \theta_0 \tag{2.77}$$

unde φ reprezintă deplasarea unghiulară a barei faţă de poziţia de echilibru, expresiile 2.74 şi 2.75 care reprezintă energiile cinetică, respectiv potenţială devin:

$$E_c = \frac{m}{2}\left(\frac{3l}{4}\right)^2\dot{\theta}^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{3l}{4}\right)^2\dot{\varphi}^2 \tag{2.78}$$

$$E_p = \frac{k}{2}\left(\frac{l}{4}\right)^2(\varphi+\theta_0)^2 - mg\frac{3l}{4}(\varphi+\theta_0) = \frac{kl^2}{32}\varphi^2 - \frac{9m^2g^2}{2k} \tag{2.79}$$

Funcţia lui Lagrange se poate scrie astfel:

$$L = E_c - E_p = \frac{m}{2}\left(\frac{3l}{4}\right)^2\dot{\varphi}^2 - \frac{kl^2}{32}\varphi^2 \tag{2.80}$$

deoarece termenul constant din energia potenţială se poate omite.

Ecuaţia de mişcare este:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \tag{2.81}$$

Rezultă:

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{9m}\varphi = 0$$

Se obţine ecuaţia unui oscilator armonic liniar cu pulsaţia:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{9m}}$$

PROBLEMA 2.12 Să se determine frecvenţa oscilaţiilor unui pendul al cărui punct de suspensie de masă m se poate deplasa orizontal.

SOLUŢIE

Utilizăm rezultatele obţinute în problema 2.1. Ecuaţiile de mişcare sunt:

$$(m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi) = 0 \tag{2.82}$$

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} + (m_2 l \cos\varphi)\ddot{x} + m_2 g l \sin\varphi = 0 \tag{2.83}$$

Deoarece se studiază cazul micilor oscilaţii unghiul φ este mic şi se vor folosi aproximaţiile:

$$\sin\varphi \simeq \varphi; \quad \cos\varphi \simeq 1$$

În plus se neglijează produsele în care apar puteri mai mari ca 2 ale lui φ.

Atunci ecuaţiile 2.82 şi 2.83 devin:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l\ddot{\varphi} = 0 \tag{2.84}$$

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x} + g\varphi = 0 \tag{2.85}$$

Din relaţia 2.84 rezultă

$$\ddot{x} = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\ddot{\varphi}$$

Introducând expresia lui $\ddot{x}$ în 2.85 se obţine ecuaţia:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g(m_1 + m_2)}{m_1 l}\varphi = 0$$

care este ecuaţia unui oscilator armonic liniar cu pulsaţia:

$$\omega = \sqrt{\frac{g\,(m_1 + m_2)}{m_1 l}}$$

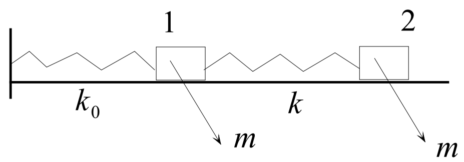

Figura 2.10: Sistem format din două resoarte şi două corpuri care oscilează într-un plan orizontal.

PROBLEMA 2.13 Să se determine ecuaţiile de mişcare pentru sistemul format din două mase $m_1 = m_2 = m$ şi două resoarte cu constantele elastice $k_1 = k_2 = k$ (Fig. 2.10). Ambele resoarte nedeformate au o lungime egală cu l_0.

SOLUŢIE

Dacă se notează cu x_1 şi x_2 coordonatele celor două corpuri energia cinetică a sistemului este:

$$E_c = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} \tag{2.86}$$

Energia potenţială este determinată de deformarea resorturilor

$$E_p = \frac{k_1}{2} (x_1 - l_0)^2 + \frac{k_2}{2} (x_2 - x_1 - l_0)^2 \tag{2.87}$$

Introducând schimbarea de variabile:

$$\eta_1 = x_1 - l_0$$

$$\eta_2 = x_2 - 2l_0$$

relaţiile 2.86 şi 2.87 devin:

$$E_c = \frac{m_1 \dot{\eta}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\eta}_2^2}{2} \tag{2.88}$$

$$E_p = \frac{k_1}{2} \eta_1^2 + \frac{k_2}{2} (\eta_2 - \eta_1)^2 \tag{2.89}$$

Funcţia lui Lagrange este:

$$L = \frac{m_1\dot{\eta}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{\eta}_2^2}{2} - \frac{k_1}{2}\eta_1^2 - \frac{k_2}{2}(\eta_2 - \eta_1)^2 \tag{2.90}$$

Ecuaţiile de mişcare sunt determinate dacă se rezolvă ecuaţiile Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_2} = 0$$

Acestea devin:

$$m_1\ddot{\eta}_1 + k_1\eta_1 - k_2(\eta_2 - \eta_1) = 0 \tag{2.91}$$

$$m_2\ddot{\eta}_2 + k_2(\eta_2 - \eta_1) = 0 \tag{2.92}$$

Pentru rezolvarea acestui sistem de ecuaţii diferenţiale se aleg η_1 şi η_2 de forma:

$$\eta_1 = A_1 \sin(\omega t + \phi)$$

$$\eta_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi)$$

Prin introducerea acestor expresii în relaţiile 2.91 şi 2.92 se obţine sistemul omogen:

$$\left(k_1 + k_2 - m_1\omega^2\right) A_1 - k_2 A_2 = 0$$

$$-k_2 A_1 + \left(k_2 - m_2\omega^2\right) A_2 = 0$$

Sistemul este compatibil dacă determinantul său este nul.

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Se obţine astfel ecuaţia bipătrată:

$$m_1 m_2 \omega^4 - \left[(m_1 + m_2) k_2 + m_2 k_1\right] \omega^2 + k_1 k_2 = 0$$

În cazul considerat $m_1 = m_2 = m$ şi $k_1 = k_2 = k$. Soluţiile ecuaţiei de mai sus sunt:

$$\omega_1^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\frac{k}{m}$$

$$\omega_2^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\frac{k}{m}$$

În cazul când $\omega = \omega_1$ soluţiile sistemului algebric sunt:

$$A_1 = A$$

$$A_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}A$$

unde A este o constantă.

În cazul când $\omega = \omega_2$ soluţiile sistemului algeric sunt

$$A_1 = B$$

$$A_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}B$$

unde B este o constantă.

Atunci:

$$\eta_1 = A\sin(\omega_1 t + \phi_1) + B\sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$\eta_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}A\sin(\omega_1 t + \phi_1) + \frac{1-\sqrt{5}}{2}B\sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

Constantele A, B, ϕ_1 şi ϕ_2 se determină din condiţiile iniţiale.

PROBLEMA 2.14 Să se determine funcţia lui Lagrange în cazul unui pendul dublu, format din două pendule suspendate unul de celălalat cu masele m_1 respectiv m_2 şi lungimile l_1 şi l_2 (Fig. **??**). Pentru cazul particular când tijele au lungimi egale să se determine pulsaţiile micilor oscilaţii iar în cazul maselor egale să se determine şi ecuaţiile de mişcare.

SOLUŢIE

Se aleg drept coordonate generalizate unghiurile de deviaţie ale celor două pendule faţă de verticală θ_1 şi θ_2. Atunci coordonatele maselor m_1 şi m_2 sunt:

$$x_1 = l_1\sin\theta_1$$

$$y_1 = -l_1\cos\theta_1$$

$$x_2 = l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2$$

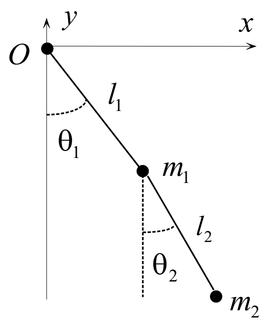

Figura 2.11: Pendulul dublu

$$y_2 = -l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2$$

Derivatele în raport cu timpul ale acestor coordonate sunt:

$$\dot{x}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1$$
$$\dot{y}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1$$
$$\dot{x}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2$$
$$\dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2$$

Energia cinetică totală este suma energiilor cinetice ale celor două particule

$$E_c = E_{c1} + E_{c2} \tag{2.93}$$

unde

$$E_{c1} = \frac{m_1 \left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right)}{2} = \frac{m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2}{2} \tag{2.94}$$

şi

$$E_{c2} = \frac{m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right)}{2} = \frac{m_2}{2}\left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos\left(\theta_2 - \theta_1\right)\right] \tag{2.95}$$

Energia potenţială este:

$$E_p = -m_1 g l_1 \cos\theta_1 - m_2 g \left(l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2\right) \tag{2.96}$$

Atunci funcţia lui Lagrange este:

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{m_1+m_2}{2} l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos\left(\theta_2-\theta_1\right) + \\
&+ \left(m_1+m_2\right) g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g l_2 cos\theta_2 \qquad (2.97)
\end{aligned}
$$

În cazul în care θ_1 şi θ_2 sunt foarte mici sinusurile se pot aproxima cu unghiurile iar $\cos\theta \simeq 1-2\sin^2\theta/2$. Atunci relaţia 2.97 devine:

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{m_1+m_2}{2} l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \\
&- \frac{\left(m_1+m_2\right) g l_1 \theta_1^2}{2} - \frac{m_2 g l_2 \theta_2^2}{2} + \left(m_1+m_2\right) g l_1 + m_2 g l_2 \qquad (2.98)
\end{aligned}
$$

Din

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$$

şi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

rezultă:

$$l_1\left(m_1+m_2\right)\ddot{\theta}_1 + l_2 m_2 \ddot{\theta}_2 + \left(m_1+m_2\right) g\theta_1 = 0 \qquad (2.99)$$

respectiv

$$l_2 m_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 m_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 g \theta_2 = 0 \qquad (2.100)$$

Dacă se consideră cazul $l_1 = l_2 = l$ ecuaţiile 2.99 şi 2.100 devin:

$$l\left(m_1+m_2\right)\ddot{\theta}_1 + l m_2 \ddot{\theta}_2 + \left(m_1+m_2\right) g\theta_1 = 0$$
$$l m_2 \ddot{\theta}_1 + l m_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g\theta_2 = 0$$

Dacă pentru acest sistem se aleg soluţii de forma:

$$\theta_1 = A_1 \sin(\omega t + \gamma)$$
$$\theta_2 = A_2 \sin(\omega t + \gamma)$$

se obţine următorul sistem omogen:

$$\left(m_1+m_2\right)\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right) A_1 - m_2\omega^2 A_2 = 0$$

$$-m_2\omega^2 A_1 + m_2\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)A_2 = 0$$

Pentru ca sistemul să aibă soluţii nebanale deteminantul său trebuie să fie egal cu zero:

$$\begin{vmatrix} (m_1+m_2)\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right) & m_2\omega^2 \\ -m_2\omega^2 & m_2\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right) \end{vmatrix} = 0$$

Rezultă ecuaţia:

$$\omega^4 - 2\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{l}\omega^2 + \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{g}{l}\right)^2 = 0 \tag{2.101}$$

Soluţiile ecuaţiei 2.101 sunt:

$$\left(\omega^2\right)_{12} = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{l} \pm \sqrt{\frac{m_2}{m\ _1}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}\frac{g}{l} \tag{2.102}$$

Pentru $m_1 = m_2 = m$ soluţiile ecuaţiei devin:

$$\omega_1^2 = \left(2 + \sqrt{2}\right)\frac{g}{l}$$

$$\omega_2^2 = \left(2 - \sqrt{2}\right)\frac{g}{l}$$

Pentru $\omega = \omega_1$ prin rezolvarea sistemului de ecuaţii algebrice se obţine $A_1 = A$ şi $A_2 = -\sqrt{2}A$. Pentru $\omega = \omega_2$, $A_1 = B$ iar $A_2 = \sqrt{2}B$

Atunci expresiile pentru θ_1 şi θ_2 sunt:

$$\theta_1 = A\sin(\omega_1 t + \gamma_1) + Bsin(\omega_2 t + \gamma_2)$$

$$\theta_2 = -\sqrt{2}A\sin(\omega_1 t + \gamma_1) + \sqrt{2}Bsin(\omega_2 t + \gamma_2)$$

unde constantele A, B, γ_1, şi γ_2 se determină din condiţiile iniţiale.

PROBLEMA 2.15 O particulă de masă m se mişcă în lungul axei Ox într-un câmp pentru care hamiltonianul este dat de expresia:

$$H = \frac{1}{2m}p^2 - F_0 t x$$

unde F_0 este o constantă. Să se utilizeze ecuaţia Hamilton - Jacobi pentru a obţine legea de mişcare. Se va presupune că $x(0) = x_0$ şi $v(0) = v_0$.

SOLUŢIE

Ecuaţia Hamilton - Jacobi este:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - F_0 t x = 0 \tag{2.103}$$

Deoarece nu putem separa variabilele iar energia potenţială depinde doar liniar de x, se va căuta o integrală de forma:

$$S = f(t)x + g(t) \tag{2.104}$$

Atunci ecuaţia 2.103 devine:

$$x\left[\dot{f}(t) - F_0 t\right] + \dot{g} + \frac{1}{2m}f^2 = 0 \tag{2.105}$$

Ecuaţia 2.105 trebuie satisfăcută pentru orice x. Acest lucru implică satisfacerea simultană a ecuaţiilor

$$\dot{f}(t) - F_0 t = 0 \tag{2.106}$$

şi

$$\dot{g} + \frac{1}{2m}f^2 = 0 \tag{2.107}$$

Soluţia ecuaţiei 2.106 este:

$$f = \frac{1}{2}F_0 t^2 + a \tag{2.108}$$

unde a este o constantă

Soluţia ecuaţiei 2.107 este:

$$g = -\frac{1}{2m}\left[\frac{F_0^2 t^5}{20} + \frac{F_0 a t^3}{3} + a^2 t\right] \tag{2.109}$$

Atunci funcţia S se poate scrie:

$$S = \left(\frac{1}{2}F_0 t^2 + a\right)x - \frac{1}{2m}\left[\frac{F_0^2 t^5}{20} + \frac{F_0 a t^3}{3} + a^2 t\right] \tag{2.110}$$

De aici rezultă o nouă constantă b:

$$b = \frac{\partial S}{\partial a} = x - \frac{1}{6m}F_0 t^3 - \frac{at}{m}$$

Atunci legea de mişcare este:

$$x = b + \frac{1}{6m} F_0 t^3 + \frac{at}{m} \tag{2.111}$$

iar impulsul asociat coordonatei x este:

$$p = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{2} F_0 t^2 + a \tag{2.112}$$

Pentru determinarea constantelor se ţine cont de condiţile iniţiale. Deoarece la $t = 0$, $x = x_0$ rezultă $x_0 = b$ iar din faptul că la $t = 0$, $v = v_0$ rezultă $mv_0 = a$.

Legea de mişcare este:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{6m} F_0 t^3$$

$$p = mv_0 + \frac{1}{2} F_0 t^2$$

PROBLEMA 2.16 Pentru ce valori ale parametrilor a şi b transformarea:

$$Q = q^a \cos bp, \quad P = q^a \sin bp$$

este canonică? Determinaţi funcţia generatoare în cazul că funcţia este complet canonică.

SOLUŢIE

Pentru aceasta este necesar ca:

$$\{P, Q\}_{p.q} = \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1 \tag{2.113}$$

Se vor calcula derivatele parţiale:

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = a q^{a-1} \cos bp$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = -q^a b \sin bp$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = aq^{a-1} \sin bp$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = q^a b \cos bp$$

Cu aceste valori paranteza Poisson $\{P, Q\}_{p.q}$ devine:

$$\{P, Q\}_{p.q} = baq^{2a-1} \tag{2.114}$$

Ţinând cont de 2.113 rezultă că $a = 1/2$ iar $b = 2$
Astfel transformarea canonică devine:

$$Q = \sqrt{q} \cos 2p \tag{2.115}$$

$$P = \sqrt{q} \sin 2p \tag{2.116}$$

Condiţia de canonicitate se scrie:

$$pdq - (H - \widetilde{H})dt - PdQ = dF$$

Deaorece transformarea este complet canonică $H = \widetilde{H}$ şi rezultă

$$pdq - PdQ = dF \tag{2.117}$$

Deoarece

$$dQ = \frac{1}{2\sqrt{q}} \cos 2p\, dq - 2\sqrt{q} \sin 2p\, dp$$

din 2.117 rezultă:

$$dF = pdq - \frac{\sin 2p \cos 2p\, dq}{2} + 2q \sin^2 2p\, dp \tag{2.118}$$

De aici se obţin ecuaţiile:

$$\frac{\partial F}{\partial q} = p - \frac{\sin 4p}{4} \tag{2.119}$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 2q \sin^2 2p \tag{2.120}$$

Prin integrarea celor două ecuaţii rezultă:

$$F = q\left(p - \frac{\sin 4p}{4}\right)$$

PROBLEMA 2.17 Să se demonstreze că transformarea:

$$X = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(m\omega x + ip)e^{i\omega t}$$

$$P = \frac{i}{\sqrt{2m\omega}}(m\omega x - ip)e^{-i\omega t}$$

este o transformare canonică şi să se determine funcţia generatoare F.

SOLUŢIE

Pentru a demonstra canonicitatea transformării este necesar să se arate că:

$$\{P, X\}_{p,x} = \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial p} = 1 \tag{2.121}$$

Pentru aceasta se calculează derivatele parţiale

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{m\omega e^{i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}}$$

$$\frac{\partial X}{\partial p} = \frac{ie^{i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{im\omega e^{-i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}}$$

care introduse în relaţia 2.121 o satisfac.

$$\{P, X\}_{p,x} = \frac{m\omega}{2m\omega} - \frac{i^2 m\omega}{2m\omega} = 1$$

Rezultă că transformarea este canonică.

Din condiţia de canonicitate a transformării:

$$pdx - (H - \widetilde{H})dt - PdX = dF \tag{2.122}$$

rezultă:

$$p = \frac{\partial F}{\partial x} \tag{2.123}$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial X} \tag{2.124}$$

Din relaţia:

$$X = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(m\omega x + ip)e^{i\omega t}$$

rezultă:

$$p = im\omega x - i\sqrt{2m\omega}Xe^{-i\omega t} \tag{2.125}$$

Ţinând cont de relaţia 2.123 se obţine:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = im\omega x - i\sqrt{2m\omega}Xe^{-i\omega t} \tag{2.126}$$

Pentru a obţine $P = P(x, X)$, în relaţia

$$P = \frac{i}{2m\omega}(m\omega x - ip)e^{-i\omega t}$$

se substitue p dat de 2.125. Se obţine:

$$P = i\sqrt{2m\omega}\, xe^{-i\omega t} - iXe^{-2i\omega t} = -\frac{\partial F}{\partial X} \tag{2.127}$$

Prin integrarea ecuaţiilor 2.126 şi 2.127 se obţine pentru funcţia generatoare expresia:

$$F = \frac{im\omega x^2}{2} - i\sqrt{2m\omega}\, e^{-i\omega t}Xx + \frac{iX^2}{2}e^{-2i\omega t} \tag{2.128}$$

PROBLEMA 2.18 Să se arate că pentru un sistem cu un singur grad de libertate, o rotaţie în spaţiul fazelor

$$Q = q\cos\alpha - p\sin\alpha$$

$$P = q\sin\alpha + p\cos\alpha$$

este o transformare canonică şi să se determine funcţia generatoare a transformării.

SOLUŢIE

Condiţia de canonicitate este:

$$\{P,Q\}_{p,q} = \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} = 1 \tag{2.129}$$

Se calculează derivatele parţiale:

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = -\sin\alpha$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = \sin\alpha$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \cos\alpha$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \cos\alpha$$

Înlocuind aceste derivate în expresia 2.129 aceasta este satisfăcută.

Din condiţia de canonicitate:

$$pdq - PdQ - (H - \widetilde{H})dt = dF$$

rezultă

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial Q}$$

Din relaţiile de definiţie a transformării vom exprima $p = p(q, Q)$ şi $P = P(q, Q)$. Se obţine

$$P = \frac{q}{\sin\alpha} - Q\text{ctg }\alpha = \frac{\partial F}{\partial Q} \tag{2.130}$$

$$p = q\text{ctg }\alpha - \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{\partial F}{\partial q} \tag{2.131}$$

Prin integrarea ecuaţiilor 2.130 şi 2.131 se obţine funcţia generatoare

$$F = \frac{1}{2}(q^2 + Q^2)\text{ctg}^2\alpha - \frac{qQ}{\sin\alpha}$$