Probleme de fizică

Emil Petrescu   Daniela Buzatu

14 octombrie 2005

Cuprins

Capitolul 1

OPTICĂ

1.1 Unde electromagnetice

1.1.1 Să se scrie expresiile vectorilor $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ ale unei unde electromagnetice plane care se propagă pe direcţia Oz, dacă ea este liniar polarizată având planul de polarizare la un unghi $\alpha = 45^o$ faţă de planul Oyz. Propagarea undei are loc în vid (vezi Fig.1.1).

Soluţie

Dacă notăm cu E_o modulul amplitudinii intensităţii câmpului electric, atunci:

$$\vec{E}_o = E_o \sin\alpha \vec{e}_x + E_o \cos\alpha \vec{e}_y$$

Deoarece $\alpha = \pi/4$ rezultă:

$$\vec{E}_o = \frac{\sqrt{2}}{2} E_o \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} E_o \vec{e}_y$$

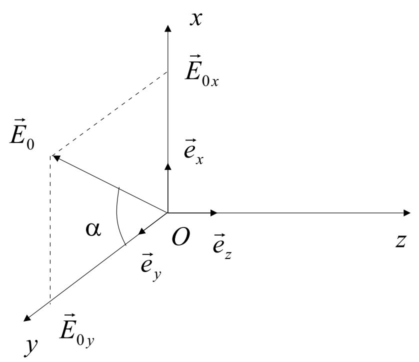

Fig. 1.1

Astfel, unda armonică plană va avea expresia:

$$E(z,t) = \frac{\sqrt{2}}{2} E_o(\vec{e}_x + \vec{e}_y)\cos(\omega t - kz)$$

unde $k = \omega/c$, k fiind modulul vectorului de undă iar ω - pulsaţia. Deoarece propagarea undei are loc în vid:

$$\vec{B} = \mu_o \vec{H} \quad \text{unde} \quad \vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}(\vec{u} \times \vec{E})$$

$\vec{u}$ este versorul direcţiei de propagare, care în cazul nostru este $\vec{e}_z$. Astfel, inducţia câmpului magnetic este:

$$\vec{B} = \sqrt{\varepsilon_o \mu_o}(\vec{e}_z \times \vec{E}) = \frac{1}{c}(\vec{e}_z \times \vec{E})$$

Pentru amplitudini este valabilă relaţia:

$$\vec{B}_o = \frac{1}{c}(\vec{e}_x \times \vec{E}_o)$$

Atunci:

$$\vec{e}_x \times \vec{E}_o = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ E_o \sin\alpha & E_o \cos\alpha & 0 \end{vmatrix} = -E_o \cos\alpha \vec{e}_x + E_o \sin\alpha \vec{e}_y$$

şi

$$\vec{B}_o = -\frac{E_o}{c} \cos\alpha \vec{e}_x + \frac{E_o}{c} \sin\alpha \vec{e}_y$$

Ţinând cont că $\vec{B} = \vec{B}_o \cos(\omega t - kz)$ şi că $\alpha = 45^o$, rezultă:

$$\vec{B} = \frac{E_o}{c\sqrt{2}} [\vec{e}_x + \vec{e}_y] \cos(\omega t - kz)$$

1.1.2 O undă electromagnetică plană care are frecvenţa $\nu = 16$ Hz se propagă în vid după direcţia axei Oz şi are amplitudinea intensităţii câmpului electric $E_x = 2$ V/m.
a. Să se determine amplitudinea, viteza de fază, lungimea de undă şi vectorul de undă.
b. Să se determine amplitudinea şi direcţia de oscilaţie a intensităţii câmpului magnetic.

Soluţie

a. Deoarece unda electromagnetică se propagă în vid, viteza de fază este $c = 3 \times 10^8$ m/s.

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{c}{\nu} = \frac{3 \times 10^8}{10^9} = 0,3 \text{ m} \\ k &= \frac{2\pi}{\lambda} = 20,9 \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

b.

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}(\vec{u} \times \vec{E})$$

În cazul nostru, $\vec{u} = \vec{e}_z$ iar $\vec{E} = E_x\vec{e}_x$. Intensitatea câmpului magnetic devine:

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}(\vec{e}_z \times \vec{e}_x)E_x$$
$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}E_x\vec{e}_y$$

Vectorul $\vec{H}$ oscilează după axa Oz iar modulul său va avea valoarea:

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}E_x = 5,3 \times 10^{-3}\ \mathrm{A/m}$$

1.1.3 Vectorul intensitate a câmpului electric al unei unde electromagnetice plane este:

$$\vec{E} = \vec{E}_o exp\ i[9,42 \times 10^{14}t - \frac{\pi}{3}(\sqrt{12}x + 2y)\ 10^7]\ \mathrm{V/m}$$

unde

$$\vec{E} = -3 \times 10^4\vec{e_x} + 3\sqrt{3} \times 10^4\vec{e_y}$$

Să se determine:
a. direcţia după care oscilează intensitatea câmpului electric

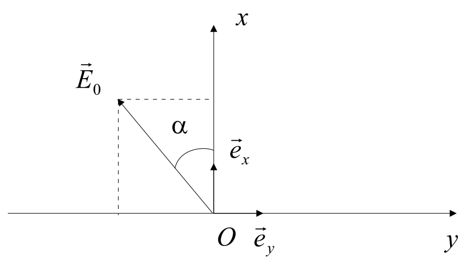

Fig. 1.2

b. direcţia de propagare a undei
c. mărimea amplitudinii intensităţii câmpului electric
d. lungimea de undă
e. pulsaţia şi frecvenţa undei
f. viteza de propagare

Soluţie

a. Reprezentăm în sistemul de axe xOy amplitudinea câmpului electric (vezi Fig. 1.2).
Deoarece

$$\begin{aligned} E_x &= -3 \times 10^4 \text{ V/m} \qquad\qquad E_y = 3\sqrt{3} \times 10^4 \text{ V/m} \\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{|E_x|}{E_y} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \alpha &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Atunci, unghiul φ făcut de $\vec{E}_o$ cu axa Ox este:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

b.

$$E_o = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 6 \times 10^4 \text{ V/m}$$

c. Din expresia de definiţie:

$$\vec{E} = \vec{E}_o exp\ i(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

rezultă:

$$\vec{k}\vec{r} \ = \ k_x x + k_y y + k_z z = \frac{\pi}{3}(\sqrt{12}x + 2y)\ 10^7$$

şi

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{\sqrt{12}\pi}{3} \times 10^7 \text{ m}^{-1} \\ k_y &= \frac{2\pi}{3} \times 10^7 \text{ m}^{-1} \\ k_z &= 0 \end{aligned}$$

Atunci:

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{4\pi}{3} \times 10^7 \text{ m}^{-1} \\ u_x &= \frac{k_x}{k} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ u_y &= \frac{k_y}{k} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

iar vectorul direcţiei de propagare va avea expresia:

$$\vec{u} = u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\vec{e}_y$$

d.

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 1,5 \times 10^{-7}\ \mathrm{m}$$

e.

$$\begin{aligned} \omega &= 9,42 \times 10^{14}\ \mathrm{rad/s} \\ \nu &= \frac{\omega}{2\pi} = 1,5 \times 10^{14}\ \mathrm{Hz} \end{aligned}$$

f.

$$\begin{aligned} \lambda &= vT = \frac{v}{\nu} \\ v &= \lambda\nu = 2,25 \times 10^{7}\ \mathrm{m/s} \end{aligned}$$

1.1.4 Intensitatea câmpului electric al unei unde electromagnetice care se propagă în direcţia Ox în vid este:

$$\vec{E} = E_o \vec{e}_y \sin\frac{\pi z}{z_o} \cos(\omega t - kz)$$

Cunoscând viteza luminii în vid c, z_o şi ω să se determine modulul vectorului de undă.

Soluţie

Considerăm ecuaţia undelor undelor:

$$\triangle \vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

scrisă pentru componenta E_y:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

unde:

$$E_y = E_o \sin\frac{\pi z}{z_o}\cos(\omega t - kx)$$

iar derivatele de ordin doi vor avea expresiile:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= -E_o k^2 \sin\frac{\pi z}{z_o}\cos(\omega t - kx) \\
\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} &= 0 \\
\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= -E_o\frac{\pi^2}{z_o^2}\sin\frac{\pi z}{z_o}\cos(\omega t - kx) \\
\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} &= -E_o\omega^2 \sin\frac{\pi z}{z_o}\cos(\omega t - kx)
\end{aligned}$$

Atunci:

$$-k^2 - \frac{\pi^2}{z_o^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}$$

Rezultă:

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{c\pi}{z_o c}\right)^2}$$

1.1.5 Un laser emite în ultraviolet pulsuri de 2 ns cu diametrul de $2,5$ mm. Fiecare puls are energia de 6 J.
a. Să se determine lungimea în spaţiu a pulsului emis de laser
b. Să se determine densitatea de energie emisă de laser

Soluţie

a.

$$l = cT = 3 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-9} = 0,6 \text{ m}$$

b.

$$w = \frac{W}{V} = \frac{W}{l\pi d^2/4} = \frac{4W}{\pi l d^2} = 10^6 \text{ W/m}^3$$

1.1.6 Utilizând argumente energetice să se arate că amplitudinea unei unde sferice descreşte cu r.

Soluţie

Considerăm două sfere concentrice (în centrul sferei se află sursa) de raze r_1 şi alta de rază $r > r_1$. Energia care trece în unitatea de timp prin cele două sfere este aceeaşi. Atunci:

$$4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r^2 I$$

unde

$$I_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_1^2 \qquad I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2$$

E_1 şi E_2 fiind intensităţile câmpului electric al undei pe suprafaţa celor două sfere. Astfel:

$$r_1^2 E_1^2 = r^2 E^2$$

$$E = \frac{E_1 r_1}{r} \sim \frac{1}{r}$$

1.1.7 Utilizând argumente energetice să se arate că amplitudinea unei unde cilindrice descreşte cu $\sqrt{r}$.

Soluţie

Considerăm doi cilindrii, unul având ca axă sursa filiformă a undelor cu raza r_1 fixă, şi altul de rază $r > r_1$.
Energia care traversează cilindrii pe o porţiune de lungime l prin cele două suprafeţe în unitatea de timp este aceeaşi:

$$2\pi l r_1 I_1 = 2\pi l r I$$

unde

$$I_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_1^2 \qquad I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2$$

E_1 şi E sunt intensităţile câmpului electric al undei pe suprafaţa laterală a celor doi cilindri. Astfel:

$$r_1 E_1^2 = r E^2$$

Rezultă:

$$E = \frac{\sqrt{r_1}E_1}{\sqrt{r}} \sim \frac{1}{\sqrt{r}}$$

1.1.8 O undă electromagnetică plană cade la incidenţă normală pe o lamă cu feţe plan-paralele de grosime d (vezi Fig. 1.3). Substanţa din care este confecţionată lama este nemagnetică ($\mu_r = 1$), iar permitivitatea electrică relativă descreşte după legea:

$$\varepsilon_r(x) = \varepsilon_1 e^{-2ax}$$

Să se determine timpul total în care unda străbate lama cu feţe plan-paralele.

Soluţie

Viteza undei la distanţa x de suprafaţa lamei este:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_o}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_o\mu_o}}$$
$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}e^{ax}$$

Timpul în care unda străbate porţiunea dx de la distanţa x este:

$$dt = \frac{dx}{v} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{c}e^{-ax}dx$$

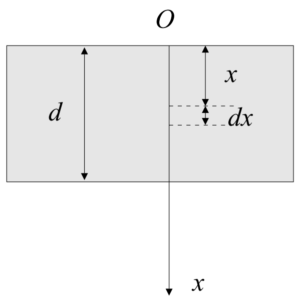

Fig. 1.3

Atunci timpul total va fi:

$$t = \int_0^d \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{c} e^{-ax} dx = -\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{c} \frac{1}{a} e^{-ax}|_0^d = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{ac} \left[1 - e^{-ad}\right]$$

1.1.9 O undă electromagnetică plană se propagă în vid astfel încât câmpul electric are expresia:

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

ıntr-un sistem de coordonate $Oxyz$ cu versorii $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ şi $\vec{e}_z$. Vectorul de undă şi amplitudinea undei au expresiile:

$$\begin{aligned} \vec{k} &= 3\vec{e}_x + 4\vec{e}_z \text{ m}^{-1} \\ \vec{E}_o &= 2\vec{e}_y \text{ V/m} \end{aligned}$$

a. Să se determine direcţia de propagare a undei şi lungimea de

undă
b. Să se determine intensitatea câmpul magnetic H
c. Să se determine intensitatea undei

Soluţie

a. Direcţia de propagare a undei este dată de vectorul $\vec{k}$ care, conform expresiei lui se află în planul xOz. Unghiul θ făcut de direcţia de propagare cu axa Oz este:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_x}{k_z} = \frac{3}{4}$$

Rezultă:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} = \frac{2\pi}{5}\ \mathrm{m}$$

b.

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}(\vec{u} \times \vec{E}) \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}\frac{(\vec{k} \times \vec{E})}{k} = 5,3 \times 10^{-4}(-8\vec{e}_x + 6\vec{e}_z)e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \end{aligned}$$

unde $\vec{u}$ este versorul direcţiei de propagare a undei; se observă că $\vec{H}$ oscilează în planul xOz.
c.

$$I = <|\vec{E} \times \vec{H}|> = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}\vec{E}_o^2\vec{u}\ \mathrm{W/m^2}$$

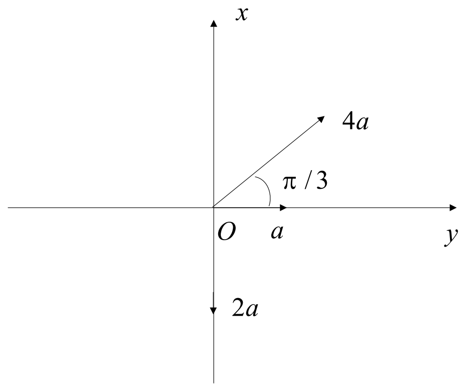

Fig. 1.4

1.2 Interferenţă

1.2.1 Să se determine amplitudinea oscilaţiei care se obţine prin compunerea a trei oscilaţii:

$$\begin{aligned} u_1 &= a\cos\omega t \\ u_2 &= 2a\sin\omega t \\ u_3 &= 4a\cos\left(\omega t + \pi/3\right) \end{aligned}$$

Soluţie

Exprimăm:

$$u_2 = 2a\sin\omega t = 2a\cos\left(\omega t - \pi/2\right)$$

Din Fig. 1.4 se observă că putem scrie componentele amplitudinii mişcării rezultante:

$$\begin{aligned} A_x &= a + 4a\cos\pi/3 = 3a \\ A_y &= 4a\sin\pi/3 - 2a = 2\sqrt{3}a - 2a \end{aligned}$$

Atunci, amplitudinea rezultantă va fi:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{9a^2 + 4(\sqrt{3}-1)^2a^2} = 3,3a$$

1.2.2 O oscilaţie se obţine prin suprapunerea a N oscilaţii coerente pe aceeaşi direcţie şi care sunt de forma:

$$u_k = a\cos\left[\omega t + (k-1)\theta\right]$$

unde k este numărul oscilaţiei ($k = 1, 2, ...N$), θ este defazajul între oscilaţia k şi oscilaţia $k+1$. Să se determine amplitudinea rezultantă.

Soluţie

Reprezentăm oscilaţiile sub formă complexă:

$$u_k = a\exp\left[i\omega t + (k-1)\theta\right] = \tilde{a}e^{i\omega t}$$

unde

$$\tilde{a} = a\exp\left(k-1\right)\theta$$

Amplitudinea complexă a oscilaţiei rezultante este:

$$\tilde{A} = \sum_{k=1}^{N}\tilde{a} = a\sum_{k=1}^{N}e^{(k-1)\theta} = a\frac{e^{iN\theta}-1}{e^{i\theta}-1}$$

Amplitudinea reală este egală cu modulul amplitudinii complexe:

$$A = a\frac{|e^{iN\theta} - 1|}{|e^{i\theta} - 1|}$$

Se va ţine cont că:

$$\begin{aligned}
|e^{i\alpha} - 1| &= |\cos\alpha + i\sin\alpha - 1| = \sqrt{(\cos^2\alpha - 1)^2 + \sin^2\alpha} \\
&= 2\sin\alpha/2
\end{aligned}$$

Rezultă:

$$A = a\frac{\sin{(N\theta/2)}}{\sin{(\theta/2)}}$$

1.2.3 Două unde coerente plane au direcţiile de propagare ce fac între ele un unghi α foarte mic, căzând aproape normal pe un ecran. Să se determine distanţa dintre două maxime vecine pe ecran (interfranja).

Soluţie

Fie cele două unde coerente:

$$\begin{aligned}
y_1 &= A\cos{(\omega t - \vec{k}_1\vec{r})} \\
y_2 &= A\cos{(\omega t - \vec{k}_2\vec{r})}
\end{aligned}$$

Defazajul dintre cele două unde este:

$$\Delta\phi = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\vec{r}$$

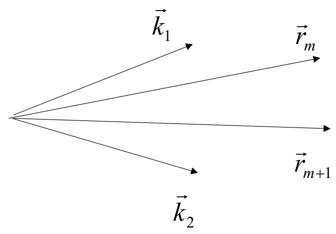

Fig. 1.5

Pentru maximul de ordin m, defazajul va fi:

$$(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\vec{r}_m = 2\pi m$$

iar pentru maximul de ordin $m + 1$ defazajul va fi:

$$(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\vec{r}_{m+1} = 2\pi(m + 1)$$

Din cele două ecuaţii rezultă:

$$(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)(\vec{r}_{m+1} - \vec{r}_m) = 2\pi$$

Deoarece incidenţa este aproape normală pe ecran (vezi Fig. 1.5):

$$|\vec{k}_1 - \vec{k}_2||\vec{r}_{m+1} - \vec{r}_m| = 2\pi$$
$$k\alpha \times i = 2\pi$$

Cum $k = 2\pi/\lambda$, rezultă:

$$i = \frac{\lambda}{\alpha}$$

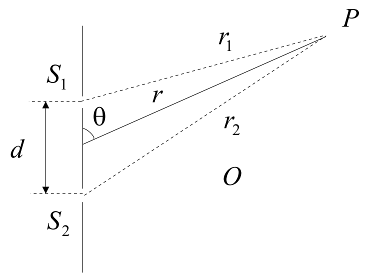

Fig. 1.6

1.2.4 Un sistem este format din două surse punctiforme S_1 şi S_2, care emit unde coerente. Sursele se află într-un plan şi oscilează perpendicular pe planul respectiv. Distanţa dintre surse este d iar lungimea de undă este λ_o. Sursa S_2 este defazată cu φ în urma sursei S_1. Să se determine unghiul θ ce caracterizează direcţia după care intensitatea radiaţiei este maximă (Fig. 1.6).

Soluţie

Fie un punct P situat la o distanţă $r \gg d$, pe direcţia θ faţă de surse.

$$\begin{aligned} r_2^2 &= r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + rd\cos\theta \\ r_1^2 &= r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - rd\cos\theta \end{aligned}$$

Scădem cele două ecuaţii:

$$(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2rd\cos\theta$$

şi ţinem cont că $r_2 + r_1 \simeq 2r$. Rezultă:

$$\Delta r = r_2 - r_2 \quad \simeq \quad rd\cos\theta$$

Astfel, defazajul dintre undele care ajung în punctul P se datorează o dată defazajului iniţial şi apoi defazajului obţinut din diferenţa de drum $2\pi\Delta r/\lambda$. Rezultă:

$$\Delta\varphi = \theta + \frac{2\pi d\cos\theta}{\lambda}$$

Maximul de interferenţă se obţine pentru $\Delta\varphi = 2k\pi$:

$$\theta + \frac{2\pi d\cos\theta}{\lambda} = 2k\pi$$

şi

$$\cos\theta = \left[k - \frac{\theta}{2\pi}\right]\frac{\lambda}{d}$$

1.2.5 Una din fantele dispozitivului Young este acoperită cu un strat de mică cu indicele de refracţie $n = 1,58$. În punctul central de pe ecran se găseşte a $7 - a$ franjă luminoasă. Care este grosimea lamei dacă lungimea de undă a luminii folosite este $\lambda = 5500$ Å(Fig. 1.7).

Soluţie

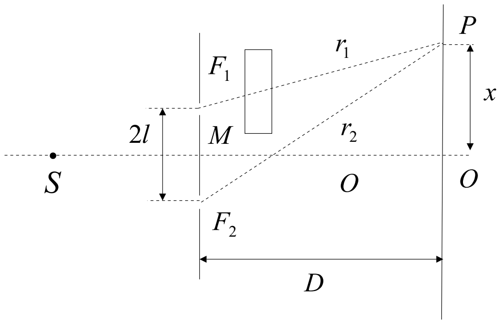

Fig. 1.7

Conform Fig. 1.7, diferenţa de drum între razele care interferă în punctul P este:

$$\delta = (r_1 - e) + ne - r_2$$

Dar, în punctul O, $r_1 = r_2$. Atunci:

$$\delta = (n-1)e$$

Din condiţia de maxim $\delta = k\lambda$ rezultă:

$$(n-1)e = k\lambda$$

Astfel grosimea e este:

$$e = \frac{k\lambda}{n-1} = 6,64\ \mu m$$

1.2.6 În practică, studiul fenomenului de interferntă nu se realizează utilizând surse luminoase monocromatice. Să se determine relaţia dintre $\Delta\lambda$, lărgimea spectrală a radiaţiei folosite şi ordinul de inteferenţă k la care figura de interferenţă nu se mai observă.

Soluţie

Figura de interferenţă nu se mai observă când maximul de ordin k al radiaţiei cu lungimea de undă $\lambda + \Delta\lambda$ cade peste maximul de ordin $k+1$ al radiaţiei cu lungimea de undă λ, adică:

$$\delta = k(\lambda + \Delta\lambda) = (k+1)\lambda$$

Atunci:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{k}$$

1.2.7 Într-o experienţă cu oglinzi Lloyd (vezi Fig. 1.8), o undă luminoasă care provine direct de la sursă interferă direct cu unda reflectată de oglinda O. Franjele de interferenţă se obţin pe ecranul E perpendicular pe planul oglinzii. Distanţa dintre sursă şi ecran este d, iar interfranja este i. Dacă distanţa dintre sursă şi oglindă se modifică cu Δh, interfranja se măreşte de η ori. Să se determine lungimea de undă a luminii folosite.

Soluţie

Putem considera că interferenţa pe ecranul E este datorată undelor ce provin de la sursa S şi de la imaginea lui S în oglinda

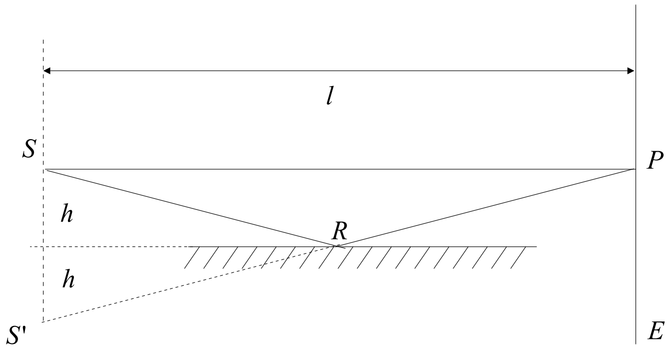

Fig. 1.8

O, S'. Distanţa dintre cele două surse, una reală (S) şi cealaltă virtuală (S') este $2h$. Interfranja este:

$$i = \frac{2\lambda h}{d}$$

Când sursa se depărtează, noua interfranjă este:

$$i\eta = \frac{2\lambda(h - \Delta h)}{d}$$

De aici rezultă:

$$\lambda = \frac{i(\eta - 1)d}{2\Delta h}$$

1.2.8 În Fig. 1.9 este prezentată experienţa de interferenţă cu oglinzi Fresnel. Unghiul dintre cele două oglinzi este $\alpha = 12'$,

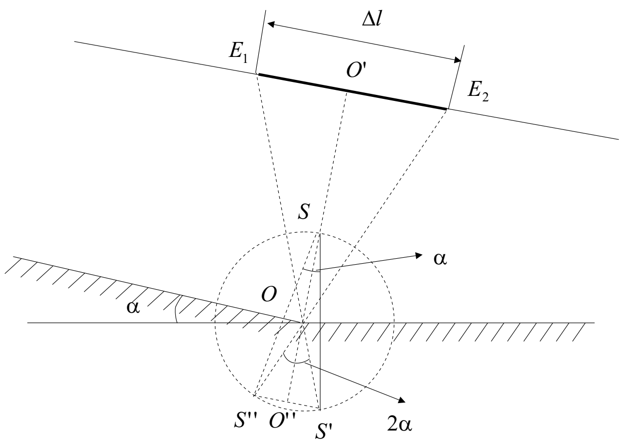

Fig. 1.9

distanţa dintre muchia comună a oglinzilor şi ecran este $b = 130$ cm. Lungimea de undă a luminii este $\lambda = 0.55$ μm. Să se determine interfranja şi numărul de maxime ce se obţin pe ecran.

Soluţie

Sursele care furnizează lumină coerentă sunt imaginile sursei S în oglinzi. Se observă că sursa S şi imaginile ei S' şi S" se află pe un cerc de rază r.
Distanţa dintre planul surselor şi ecran este:

$$D = b + r \sin \alpha$$

Distanţa dintre surse $S'S" = 2r\alpha$. Atunci:

$$\begin{aligned} i &= \frac{\lambda D}{S'S"} = \frac{\lambda D}{2r\alpha} = \frac{\lambda(b + r\sin\alpha)}{2r\alpha} \\ i &\simeq \frac{\lambda(b+r)}{2r\alpha} = 1,1 \text{ mm} \end{aligned}$$

Lungimea Δl pe care se obţine interferenţa este:

$$\Delta l = 2b\alpha = 8,3 \text{ mm}$$

Astfel, numărul de maxime este:

$$N = \frac{\Delta l}{i} + 1 = \frac{2b\alpha 2r\alpha}{\lambda(b+r)} + 1 = \frac{4br\alpha^2}{\lambda(b+r)} + 1 = 9$$

1.2.9 Într-un interferometru cu două fascicule se utilizează linia galbenă a mercurului care este constituită din două lungimi de undă $\lambda_1 = 576,97$ Å şi $\lambda_2 = 579,03$ Å. Care este ordinul minim de interferenţă astfel ca maximele determinate de cele două radiaţii să se distingă.

Soluţie

Cele două maxime de interferenţă se disting atunci când maximul radiaţiei λ_1 de ordin k se suprapune peste minimul radiaţiei de ordin $k-1$. Deoarece în acel punct diferenţa de drum optic pentru ambele radiaţii este aceeaşi, rezultă:

$$\delta = k\lambda_1 = (2k-1)\frac{\lambda_2}{2}$$

şi

$$k = \frac{\lambda_2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} = 140$$

1.2.10 O peliculă de apă ($n = 1,3$) aflată în aer are grosimea $d = 3200$ Å. Dacă lama este iluminată la incidenţă normală, care va fi culoarea predominantă în lumina reflectată.

Soluţie

Deoarece lama este iluminată la incidenţă normală, diferenţa de drum este:

$$\delta = 2nd - \lambda/2$$

Condiţia de maxim este:

$$\delta = 2nd - \lambda/2 = k\lambda \qquad k = 1, 2, 3, ...$$

Atunci:

$$\lambda = \frac{2nd}{k + 1/2} = \frac{8500}{k + 1/2} \text{ Å}$$

Pentru:

$$\begin{aligned} k &= 0 \Rightarrow \lambda = 17000 \text{ Å} \\ k &= 1 \Rightarrow \lambda = 5700 \text{ Å} \\ k &= 2 \Rightarrow \lambda = 3400 \text{ Å} \end{aligned}$$

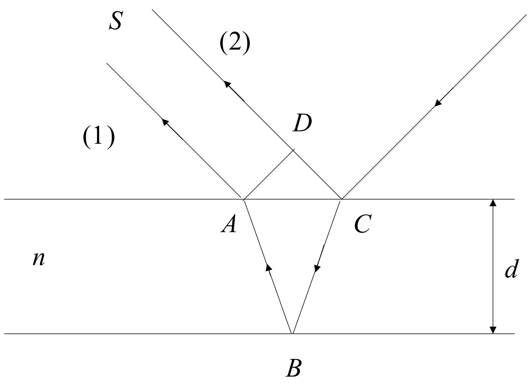

Fig. 1.10

În regiunea vizibilă a spectrului se găseşte maximul pentru $k = 1$ care corespunde luminii galben verzui.

1.2.11 Un fascicul de lumină albă paralel cade pe o lamă cu feţe plan-paralele din mică ($n = 1,33$) sub unghiul de incidenţă $i = 52^o$ (vezi Fig. 1.10). Pentru ce grosime a lamei lumina reflectată va prezenta un maxim pe culoarea galbenă ($\lambda = 600\ \mu$m).

Soluţie

Diferenţa de drum dintre razele care interferă este:

$$\delta = 2nd\cos r - \frac{\lambda}{2}$$

Dar, conform legii Snell-Dscartes:

$$\sin i = n\sin r$$

rezultă

$$\cos r = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}$$

Atunci:

$$\delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \lambda/2$$

Condiţia ca radiaţia cu lungimea de undă λ să prezinte un maxim este:

$$\delta = k\lambda \qquad k = 0, 1, 2, 3, ...$$

Astfel

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \lambda/2 = k\lambda$$

şi

$$d = (2k + 1) \times 0,6\ \mu\text{m} \qquad k = 0, 1, ...$$

1.2.12 Să se determine grosimea minimă a unei pelicule cu indicele de refracţie $n = 1,33$ pentru care lumina cu $\lambda = 0,64\ \mu$m va prezenta un maxim prin reflexie. Unghiul de incidenţă este egal cu 30^o.

Soluţie

Utilizăm formula obţinută în problema precedentă în care punem $k = 0$:

$$d = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = 0,13\ \mu\text{m}$$

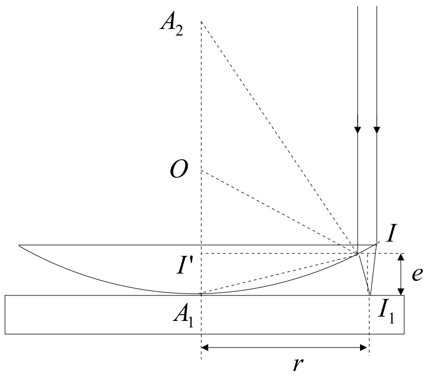

Fig. 1.11

1.2.13 Pe dispozitivul format dintr-o lamă cu feţe plan-paralele pe care se află o lentilă plan-convexă de rază $R = 2,4$ m, cu indicele de refracţie $n = 4/3$, se trimite un fascicul paralel de lumină perpendicular pe acesta, cu lumgimea de undă $\lambda = 600$ nm. Care este raza celui de-al 19-lea inel luminos.

Soluţie

Diferenţa de drum dintre razele (1) şi (2) (vezi Fig. 1.11) este:

$$\delta = 2e - \frac{\lambda}{2}$$

unde $e \simeq II_1$ şi se determină cu ajutorul teoremei înălţimii din $\triangle A_1A_2I$. A_2 este punctul diametral opus punctului A_1, faţă de centrul de curbură O al părţii convexe.

$$II'^2 = I'A_1 \cdot I'A_2$$

Notând prin:

$$r = A_1 I_1 = I'I$$

atunci:

$$r^2 = (2R - e)e \simeq 2Re$$

Rezultă că:

$$e = \frac{r^2}{2R}$$

Condiţia de maxim este:

$$\delta = k\lambda$$

şi

$$\frac{r_k^2}{R} - \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

unde r_k este raza inelului luminos de ordin k:

$$r_k = \sqrt{\left(k + \frac{1}{2}\right) R\lambda}$$

Deoarece inelele se numără de la inelul cu $k = 0$, atunci al $k-lea$ inel luminos este inelul luminos de ordin $k - 1$:

$$r_{k-1} = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right) R\lambda} = 5,15 \text{ mm}$$

1.2.14 Un rezonator Fabri-Perrot constă din două oglinzi plane cu coeficientul de refelexie $R = 0,99$ care se află la distanţa de $l = 10$ cm una faţă de alta. O undă monocromatică plană este incidentă pe interferometrul care, în acest caz este utilizat ca o cavitate rezonantă. Să se estimeze, la rezonanţă, frecvenţa (în MHz) unei rezonanţe, precum şi intervalul de frecvenţe dintre două rezonanţe vecine.

Soluţie

Ţinem cont că:

$$I(\varphi) = \frac{I_o}{1 + M \sin^2 \varphi/2}$$

unde

$$M = \frac{4R}{(1-R)^2}$$

Punem condiţia ca $I(\varphi) = I_o/2$ pentru a deduce φ_1 şi φ_2 care îndeplinesc această condiţie:

$$\frac{I_o}{1 + M \sin^2 \varphi/2} = \frac{I_o}{2}$$

Deoarece unghiul φ este foarte mic, rezultă:

$$\varphi = \pm \frac{2}{\sqrt{M}}$$

Astfel

$$\Delta\varphi = \frac{4}{\sqrt{M}} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$$

Dar

$$\Delta\varphi = \Delta\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right) = \Delta\left(\frac{2\pi\nu}{c}2l\right)$$

Atunci, din ultimele două ecuaţii rezultă:

$$\Delta\nu = \frac{1-R}{R}\cdot\frac{c}{2\pi l} \sim 4,8\ \text{MHz}$$

La rezonanţă:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2l = 2m\pi \qquad \text{cu m=întreg}$$

Rezultă:

$$\nu_m = \frac{mc}{2l}$$

şi pentru două rezonanţe vecine:

$$\Delta\nu = \nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c}{2l} = 1500\ \text{MHz}$$

1.2.15 Să se determine raportul dintre intensitatea luminoasă în punctele de pe ecranul unui dispozitiv Young (iluminat cu radiaţie monocromatică) corespunzătoare maximelor luminoase şi intensitatea luminoasă în punctele de pe ecran aflate la o distanţă de aceste maxime egală cu un sfert dintr-o interfranjă.

Soluţie

Intensitatea rezultantă într-un punct de pe ecran este:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi$$

unde $\Delta\varphi$ este defazajul dintre cele două unde. Deoarece intensitatea celor două fascicule este egală:

$$I_1 = I_2 = I_o$$

Atunci

$$I = 2I_o(1 + \cos\Delta\varphi)$$

În cazul maximelor $\Delta\varphi = 2k\pi$ şi în particular în cazul maximului de ordin $k = 0$, $\Delta\varphi = 0$ şi $I = 4I_o$.
Vom considera punctul la distanţa $x = i/4$ faţă de maximul central. Deoarece

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$$

iar diferenţa de drum δ, în cazul dispozitivului Young este:

$$\delta = \frac{2xl}{D}$$

atunci

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{2l}{D}\cdot x$$

Dar cum $x = i/4 = \lambda D/8l$ rezultă:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Astfel

$$\begin{aligned} I &= 2I_o(1+\cos\pi/2) = 2I_o \\ \frac{I}{I_o} &= 2 \end{aligned}$$

1.3 Difracţie

1.3.1 O sursă luminoasă punctuală care emite lumină cu lungimea de undă $\lambda = 0,5$ μm, este situată la distanţa $a = 1,2$ m în faţa unei diafragme ce prezintă o deschidere circulară de rază $r = 1$ mm. Să se găsească distanţa b care separă diafragma de punctul de observaţie corespunzătoare unui număr impar de zone Fresnel.

Soluţie

În Fig. 1.12 este prezentată situaţia din problemă, unde S este sursa iar P este punctul se observaţie.
Se observă că:

$$\begin{aligned} R &= a+h \simeq a \\ r &= b-h \simeq b \end{aligned}$$

Suprafaţa unei zone Fresnel este:

$$S = \frac{\pi r\lambda R}{(R+r)} \simeq \frac{\pi ab\lambda}{(a+b)}$$

Suprafaţa deschiderii este πr^2. Atunci, numărul de zone Fresnel este:

$$n = \frac{\pi r^2}{S} = \frac{r^2(a+b)}{ab\lambda}$$

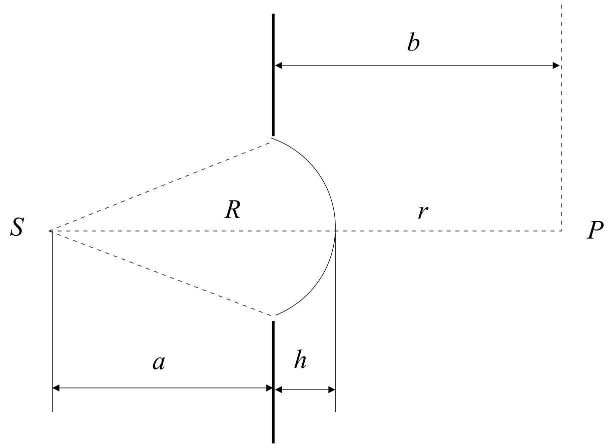

Fig. 1.12

Rezultă:

$$b = \frac{r^2 a}{(na\lambda - r^2)}$$

1.3.2 O diafragmă cu deschiderea circulară de rază a, variabilă, este plasată între o sursă luminoasă şi un ecran. Distanţele de la diafragmă la sursă şi respectiv ecran sunt $a = 1$ m şi respectiv $b = 1,25$ m. Să se determine lungimea de undă a luminii pentru care se obţine un maxim de intensitate în centrul imaginii de difracţie, pentru o rază $r_1 = 1$ mm a deschiderii, iar următorul maxim se obţine pentru o rază $r_2 = 1,5$ mm.

Soluţie

Ţinând cont de rezultatul de la problema precedentă, în punctul central se obţine un maxim de luminozitate dacă suprafaţa fantei cuprinde un număr impar de zone Fresnel:

$$2n + 1 = \frac{r_1^2(a+b)}{ab\lambda}$$

Următorul maxim se obţine pentru un număr $2n + 3$ de zone Fresnel:

$$2n + 3 = \frac{r_2^2(a+b)}{ab\lambda}$$

Dacă scădem cele două ecuaţii rezultă:

$$2 = \frac{(a+b)(r_2^2 - r_1^2)}{ab\lambda}$$

Atunci:

$$\lambda = \frac{(a+b)(r_2^2 - r_1^2)}{2ab}$$

1.3.3 Lumina cu lungimea de undă λ cade la incidenţă normală pe o fantă dreptunghiulară de lărgime b. Să se determine distribuţia unghiulară a intensităţii luminii difractate.

Soluţie

Împărţim fanta în N porţiuni Δx foarte mici ($N\Delta x = b$)(vezi Fig. 1.13).

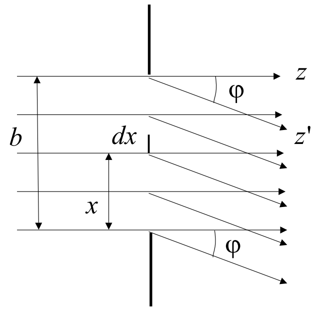

Fig. 1.13

Diferenţa de drum dintre două raze care pornesc de la două porţiuni vecine, sub un unghi α, este:

$$\delta = \Delta x \sin \alpha$$

iar diferenţa de fază este:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(\Delta x \sin \alpha)$$

Astfel, undele care vor interfera sunt de forma:

$$\begin{aligned} E_{d_o} &= E \cos \omega t \\ E_{d_1} &= E \cos(\omega t + \Delta\varphi) \\ E_{d_2} &= E \cos(\omega t + 2\Delta\varphi) \\ &. \\ &. \\ E_{d_n} &= E \cos(\omega t + N\Delta\varphi) \end{aligned}$$

Compunerea acestor unde o vom face fazorial, ca în Fig. 1.14.

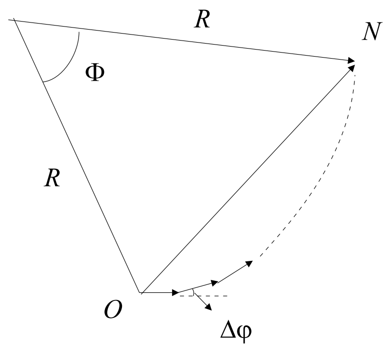

Fig. 1.14

Amplitudinea rezultantă este egală cu segmentul ON. Dacă numărul N este foarte mare, segmentul ON reprezintă o coardă într-un cerc de rază R văzută sub un unghi Φ:

$$\Phi = N\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}N\Delta x \sin\varphi = \frac{2\pi b}{\lambda}\sin\varphi$$

Atunci:

$$E(\alpha) = 2R\sin\frac{\Phi}{2}$$

În cazul în care $\alpha = 0$, $\Delta\varphi = 0$ iar amplitudinea rezultantă E_o se obţine prin suprapunerea celor N segmente de mărime E. Lungimea totală a acestor segmente este egală chiar cu lungimea arcului de cerc ON. Deci:

$$E_o = E(0) = R\Phi = 2R\frac{\Phi}{2}$$

Atunci:

$$I(\alpha) = 4R^2\sin^2\frac{\Phi}{2}$$

şi

$$I_o = 4R^2 \frac{\Phi^2}{2}$$

Intensitatea rezultantă va fi:

$$I(\alpha) = I_o \frac{\sin^2 \frac{\Phi}{2}}{\left(\frac{\Phi}{2}\right)^2}$$

1.3.4 Pentru lumina difractată pe o fantă dreptunghiulară de lărgime b să se determine direcţiile după care se obţin minimele şi maximele de difracţie. Să se calculeze raportul intensităţilor primelor trei maxime.

Soluţie

Minimele de difracţie se obţin când:

$$I(\alpha) = 0$$

adică atunci când:

$$\frac{\Phi}{2} = p\pi$$

unde p este un număr întreg diferit de zero. Când $\Phi \to 0$, deoarece:

$$\lim_{\Phi \to 0} \frac{\sin^2 \Phi/2}{(\Phi/2)} = 1$$

după această direcţie se obţine maximul central de intensitate I_o. Ţinând cont de rezultatul din problema precedentă, condiţia de obţinere a minimelor de difracţie este:

$$\frac{2\pi b}{\lambda}\sin\varphi = p\pi$$

Rezultă:

$$\sin\varphi = \frac{p\lambda}{b}$$

Pentru obţinerea maximelor de interferenţă facem schimbarea de variabilă $u = \Phi/2$, astfel că:

$$I(u) = I_o\frac{\sin^2 u}{u^2}$$

Punem condiţia ca:

$$\frac{dI(u)}{du} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} u = u$$

Această ecuaţie este una transcendentală şi ea se rezolvă numeric. Se obţine:

$$\begin{aligned} u_1 &= 4,493 \\ u_2 &= 7,725 \end{aligned}$$

Cu aceste valori vom obţine intensităţile I_1 şi I_2:

$$I_1 = I(u_1) = 0,047\ I_o$$
$$I_2 = I(u_2) = 0,016\ I_o$$

1.3.5 Să se determine semilărgimea $\Delta\theta$ a maximului central de difracţie Fraunhofer pe o singură fantă de lărgime $b = 0,5$ mm pe care cade lumina cu $\lambda = 0,5$ μm. Semilărgimea este unghiul dintre două puncte de pe figură unde intensitatea este jumătate din cea din centrul figurii de difracţie.

Soluţie

Distribuţia intensităţii luminoase date de o fantă este:

$$I = I_o \frac{\sin^2 u}{u^2}$$

unde

$$u = \frac{\pi b}{\lambda} \sin\varphi$$

cu b lărgimea fantei iar φ este direcţia după care se calculează intensitatea. Punem condiţia:

$$I = \frac{I_o}{2} = I_o \frac{\sin^2 u}{u^2}$$

de unde se obţine ecuaţia:

$$2\sin^2 u = u^2$$

Ecuaţia este una transcendentală iar soluţia ei se obţine numeric:

$$u = 1,39$$

Atunci:

$$\sin\varphi = \frac{u\lambda}{\pi b}$$

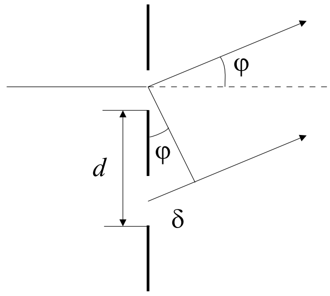

Fig. 1.15

iar semilărgimea este:

$$\Delta\theta = 2\arcsin\frac{u\lambda}{\pi b} = 0,44\times 10^{-3}\ \mathrm{rad} = 45"$$

1.3.6 Ţinând cont de rezultatele de la problemele precedente să se determine distribuţia intensităţii obţinută cu o reţea de difracţie care conţine N fante, constanta reţelei fiind d (vezi Fig. 1.15).

Soluţie

Amplitudinea undei ce pleacă de pe o fantă în direcţia determinată de unghiul α este:

$$E = E_o\frac{\sin u}{u} \qquad u = \frac{\pi b}{\lambda}\sin\alpha$$

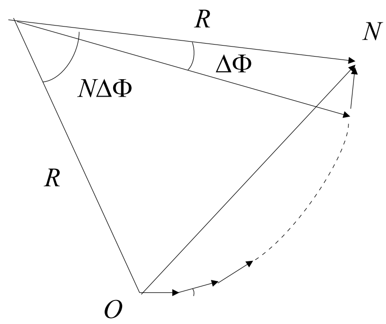

Fig. 1.16

Dacă $\alpha = 0$, amplitudinea celor N unde se adună şi rezultă:

$$E(0) = NE_o$$

iar intensitatea corespunzătoare este:

$$I_o = E^2(0) = N^2 E_o^2$$

Dacă $\alpha \neq 0$, utilizăm construcţia Fresnel. Din Fig. 1.16 se observă că diferenţa de drum dintre două unde succesive este:

$$\delta = d \sin\alpha$$

iar diferenţa de fază:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\alpha$$

Amplitudinea rezultantă este, conform Fig. 16:

$$E(\alpha) = 2R \sin\frac{N\Delta\Phi}{2}$$

Se observă că E este:

$$E = 2R \sin \frac{\Delta\Phi}{2}$$

Atunci:

$$E(\alpha) = E \frac{\sin N\Delta\Phi/2}{\sin \Delta\Phi/2} = E_o \left(\frac{\sin u}{u} \right) \frac{\sin (N\Delta\Phi/2)}{\sin (\Delta\Phi/2)}$$

iar intensitatea va fi:

$$I = E^2(\alpha) = E_o^2 \left(\frac{\sin^2 u}{u^2} \right) \frac{\sin^2 (N\Delta\Phi/2)}{\sin^2 (\Delta\Phi/2)}$$

sau:

$$I = I_o \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{\sin^2 (N\delta)}{N^2 \sin^2 \delta}$$

unde:

$$\delta = \frac{\Delta\Phi}{2} = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha$$

1.3.7 Să se determine criteriul de separare spectrală Rayleight. La limita de separare, maximul principal de ordin m al radiaţiei cu lungimea de undă $\lambda + \Delta\lambda$ coincide cu primul minim al radiaţiei cu lungimea de undă λ ce apare după maximul principal de ordin m.

Soluţie

Condiţia pentru obţinerea maximului principal de ordin m pentru radiaţia cu lungimea de undă $\lambda + \Delta\lambda$ este:

$$N\delta = mN\pi \qquad \text{sau} \qquad \frac{\pi d}{\lambda + \Delta\lambda}\sin\alpha = m\pi$$

de unde rezultă:

$$\sin\alpha = \frac{m(\lambda + \Delta\lambda)}{d}$$

Condiţia de obţinere a primului minim al radiaţiei cu lungimea de undă λ după maximul principal de ordin m este:

$$N\delta = (Nm + 1)\pi$$

adică

$$N\frac{d\pi}{\lambda}\sin\alpha = (Nm + 1)\pi$$

Rezultă:

$$\sin\alpha = \left(m + \frac{1}{N}\right)\frac{\lambda}{d}$$

Egalând expresiile celor două sinusuri rezultă:

$$\frac{m(\lambda + \Delta\lambda)}{d} = \left(m + \frac{1}{N}\right)\frac{\lambda}{d}$$

Astfel:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{mN}$$

1.3.8 O reţea de difracţie cu lungimea $L = 5$ cm, cu constanta $n = 500$ linii/mm este iluminată paralel de lumina cu lungimea de undă $\lambda = 0,5$ μm. Se cere:

a. ordinul maxim de difracţie
b. unghiurile de difracţie pentru primele două maxime
c. dispersia unghiulară în primele două maxime
d. puterea de rezoluţie pentru maximul de ordin 1

Soluţie

a. Notând cu d constanta reţelei, condiţia de obţinere a unui maxim este:

$$d \sin \alpha = k\lambda$$

Cum $d = 1/n$ vom obţine:

$$\sin \alpha = nk\lambda$$

Pentru obţinerea ordinului maxim de difracţie facem ca $\alpha \rightarrow \pi/2$. Atunci:

$$k_{max} = \frac{1}{n\lambda} = 4$$

b. Pentru $k = 1$ obţinem:

$$\sin \alpha_1 = n\lambda = 0,25$$

Rezultă:

$$\alpha_1 = 14^o$$

Pentru $k = 2$ obţinem:

$$\sin \alpha_2 = 2n\lambda = 0,5$$

Rezultă:

$$\alpha_2 = 30^o$$

c. Pentru a obţine dispersia unghiulară diferenţiem relaţia $1/n \sin \alpha = k\lambda$:

$$\left(\frac{1}{n} \cos \alpha\right) d\alpha = k\,(d\lambda)$$

Dispersia unghiulară va fi, conform definiţiei:

$$D \equiv \frac{d\alpha}{d\lambda} = \frac{kn}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\lambda}$$

Pentru cele două ordine de difracţie vom avea:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_1}{d\lambda} &= \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\lambda} = 5,16 \times 10^5 \\ \frac{d\alpha_2}{d\lambda} &= \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\lambda} = 10^6\end{aligned}$$

d. Puterea de rezoluţie a reţelei este:

$$R = \frac{\overline{\lambda}}{\Delta\lambda} = mN$$

unde m este ordinul maximului iar N este numărul total de fante ale reţelei. În cazul nostru $N = nL$ şi:

$$R_1 = mnL = 25000$$

1.3.9 Intervalul dintre direcţiile maximelor principale de ordin I şi II este $\Delta\varphi = 21^o$. Dispersia unghiulară a reţelei în ordinul întâi este:

$$D = \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right) = 1,1 \text{ min/nm}$$

Se cere lungimea de undă a radiaţiei folosite.

Soluţie

Maximele de ordin I şi II se obţin atunci când:

$$\begin{aligned} d\sin\varphi_1 &= \lambda \\ d\sin\varphi_2 &= 2\lambda \end{aligned}$$

Punând $\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi$:

$$\frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1} = \frac{\sin(\varphi_1 + \Delta\varphi)}{\sin\varphi_1} = 2$$

Atunci:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\sin\Delta\varphi}{2 - \cos\Delta\varphi}$$

Deoarece dispersia unghiulară este:

$$D_1 = \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\lambda}$$

atunci:

$$\frac{1}{D\lambda} = \frac{2-\cos\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi}$$

şi

$$\lambda = \frac{\sin\Delta\varphi}{D(2-\cos\Delta\varphi)} = 1050\times10^{-9}\text{ m}$$

1.3.10 Fie o reţea de difracţie de lungime $L = 4$ cm având $n = 500$ fante/mm iluminată în domeniul verde al spectrului cu o radiaţie cu $\lambda = 560$ nm. Să se determine:

a. puterea de rezoluţie în spectrul de ordinul 2
b. diferenţa $\Delta\lambda$ în spectrul de ordin 2
c. dispersia unghiulară a reţelei în spectrul de ordin 2

Soluţie

a.

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN = mnL = 4\times10^{4}$$

b.

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = 1,4\text{ nm}$$

c.

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda}$$

Din condiţia de maxim:

$$\frac{1}{n}\sin\varphi = m\lambda$$

obţinem prin diferenţiere:

$$\frac{1}{n}\cos\varphi d\varphi = md\lambda$$

Atunci:

$$D = \frac{mn}{\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\lambda\cos\varphi} = \frac{1}{\lambda\sqrt{\frac{1}{\sin^2\varphi} - 1}}$$

Deoarece $\sin\varphi = nm\lambda$, dispersia unghiulară devine:

$$D = \frac{nm}{\sqrt{1 - n^2m^2\lambda^2}} = 1,2 \times 10^6$$

1.3.11 O reţea de difracţie are 10^4 linii echidistante pe $2,54$ cm şi este iluminată la incidenţă normală cu lumină galbenă dintr-o lampă cu vapori de sodiu. Această lumină conţine două linii foarte apropiate de lungimi de undă $\lambda = 589$ nm şi $\lambda = 589,59$ nm (dubletul de sodiu).

a. care este unghiul pentru care apare maximul de prim ordin al acestor lungimi de undă?
b. care este diferenţa unghiulară dintre maximele de ordin I ale acestor linii?

Soluţie

a. Condiţia pentru obţinerea maximului de ordin I este:

$$l \sin \alpha = \lambda$$

unde $l = N/L$ este constanta reţelei. Rezultă:

$$\alpha = \arcsin \frac{\lambda L}{N} = 13^o 20'$$

b. Pornim de la definiţia dispersiei:

$$D \equiv \frac{d\alpha}{d\lambda}$$

şi în locul diferenţialelor $d\lambda$ şi $d\alpha$ vom utiliza valorile finite (care sunt foarte mici) $\Delta\lambda$ şi $\Delta\alpha$.Atunci:

$$D = \frac{\Delta\alpha}{\Delta\lambda} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\lambda}$$

Rezultă:

$$\Delta\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\lambda}\Delta\lambda = 2,4 \times 0^{-4} \text{ rad} = 49,5"$$

1.3.12 Câte linii trebuie să aibe o reţea pentru a rezolva dubletul sodiului ($\lambda_1 = 589$ nm şi $\lambda_2 = 589,59$ nm) pentru ordinul al treilea.

Soluţie

Puterea de rezoluţie trebuie saă fie:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589}{0,59} = 1000$$

Deoarece

$$R = mN \rightarrow N = \frac{R}{m} = 330 \text{ linii}$$

1.4 Polarizare

1.4.1 Să se determine unda polarizată eliptic care se propagă de-a lungul axei Oy, axa mare a a elipsei fiind de trei ori mai mare decât axa mică iar defazajul este egal cu $\pi/2$.

Soluţie

Componentele E_z şi E_x ale câmpului electric au expresiile:

$$\begin{aligned} E_z &= 3E_o \cos(\omega t - ky) \\ E_x &= E_o \cos(\omega t - ky + \pi/2) = -E_o \sin(\omega t - ky) \end{aligned}$$

Rezultă atunci, pentru unda polarizată expresia:

$$\vec{E} = 3E_o \cos(\omega t - ky)\vec{e}_z - E_o \sin(\omega t - ky)\vec{e}_x$$

1.4.2 Să se arate că pentru un unghi de incidenţă egal cu unghiul Brewster, unghiul dintre raza reflectată şi cea refractată este $\pi/2$.

Soluţie

Din legea refracţiei:

$$\sin i_B = n \sin r$$

şi legea lui Brewster:

$$\operatorname{tg} i_B = n$$

rezultă:

$$\begin{aligned}\sin r = \cos i_B \\ r &= \pi/2 - i_B\end{aligned}$$

Astfel:

$$r + i_B = \frac{\pi}{2}$$

1.4.3 Lumina naturală cade pe suprafaţa sticlei sub unghiul Brewster. Să se determine, cu ajutorul formulelor Fresnel:
a. factorul de reflexie
b. gradul de polarizare al luminii refractate

Soluţie

a. Atunci când lumina cade sub unghiul Brewster:

$$i + r = \pi/2$$

iar

$$\operatorname{tg} i = n$$

În lumină reflectată $I_\perp = 0$ şi:

$$I_{RII} = I_{IIi} \cdot \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}$$

unde I_{IIi} reprezintă intensitatea luminii pentru care vectorul câmp electric este paralel cu planul de incidenţă. Deoarece lumina naturală este nepolarizată, atunci $I_{IIi} = I_o/2$. Atunci:

$$I_{II} = \frac{I_o}{2} \cdot \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}$$

Deoarece $i + r = \pi/2$ atunci:

$$I_{RII} = \frac{I_o}{2} \sin^2(i-r) = \frac{I_o}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2(i-r)}{1+\operatorname{tg}^2(i-r)}$$

Dar:

$$\operatorname{tg}(i-r) = \frac{\operatorname{tg} i - \operatorname{tg} r}{1 + \operatorname{tg} i \operatorname{tg} r}$$

Pentru incidenţă Brewster rezultă:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} i &= n \\ \operatorname{tg} r &= \operatorname{tg}(\pi/2 - i) = \cot i = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Rezultă:

$$\operatorname{tg}(i-r) = \frac{n^2-1}{2}$$

ceea ce conduce la expresia factorului de reflexie:

$$R \equiv \frac{I_{RII}}{I_o} = \frac{1}{2} \frac{(n^2-1)^2}{n^2+1)^2}$$

b. În lumină transmisă:

$$I_{II} = \frac{I_o}{2}$$

doarece toate componentele paralele cu planul de incidenţă sunt transmise în al doilea mediu:

$$\begin{aligned} I_\perp &= \frac{I_o}{2} - \frac{I_o}{2}\frac{(n^2+1)^2-(n^2-1)^2}{n^2+1)^2} \\ I_\perp &= \frac{4n^2}{(n^2+1)^2}\frac{I_o}{2} \end{aligned}$$

Gradul de polarizare al luminii refractate este:

$$P \equiv \frac{I_{II}-I_\perp}{I_{II}+I_\perp} = \frac{(n^2+1)^2-4n^2}{(n^2+1)^2+4n^2}$$

1.4.4 Să se determine coeficienţii de reflexie şi transmisie (r şi t) precum şi factorii de reflexie şi transmisie (R şi T) în cazul în care o undă electromagnetică cade aproape normal pe sticla cu indicele de refracţie n.

Soluţie

La incidenţă normală înseamnă $i \to 0$ şi legea refracţiei se scrie $i = nr$. Deoarece unghiurile implicate sunt mici vom folosi formulele de aproximare:

$$\begin{aligned} \sin\alpha &\simeq \operatorname{tg}\alpha \simeq \alpha \\ \cos\alpha &\simeq 1 \end{aligned}$$

Coeficienţii de reflexie sunt:

$$\begin{aligned} r_{II} &= \frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)} = \frac{i-r}{i+r} = \frac{i/r-1}{i/r+1} = \frac{n-1}{n+1} \\ r_\perp &= -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} = -\frac{i-r}{i+r} = -\frac{n-1}{n+1} \end{aligned}$$

Factorii de reflexie sunt:

$$
\begin{aligned}
R_{II} &= r_{II}^2 = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \\
R_{\perp} &= r_{\perp}^2 = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2
\end{aligned}
$$

Coeficienţii de transmisie sunt:

$$
\begin{aligned}
t_{II} &= \frac{2\cos i \sin r}{\sin(i+r)\cos(i-r)} \simeq \frac{2r}{i+r} = \frac{2}{n+1} \\
t_{\perp} &= \frac{2\sin r \cos i}{\sin(i+r)} \simeq \frac{2r}{i+r} = \frac{2}{n+1}
\end{aligned}
$$

iar factorii de transmisie sunt:

$$
\begin{aligned}
T_{II} &= n\frac{\cos r}{\cos i} t_{II}^2 = \frac{2n}{n+1} \\
T_{\perp} &= n\frac{\cos r}{\cos i} t_{\perp}^2 = \frac{2n}{n+1}
\end{aligned}
$$

1.4.5 Un fascicul de lumină naturală cade pe o suprafaţă de sticlă cu $n = 1.5$ sub un unghi de incidenţă egal cu 45^o. Să se determine, cu ajutorul formulelor lui Fresnel, gradul de polarizare al luminii reflectate.

Soluţie

Deoarece lumina naturală este nepolarizată:

$$I_{II} = \frac{I_o}{2}\frac{\mathrm{tg}^2(i-r)}{\mathrm{tg}^2(i+r)}$$
$$I_{\perp} = \frac{I_o}{2}\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}$$

Din legea refracţiei $\sin i = n \sin r$ rezultă:

$$r = \arcsin\left(\frac{\sin 45^o}{1,5}\right) = 28^o$$

Atunci:

$$I_{II} = \frac{I_o}{2}\frac{\mathrm{tg}^2 17^o}{\sin^2 73^o} = 0,0087\frac{I_o}{2}$$
$$I_{\perp} = \frac{I_o}{2}\frac{\sin^2 17^o}{\sin^2 73^o} = 0,0934\frac{I_o}{2}$$

Gradul de polarizare va avea expresia:

$$P = \frac{I_{\perp} - I_{II}}{I_{II} + I_{\perp}} = 0,78$$

1.4.6 Lumina monocromatică de intensitate I_o cade pe un sistem format din doi polarizori între care se află o lamă cristalină tăiată paralel cu axa optică. Lama determină apariţia unui defazaj egal cu δ între raza ordinară şi raza extraordinară. Să se arate că intensitatea luminii emergente se poate exprima:

$$I = \frac{I_o}{2}[\cos^2(\alpha - \beta) - \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \delta/2]$$

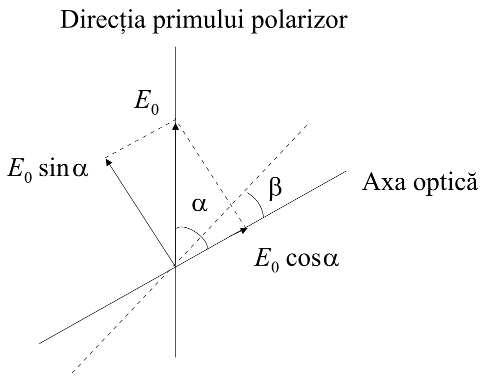

Fig. 1.17

unde α şi β sunt unghiurile pe care axa optică a cristalului le face cu direcţiile principale ale polaroizilor (vezi Fig. 1.17)

Soluţie

Pe al doilea polarizor ajung undele ordinară şi extraordinară de forma:

$$\begin{aligned} E_{ord} &= E_o \sin\alpha \cos\omega t \\ E_{extr} &= E_o \cos\alpha \cos(\omega t - \delta) \end{aligned}$$

La ieşirea din cel de-al doilea polarizor vom avea undele:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_o \sin\alpha \sin\beta \cos\omega t \\ E_2 &= E_o \cos\alpha \cos\beta \cos(\omega t - \delta) \end{aligned}$$

Compunând cele două unde rezultă amplitudinea:

$$E^2 = E_o^2 \cos^\alpha \cos^2 \beta + E_o^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \\ 2E_o^2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta \cos \delta$$

Ultima ecuaţie conduce la expresia finală:

$$E^2 = E_o^2 [\cos^2 (\alpha - \beta) - \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \delta/2]$$

unde E_o este amplitudinea undei care trece de primul polarizor. Aceasta este suma tuturor proiecţiilor vectorilor $\vec{E}$ din lumina naturală, paralele cu direcţia celui de-al doilea polarizor. Atunci $E_o^2 = I_o/2$ şi:

$$I = \frac{I_o}{2} [\cos^2 (\alpha - \beta) - \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \delta/2]$$

1.4.7 Să se particularizeze rezultatul obţinut la problema precedentă:
a. când cei doi polarizori sunt paraleli
b. când cei doi polarizori sunt perpendiculari

Soluţie

a. Când cei doi polarizori sunt paraleli, $\alpha = \beta$:

$$I_{II} = \frac{I_o}{2} [1 - \sin^2 2\alpha \sin^2 \delta/2]$$

b. Când cei doi polarizori sunt perpendiculari, $\beta = \pi/2 - \alpha$:

$$\begin{aligned} I_\perp &= \frac{I_o}{2}[\cos^2(2\alpha - \pi/2) - \sin 2\alpha \sin(\pi - 2\alpha)\sin^2\delta/2 \\ I_\perp &= \frac{I_o}{2}\sin^2 2\alpha\cos^2\delta/2 \end{aligned}$$

Bibliografie

[1] Cornelia Motoc – *Fizică* , Editura All. Bucureşti 1994

[2] Ion M. Popescu – *Fizică* , Editura didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982

[3] Ion M. Popescu, Gabriela Cone, Gheorghe Stanciu – *Probleme rezolvate de fizică* , Editura didactică şi Pedagocgică, Bucureşti, 1993

[4] I. Irodov, I. Savéliev, O. Zamcha –*Recueil de problemes de physique générale*, Edition Mir, Moscou, 1976

[5] L. Grechko, V.I. Sugakov, O.F. Tomasecich, A.M. Fedorchenko –*Problems in theoretical physics*, Mir Publishers, Moscow, 1977

[6] I. Irodov–*Culegere de probleme de fizică atomică*, Editura Tehnică, Bucureţi, 1961

[7] Eugene Hecht–*Optics*, Addison-Wesley, 1998