Fizică I ISB
(versiunea 2016)

Cîrtoaje Cristina şi Petrescu Emil

29 martie 2016

Cuprins

Capitolul 1

Elemente de mecanică Newtoniană

1.1 Cinematica punctului material

Studiul mişcării unui corp se face relativ la un sistem de referinţă (SR). Un sistem de referinţă constă din:

1. un sistem de coordonate (de obicei se alege un sistem de coordonate ortogonal deoarece ecuaţiile de mişcare se scriu cel mai uşor în acesta)

2. un ceasornic pentru măsurarea timpului.

În principiu se poate alege orice sistem de referinţă, dar practic se alege sistemul în care fenomenul poate fi studiat în cel mai simplu mod.

Un corp este un sistem complex. O primă simplificare este aceea în care nu se ia în considerare deformarea corpului. În acest caz spunem că avem de-a face cu un *solid rigid*. A doua simplificare se face atunci când dimensiunile corpului nu contează în problema dată. Atunci se poate lucra cu noţiunea de *punct material*. Punctul material este caracterizat doar de masa sa.

1.1.1 Mărimi fundamentale

Traiectoria Se numeşte traiectorie curba descrisă de un mobil în timpul mişcării sale. Poziţia unui punct pe traiectorie este descrisă cu ajutorul *vectorului de poziţie* $\vec{r}$ (Fig. 1.1a).

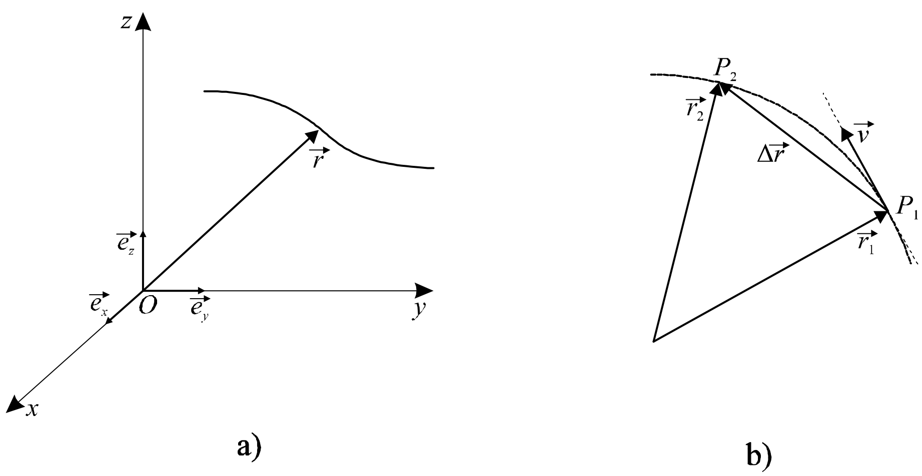


Figura 1.1: a) Vectorul de poziţie b) Vectorul deplasare şi vectorul viteză.

$$\vec{r} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z \tag{1.1}$$

Fie vectorul de poziţie $\vec{r}_1$ a corpului la momentul de timp t_1 şi $\vec{r}_2$ vectorul de poziţie al aceluiaşi corp la momentul de timp t_2. Diferenţa vectorială $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ poartă numele de *deplasare* (Fig. 1.1b).

Viteza Fie $\vec{r}_1$vectorul de poziţie al particulei la momentul t_1 şi $\vec{r}_2$ vectorul de poziţie la momentul $t_2 = t_1 + \Delta t_2$ (Fig. 1.1b). Definim viteza medie ca:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{1.2}$$

Pentru a caracteriza mai bine comportarea particulei este necesar să se lucreze cu viteza instantanee obţinută atunci când $\Delta t \to 0$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z \tag{1.3}$$

Când $\Delta t \to 0$, P_2 se apropie de P_1. Din acest motiv vectorul $\Delta\vec{r}$ se apropie de tangenta la traiectorie în punctul P_1. Rezultă că viteza instantanee este tangentă la traiectorie. Dacă exprimăm viteza în funcţie de componentele sale pe cele trei axe de coordonate se obţine:

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z \tag{1.4}$$

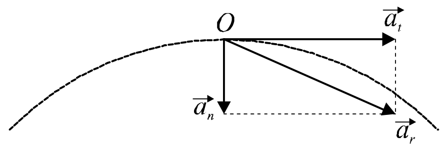


Figura 1.2: Acceleraţia normală şi acceleraţia tangenţială.

Din relaţiile (1.3) şi (1.4) se obţin pentru componentele vitezei următoarele expresii:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{1.5}$$

Acceleraţia În cursul mişcării viteza variază atât în mărime (modul) cât şi în direcţie. Pentru a caracteriza această variaţie este necesar să definim o nouă mărime. Această mărime poartă numele de acceleraţie. Se poate defini o acceleraţie medie:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{1.6}$$

şi o acceleraţie instantanee când $\Delta t \to 0$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{e}_x + \frac{dv_y}{dt}\vec{e}_y + \frac{dv_z}{dt}\vec{e}_z \tag{1.7}$$

Exprimând acceleraţia în funcţie de proiecţiile sale pe cele trei axe de coordonate:

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z \tag{1.8}$$

se obţine:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Acceleraţia nu este un vector tangent la traiectorie. În general ea se poate descompune în două componente $\vec{a}_t$ şi $\vec{a}_n$ (Fig. 1.2).Componenta $\vec{a}_t$ poartă numele de acceleraţie tangenţială şi măsoară variaţia în direcţie a vectorului viteză, iar componenta $\vec{a}_n$ poartă numele de acceleraţie normală şi caracterizează variaţia în direcţie a vectorului viteză. Este posibil ca acceleraţia să aibă doar una din cele două componente.

1.1.2 Mişcarea rectiline uniform variată

Deoarece mişcarea este rectilinie, acceleraţia are doar componenta tangenţială ($\vec{a} = \vec{a}_t$). Aceasta este îndreptată în aceeaşi direcţie (nu neapărat şi în acelaţi sens) ca vectorul viteză. Mişcarea se studiază într-un sistem de coordonate unidimensional, motiv pentru care vom renunţa la lucrul cu vectori, considerând mărimea respectivă pozitivă atunci când vectorul corespunzător este orientat în sensul pozitiv al axei şi negativă dacă vectorul este orientat în sens opus axei. Atunci:

$$a = \frac{dv}{dt} = const. \tag{1.9}$$

Integrând:

$$\int dv = \int adt \tag{1.10}$$

rezultă:

$$v = at + c_1 \tag{1.11}$$

Constanta c_1 se determină din condiţiile iniţiale. Dacă la $t_0 = 0$, $v = v_0$ atunci $c_1 = v_0$ şi:

$$v = v_0 + at \tag{1.12}$$

Pentru a determina legea de mişcare pornim de la definiţia vitezei instantanee:

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{1.13}$$

de unde:

$$dx = vdt = (v_0 + at)dt \tag{1.14}$$

Rezultă:

$$x = \int (v_0 + at)dtx = v_0 t + \frac{at^2}{2} + c_2 \tag{1.15}$$

Constanta c_2 se determină luând în considerare poziţia mobilului la momentul iniţial x_0. Astfel dacă la $t = 0$, $x = x_0$ se obţine $c_2 = x_0$ şi;

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \tag{1.16}$$

Eliminând timpul între relaţiile (1.12) şi (1.16) se obţine o relaţie independentă de timp între viteză, acceleraţie şi coordonată numită relaţia lui Galilei:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \tag{1.17}$$

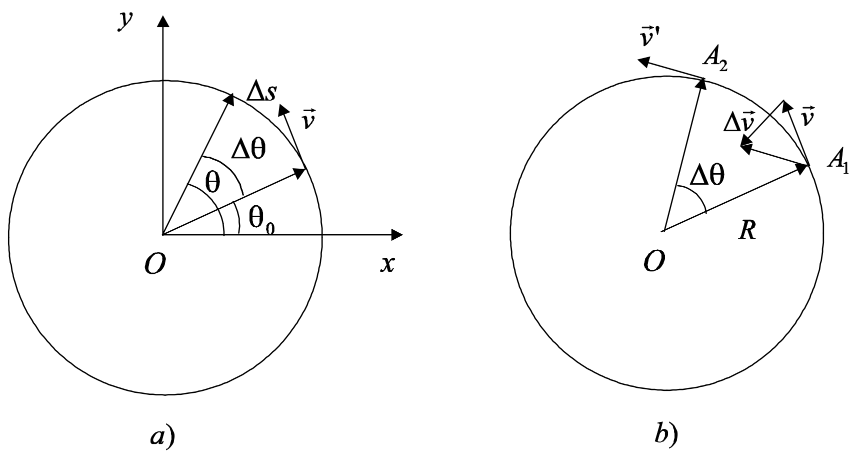


Figura 1.3: a) Mişcarea circulară uniformă. b) Deducerea acceleraţiei centripete.

1.1.3 Mişcarea circulară uniformă

Este mişcarea care se efectuează pe o traiectorie circulară şi în care modulul vectorului viteză este constant în timp. În acest caz acceleraţia nu are decât componenta normală.

Putem defini T *perioada mişcării* care reprezintă timpul în care are loc o rotaţie completă şi *frecvenţa* ν care reprezintă numărul de rotaţii efectuate în unitatea de timp. Relaţia dintre cele două mărimi este:

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{1.18}$$

Deoarece mişcarea are loc pe un cerc (Fig. 1.3a), ea poate fi caracterizată prin variaţia unghiului θ făcut de vectorul de poziţie cu axa Ox, $\Delta\theta = \theta - \theta_0$. Variaţia în unitatea de timp a unghiului θ, poartă numele de viteză unghiulară:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{1.19}$$

care în cazul mişcării circulare uniforme este constantă.

Spaţiul parcurs poate fi exprimat în două moduri:

$$\Delta s = v\Delta t \quad ; \quad \Delta s = R\Delta\theta = R\omega\Delta t \tag{1.20}$$

Rezultă astfel relaţia dintre viteza liniară şi viteza unghiulară:

$$v = \omega R \tag{1.21}$$

Deoarece modulul vitezei este constantă acceleraţia are numai componenta normală. În acest caz ea poartă denumirea de acceleraţie centripetă (Fig. 1.3b). Astfel:

$$\vec{a} \equiv \vec{a}_n = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad ; \quad |\vec{a}_n| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}$$

Când $\Delta t \to 0$, $\Delta s \simeq \overline{A_1 A_2}$. Se observă că triunghiul OA_1A_2 este asemenea cu triunghiul vitezelor. Rezultă:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{A_1 A_2}{R} \tag{1.22}$$

Cum $A_1A_2 = \Delta s = v\Delta t$:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v \Delta t}{R} \tag{1.23}$$

şi:

$$a_n = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \tag{1.24}$$

1.2 Legile mecanicii

1.2.1 Legea I (Principiul inerţiei)

Experimental s-a constat că dacă asupra unui corp aflat în stare de repaus nu se exercită acţiunea altor corpuri, această stare se menţine un timp nedefinit. Dacă se lansează pe un plan şlefuit o bilă se constată că traiectoria acesteia este o dreaptă iar în intervale de timp scurte mişcarea este aproape o mişcare uniformă, în sensul că viteza se micşorează foarte puţin. Repetând experienţa pe alte plane se constă că cu cât suprafaţa planului este mai bine şlefuită, micşorarea vitezei în acelaşi interval de timp este mai mică. Aceste fapte duc la concluziile următoare:

- în punctul de contact dintre bilă şi plan apar interacţii care se opun mişcării;

- dacă interacţiile care se opun mişcării ar fi eliminate atunci mişcarea bilei ar fi o mişcare rectilinie uniformă.

Generalizând, se poate formula principiul inerţiei:

Un corp î-şi menţine starea de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă atâta timp cât asupra lui nu acţionează alte corpuri care să-i modifice această stare.

Principiul nu a putut fi verificat în mod absolut în practică, deoarece nici un corp nu poate fi izolat complet de acţiunea celorlalte corpuri care-l înconjoară. Experienţele care au dus la această concluzie, au minimizat cât s-a putut de mult sau au anulat într-un fel acţiunile exterioare corpului.

Proprietatea unui corp de a-şi menţine starea de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă poartă numele de *inerţie*.

Sistemele de referinţă în care este valabil principiul inerţiei poartă numele de *sisteme inerţiale*. Ca o observaţie trebuie remarcat că sistemele de referinţă legate de Pământ nu sunt riguros inerţiale, datorită mişcării acestuia. Abaterile sunt însă mici, astfel încât aceste sisteme pot fi considerate ca inerţiale.

1.2.2 Legea a II-a (Legea fundamentală a mecanicii)

În mecanică se consideră două feluri de interacţiuni dintre două corpuri:

a) interacţiuni în urma cărora viteza unuia din corpuri se modifică (în mărime şi direcţie), adică corpul este accelerat.

b) interacţiuni în urma cărora corpurile se deformează.

Interacţiunile se măsoară cu ajutorul unei mărimi numită fortă. În continuare ne vom limita la primului caz.

Experimental s-a constatat că acceleraţia căpătată de un corp este proporţională cu forţa care acţionează asupra lui.

$$\vec{a} \backsim \vec{F}$$

Atunci legea a doua se formulează astfel:

O forţă care acţionează asupra unui corp îi va imprima acestuia o acceleraţie direct proporţională cu forţa, având direcţia şi sensul forţei..

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

În relaţia de mai sus m este un parametru ce caracterizează corpul respectiv şi poartă numele de masă. Newton a interpretat acest parametru ca fiind cantitatea de substanţă conţinută într-un corp. Deoarece cu cât masa este mai mare acceleraţia imprimată este mai mică, se poate spune că masa unui corp este o măsură a inerţiei sale. Din acest motiv masa m poartă numele de masă inerţială.

Legea a doua poate fi exprimată şi în alt mod. Pentru aceasta se defineşte impulsul ca fiind produsul dintre masă şi viteză:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{1.25}$$

Dacă se consideră masa ca fiind o constantă:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{1.26}$$

Relaţia (1.26) reprezintă o altă formă a legii a II-a a dinamicii. Ea este valabilă şi în cadrul mecanicii relativiste unde masa este o mărime variabilă.

1.2.3 Legea a III-a (Principiul acţiunii şi reacţiunii)

Experimental se constată că forţele cu care un corp acţionează asupra altuia determină instantaneu din partea celui de-al doilea o reacţiune asupra primului. Se găseşte că cele două forţe sunt egale dar de sens contrar. Prin generalizarea acestor fapte s-a obţinut principiul acţiunii şi reacţiunii:

Dacă un corp acţionează asupra altui corp cu o forţă numită acţiune ($\vec{F}_{12}$), cel de-al doilea corp va acţiona asupra primului cu o forţă egală şi de sens contrar numită reacţiune ($\vec{F}_{21}$).

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

1.3 Dinamica

1.3.1 Impulsul

Teorema impulsului pentru un punct material.

Din legea a II-a a mecanicii:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}; \qquad \vec{F}dt = d\vec{p} \tag{1.27}$$

se obţine:

$$\Delta\vec{p} = \int_1^2 d\vec{p} = \int_1^2 \vec{F}dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \tag{1.28}$$

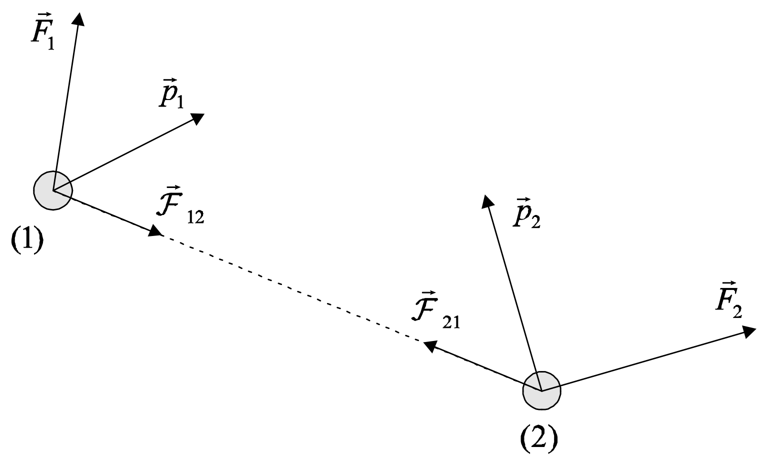


Figura 1.4: Teorema impulsului pentru un sistem de două puncte materiale.

unde cu 1 am indexat starea iniţială de la momentul t_1 iar cu 2 am notat starea finală de la momentul t_2.

Dacă rezultanta forţelor care acţionează asupra punctului material este nulă:

$$\Delta\vec{p} = 0 \qquad \text{şi} \qquad \vec{p} = const. \tag{1.29}$$

Aceasta este legea conservării impulsului:

Dacă rezultanta forţelor care acţionează asupra unui punct material este nulă, impulsul acestuia rămâne constant.

Teorema impulsului pentru un sistem de puncte materiale

Pentru simplificare vom considera un sistem format doar din două puncte materiale, rezultatele obţinute fiind valabile şi pentru un sistem format din N puncte materiale.

În Fig. 1.4 sunt reprezentate cele două corpuri. Cu $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ am notat forţele externe care acţionează asupra celor două corpuri. Cu $\vec{\mathcal{F}}_{21}$ s-a notat forţa cu care corpul 1 acţionează asupra corpului 2 iar cu $\vec{\mathcal{F}}_{21}$ s-a notat forţa cu care corpul 2 acţionează asupra corpului 1. Conform legii acţiunii şi reacţiunii cele două forţe sunt egale şi acţionează în sensuri opuse, adică:

$$\overrightarrow{\mathcal{F}}_{12} = -\overrightarrow{\mathcal{F}}_{21} \tag{1.30}$$

Dacă $\vec{p}_1$ şi $\vec{p}_2$ sunt impulsurile celor două corpuri, se defineşte impulsul total al sistemului ca sumă a impulsurilor particulelor individuale:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \tag{1.31}$$

Legea a doua pentru fiecare corp în parte se scrie astfel:

$$\vec{F}_1 + \vec{\mathcal{F}}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \tag{1.32}$$

$$\vec{F}_2 + \vec{\mathcal{F}}_{21} = \frac{d\vec{p}_2}{dt} \tag{1.33}$$

Se adună relaţiile (1.32) şi (1.33), şi se ţine cont că $\vec{\mathcal{F}}_{12} + \vec{\mathcal{F}}_{21} = 0$. Atunci:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{1.34}$$

Notând cu $\vec{F}_e = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ rezultanta forţelor externe ce acţionează asupra sistemului rezultă:

$$\vec{F}_e = \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{1.35}$$

Aceasta este legea impulsului pentru un sistem de puncte materiale:

Derivata în raport cu timpul a impulsului total al unui sistem de particule este egal cu rezultanta forţelor ce acţionează asupra sistemului.

Dacă rezultanta forţelor externe este nulă, $\vec{F}_e = 0$, atunci:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0; \qquad \vec{P} = const. \tag{1.36}$$

Se obţine astfel legea conservării impulsului:

Impulsul unui sistem de puncte materiale se conservă când rezultanta forţelor externe este nulă.

1.3.2 Lucru mecanic

Fie o forţă $\vec{F}$ constantă, care acţionează asupra unui corp şi produce o deplasare a acestuia pe distanţa $\Delta\vec{r}$. Se consideră că $\vec{F}$ face cu vectorul deplasare un unghi α. Prin definiţie *lucrul mecanic* este egal cu produsul scalar dintre forţă şi deplasare:

$$L = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\Delta r\cos\alpha \tag{1.37}$$

Se observă că dacă $\alpha = 0$ forţa şi deplasarea au aceeaşi direcţie şi:

$$L = F\Delta r \tag{1.38}$$

iar dacă $\alpha = \pi/2$ forţa este perpendiculară pe direcţia deplasării, astfel că:

$$L = F\Delta r \cos \pi/2 = 0 \tag{1.39}$$

Considerăm o particulă ce se deplasează de-a lungul axei Ox sub acţiunea unei forţe care nu mai este constantă şi care variază în funcţie de poziţia particulei. În acest caz se defineşte un lucru mecanic elementar, adică lucrul mecanic efectuat de forţă când particula suferă o delasare infinitezimală dx:

$$\delta L = F dx \tag{1.40}$$

Lucrul mecanic total se obţine prin sumarea lucrurilor mecanice elementare:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} F dx \tag{1.41}$$

unde x_1 este poziţia iniţială, iar x_2 este poziţia finală.

Lucrul mecanic al forţei de greutate.

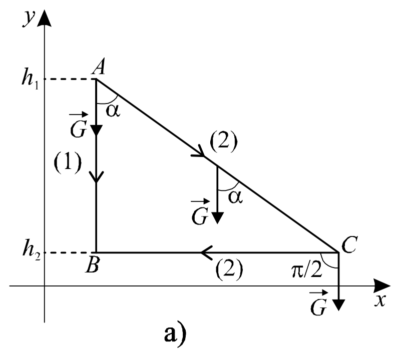
Forţa de greutate este forţa care acţionează asupra oricărui corp aflat în apropiere de suprafaţa pământului şi este egală cu produsul dintre masă şi acceleraţie gravitaţională $g = 9,8$ m/s^2.

$$\vec{G} = m\vec{g} \tag{1.42}$$

Considerăm că deplasarea corpului are loc între punctele A şi B. Pe traiectoria (1) (Fig. 1.5a)

$$L_1 = mg(h_1 - h_2) = -mg\,(h_2 - h_1) \tag{1.43}$$

Pe acest drum particula se deplasează liber, deoarece asupra ei acţionează doar forţa de greutate. Pe traiectoria (2) particula nu se poate deplasa liber. Ea este constrânsă să urmeze această traiectorie şi acest lucru nu se poate realiza decât dacă se acţionează din exterior cu alte forţe decât forţa de greutate. Totuşi aici interesează doar lucrul mecanic al forţei de greutate.



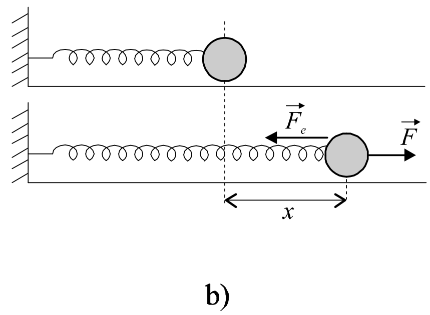


Figura 1.5: a) Lucrul mecanic al forţei de greutate. b) Lucrul mecanic al forţei elastice.

El este egal în acest caz cu suma lucrurilor mecanice efectuate pe porţiunile AC şi CB.

$$\begin{aligned} L_2 &= L_{AC} + L_{CB} = mg(AC)\cos\alpha + mg(CB)\cos\frac{\pi}{2} \\ &= mg[AC\cos\alpha] = mg(h_2 - h_1) = -mg\,(h_2 - h_1) \qquad (1.44) \end{aligned}$$

Se observă că valoarea lucrului mecanic efectuat de forţa de greutate nu depinde de drumul parcurs, ci doar de poziţia iniţială şi finală. *O forţă al cărei lucru mecanic depinde doar de poziţiile iniţială şi finală se numeşte forţă conservativă, iar regiunea din spaţiu în care acţionează astfel de forţe poartă numele de câmp conservativ.*

Lucrul mecanic al forţei elastice

O astfel de forţă apare când un resort este comprimat sau alungit sub acţiunea unei forţe externe (Fig. 1.5b)

Experimental se constată că dacă asupra unui resort, se acţionează cu forţa $\vec{F}$, alungirea maximă a resortului este proporţională cu deformarea acestuia. Constanta de proporţionalitate se notează cu k şi poartă numele de constantă elastică. Astfel:

$$F = kx \qquad (1.45)$$

Deoarece resortul nu se mai poate deforma, înseamnă că în interiorul resortului acţionează o forţă egală cu externă şi de sens contrar cu aceasta. Această forţă poartă numele de forţă elastică:

$$F_e = -F = -kx \qquad (1.46)$$

Lucrul mecanic efectuat de forţa elastică când deferomaţia resortului variază de la valoarea x_1 la valoarea x_2:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} -kxdx = -\frac{k}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right) = -\left(\frac{k}{2}x_2^2 - \frac{k}{2}x_1^2\right) \tag{1.47}$$

Ca şi în cazul forţei de greutate, lucrul mecanic depinde doar de poziţia iniţială şi finală. Rezultă că forţa elastică este o forţă conservativă.

Lucrul forţei de frecare

Când un corp este deplasat pe o suprafaţă plană, în sens invers deplasării acţionează forţe de frecare $F_f = \mu mg$, unde cu μ s-a notat coeficientul de frecare la alunecare. Lucrul mecanic este:

$$L = -\mu mgd \tag{1.48}$$

unde d este deplasarea. Semnul minus apare deoarece deplasarea se face în sens invers forţei. Forţele de frecare nu sunt conservative deoarece între două puncte există o infinitate de drumuri pe care *lucrul mecanic este diferit.*

Aplicaţie

O moleculă diatomică constă din doi atomi între care se exercită forţa:

$$F = F_0\left[2\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{13} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{7}\right]$$

unde r este distanţa dintre atomi, iar F_0 şi σ sunt doi parametri. Pentru molecula de oxigen $F_0 = 9,6 \times 10^{-11}$ N şi $\sigma = 3,5 \times 10^{-10}$ m. Să se determine lucrul mecanic efectuat de această forţă, atunci când atomii se depărtează de la distanţa $r_1 = 4 \times 10^{-10}$ m la $r_2 = 9 \times 10^{-10}$ m.

Soluţie:

$$L = \int_{r_1}^{r_2} F_0\left[2\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{13} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{7}\right] dr$$

$$L = F_0\sigma\left[\frac{1}{6}\left(\frac{\sigma}{r_1}\right)^{12} - \frac{1}{6}\left(\frac{\sigma}{r_2}\right)^{12} + \frac{1}{7}\left(\frac{\sigma}{r_2}\right)^{6} - \frac{1}{7}\left(\frac{\sigma}{r_1}\right)^{6}\right] = 3,2 \times 10^{-21}\ \mathrm{J}$$

1.3.3 Puterea

Puterea reprezintă lucrul mecanic efectuat de sistem în unitatea de timp. Putere şi instantanee

$$P = \frac{\delta L}{dt} \tag{1.49}$$

este raportul dintre lucrul mecanic efectuat de sistem δL în timpul dt. În cazul în care forţa şi deplasarea sunt pe direţia axei Ox, $\delta L = Fdx$ şi

$$P = \frac{\delta L}{dt} = F\frac{dx}{dt} = Fv \tag{1.50}$$

Puterea automobilelor

Automobilele sunt maşini destul de ineficiente. Chiar în condiţii ideale mai puţin de 15% din energia chimică a combustibilului se transformă în energie mecanică, situaţie care este şi mai proastă în cazul circulaţiei prin marile oraşe. Mai multe mecanisme contribuie la pierderea de energie în automobile:

În jur de 67% din energie este pierdută în motor, în sistemul de răcire al automobilului şi în sistemul de evacuare. Aproximativ 16% din energie se pierde prin frecările dintre mecanismele de transmisie interne ale automobilului, 4% din energie este utilizată pentru punerea în funcţiune a diverselor accesorii, ca pompa de benzină, sistemul de aer condiţionat, sistemul audio. Aşadar numai în jur de 13% din energie este utilizată pentru propulsia efectivă a automobilului, adică pentru a compensa pierderea de energie datorită frecării pneurilor şi frecării cu aerul.

Să examinăm puterea care furnizează forţa necesară deplasării unui automobilul. Considerăm pentru coeficientul de frecare dintre pneuri şi şosea valoarea $\mu = 0,016$. Pentru o maşină cu greutatea de 1450 kg forţa de frecare este aproximativ:

$$F_f = \mu N \approx \mu mg = 227 \text{ N}$$

Pe măsură ce viteza maşinii creşte, apare o micşorare a forţei de apăsare normală N, ca rezultat al descreşterii presiunii aerului ce curge deasupra maşinii.

Forţa de rezistenţă la înaintarea prin aer a automobilului este proporţională cu pătratul vitezei:

$$F_a = \frac{1}{2}D\rho A v^2$$

unde D este coeficientul de rezistenţă la înaintare, A este aria secţiunii maşinii, ρ este densitatea aerului. Pentru a realiza o estimare utilizăm valorile $D \simeq 0,5$, $\rho = 1,20$ kg/m^{3}şi $A \approx 2$ m^2. Mărimea forţei totale de rezistenţă este suma celor două forţe:

$$F_t = F_f + F_a$$

Puterea necesară pentru a menţine automobilul la viteză constantă v este:

$$P = F_t v$$

În Tabelul 1.1 sunt prezentate forţa de apăsare normală, forţa de frecare, forţa de rezistenţă la înaintare prin aer, forţa totală e rezistenţă şi puterea în funcţie de viteză.

Tabelul 1.1

Forţele de rezistenţă şi puterea unui automobil în funcţie de viteză.

v (m/s)	N (N)	F_f (N)	F_a (N)	F_t (N)	P (kW)
0	14200	0	0	0	0
8,9	14100	226	48	274	2,4
17,9	13900	222	192	414	7,4
26,8	13600	218	431	649	17,4
35,8	13200	211	767	978	35
44,7	12600	202	1199	1400	62,6

1.3.4 Energia cinetică

Să considerăm un corp asupra căruia acţionează mai multe forţe a căror rezultantă este F este orientată de-a lungul axei Ox. Lucrul mecanic efectuat când corpul este deplasat din poziţia x_1 în poziţia x_2 este:

$$L = \int_1^2 F dx \tag{1.51}$$

Dar:

$$F = ma = m\frac{dv}{dt}$$

Atunci:

$$L=\int_1^2 m\frac{dv}{dt}dx=\int_1^2 m\frac{dv}{dt}vdt=\int_1^2 mvdv=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2 \tag{1.52}$$

Mărimea:

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2 \tag{1.53}$$

este numită *energia cinetică*. Relaţia 1.52 reprezintă teorema variaţiei energiei cinetice pentru un punct material:

Lucrul mecanic efectuat de rezultanta forţelor ce acţionează asupra unui punct material este egal cu variaţia energiei cinetice a acestuia.

În cazul în care sistemul este format din mai multe puncte materiale energia cinetică totală este suma energiilor cinetice ale fiecărui punct material:

$$E_c=\sum_{i=1}^{n}E_{c_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_i^2 \tag{1.54}$$

Şi în acest caz variaţia energiei cinetice este egală cu lucrul mecanic efectuat de toate forţele ce acţionează asupra sistemului.

1.3.5 Energia potenţială

Pentru a înţelege acest concept vom porni de la exprimarea lucrului mecanic pentru diverse tipuri de forţe conservative. Astfel pentru forţa de greutate:

$$L=mg(h_1-h_2)=-\left(mgh_2-mgh_1\right) \tag{1.55}$$

Pentru forţa elastică:

$$L=\frac{kx_1^2}{2}-\frac{kx_2^2}{2}=-\left(\frac{kx_2^2}{2}-\frac{kx_1^2}{2}\right) \tag{1.56}$$

Se observă că în ambele cazuri lucrul mecanic se poate exprima ca minus variaţia unei mărimi ce depinde doar de poziţie. Această mărime poartă numele de energie potenţială. Astfel putem spune că lucrul mecanic al unei forţe conservative este egal cu minus variaţia energiei potenţiale:

$$L=-\Delta E_p=-(E_{p_2}-E_{p_1}) \tag{1.57}$$

Relaţia de mai sus poate fi privită ca o relaţie de definiţie pentru energia potenţială. Ca o primă observaţie putem spune că energia potenţială este definită până la o constantă arbitrară C:

$$E'_p = E_p + C \tag{1.58}$$

Deoarece:

$$\Delta E'_p = E'_{p_2} - E'_{p_1} = E_{p2} + C - E_{p1} - C = E_{p2} - E_{p1} = -L \tag{1.59}$$

aceasta înseamnă că se poate alege orice valoare pentru constanta aditivă. În general, se alege o anumită poziţie, în care energia potenţială se consideră nulă. Această alegere determină constanta aditivă. Alegerea se face astfel încât forma energiei potenţiale să fie cât mai simplă.

Astfel pentru forţa de greutate

$$E_{pg} = mgh + C \tag{1.60}$$

se consideră că la suprafaţa pământului ($h = 0$) energia potenţială este nulă $E_p = 0$. Rezultă $C = 0$ şi energia potenţială gravitaţională ia forma:

$$E_{pg} = mgh \tag{1.61}$$

Pentru forţa elastică

$$E_{pe} = \frac{kx^2}{2} + C \tag{a.86}$$

se consideră că energia potenţială este nulă atunci când resortul nu este deformat. Astfel pentru $x = 0$, $E_{pe} = 0$. Rezultă $C = 0$ şi:

$$E_{pe} = \frac{kx^2}{2} \tag{1.62}$$

Relaţia (1.57) considerată ca relaţie de definiţie a enegiei potenţiale, se scrie sub formă diferenţială ca:

$$\delta L = -dE_p \tag{1.63}$$

Pentru simplificare vom considera că mişcarea este unidimensională şi se face de-a lungul axei Ox:

$$\delta L = F dx \ = -dE_p \tag{1.64}$$

Rezultă:

$$F = -\frac{dE_p}{dx} \tag{1.65}$$

În cazul general:

$$\delta L = \vec{F} d\vec{r}$$

Cum

$$\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z \quad \text{şi} \quad d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$

rezultă:

$$\delta L = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Deoarece energia potenţială este o mărime care depinde de poziţia în care se află corpul $E_p = E_p(x,\ y,\ z)$:

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz \tag{1.66}$$

Astfel relaţia (1.64) se scrie:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial E_p}{\partial x}dx - \frac{\partial E_p}{\partial y}dy - \frac{\partial E_p}{\partial z}dz$$

şi

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

Atunci:

$$\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{e}_z = -\nabla E_p \tag{1.67}$$

În relaţia (1.67) sus simbolul ∇ reprezintă operatorul nabla:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \tag{1.68}$$

Aplicaţie

Energia potenţială a unui sistem format din două particule este:

$$E_p = \frac{A}{r}$$

unde r este distanţa dintre ele. Să se calculeze forţa de interacţiune.

Soluţie:

Pentru determinarea forţei trebuie calculate derivatele parţiale ale energiei potenţiale

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A}{r^2}\right) = -A\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}$$

Cum $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

rezultă:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A}{r^2}\right) = -A\frac{x}{r^3}$$

În acelaşi mod se calculează şi celelate două derivate parţiale

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{A}{r^2}\right) = -A\frac{y}{r^3} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{A}{r^2}\right) = -A\frac{z}{r^3}$$

Astfel conform relaţiei (1.67):

$$F = A\frac{x}{r^3}\vec{e}_x + A\frac{y}{r^3}\vec{e}_y + A\frac{z}{r^3}\vec{e}_z = A\frac{\vec{r}}{r^3}$$

1.3.6 Teorema variaţiei energiei mecanice

Se consideră un punct material asupra căruia acţionează alături de forţele conservative a căror rezultantă este F_C şi forţe neconservative a căror rezultantă este F_{NC}. Utilizând teorema variaţiei energiei cinetice:

$$\Delta E_c = L = L_{F_C} + L_{F_{NC}} \tag{1.69}$$

unde s-a exprimat separat lucrul mecanic al forţelor conservative L_{F_C} şi lucrul mecanic al forţelor neconservative $L_{F_{NC}}$. Lucrul mecanic al forţelor conservative se exprimă ca minus variaţia energiei potenţiale:

$$L_{F_C} = -\Delta E_p \tag{1.70}$$

Rezultă că:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p + L_{F_{NC}}$$

şi
$$\Delta E_c + \Delta E_p = \Delta(E_c + E_P) = L_{F_{NC}} \tag{1.71}$$

Definim energia mecanică ca suma dintre energia cinetică şi potenţială

$$E_M = E_c + E_p \tag{1.72}$$

Atunci:
$$\Delta E_M = E_{M_2} - E_{M_1} = L_{F_{NC}} \tag{1.73}$$

Relaţia de mai sus reprezintă teorema variaţiei energiei mecanice:

Lucrul mecanic al forţelor neconservative care acţionează asupra unui punct material este egal cu variaţia energiei mecanice a punctului material respectiv.

Dacă asupra punctului material acţionează numai forţe nconservative, $L_{F_{NC}} = 0$ şi:
$$E_{M2} = E_{M1}$$

Aceasta este legea conservării energiei mecanice.

Într-un câmp de forţe conservative energia mecanică a punctului material rămâne constantă în timpul mişcării, având loc o transformare a energiei cinetice în energie potenţială şi invers.

Teoremele variaţiei energiei cinetice şi conservării energiei mecanice sunt valabile şi în cazul sistemelor formate din mai multe puncte materiale în care forţele interne (dintre particule) sunt conservative.

1.3.7 Momentul forţei şi momentul cinetic.

Considerăm o forţă care acţionează asupra unui punct material. Definim momentul forţei în raport cu un punct (Fig. 1.6a):

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{1.74}$$

Aceeaşi definiţie se poate aplica şi în cazul unei forţe F aplicate într-un punct al unui corp care se poate roti în jurul unei axe (Fig.1.6b). Vectorul $\vec{r}$ este perpendicular pe axa considerată, şi pentru simplificare forţa $\vec{F}$ este situată într-un plan perpendicular pe axa considerată

Mărimea momentului este:

$$M = rF\sin\theta = rd \tag{1.75}$$

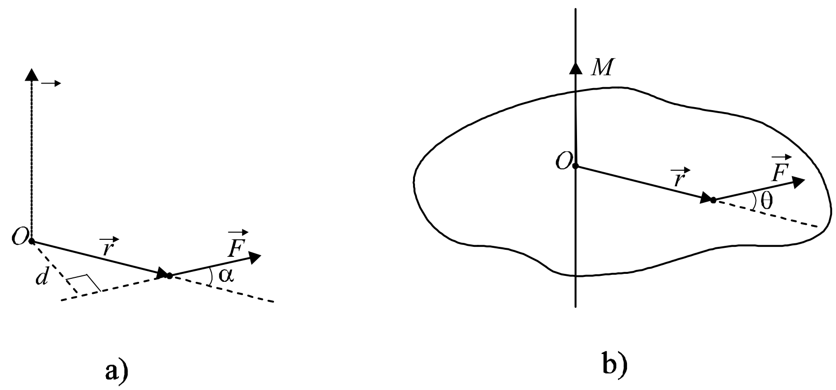


Figura 1.6: a) Momentul unei forţe faţă de un punct. b) Momentul forţei faţă de o axă

unde d poartă numele de braţul forţei.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{p} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Termenul $\vec{p} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$ este nul deoarece $\vec{p}$ şi $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ sunt vectori paraleli. Atunci

$$\vec{M} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{1.76}$$

unde $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ este momentul cinetic

Relaţia 1.76 reprezintă teorema de variaţie a momentului cinetic:

Momentul forţei este egal cu derivata momentului cinetic în raport cu timpul.

În cazul că momentul forţei este nul:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0; \quad \vec{L} = ct \tag{1.77}$$

Dacă momentul rezultant al forţelor care acţionează asupra unui corp este nul, momentul cinetic se conservă.

1.3.8 Cinematica mişcării de rotaţie

Energia cinetică de rotaţie

Să considerăm un corp rigid (Fig. 1.7) care se roteşte în jurul unei axe cu viteza unghiulară ω. Fiecare porţiune din corpul rigid considerat are o

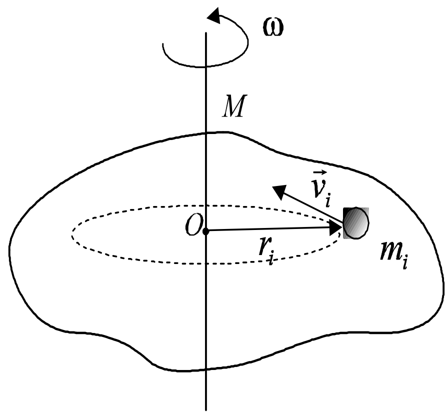


Figura 1.7: Mişcarea de rotaţie a unui corp solid rigir în jurul unei axe.

anumită energie cinetică O mică porţiune din corp cu masa m_i, aflată la distanţa r_i de axă de rotaţie se mişcă pe un cerc de rază r_i şi are viteza liniară $v_i = \omega r_i$.

Energia ei cinetică este:

$$E_{c_i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 \tag{1.78}$$

Energia cinetică totală este suma energiilor cinetice ale porţiunilor din care este constituit corpul.

$$E_R = \sum_i E_{c_i} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 \tag{1.79}$$

Mărimea din paranteză poartă numele de moment de inerţie:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \tag{1.80}$$

Cu această notaţie rezultă:

$$E_R = \frac{1}{2} I \omega^2 \tag{1.81}$$

Se observă că aceată relaţie este analoagă cu expresia energiei cinetice a unui corp $E_c = \frac{mv^2}{2}$. Spre deosebire de masa unui corp, care nu depinde de poziţia sa, momentul de inerţie depinde de axa în jurul căreia corpul se roteşte.

Deaorece un corpul nu este compus din mase puctiforme discrete, ci prezintă o distribuţie continuuă a masei, sumarea din relaţia (1.80) devine o integrală

$$I = \int r^2 dm \tag{1.82}$$

unde integrarea se face pe întregul corp.

Aplicaţie

Să se calculeze momentul de inerţie a unui cilindru cu rază R şi masă M şi lungimea L faţă de axa sa.

Soluţie:

Elementul de masă cel mai convenabil este o pătură cilindrică subţire infinitezimală de rază r, grosime dr şi lungime L Masa acesteia este $dm = \rho dV = \rho L 2\pi r dr$

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \left(\rho L 2\pi r\right) dr = 2\pi\rho L \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho L R^4$$

Cum densitatea este:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 L}$$

rezultă:

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

Aplicaţie

Să se determine momentul de inerţie al unei sfere omogene de masă M şi rază R în raport cu o axă ce trece prin centrul său.

Soluţie

Considerăm că axa considerată este una din axele de coordonate, iar centrul sistemului de coordonate se află în centrul sferei Momentele de inerţie în jurul celor trei axe sunt:

$$I_x = \int \left(y^2 + z^2\right) dM \;\; ; \;\; I_z = \int \left(x^2 + y^2\right) dM \;\; ; \;\; I_y = \int \left(x^2 + z^2\right) dM$$

Deoarece toate cele trei axe sunt echivalente rezultă $I_x = I_y = I_z$ astfel că momentul cinetic în jurul unei este:

$$I = \frac{1}{3}\left(I_x + I_y + I_z\right) = \frac{2}{3}\int \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dM = \frac{2}{3}\int r^2 dM$$

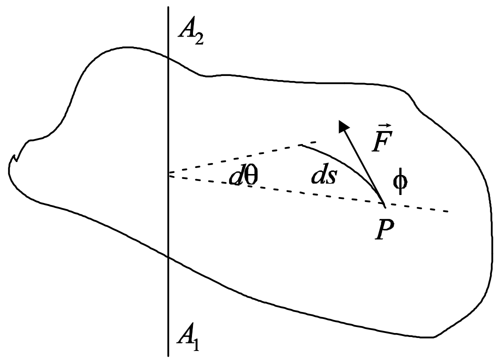


Figura 1.8: Forţă care acţioneaă asupra unui corp ce se poate roti în jurul unei axe.

În relaţia de mai sus masa $dM = 4\pi r^2 \rho dr$ este masa unei pături sferice de rază r şi grosime dr. Atunci

$$I = \frac{2}{3}\int_0^R 4\pi\rho r^4 dr = \frac{8}{15}\pi R^5 \rho$$

Folosind definiţia densităţii:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

rezultă:

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

Dinanica rotaţiei unui corp solid

Considerăm o forţa care acţionează asupra unui corp rigid care se poate roti în jurul unei axe. Pentru simplificare forţa este aleasă într-un plan perpendicular pe axa de rotaţie, astfel ca momentul forţei să fie după direcţia acestei axe A_1A_2. În timpul dt punctul P în care forţa este aplicată se va deplasa cu o distanţă infinitezimală ds de-a lungul unei traiectorii circulare în timp ce corpul se roteşte cu unghiul $d\theta$. Lucrul mecanic efectuat, notat aici cu δW pentru al deosebi de momentul cinetic notat cu L, de forţa F este

$$\delta W = \vec{F} d\vec{s} = (F \sin\phi) r d\theta \tag{1.83}$$

Deoarece $M = Fr\sin\phi$ rezultă:

$$\delta W = M d\theta \tag{1.84}$$

Puterea implicată în acest proces este:

$$P = \frac{\delta W}{dt} = M\frac{d\theta}{dt} = M\omega \tag{1.85}$$

Expresia (1.85) este analoagă formulei $P = Fv$ de la mişcarea de translaţie.

Aplicăm teorema variaţie energiei cinetice sub forma diferenţială (variaţia energiei cinetice a unui corp este egală cu lucrul mecanic efectuat de forţele externe):

$$\frac{dE_c}{dt} = dW \tag{1.86}$$

Ţinând cont de relaţiile (1.81) şi (1.84), relaţia (1.86) devine:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right) = M\omega \tag{1.87}$$

Dar cum momentul cinetic este constant, deoarece corpul este rigid şi axa de rotaţie fixă:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right) = \frac{1}{2}I\frac{d\omega^2}{dt} = I\omega\frac{d\omega}{dt} = I\omega\varepsilon \tag{1.88}$$

unde ε poartă numele de acceleraţie unghiulară. Atunci din relaţia 1.87 se obţine:

$$M = I\varepsilon \tag{1.89}$$

Trebuie remarcat că şi mărimile unghiulare ω şi ε, pot fi tratate ca vectori. Ele au direcţia axei de rotaţie iar sensul lor este dat de regula burghiului. În cazul general ele au o direcţia perpendiculară pe planul de rotaţie.

Momentul cinetic şi viteza unghiulară

Considerăm situaţia prezentată în Fig. 1.7 în care corpul se mişcă în jurul unei axe. O mică porţiune din corp cu masa m_i, aflată la distanţa r_i de axă de rotaţie se mişcă pe un cerc de rază r_i şi are impulsul $p_i = m_i v_i = m_i\omega r_i$. Momentul ei cinetic este:

$$l_i = r_i p_i = m_i r_i v_i = \omega m_i r_i^2 \tag{1.90}$$

doarece impulsul este perpendicular pe raza r_i. Momenul cinetic este orientat după axa de rotaţie, iar sensul său este dat de regula burghiului. Momentul cinetic total este suma momentelor cinetice ale fiecări porţiuni:

$$L = \sum_i l_i = \omega \sum_i m_i r_i^2 \tag{1.91}$$

Deoarece $\sum\limits_i m_i r_i^2 = I$, momentul cinetic faţă de o axă se exprimă ca:

$$L = I\omega \tag{1.92}$$

Mărimile momentul forţei, momentul cinetic, viteza unghiulară, acceleraţia unghiulară ăn cazul rotaţiei unui corp în jurul unei axe sunt dirijate de-a lungul acestia şi nu pot avea decât două sensuri. Luând unul din aceste sensuri pozitiv, celălat sens negativ, toţi cei patru vectori pot fi trataţi algebric şi se poate lucra doar cu mărimile lor considerate pozitive sau negative în funcţie de orientarea lor.

1.4 Probleme

1.1 Unui puc i se imprimă o viteză $v = 2$ m/s. Coeficientul de frecare la alunecare a pucului cu gheaţa este $\mu = 0,01$. Să se calculeze distanţa pe care pucul se deplasează ($g = 10$ m/s^2).

1.2 Un corp interplanetar este atras de Soare cu forţă:

$$F = \frac{2 \times 10^{22}}{r^2}\ \mathrm{N}$$

Să se determine lucrul mecanic efectuat de Soare când corpul se apropie de Soare de la distanţa $r_1 = 3 \times 10^{11}$ m la distanţa $r_2 = 2,5 \times 10^{11}$ m.

1.3 Un corp cu masa $m = 5$ kg este în repaus pe o suprafaţă orizontală pe care poate mişca fără frecare. Asupra corpului acţionează o forţă constantă $F = 5$ N. Să se determine viteza corpului ce parcurge distanţa de 3 m.

1.4 Un corp cu masa $m = 5$ kg se află în repaus pe o suprafaţă orizontală pe care se poate deplasa sub acţiunea unei forţe $F = 12$ N pe distanţa $d = 10$ m. Să se determine viteza corpului după parcurgerea acestei distanţe, dacă coeficientul de frecare la alunecare este $\mu = 0,14$ şi acceleraţia gravitaţională este $g = 9,8$ m/s^2.

1.5 Un corp de masă $m = 2$ kg este ataşat la un resort cu o constantă elastică $k = 10^3$ N/m. Resortul este comprimat cu $x = 2$ cm. Apoi resortul este eliberat. Să se calculeze viteza corpului când resortul trece prin poziţia de echilibru (mişcarea are loc în plan orizontal, fără frecare).

1.6 Să se determine lucrul mecanic efectuat de o forţă care modifică viteză unui corp de masă $m = 5$ kg de la valoarea $\vec{v}_1 = 6\vec{e}_x - 2\vec{e}_y$ la $\vec{v}_2 = 8\vec{e}_x + 4\vec{e}_y$. Componentele vitezelor sunt exprimate în m/s.

1.7 Un corp cu masa $m = 3$ kg are viteza

$$v = (6\vec{e}_x - 2\vec{e}_y)\ \text{m/s}$$

Să se calculeze energia cinetică a corpului.

1.8 O forţă conservativă care acţionează asupra unei particule are expresia

$$\vec{F} = \left(-Ax + Bx^2\right)\vec{e}_x$$

unde A şi B sunt constante.

a) Să se calculeze energia potenţială.

b) Să se calculeze variaţia energiei potenţiale când poziţia particulei se modifică de la x_1 la x_2.

1.9 Energia potenţială a unei particule este:

$$U(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$$

Să se determine forţa care acţionează asupra particulei.

1.10 Motorul electric al unui trenuleţ de jucărie îl accelerează din repaus la 0,5 m/s în 50 milisecunde. Masa totală a trenuleţului este 800 g. Să se determine viteza medie a acestuia.

1.11 O particulă cu masa $m = 4$ kg se deplasează de-a lungul axei Ox în concordanţa cu legea $x = t + 2t^3$ (x este exprimat în metri iar t în secunde).

a) Să se determine energia cinetică la momentul $t = 5$ s.

b) Să se determine acceleraţia la momentul $t = 5$ s.

c) Să se determine puterea furnizată corpului la $t = 5$ s.

d) Să se determine lucrul mecanic efectuat asupra corpului între momentele $t = 0$ şi $t = 2$ s.

1.12 O maşină cu masă $m = 1500$ kg se ciocneşte cu un perete. Viteza iniţială a maşinii este $\vec{v}_i = -20\vec{e}_x$ iar în final $\vec{v}_f = 2\vec{e}_x$. Dacă coliziunea are loc în 0,2 s să se determine forţa medie exercitată asupra maşinii.

1.13 Un pendul balistic este un aparat pentru măsurarea vitezei unui proiectil (de exemplu un glonţ). Acesta constă dintr-un corp de lemn de masa m_2 suspendat de un fir. Un glonţ de masa m_1 întră în acest bloc şi-l ridică la înălţimea h. Să se determine viteza glonţului în funcţie de h.

1.14 Într-un reactor nuclear, neutronii sunt produşi când un atom suferă un proces de fisune. Aceşti neutroni se deplasează cu 10^7 m/s şi trebuie încetiniţi până la 10^3 m/s înainte de a produce un alt act de fisiune. Ei sunt încetiniţi cu ajutorul unui material (lichid sau solid) numit moderator. Să se arate că neutronii pot să-şi piardă energia prin ciocniri elastice cu atomii moderatorului. Să se calculeze fracţia din energia cinetică iniţială a neutronului pierdută de acesta prin ciocnire. Considerăm ciocnirile elastice şi centrale.

1.15 Să se determine mărimea momentului cinetic propriu al unei bile de bowling ($M = 6$ kg şi $R = 12$ cm) care se roteşte cu frecvenţa de $\nu = 10$ rot/s.

Capitolul 2

Oscilaţii şi unde

2.1 Mişcarea oscilatorie armonică

O mişcare care se repetă în mod regulat la intervale egale de timp se numeşte *mişcare periodică* Ca exemplu de mişcări periodice se pot da mişcarea Pământului în jurul Soarelui, mişcarea Lunii în jurul Pământului, mişcarea moleculelor într-un corp solid în jurul poziţiilor de echilibru, mişcarea unui pendul. Alte exemple de mărimi care variază periodic sunt: câmpurile electric şi magnetic ale undelor electromagnetice, curentul alternativ.

Dacă o particulă suferă o mişcare periodică astfel încât se mişcă înainte şi înapoi mişcare se numeşte *mişcare oscilatorie*. Cea mai simplă mişcare oscilatorie se petrece în cazul în care forţa care acţionează asupra unui corp este proporţională cu distanţa faţă de un punct fix, numit poziţie de echilibru, şi este orientată către acel punct. O astfel de forţă este forţă elastică, iar mişcarea determinată de aceasta poartă numele de *mişcare oscilatorie armonică*.

Un model pentru o astfel de mişcare este mişcarea unui corp legat de un resort care se poate deplasa pe o suprafaţă orizontală fără frecare. Originea axei pe care are loc mişcarea se alege în poziţia în care resortul este nedeformat. Pentru un corp asupra căruia acţionează o forţă elastică de-a lungul axei Ox legea a II -a mecanicii se exprimă astfel:

$$ma = -kx \tag{2.1}$$

sau:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{2.2}$$

Notând cu:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \tag{2.3}$$

rezultă:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2.4}$$

Relaţia (2.4) reprezintă o ecuaţie diferenţială de ordin doi. Soluţia acestei ecuaţii este:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta_0) \tag{2.5}$$

unde A şi θ_0 reprezintă două constante. Mărimea $x\,(t)$ este elongaţia şi reprezintă depărtarea corpului de poziţia de echilibru la un moment dat, A este amplitudinea şi reprezintă elongaţia maximă, ω_0 este pulsaţia mişcării şi ea descrie caracterul periodic al mişcarii, $\omega_0 t + \theta_0$este faza mişcării, iar θ_0 reprezintă faza iniţială.

Din relaţia (2.5) rezultă viteza şi acceleraţia particulei care oscilează:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0) \tag{2.6a}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dx^2}{dt^2} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \theta_0) \tag{2.7}$$

Ţinând cont de(2.5) şi (2.7) rezultă relaţia dintre acceleraţie şi elongaţie:

$$a = -\omega_0^2 x \tag{2.8}$$

Determinarea constantelor A şi θ_0 se face cunoscând poziţia şi viteza la momentul iniţial ($t = 0$):

$$x\,(0) = x_0; \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0$$

Astfel

$$x_0 = A\cos\theta_0 \quad ; \quad v_0 = -\omega_0 A\sin\theta_0 \tag{2.9}$$

Astfel rezultă amplitudinea:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v^2}{\omega_0^2}}$$

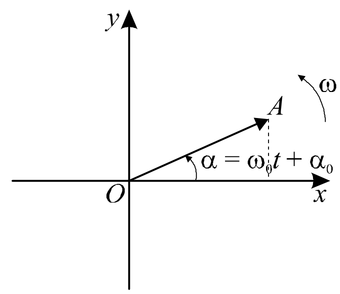


Figura 2.1: Reprezentarea fazorială a mişcarii oscilatorii.

Determinarea fazei iniţiale se face din cunoaşterea funcţiilor trigonometrice sinus şi cosinus din al căror semn se determină cadranul în care este situat θ_0. Nu este indicat să se calculeze tangenta acestui unghi, deoarece funcţia tangentă este o funcţie periodică cu perioada egală cu π. Astfel θ_0 se determină considerând cele două relaţii de mai jos:

$$\sin\theta_0 = -\frac{v_0}{\omega_0 A} \quad ; \quad \cos\theta_0 = \frac{x_0}{A}$$

Pentru determinarea perioadei T se ţine cont că funcţia cosinus este o funcţie periodică cu perioada principală egală cu 2π.

$$A\cos[\omega_0(t+T)+\theta_0] = A\cos[\omega_0 t + \theta_0 + 2\pi] \tag{2.10}$$

Rezultă:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{2.11}$$

Se poate defini frecvenţa ν care reprezintă numărul de oscilaţii în unitatea de timp şi care este inversa perioadei;

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{2.12}$$

2.2 Reprezentările mişcării oscilatorii

2.2.1 Reprezentarea fazorială

Mişcarea este reprezentată printr-un vector rotator numit fazor. Elongaţia mişcării reprezintă proiecţia vârfului vectorului pe axa Ox (Fig. 2.1).

2.2.2 Reprezentarea complexă

Mişcarea poate fi reprezentată cu ajutorul unui număr complex

$$\widetilde{x} = A_0 \exp i(\omega_0 t + \theta_0) = A_0 \exp i\theta_0 \exp i\omega_0 t = A \exp i\omega_0 t \tag{2.13}$$

unde $A = A_0 \exp i\theta_0$ poartă numele de amplitudine complexă. Trecerea la reprezentarea sinusoidală (reală) se face foarte simplu: elongaţie este partea reală a lui $\widetilde{x}$, adică:

$$x = \mathrm{Re}\, \widetilde{x} \tag{2.14}$$

2.3 Energia oscilatorului armonic

Energia oscilatorului armonic este formată din suma energiei cinetice şi potenţiale:

$$E = E_c + E_p \tag{2.15}$$

Energia cinetică este:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \theta_0) \tag{2.16}$$

Energia potenţială este:

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \theta_0) \tag{2.17}$$

Rezultă:

$$E = E_p + E_c = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \tag{2.18}$$

Energia totală a oscilatorului este constantă în timp. Acest lucru este de aşteptat deoarece forţa elastică este una conservativă.

2.4 Pendulul matematic

Pendul matematic constă dintr-un fir inextensibil la capătul căruia se află un punct material de masa m (Fig. 2.2).

Forţele care acţionează asupra punctului material sunt greutatea şi tensiunea din fir $\vec{T}$. Componenta tangenţială a greutăţii determină mişcarea

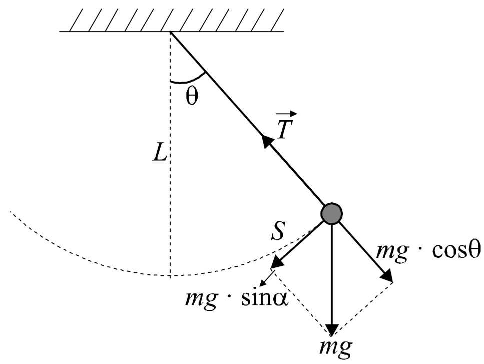


Figura 2.2: Pendulul matematic

corpului către poziţia în care $\theta = 0$. Aplicăm legea a II-a a mecanicii pentru componenta tangenţială a greutăţii:

$$F_t = -mg\sin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2} \tag{2.19}$$

Cum $s = l\theta$ rezultă:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{2.20}$$

Pentru cazul în care θ este foarte mic $\sin\theta \simeq \theta$, astfel că (2.20) devine:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{2.21}$$

Rezultă că ecuaţia de mişcare este similară cu ecuaţia (2.10). Soluţia ecuaţiei este (2.21):

$$\theta = \theta_m \cos(\omega_0 t + \theta_0) \tag{2.22}$$

unde:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{2.23}$$

Astfel perioada mişcării este:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{2.24}$$

şi depinde doar de lungimea l a pendulului şi de acceleraţia gravitaţională.

2.5 Oscilaţii amortizate

Mişcarea oscilatorie armonică este o mişcare ideală, în care asupra corpului acţionează doar o forţă elastică. O astfel de mişcare poate avea loc un timp nedefinit. În realitate, însă, alături de forţa elastică acţionează şi forţe neconservative, cum ar fi forţele de rezistenţă la înaintare (frecare) care încetinesc mişcarea. În consecinţă, energia sistemului scade şi mişcarea este una amortizată. În continuare considerăm că forţa de rezistenţă este proporţională cu mărimea vitezei:

$$R = -\lambda v$$

Semnul minus arată că forţa are sens invers vitezei. În acest caz legea a doua se scrie astfel:

$$ma = -kx - \lambda v \tag{2.25}$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} \tag{2.26}$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2.27}$$

unde $\gamma = \frac{\lambda}{2m}$ poartă numele de coeficient de amortizare iar $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ este pulsaţia mişcării neamortizate.

Pentru rezolvarea ecuaţiei diferenţiale de ordinul doi omogene (2.27) se consideră ecuaţia caracteristică:

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0 \tag{2.28}$$

care are soluţiile:

$$r_{1,\,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{2.29}$$

a) $\gamma > \omega_0$ şi r_1 şi r_2 sunt reale. Soluţia ecuaţiei în acest caz este:

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \tag{2.30}$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante. Ele pot fi determinate din condiţiile iniţiale.

Deoarece $r_1 < 0$ şi $r_2 < 0$ rezultă că atunci când $t \longrightarrow \infty$, $x \longrightarrow 0$

O astfel de mişcare poartă numele de mişcare anarmonică (Fig. 2.3a).

b) $\gamma = \omega_0$. Atunci:

$$r_1 = r_2 = -\gamma \tag{2.31}$$

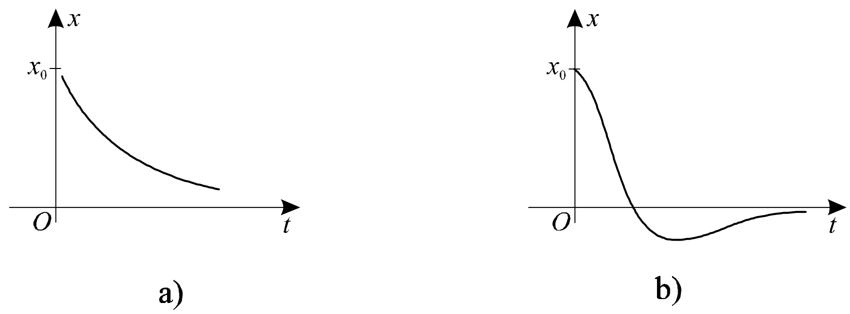


Figura 2.3: a) Mişcare anarmonică. b) Amortizare critică.

Soluţia ecuaţiei diferenţiale este:

$$x = (C_1 t + C_2)e^{-\gamma t} \tag{2.32}$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante care pot fi determinate din condiţiile iniţiale. O astfel de amortizare poartă numele de amortizare critică (Fig. 2.3b).

c) $\gamma < \omega_0$. Ecuaţia caracteristică are soluţii imaginare:

$$r_{1,\,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{2.33}$$

Soluţia ecuaţiei se scrie:

$$x = e^{-\gamma t}[\big(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\big) \tag{2.34}$$

unde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

Ţinând cont de faptul că $e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm \sin\alpha$

$$x = e^{-\gamma t}[(C_1 + C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\sin\omega t] \tag{2.35}$$

Deoarece x elongaţia este o mărime reală alegem:

$$C_1 = a + ib \quad ; \quad C_2 = a - ib \tag{2.36}$$

unde a şi b sunt mărimi reale. Se obţine:

$$x = e^{-\gamma t}\left(2a\cos\omega t - 2b\sin\omega t\right) = e^{-\gamma t}2a\left(\cos\omega t - \frac{b}{a}\sin\omega t\right) \tag{2.37}$$

Se notează:

$$\frac{b}{a} = tg\theta_0 \tag{2.38}$$

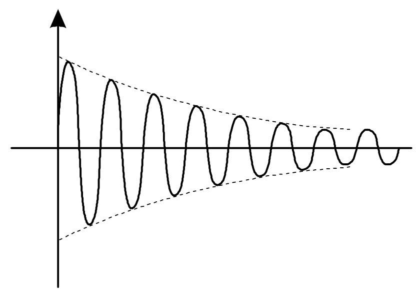


Figura 2.4: Mişcare oscilatorie amortizată.

şi

$$x = \frac{2a}{\cos\theta_0} e^{-\gamma t}[\cos\omega t \cos\theta_0 - \sin\theta_0 \sin\omega t] \tag{2.39}$$

Utilizând notaţia $A_0 = \frac{2a}{\cos\theta_0}$ relaţia (2.39) devine:

$$x = A_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \theta_0) \tag{2.40}$$

Dacă coeficientul de atenuare γ este mic, caracterul oscilatoriu al mişcării se păstrează. Mişcarea poartă numele de mişcare oscilatorie amortizată (Fig. 2.4). Amplitudinea acestei mişcării scade exponenţial în timp:

$$A = A_0 e^{-\gamma t} \tag{2.41}$$

Mişcarea are loc cu pulsaţia:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0 \tag{2.42}$$

unde ω_0 poartă numele de pulsaţie naturală a mişcării oscilatorii.

Mişcarea este caracterizată de aşa numitul decrement logaritmic

$$\delta = \ln\frac{x(t)}{x(t+T)} = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\gamma t} = \gamma T \tag{2.43}$$

Decrementul logaritmic este o mărime adimensională şi caracterizează de asemenea gradul de amortizare a oscilaţiilor. Cu ajutorul se poate compara gradul de amortizare a oscilaţiilor.

Deoarece mişcarea este amortizată sistemul pierde energie. Pierderea de energie este egală cu lucrul mecanic al forţei de rezistenţă.

$$dE = -\delta L = -\lambda v dx \tag{2.44}$$

Puterea disipată este:

$$P = \frac{dE}{dt} = -\lambda v \frac{dx}{dt} = -\lambda v^2 = -2\gamma m v^2 \tag{2.45}$$

Aplicaţie

Un corp se mişcă într-un câmp potenţial în care acesta are energia potenţială $V(x)$ care are valoarea minimă la coordonata $x = 0$. Să se arate că mişcarea particulei în jurul poziţiei de echilibru este una oscilatorie

Soluţie:

Deoarece mişcarea are loc în jurul poziţiei de echilibru, expresia energiei potenţiale se dezvoltă în serie Taylor în jurul punctului $x = 0$ şi se reţin doar primiii doi termeni:

$$V = V(0) + \left(\frac{dV}{dx}\right)\bigg|_{x=0} x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)\bigg|_{x=0} x^2 + ...$$

Cum în $x = 0$ energia potenţială a corpului este minimă $dV/dx = 0$:

$$V = V(0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)\bigg|_{x=0} x^2$$

Forţa care acţionează asupra corpului este:

$$F = -\frac{dV}{dx} = -\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)\bigg|_{x=0} x$$

Se observă că forţa care acţionează asupra corpului este una de tip elastic, iar constanta elastică este:

$$k = \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)\bigg|_{x=0}$$

Aplicaţie

O masă m legată de un resort efectuează o oscilaţie cu frecvenţa de $\nu_1 = 1$ Hz. Când se ataşează în plus o masă $\Delta m = 0,6$ kg frecvenţa devine $\nu_2 = 0,6$ Hz. Să se determine masa m.

Soluţie:

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}; \qquad \nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m + \Delta m}}$$

Prin împărţire şi ridicare la pătrat:

$$\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 = \frac{m + \Delta m}{m}$$

Rezultă:

$$m = \frac{\Delta m}{\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 - 1} = 0,337 \text{ kg}$$

2.6 Oscilaţii forţate

În cazul mişcării oscilatorii amortizate, energia sistemului descreşte în timp. Este posibilă compensarea pierderii de energie prin aplicarea unei forţe externe care efectuează un lucru mecanic pozitiv. Astfel la orice moment de timp energia poate fi transferată sistemului prin aplicarea unei forţe în sensul mişcării. Amplitudinea, rămâne constantă dacă energia furnizată într-o perioada de timp este egală cu energia mecanică pierdută în aceeaşi perioadă datorită forţelor de rezistenţe sau frecare. Un exemplu este acela în care forţa exterioară variază periodic $F = F_0 \cos \omega t$ unde ω este pulsaţia forţei iar F_0 este o constantă.

Ecuaţia de mişcare pentru un corp asupra cărui acţionează o forţă elastică, o forţă de rezistenţă şi o forţă exterioară F este:

$$m\frac{dx^2}{dt^2} = F - kx - \lambda\frac{dx}{dt} \tag{2.46}$$

Ecuaţia se scrie astfel:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0 \cos \omega t}{m} \tag{2.47}$$

unde $2\gamma = \lambda/m$ şi $\omega_0^2 = k/m$. O astfel de ecuaţie este o ecuaţie de ordinul doi neomogenă şi are soluţii de forma:

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) \tag{2.48}$$

unde $x_0(t)$ este soluţia ecuaţie omogene dată de relaţia (2.40), care atunci când t este foarte mare tinde către 0 şi $x_1(t)$ este o soluţie particulară a ecuaţiei omogene. Pentru a obţine o soluţie particulară vom considera o reprezentare complexă. Astfel;

$$F_0 \cos \omega t \to F_0 e^{i\omega t} \tag{2.49}$$

Alegând $x_i(t)$ de forma:

$$x_1(t) = A\cos(\omega t - \theta) \tag{2.50}$$

el va fi reprezentat sub formă complexă astfel:

$$x_1(t) = A\cos(\omega t - \theta) \to Ae^{i(\omega t - \theta)} \tag{2.51}$$

Ecuaţia (2.47) se scrie:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t} \tag{2.52}$$

Deoarece:Ł

$$\frac{dx_1}{dt} = iA\omega e^{i(\omega t-\theta)} \quad \text{şi} \quad \frac{dx_1^2}{dt^2} = -A\omega^2 e^{i(\omega t-\theta)} \tag{2.53}$$

din ecuaţia (2.52) rezultă:

$$[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 2\gamma\omega i]A = \frac{F_0}{m}e^{i\theta} = \frac{F_0}{m}\left[\cos\theta + i\sin\theta\right] \tag{2.54}$$

Pentru ca cele două numere complexe să fie egale este necesar ca:

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)A = \frac{F_0}{m}\cos\theta \tag{2.55a}$$

$$2\gamma\omega A = \frac{F_0}{m}\sin\theta \tag{2.56}$$

Se ridică la pătrat relaţiile (2.55a) şi (2.56) şi se adună. Se obţine:

$$A^2[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2] = (F_0/m)^2 \tag{2.57}$$

Atstfel amplitudinea mişcării este:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \tag{2.58}$$

Tangenta unghiului de defazaj dintre forţa perturbatoare şi elongaţie este:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{2.59}$$

Dacă

$\omega \rightarrow 0$ $\quad$ $\operatorname{tg}\theta \rightarrow 0$ $\quad$ $\theta \rightarrow 0$. Aceasta înseamnă că la pulsaţii (frecvenţe) mici elongaţia este fază cu forţa.

$\omega \rightarrow \omega_0$ $\quad$ $\operatorname{tg}\theta \rightarrow \infty$ $\quad$ $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Aceasta înseamnă că elongaţia este defazată în urma forţei cu $\pi/2$.

$\omega \rightarrow \infty$ $\quad$ $\operatorname{tg}\theta < 0$ $\quad$ $\theta \rightarrow \pi$. Aceasta înseamnă că elongaţia şi forţa sunt în opoziţie de fază.

2.6.1 Rezonanţa

Rezonanţa reprezintă fenomenul de creştere a amplitudinii pentru anumite valori ale lui ω. Pentru determinarea frecvenţei la care amplitudinea este maximă se pune condiţia:

$$\frac{dA}{d\omega} = 0 \tag{2.60}$$

de unde rezultă valoarea pulsaţiei de rezonanţă:

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} < \omega_0 \tag{2.61}$$

La această valoare a pulsaţiei, amplitudinea mişcării la rezonanţă devine egală cu:

$$A(\omega_R) = \frac{F_0/m}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \tag{2.62}$$

În Fig. 2.5 este reprezentată amplitudinea mişcării în funcţie de pulsaţia forţei externe pentru diverse valori ale coeficientului de atenuare. Se observă că pe măsură ce valoarea coefientului de atenuare amplitudinea la rezonaţă creşte, iar pusaţia de rezozanţă se apropie de pulsaţia oscilaţiei în cazul că nu ar fi atenuare.

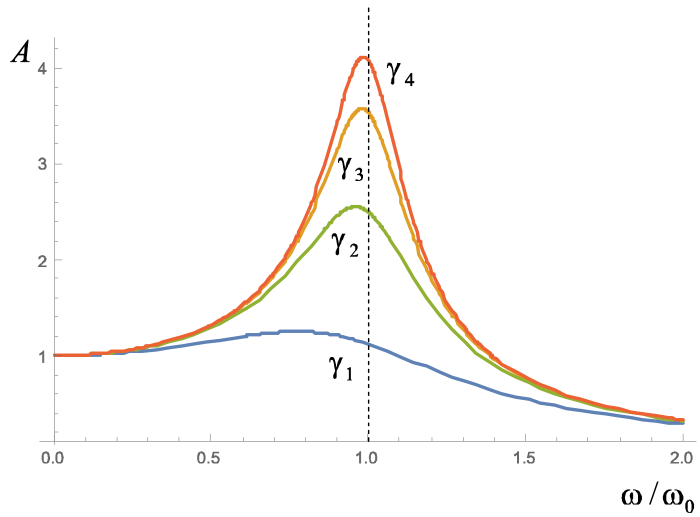


Figura 2.5: a) Amplitudinea unei oscilaţii forţate funcţie de pulsaţia forţei pentru diverse valori ale coeficientului de atenuare: $\gamma_4 < \gamma_3 < \gamma_2 < \gamma_1$.

2.7 Tipuri de unde

Se numesc unde, perturbaţiile care se propagă din aproape în aproape printr-un mediu. De exemplu scoaterea din poziţia de echilibru a unei particule care este situată într-un mediu elastic determină ieşirea din poziţia de echilibru şi a particulelor vecine datorită forţelor elastice ce se exercită între particulele mediului. În acest mod mişcarea se propagă din aproape în aproape prin intermediul unui câmp de forţe elastice.

Prezenţa unei unde presupune existenţa unei surse care produce perturbaţia iniţială şi a unui mediu în care aceasta să se propage.

După natura perturbaţiei, putem avea diferite feluri de unde:

- unde elastice (undele acustice), care sunt produse de oscilaţii de natură mecanică de mică amplitudine care se propagă în medii elastice;

- unde termice, care apar datorită diferenţelor de temperatură şi caracterizează fenomenul de propagare a căldurii;

- unde electromagnetice, care sunt produse de perturbaţii de natură electromagnetică.

Pentru primele două tipuri de unde este necesar un mediu material, în timp ce undele electromagnetice se pot propaga şi în vid.,

După caracterul perturbaţiei, undele pot fi:

- scalare, pentru care perturbaţia este caracterizată de o mărime scalară;
- vectoriale, pentru care perturbaţia este caracterizată de o mărime vectorială.

După modul în care apar perturbaţiile în raport cu direcţia de propagare, undele pot fi:

- transversale, când oscilaţiile sau deplasările se efectuează în plane perpendiculare pe direcţia de propagare;
- longitudinale, când oscilaţiile sau deplasările se efectuează în direcţia de propagare a undelor.(undele acustice).

Un exemplu de unde sunt undele seismice care sunt tridimensionale şi se propagă din punctul de producere de sub suprafaţa pământului de-a lungul unei fisuri. În acest caz întâlnim ambele tipuri de unde: undele transversale notate cu P (unde primare) care au viteza de propagare în intervalul 7 km/s şi undele longitudinale notate cu S (unde secundare) care se propagă cu 4 km/s. Prin înregistrarea intervalului de timp între momentele de sosire a celor două tipuri de unde la un seismograf, se poate calcula distanţa de la seismograf la punctul de origine al cutremurului. Practic, acest punct se află pe o sferă cu centrul în locul unde se află seismograful. Pentru a determina punctul de origine se utilizează mai multe seismografe. Punctul de origine al cutremurului se află în punctul de intersecţie al sferelor imaginare cu centrele în locurile unde se află seismografele.

2.8 Unde armonice

Undele armonice sunt produse de un sistem antrenat într-o mişcare de oscilaţie armonică. Starea de oscilaţie se transmite şi în celelalte puncte ale mediului pe care le pune într-o mişcare oscilatorie armonică simplă.

Trebuie remarcat că perturbaţiile armonice cu o frecvenţă fixă reprezintă un caz ideal. Studiul acestor cazuri ideale permite o extrapolare în cazurile reale, când pot să apară fenomene periodice nearmonice; acestea pot fi abordate prin aplicarea unor metode matematice cunoscute (serii sau integrale Fourier).

Să considerăm o undă tridimesnională. Se poate duce o suprafaţă prin punctele la care oscilaţia a ajuns la un moment dat. Această suprafaţă se mişcă aratând cum se propagă perturbaţia. Această suprafaţă poartă numele de front de undă. Dacă mediul este omogen şi izotrop, direcţia de propagare este întodeauna perpendiculară pe frontul de undă.

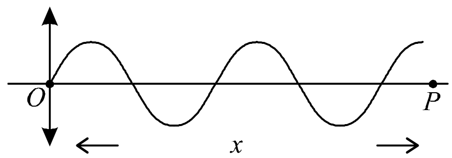


Figura 2.6: Unda armonica unidimensionala.

Fronturile de undă pot avea divese forme:

- plan în cazul undelor plane, care se propagă pe o singură direcţie perpendiculară pe frontul de undă;

- sferică în cazul undelor sferice care se propagă în toate direcţiile şi care provin de la o sursă punctiformă.

Departe de sursă, fronturile de undă sferică au o curbură foarte mică şi pe o regiune limitată aceste unde pot fi privite ca unde plane.

2.8.1 Unda armonică unidimensională

Ecuaţia unde armonice unidemensionale este valabilă şi în cazul undei armonice plane, deoarece aceasta se propagă într-o singură direcţie.

Considerăm (Fig. 2.6) că punctul O care este sursa undei oscilează după legea:

$$u = A\cos(\omega t + \theta) \tag{2.63}$$

Considerând că v este viteza de propagare a undei, un punct P aflat la distanţa x începe să oscileze după intervalul de timp:

$$t_0 = \frac{x}{v} \tag{2.64}$$

Atunci punctul P oscilează după legea:

$$u(x,t) = A\cos\left[\omega(t - \frac{x}{v}) + \theta\right] \tag{2.65}$$

Deoarece $\omega = 2\pi/T$

$$u(x,t) = A\cos\left[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \theta\right] = A\left[\omega t - kx + \theta\right] \tag{2.66}$$

unde $\lambda = vT$ poartă numele de lungime de undă iar $k = \frac{\omega}{v}$poartă numele de număr de undă sau modulul vectorului de undă. Lungimea de undă

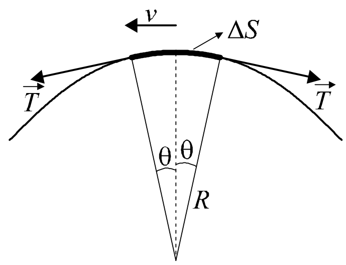


Figura 2.7: Calcularea vitezei de propagare în coardă

reprezintă spaţiul străbătut de undă într-o perioadă, sau distanţa minimă dintre două puncte care oscilează în fază.

Unda armonică este un fenomen periodic în timp cu perioada T:

$$u(x,t) = u(x,t+T) \tag{2.67}$$

şi în spaţiu cu perioada λ:

$$u(x,t) = u(x+\lambda,t) \tag{2.68}$$

2.8.2 Viteza de propagare a undei într-o coardă

Pentru aceasta vom considera un element din coardă (Fig. 2.7) întinsă cu tensiunea T. Elementul de lungime Δs formează un arc de cerc cu raza R. Într–un sistem de referinţă care se mişcă cu viteza v a pulsului elementul de coardă considerat are acceleraţia:

$$a = \frac{v^2}{R} \tag{2.69}$$

care este determinată de forţa rezultantă dintre tensiunile care acţionează la capetele elementului considerat din coardă. Aceasta este egală cu:

$$F = 2T\sin\theta \simeq 2T\theta \tag{2.70}$$

deoarece am considerat elementul Δs foarte mic, fapt ce face ca şi unghiul θ să fie foarte mic. Elementul Δs are masa:

$$\Delta m = \mu ds = 2\mu R\theta \tag{2.71}$$

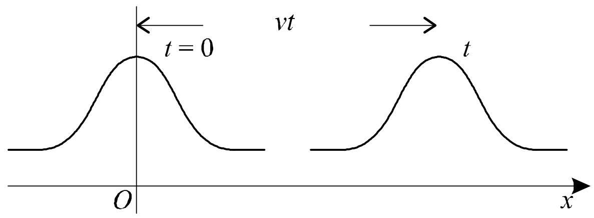


Figura 2.8: Puls care se propagă în lungul axei Ox.

unde μ este densitatea liniară a corzii. Ţinând cont de relaţiile (2.69) şi (2.71)

$$F = \Delta ma = 2\mu R\theta \frac{v^2}{R} \tag{2.72}$$

Comparând relaţiile (2.70) şi (2.72), rezultă:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{2.73}$$

2.9 Ecuaţia undelor

Considerăm $\theta = 0$ şi ţinând cont de relaţia (2.66) se calculează derivatele elongaţiei $u\,(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k^2 A \cos(\omega t - kx) \tag{2.74}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - kx) \tag{2.75}$$

Rezultă prin combinarea relaţiilor (2.74) şi (2.75):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.76}$$

Aceasta este ecuaţia generală a undei unidimensionale pe care o considerăm adevărată nu numai în cazul undelor armonice. Soluţia generală a ecuaţiei (2.76) este de forma:

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

unde $f(x - vt)$ este unda progresivă adică unda care se propagă în sensul axei Ox şi $g(x + vt)$ este unda regresivă, adică unda care se propagă în sens invers axei Ox. Pentru a arăta că $f(x - vt)$ este undă progresivă vom considera un puls care se propagă de-a lungul unei coarde (Fig. 2.8).

El are forma $y = f(x)$ la momentul $t = 0$. La momentul t vârful pulsului a ajuns la coordonata vt. Dacă punem condiţia ca forma pulsului să rămână neschimbată atunci $y(x,t) = f(x-vt)$. În acest mod am arătat că $f(x-vt)$ reprezintă o perturbaţie care se propagă în sensul pozitiv al axei Ox.

Aplicaţie

O undă sinusoidală este descrisă de

$$y = 0,25 \sin(0,3t - 40x)$$

unde x şi y sunt exprimate în metri iar timpul t în secunde. Să se determine amplitudinea, pulsaţia, numărul de undă, lungimea de undă şi viteza de propagare a undei.

Soluţie:

$$A = 0,25 \text{ m}; \;\; \omega = 0,30 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0,3} = 20,944 \text{ s}; \quad k = 40 \text{ m}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{40} = 0,157 \text{ m}; \qquad v = \frac{\lambda}{T} = 7,49 \times 10^{-3} \text{ m}$$

2.10 Unde tridimensionale

Ecuaţia undelor tridimensionale se obţine prin generalizarea ecuaţiei (2.76). În acest caz vom nota elongaţia mişcării oscilaţiilor executate de particule în mediu u (din cazul undelor unidimensionale) cu ψ (în cazul unei unde tridimensionale)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{2.77}$$

2.10.1 Unde plane

Considerând o undă armonică $\psi(x,y,z,t)=\psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z)e^{i\omega t}$, relaţia 2.77 devine:

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}\psi_2\psi_3+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\psi_1\psi_3+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\psi_1\psi_2=-\frac{\omega^2}{v^2}\psi_1\psi_2\psi_3 \tag{2.78}$$

Se împarte cu $\psi_1\psi_2\psi_3$ şi ţinem cont că:

$$\frac{\omega^2}{v^2}=k^2 \tag{2.79}$$

Se obţine:

$$\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{1}{\psi_2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}+\frac{1}{\psi_3}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial z^2}=-k^2 \tag{2.80}$$

Pentru ca această egalitate să fie adevărată este necesar ca:

$$\begin{array}{ll}
\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}=-k_1^2 & \frac{1}{\psi_1}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+k_1^2=0\\
\frac{1}{\psi_2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}=-k_2^2 & \frac{1}{\psi_2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}+k_2^2=0\\
\frac{1}{\psi_3}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial z^2}=-k_3^2 & \frac{1}{\psi_3}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial z^2}+k_3^2=0
\end{array}$$

Soluţii particulare ale ecuaţiilor anterioare sunt:

$$\psi_1=A_1e^{\pm ik_1x};\quad \psi_2=A_2e^{\pm ik_2x};\quad \psi_3=A_3e^{\pm ik_3x}$$

Alegem numai cazul în care apare semnul minus $(-)$, astfel că:

$$\psi=Ae^{i[\omega t-(k_1x+k_2x+k_3x)]} \tag{2.81}$$

Am ales cazul cu minus pentru a obţine o undă progresivă. Frontul de undă la un moment dat de timp este definit astfel:

$$\omega t-\vec{k}\vec{r}=const.\quad \text{sau}\quad \vec{k}\vec{r}=const. \tag{2.82}$$

$$k_1x+k_2x+k_3x=const.$$

Aceasta este ecuaţia unui plan pe care este perpendicular vectorul de propagare $\vec{k}$. Astfel în acest caz unda este una plană. Frontul de undă se deplasează perpendicular pe $\vec{k}$. Se poate defini pentru unda plană armonică vectorul de propagare:

$$\vec{u}=\frac{\vec{k}}{k} \tag{2.83}$$

2.10.2 Unde sferice

Undele sferice sunt determinate de surse punctiforme de perturbaţie aflate în medii omogene şi izotrope. În acest caz elongaţia ψ a unui punct aflat la distanţa A de sursă depinde doar de r, adică $\psi = \psi(r,t)$.În acest caz este util să se scrie ecuaţia (2.77) în coordonate sferice.

$$\nabla = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \quad (2.84)$$

Deaorece $\psi = \psi(r,t)$ relaţia 2.84 devine:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \quad (2.85)$$

Se face substituţia:

$$\psi(r,t) = \frac{f(r,t)}{r} \quad (2.86)$$

şi rezultă $f(r,t)$ satisface ecuaţia:

$$\frac{\partial^2 f(r,t)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f(r,t)}{\partial t^2} \quad (2.87)$$

O soluţie este unda armonică progresivă:

$$f(r,t) = Ce^{i\omega(t-\frac{r}{v})} \quad (2.88)$$

astfel că:

$$\psi(r,t) = \frac{C}{r}e^{i\omega(t-\frac{r}{v})} \quad (2.89)$$

Se observă că pentru undele sferice amplitudinea $A = \frac{C}{r}$ scade cu r, deoarece energia emisă se distribuie pe suprafeţe din ce în ce mai mari.

2.11 Energia asociată unei unde

Ne vom limita la energia undei care se propagă printr-o coardă. Undele transportă energie când se propagă printr-un mediu. Să considerăm o undă sinusoidală care se propagă printr-o coardă. Considerăm un element de masă

dm şi lungime dx. Deaorece fiecare element execută o mişcare oscilatorie armonică, energia acestui element este:

$$dE = \frac{\omega^2 A^2}{2} dm \tag{2.90}$$

unde $dm = \mu dx$, μ fiind densitatea liniară de masă. Astfel:

$$dE = \frac{\mu\omega^2 A^2}{2} dx \tag{2.91}$$

Energia unei porţiuni de de lungime λ din coardă este:

$$E = \int_0^\lambda \frac{\mu\omega^2 A^2}{2} dx = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda \tag{2.92}$$

Când are loc propagarea undei, într-o perioadă, printr-o secţiune a corzii se trece energia E exprimată prin relaţia (2.92). Atunci rata medie a transferului de energie este:

$$\mathcal{P} = \frac{E}{T} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v \tag{2.93}$$

Expresia ratei transferului de energie poate fi folosită şi în cazul undelor sonore. Expresia 2.93 trebuie exprimată în alt mod. Pentru aceasta se ţine cont că densitatea liniară de masă se exprimă ca;

$$\mu = \rho S$$

unde ρ este densitatea, iar S este secţiunea porţiunii considerate. Amplitudinea undei sonore o vom nota cu $s_{\max}$. Ea reprezintă în acest caz depărtarea maximă la care poate ajunge un mic element din aer faţă de poziţia sa de echilibru. Astfel:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\rho S v (\omega s_{\max})^2 \tag{2.94}$$

Definim intensitatea I a undei ca energia care trece prin unitatea de arie în unitatea de timp:

$$I = \frac{\mathcal{P}}{S} = \frac{1}{2}\rho v (\omega s_{\max})^2 \tag{2.95}$$

Să considerăm o sursă punctiformă care emite unde în toate direcţiile şi o sferă cu raza r centrată pe sursă. Puterea medie $\mathcal{P}$ emisă de sursă trebuie să fie uniform distribuită pe această sferă. Atunci intensitatea undei la distanţa r faţă de sursă va fi:

$$I = \frac{\mathcal{P}}{S} = \frac{\mathcal{P}}{4\pi r^2} \tag{2.96}$$

Astfel pentru undele sferice intensitatea descreşte proporţional cu pătratul distanţei de la sursă.

În cazul sunetelor, este convenabil să se utilizeze o scală logaritmică, astfel că în locul intensităţii undei, se defineşte nivelul sonor:

$$\beta = 10 \lg \frac{I}{I_0} \tag{2.97}$$

unde I_0 este intensitatea de referinţă şi este considerată ca pragul de audibilitate $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2, iar I este intensitatea undei sonore care se măsoară. Nivelul sonor β se măsoară în dB (decibeli). În Tabelul 2.1 de mai jos sunt prezentate câteva exemple pentru diverse sunete.

Tabel 2.1
Nivelul sonor pentru diverse surse de sunete

Sursa de sunet	β(**dB**)
Avion cu reacţie	150
Sirenă; concerte rock	120
Motoare puternice	100
Trafic intens	80
Aspirator	70
Conversaţie normală	50
Şoapte	30
Frunze	10
Pragul de audibilitate	0

Există şi un prag dureros cu intensitatea $I = 1$ W/m^2. Acest prag sonor corespunde unui nivel sonor $\beta = 120$ dB. Expunerea prelungită la astfel de sunete determină apariţia unei leziuni la nivelul urechii. Este recomandat să nu se realizeze expuneri la sunete al căror nivel sonor este mai mare decât 90 dB

2.12 Probleme

2.1 Un resort orizontal este deformat sub acţiunea unei forţe $F = 8$ N cu $0,04$ m. De capătul resortului este legată o masă $m = 0,2$ kg şi apoi resortul este lăsat liber. Neglijând frecările să se determine:
a) constanta elastică a resortului;
b) frecvenţa de oscilaţie;
c) perioada de oscilaţie.

2.2 Un autoturism are masa de $M = 1300$ kg şi este susţinuţ de 4 resorturi. Fiecare resort are constanta elastică $k = 20000$ N/m. Dacă în autoturism sunt trei persoane cu masa de $m = 200$ kg să se determine frecvenţa vibraţiilor când autoturismul trece peste o denivelare.

2.3 Un corp oscilează după legea:

$$x = 4\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ cm}$$

a) Să se determine amplitudinea, pulsaţia, perioada şi frecvenţa.
b) Să se determine viteza în funcţie de timp.

2.4 Un resort este ataşat de tavan. Când un corp este ataşat de capătul liber acesta se alungeşte cu 2 cm. Apoi corpul este scos din poziţia de echilibru şi este lăsat liber. Care este frecvenţa oscilaţiilor ?

2.5 Un obiect legat de un resort oscilează cu perioada $T = 0,8$ s şi amplitudinea de 10 cm. La momentul $t = 0$ corpul se află la $x = 5$ cm la dreapta poziţiei de echilibru. Care este poziţia corpului la $t = 2$ s ?

2.6 Să se determine frecvenţa şi perioada de oscilaţie a unui pendul cu lungimea $l = 1$ m. Se cunoaşte acceleraţia gravitaţională $g = 9,8$ m/s^2.

2.7 Ecuaţia de mişcare a unui particule este:

$$x = 25\cos 10t \text{ cm}$$

unde x este considerat în cm iar timpul în secunde. La ce moment de timp energia cinetică este de două ori mai mare decât energia potenţială.

2.8 Un corp legat de un resort orizontal este deplasat cu $x = 20$ cm din poziţia de echilibru şi apoi lăsat liber. Oscilaţiile au o perioadă egală cu $T = 0,8$ s. În ce poziţie viteza corpului este 1 m/s ?

2.9 O undă armonică care se propagă de-a lungul axei *Ox,* are amplitudinea de $A = 10$ cm, lungimea de undă $\lambda = 30$ cm şi frecvenţa $\nu = 15$ Hz. Mişcarea oscilatorie are loc de-a lungul axei *Oy.* La $x = 0$ şi $t = 0$, $y = 5$ cm.

a) Să se determine numărul de undă, perioada, pulsaţia şi viteza de propagare a undei.

b) Să se scrie expresia undei.

2.10 Să se arate că funcţia

$$y\left(x,t\right) = A \sin kx \cos \omega t$$

satisface ecuaţiilor undelor.

2.11 O undă transversală care este produsă într-o coardă întinsă are viteza de propagare $v = 5$ m/s. Coarda are lungimea de 6 m şi masa de $0,06$ kg. Care este tensiunea din coardă pentru a se produce această undă?

2.12 O sirenă aflată în vârful unui stâlp emite sunete uniform în toate direcţiile. La distanţa $d_1 = 15$ m de sirenă intensitatea sunetelor este de 0,25 W/m^2. La ce distanţă de sirenă intensitate acestor devine 0,01 W/m^2?

2.13 O coardă de chitară este făcută din oţel a cărui densitate este $\rho = 7800$ kg/m^3, are lungimea de 60 cm şi diametrul de 0,5 mm. Frecvenţa fundamentală a corzii este $\nu = 250$ Hz.

a) Să se determine tensiunea în coardă T.

b) Dacă se schimbă tensiunea în coardă cu ΔT, să se calculeze $\Delta\nu/\nu$.

2.14 Două puncte A şi B de pe suprafaţa Pământului sunt la aceeaşi longitudine şi distanţate cu 45 grade în latitudine. Presupunând că în punctul A aflat în apropiere de suprafaţa Pământului are loc un cutremur care crează unde P şi unde S. Undele P se propagă în linie dreaptă cu viteza de 7,8 km/s. Undele S se propagă la suprafaţa Pământului în mod analog cu valurile şi au viteza de 4,5 km/s. Cunoscând că raza Pământului de 6370 km, care dintre unde atinge prima punctul B şi care este diferenţa dintre momentele în care cele două unde ating punctul B?

Capitolul 3

Termodinamică

3.1 Noţiuni fundamentale

1. ***Sistemul termodinamic*** *reprezintă o porţiune din univers care cuprinde corpuri şi câmpuri şi care este delimitată de restul universului printr-o barieră fizică sau imaginară. Restul universului poartă numele de mediu extern.*

Interacţiunea dintre sistemul termodinamic şi mediul extern se realizează prin schimb de energie şi schimb de masă.

Pornind de la aceasta, sistemele se pot clasifica în *sisteme deschise* care pot schimba masă şi energie cu mediul extern şi *sisteme închise* care nu schimbă masă cu mediul extern. Sistemele închise se împart în *sisteme izolate*, care nu schimbă nici energie cu mediul extern şi *sisteme neizolate,* care pot schimba energie cu mediul extern.

2. ***Parametrii de stare*** *sunt mărimi ce caracterizează starea sistemului. Relaţiile dintre parametrii poartă numele de ecuaţii de stare.*

Din acest motiv o parte din parametri sunt independenţi iar ceilalţi sunt dependenţi. Altă clasificare a parametrilor de stare îi împarte în parametrii intensivi şi extensivi.

Parametrii intensivi sunt parametrii care nu depind de extinderea spaţială a sistemului. Ei caracterizează proprietăţile locale ale sistemului. Ca exemplu putem da presiunea şi temperatura.

Parametrii extensivi sunt parametrii care depind de extinderea spaţială a sistemului. Ca exemple putem da volumul şi masa.

Referitor la stările sistemului putem defini *stări staţionare* în care parametri sistemului sunt constanţi în timp şi *stări nestaţionare* în care parametri sistemului se modifică în timp. *Stările de echilibru* sunt stările staţionare, în care nu există schimb de masă sau energie cu mediul extern.

Principiul fundamental al termodinamicii

Un sistem izolat ajunge întotdeauna după un timp într-o stare de echilibru termodinamic şi nu poate ieşi de la sine din această stare.

3. Transformări de stare

După natura stărilor intermediare transformările sunt *cvasistatice* (stările intermediare sunt stări de echilibru iar procesele sunt lente) şi transformări *necvasistatice* (stările intermediare nu sunt stări de echilibru).

După posibilitatea de a se realiza procesul invers prin aceeleaşi stări de echilibru prin care s-a realizat procesul direct, transformările pot fi *reversibile* şi *ireversibile.*

3.2 Energia internă

Energia internă a unui sistem termodinamic este formată din suma energiilor cinetice ale particulelor constituente ale sistemului, suma energiilor potenţiale de interacţie dintre particulele sistemului şi suma energiilor potenţiale ale particulelelor în câmpuri externe.

Energia internă este o mărime de stare. Din punct de vedere matematic ea este o diferenţială totală exactă.

3.2.1 Forme ale schimbului de energie

Lucrul mecanic

Există două convenţii cu privire la lucrul mecanic. Într-una, se consideră pozitiv lucrul mecanic efectuat de mediul extern iar forţele considerate sunt cele cu care mediul extern acţionează asupra sistemului. În cealaltă convenţie, lucrul mecanic considerat pozitiv este cel efectuat de sistem asupra mediului extern, iar forţele sunt cele cu care sistemul acţionează asupra mediului extern. În continuare vom folosi a doua convenţie.

Lucrul meanic efectuat de forţele de presiune

Se consideră un gaz închis într-un recipient cu ajutorul unui piston mobil. Asupra pistonului mobil acţionează din interior o forţă de presiune egală cu $F_p = pS$, unde S este secţiunea pisotonului. Considerând că transformarea

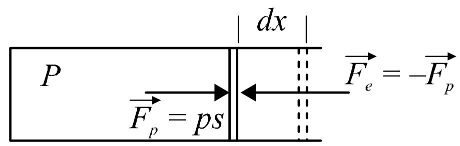


Figura 3.1: Lucrul mecanic al presiunii.

este una cvasistatică, atunci din exterior trebuie să acţioneze o forţă egală şi de sens contrar cu forţa de presiune

Lucrul elemntar efectuat de un sistem se scrie ca:

$$\delta L = F_p dx = pSdx = pdV \tag{3.1}$$

Faptul că se utilizează notaţia δL arată că lucrul mecanic elementar este o formă diferenţială, dar nu o diferenţială totală exactă. Cu alte cuvinte lucrul mecanic nu depinde doar de starea iniţială şi finală, ci şi de stările intermediare prin care trece sistemul. Lucrul mecanic este o mărime care depinde de transformare. Când volumul variază de la valoarea V_1 la valoarea V_2 lucrul mecanic se exprimă ca:

$$L = \int_{V_1}^{V_2} pdV \tag{3.2}$$

Lucrul mecanic efectuat la modificarea suprafeţei libere a unui ichid

$$\delta L = -\sigma dA \tag{3.3}$$

unde σ este coeficientul de trensiune superficială a lichidului, iar dA este variaţia suprafeţei libere a lichidului.

Generalizând putem spune că:

$$\delta L = \sum_i A_i da_i \tag{e.5}$$

unde A_i sunt parametrii de forţă, iar a_i sunt parametrii de poziţie (coordonate generalizate).

Aplicaţie

Să se determine lucrul mecanic efectuat într-o transformare a unui gaz ideal de forma $p = aV$, unde a este o constantă, când volumul creşte de la volumul V_1 la V_2.

Soluţie:

Lucrul mecanic elementar este:

$$\delta L = pdV = aVdV$$

Rezultă

$$L = \int_{V_1}^{V_2} aVdV = a\frac{V^2}{2}\bigg|_{V_1}^{V_2} = \frac{a}{2}\left(V_2^2 - V_1^2\right)$$

3.2.2 Căldura

Sistem izolat adiabatic. *Este sistemul care schimbă energie cu mediul extern doar prin efectuarea de lucru mecanic. În acest caz variaţia de energie este egală cu -L.*

$$\Delta U = -L \tag{3.4}$$

Astfel, dacă sistemul efetuează lucru mecanic asupra mediululi ($L > 0$) energia internă a sistemului scade, iar dacă mediul extern efectuează un lucru mecanic asupra sistemului ($L < 0$) energia sistemului creşte.

În cazul unor transformări oarecare, relaţia $\Delta U = -L$ nu mai este satisfăcută. Pentru ca legea conservării energiei să fie satisfăcută, este necesar să se introducă o nouă mărime, care să caracterizeze schimbul de căldură cu mediul, numită căldură. Atunci când se efectuează lucrul mecanic are loc o modificare a parametrilor de poziţie ai sistemului (coordonate generalizate). În cazul schimbului de căldură variaţia energiei sistemului se poate face fără modificări ale parametrilor de poziţie ai sistemului. Cantitatea de căldură se noteză cu Q.

3.3 Temperatura

În mod practic asociem temperatura cu senzaţiile de cald sau rece. Totuşi,pentru a înţelege conceptul de temperatură trebuie introduse conceptele de contact termic şi echilibru termic.

Modul în care este privit contactul termic este acela în care cele două sisteme sunt plasate într-un container care le izolează de mediul extern. Între sisteme există un perete fix care permite doar schimbul de căldură între ele (perete diaterm). Se spune că cele două sisteme sunt în contact termic. Conform principiului fundamental al termodinamicii, sistemul compus, fiind izolat tinde către o stare de echilibru. Deoarece parametrii de poziţie rămân constanţi, peretele dintre cele două sisteme fiind fix, sistemele pot schimba între ele doar căldură. Când schimbul de căldură încetează sistemele ajung la echilibru termic.

Proprietatea cea mai importantă a echilibrului termic este aceea de tranzitivitate. Astfel dacă sistemele S_1 şi S_2 puse separat în contact termic cu un sistem S, sunt în echilibru termic cu acesta, atunci S_1 şi S_2 sunt în echilibru termic unul cu celălalt.

Această proprietate permite împărţirea sistemelor termodinamice în clase de echivalenţă. Sistemele dintr-o clasă de echivalenţă pot fi în echilibru unele cu altele, dar nu pot fi în echilibru cu sistemele din altă clasă de echivalenţă.

Rezultă că alături de parametrii de poziţie (coordonate generalizate), este nevoie de o altă mărime pentru a caracteriza starea sistemului. Această mărime este temperatura (empirică), şi ea caracterizează sistemele din punct de vedere al echilibrului termic. Astfel două sisteme aflate la aceeaşi temperatură sunt în echilibru termic.

3.3.1 Scări de temperatură

Termometrele sunt instrumente utilizate pentru a măsura temperatura unui sistem. Ele sunt bazate pe faptul că anumite proprietăţi fizice se schimbă cu modificarea temperaturii. Astfel, când temperatura se modifică, se schimbă volumul unui lichid, dimensiunile unui solid, volumul unui gaz la presiune constantă, presiunea unui gaz la volum constant, rezistenţa electrică, culoarea unui obiect, etc.

O scară de temperatură comună este scara Celsius în care 0 °C corespunde punctului de topire al gheţii la presiune normală şi 100 °C corespunde temperaturii de fierbere a apei la presiune normală (1 atm). Cele mai utilizate termometre în domeniile obişnuite de temperatură sunt: termometrul cu mercur, care nu poate fi utilizat sub –30 °C deoarece la această temperatură mercurul îngheaţă şi termometrul cu alcool, care nu poate fi utilizat peste 85 °C deoarece la 85 °C alcoolul începe să fiarbă.

O scală de temperatură utilizată curent în SUA este scara Fahrenheit. În această scară punctul de topire al gheţii corespunde la 32 °F, iar punctul de fierbere al apei la 212 °F. Atunci relaţia care leagă cele două scări de temperatură este:

$$t\ ^\circ\mathrm{C} = \frac{5}{9}(\theta - 32)\ ^\circ\mathrm{F} \tag{3.5}$$

Unul din termometrele cele mai exacte este *termometrul cu gaz la volum constant.* În cazul acestui termometru, mărimea care variază cu temperatura este presiunea gazului. Studiul acestui tip de termometru duce la concluzia că nu pot exista temperaturi mai joase de $-273,15$ °C. Acest punct este utilizat ca punct de zero pentru scala temperaturilor absolute şi poartă numele de zero absolut. Unitatea de măsură în scara temperaturilor absolute este gradul Kelvin (K) care a fost ales să fie egal în mărime cu un grad Celsius. Notând cu $T_0 = 273,15$ K, temperatura în grade Celsius se exprimă în funcţie de temperatura absolută astfel:

$$t \ ^\circ\mathrm{C} = (T - T_0) \ \mathrm{K} \tag{3.6}$$

Deoarece punctele de topire şi fierbere ale apei sunt greu de reprodus ca puncte de referinţă, pentru noua scară s-a ales punctul triplu al apei (punct în care cele trei faze, lichidă, solidă şi gazoasă, sunt în echilibru) care se află la $T = 273,16$ K. Astfel, 1 K este definit ca 1/273,16 din diferenţa dintre temperatura punctului triplu al apei şi temperatura de zero absolut.

3.4 Principiul zero. Ecuaţia de stare

Acesta se poate enunţa astfel:

Temperatura este funcţie de starea de echilibru a sistemului. O formulare echivalentă este: *Parametrii de forţă ai sistemului sunt funcţii de parametrii de poziţie (coordonate generalizate) şi temperatură.*

Matematic principiu zero se scrie astfel:

$$A_i = A_i(a_1, a_{2,}....a_n, T) \quad i = 1, ..., n \tag{3.7}$$

Acestea sunt ecuaţiile termice de stare. Deoarece starea sistemului este determinată de parametrii de poziţie şi temperatură, atunci şi energia internă poate fi definită în funcţie de aceştia.

$$U = U(a_1, a_2, ...a_n, T) \tag{3.8}$$

Această ecuaţie poartă numele de ecuaţie calorică de stare.

Ca exemplu vom considera cazul unui fluid:

$$A = p \text{ şi } a = V \tag{3.9}$$

Atunci:

$$p = p(V, T) \text{ este ecuaţia termică de stare} \tag{3.10}$$

$$U = U(V, T) \text{ este ecuaţia calorică de stare} \tag{3.11}$$

Ecuaţiile termice şi calorice de stare se obţin fie experimental fie cu ajutorul fizicii statistice. Astfel pentru gazul ideal ecuaţia termică de stare este:

$$pV = \nu RT \tag{3.12}$$

în care ν este numărul de moli, $R = 8314$ J/mol·K este constanta universală a gazelor. Numărul de moli se poate exprima funcţie de masa gazului M sau N numărul de molecule sau atomi:

$$\nu = \frac{M}{\mu} = \frac{N}{N_A} \tag{3.13}$$

unde μ este masa molară, iar $N_A = 6,023 \times 10^{23}$ molecule/mol este numărul lui Avogadro.

Ecuaţia calorică de stare a gazului ideal este:

$$U = \nu C_{\mu V} T \tag{3.14}$$

unde $C_{\mu V}$ reprezintă căldura molară la volum constant.

Pentru gazul real ecuaţia termică de stare poartă numele de ecuaţia van der Waals:

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT \tag{3.15}$$

în care a şi b sunt constante pozitive şi care depind de gazul considerat.

Ecuaţia ia în considerare forţele de atracţie dintre moleculele gazului, astfel că presiunea gazului ideal este mai mare decât cea a gazului real. Acest lucru se realizează prin intermediul termenului $\frac{\nu^2 a}{V^2}$. În plus volumul în care se mişcă gazul real este mai mic, datorită volumului propriu al moleculelor νb.

3.5 Principiul I al termodinamicii

Principiu I al termodinamicii reprezintă legea de conservare a energiei pentru sistemele termodinamice închise. Ea leagă variaţia energiei interne a sistemului de lucrul mecanic şi căldura schimbate de acesta cu mediul extern. Formularea matematică a principiului I este;

$$\Delta U = Q - L \tag{3.16}$$

În cazul unei transformări infinitezimale:

$$dU = \delta Q - \delta L \tag{3.17}$$

Notaţiile δQ şi δL arată că δQ şi δL sunt forme diferenţiale, dar nu sunt diferenţiale totale exacte, precum variaţia energiei interne dU. Din punct de vedere fizic energia internă este o funcţie de stare, în timp ce căldura şi lucrul mecanic sunt mărimi de transformare sau proces, adică variaţia lor depinde de stările intermediare prin care trece sistemul.

În cazul unui sistem izolat $Q = L = 0$. Atunci $\Delta U = 0$ şi $U_i = U_f$. Energia internă a unui sistem izolat rămâne constantă.

În cazul unui proces ciclic $\Delta U = 0$ şi $Q = L$.

Căldura δQ poate fi exprimată în diverse moduri, care sunt legate de modul în care variază temperatura sistemului. Exprimarea lui δQ se face cu ajutorul coeficienţilor calorici. Astfel:

$$\delta Q = C dT \tag{3.18}$$

unde C poartă numele de capacitate calorică a corpului. În general capacitatea calorică a corpului depinde de modul în care este variată temperatura corpului. Se definesc capacităţi calorice la volum constant, la presiune constantă şi în alte condiţii. Dacă se consideră un mol din substanţa respectivă, capacitatea calorică C poartă numele de căldură molară şi o vom nota C_μ, astfel că:

$$\delta Q = \nu C_\mu dT \tag{3.19}$$

În acelaşi mod, se defineşte şi căldura specifică c, care reprezintă căldura necesară pentru a schimba temperatura cu 1°C a unităţii de masă.

$$\delta Q = mc dT \tag{3.20}$$

Relaţia $\Delta U = Q - L$ este adevărată cu următoarea convenţie: Q este pozitivă, dacă este primită de la mediul extern, iar L este pozitiv, dacă este efectuat de sistem asupra mediui extern.

Aplicaţie

La temperaturi foarte mici căldura molară a sării variază cu temperatura în concordanţă cu legea lui Debye este:

$$C = k\frac{T^3}{\theta^3}$$

unde $k = 1940$ J/mol·K şi $\theta = 281$ K. Care este căldura necesară pentru ca unui mol de sare să-i crească temperatura de la $T_1 = 10$ K la $T_2 = 30$ K.

Soluţie:

$$\delta Q = CdT$$

$$\begin{aligned} Q &= \int_{T_1}^{T_2} CdT = \int_{T_1}^{T_2} k\frac{T^3}{\theta^3}dT = \frac{k}{4\theta^3}\left(T_2^4 - T_1^4\right) \\ Q &= \frac{1940}{4\times 281^3}\left(30^4 - 10^4\right) = 17,487 \text{ J} \end{aligned}$$

3.6 Aplicaţii ale Principiului I

3.6.1 Coeficienţii calorici

În continuare vom considera procese reversibile. Din expresia Principilui I:

$$dU = \delta Q - \delta L$$

căldura schimbată de sistem cu mediul extern se exprimă ca:

$$\delta Q = dU + \delta L = dU + pdV \tag{3.21}$$

În cazul fluidelor sistemul poate fi descris de parametrul de poziţie V şi de temperatura T. Atunci U energia internă este funcţie de V şi T.

$$U = U(V,T)$$

Rezultă prin diferenţiere:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \tag{3.22}$$

Indicii V şi T arată că derivatele respective se fac ţinând constant volumul şi respectiv temperatura. Rezultă:

$$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV \tag{3.23}$$

Considerând $V = const.$ putem defini capacitatea calorică la volum constant:

$$C_V = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \tag{3.24}$$

Considerând $T = const.$ putem defini căldura latentă:

$$\lambda = \left(\frac{\delta Q}{dV}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p \tag{3.25}$$

Trebuie remarcat că este mai uşor de studiat sistemele în condiţii de presiune constantă. Din acest motiv se defineşte o nouă funcţie de stare numită entalpie:

$$H = U + pV \tag{3.26}$$

Se diferenţiază şi se obţine:

$$dH = \delta Q - pdV + pdV + Vdp = \delta Q + Vdp \tag{3.27}$$

Se observă că la $p = const.$

$$\delta Q = dH \tag{3.28}$$

adică variaţia entalpiei la presiune constantă, este egală cu căldura schimbată cu mediul extern.

3.6.2 Transformările gazului ideal

Trasformarea izocoră

Transformarea izocoră este transformarea în care volumul sistemului rămâne constant. Lucrul mecanic este nul, deoarece variţia de volum este nulă:

$$L = p\Delta V = 0 \tag{3.29}$$

Căldura schimbată de sistem cu mediul extern este:

$$Q = \nu C_{\mu V} \Delta T \tag{3.30}$$

Atunci din Principiul I rezultă:

$$\Delta U = \nu C_{\mu V} \Delta T \tag{3.31a}$$

Deoarece U este o mărime de stare, expresia dată de relaţia 3.31a este valabilă pentru orice fel de trasformare suferită de gazul ideal între două stări. Astfel energia internă a gazului ideal se poate exprima ca:

$$U = \nu C_{\mu V} T + const. \tag{3.32}$$

Rezultă că energia internă este definită până la o constantă arbitrară. În continuare însă, constanta o vom considera zero şi vom utiliza pentru energia internă a gazului ideal formula:

$$U = \nu C_{\mu V} T \tag{3.33}$$

Observaţie: Formula (3.33) exprimă variaţia energiei interne pentru un sistem închis. În cazul unui sistem deschis, atunci când numărul de moli şi temperatura variază de la valorile ν_1, T_1 la valorile ν_2, T_2, variaţia energiei interne se scrie ca:

$$\Delta U = \nu_2 C_{\mu V} T_2 - \nu_1 C_{\mu V} T_1 \tag{3.34}$$

Aplicaţie

Să se determine variaţia energiei interne a aerului dintr-o cameră când temperatura creşte de la valoarea $t_1 = 23\ {}^0$C la $t_2 = 30\ {}^0$C. Volumul camerei este $V_1 = 30$ m^3, iar presiunea aerului este $p_0 = 10^5$ N/m^2.

Soluţie

Camera este un sistem deschis şi atunci pentru variaţia energiei interne a aerului din aceasta, se va utiliza formula (3.34), unde indicele 1 se referă la mărimile din starea iniţială iar indicele 2 se referă la mărimile din starea finală.

Ecuaţia de stare în starea iniţială este:

$$p_0 V = \nu_1 R T_1 \tag{3.35}$$

Ecuaţia de stare în starea finală este:

$$p_0 V = \nu_2 R T_2 \tag{3.36}$$

deoarece presiunea atmosferică nu se schimbă .Ţinând cont de relaţiile (3.35) şi (3.36) rezultă:

$$\nu_1 T_1 = \nu_2 T_2$$

şi atunci:

$$\Delta U = 0$$

Transformarea izobară

Transformarea izobară este transformarea care are loc la presiune constantă. Deoarece presiunea este constantă, expresia lucrului mecanic este:

$$L = p\Delta V \tag{3.37}$$

Cantitatea de căldură schimbată de sistem cu mediul extern este:

$$Q = \nu C_{\mu p}\Delta T \tag{3.38}$$

unde $C_{\mu p}$ este căldura molară la volum constant. Variaţia energiei internă este:

$$\Delta U = \nu C_{\mu V}\Delta T \tag{3.39}$$

Înlocuind aceste relaţii în relaţia Prinicipiului I (3.16) se obţine:

$$\nu C_{\mu V}\Delta T = \nu C_{\mu p}\Delta T - p\Delta V \tag{3.40}$$

Ţinând cont de ecuaţiile de stare din starea iniţială şi finală:

$$pV_1 = \nu RT \quad ; \quad pV_2 = \nu RT_2$$

se obţine:

$$p(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1) = \nu R\Delta T$$

şi din relaţia (3.40) se obţine relaţia Robert-Mayer pentru gazul ideal:

$$C_{\mu V} = C_{\mu p} - R \tag{3.41}$$

Trasformarea izotermă

Trasformarea izotermă este transformarea care are loc la temperatură constantă. În cazul acestei transformări $\Delta T = 0$. Atunci $\Delta U = 0$ şi $Q = L$. Deoarece în cursul transformării presiunea variază în funcţie de volum, pentru calculul lucrului mecanic se va folosi formula

$$L = \int_{V_1}^{V_2} pdV \tag{3.42}$$

Din ecuaţia de stare se exprimă presiunea ca fiind $p = \nu RT/V$. Atunci lucrul mecanic efectuat de gaz este:

$$L = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} \tag{3.43}$$

Trasformarea adibatică

Transformarea adiabatică este trasformarea în care sistemul nu primeşte şi nu cedează căldură. Din primul principiu rezultă că:

$$L = -\Delta U \tag{3.44}$$

Deşi sistemul nu schimbă căldură cu exteriorul, temperatura sa se modifică astfel: la destindere sistemul efectuează lucru mecanic, energia sa internă scade şi gazul se răceşte; la comprimare sistemul primeşte lucru mecanic, energia sa internă creşte şi gazul se încălzeşte. Deoarece:

$$\Delta U = \nu C_{\mu V} \Delta T \tag{3.45}$$

$$L = -\nu C_{\mu V} \Delta T = -C_{\mu V} \left(\nu T_2 - \nu T_1\right) \tag{3.46}$$

Ţinând cont de ecuaţiile de stare în starea inţială $p_1 V_1 = \nu R T_1$ şi în starea finală $p_2 V_2 = \nu R T_2$ din relaţia(3.46) rezultă:

$$L = -\frac{C_{\mu V}}{R}(p_2 V_2 - p_1 V_1) \tag{3.47}$$

Considerând o transformare infinitezimală:

$$dL = pdV = -dU = -\nu C_{\mu V} dT$$

şi ţinând cont de ecuaţia termică de stare a gazului ideal se obţine:

$$\frac{\nu RT}{V} dV = -\nu C_{\mu V} dT$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_{\mu V}} \frac{dV}{V} \tag{3.48}$$

Notând cu $\gamma = C_{\mu p}/C_{\mu V}$ exponentul adiabatic şi utilizând relaţia lui Robert-Mayer $R = C_{\mu p} - C_{\mu V}$ ecuaţia (3.48) devine:

$$\frac{dT}{T} = -\frac{C_{\mu p} - C_{\mu V}}{C_{\mu V}} \frac{dV}{V} = -(\gamma - 1)\frac{dV}{V} \tag{3.49}$$

Atunci:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

şi:

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = -(\gamma - 1) \ln \frac{V_2}{V_1} \tag{3.50}$$

sau: $\times$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1} \tag{3.51}$$

Rezultă:

$$T_1 V_1^{\gamma - 1} = T_2 V_2^{\gamma - 2} \tag{3.52}$$

Deoarece stările considerate sunt alese arbitrar, înseamnă că în orice trasformare adiabatică se poate scrie:$\gamma\gamma$

$$TV^{\gamma - 1} = const. \tag{3.53}$$

Utilizând ecuaţia termică de stare se poate scrie ecuaţia transformări în variabile (T, p) şi (p, V). Deoarece $T = pV/vR$ din ecuaţia 3.53 se obţine:

$$pV^{\gamma} = const. \tag{3.54}$$

În coordonate T şi p ecuaţia transformării adiabate este:

$$T^{\gamma} p^{1 - \gamma} = const.$$

3.6.3 Relaţia Robert-Mayer pentru un fluid oarecare

Din expresia Principiului I, pentru care lucrul mecanic este determinat doar de forţele de presiune rezultă:

$$\delta Q = dU + pdV$$

Cum energia internă este funcţie de volum şi temperatură:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \tag{3.55}$$

Se obţine:

$$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV \tag{3.56}$$

De aici:

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_\alpha \tag{3.57}$$

şi cum capacitatea calorică a sistemului la volum constant este:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

rezultă relaţia Robert-Mayer pentru un fluid oarecare:

$$C_p - C_V = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{3.58}$$

Aplicaţie

Un mol de gaz urmează legea van der Waals:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

iar energia sa internă este:

$$U = CT - \frac{a}{V}$$

unde V este volumul molar, iar C şi a sunt constante, să se calculeze căldurile molare la volum şi presiune constantă $C_{\mu V}$ şi $C_{\mu p}$.

Soluţie:

$$C_{\mu V} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = C$$

Pentru calculul căldurii molare la presiune constantă se utilizează relaţia Rober-Mayer:

$$C_{\mu p} = C_{\mu V} + \left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = C_V + \frac{\left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right]}{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{a}{V^2}$$

$$p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} + \frac{a}{V^2} = \frac{RT}{V-b}$$

$$T = \frac{1}{R}\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = -\frac{1}{R}\frac{2a}{V^3}(V-b) + \frac{1}{R}\left(p + \frac{a}{V^2}\right)$$

Rezultă:

$$C_{\mu p} = C_{\mu V} + \frac{R}{1 - \frac{2a}{RTV}\left(1 - \frac{b}{V}\right)^2}$$

3.6.4 Definirea coeficienţilor termici

Coeficientul de dilatare izobară permite determinarea variaţiei volumului sistemului când temperatura variază şi presiunea este constantă:

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{3.59}$$

$$dV = \alpha V dT$$

Coeficientul de compresibilitate izotermă permite determinarea variaţiei volumului gazului când este supus acţiunii unei presiuni din exterior la temperatură constantă:

$$K_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \tag{3.60}$$

$$dV = -K_T V dp$$

Semnul minus apare deoarece o creştere a presiunii duce la micşorarea volumului, şi invers ($dp > 0$ implică $dV < 0$).

Coeficientul termic al presiunii permite determinarea variaţiei presiunii sistemului aflat la volum constant când variază temperatura:

$$\beta = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \tag{3.61}$$

$$dp = \beta p dT$$

Între cei trei coeficienţi există relaţia:

$$\alpha = pK_T\beta$$

Relaţia este importantă pentru determinarea coeficientului termic al presiunii al corpurilor solide sau lichide, pentru care este practic imposibil să le fie menţinut volumul constant la încălzire.

Considerând presiunea funcţie de volum şi temperatură $p = p(V, T)$:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T dV$$

Dar

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \beta p$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T} = -\frac{1}{VK_T}$$

Atunci:

$$dp = \beta p dT - \frac{1}{VK_T} dV$$

Dacă $p = const.$

$$\beta p dT - \frac{1}{VK_T} dV = 0$$

rezultă:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \beta p V K_T$$

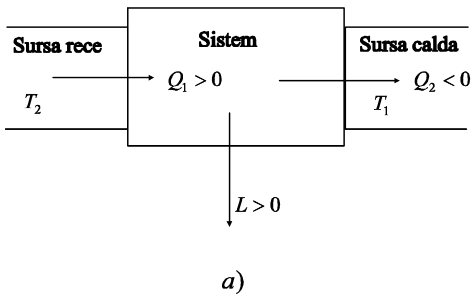
Atunci:

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = p\beta K_T \qquad (3.62)$$

3.7 Principiul al II-al termodinamicii

3.7.1 Formulări ale Principiului al II-lea

Primul principiu al termodinamicii introduce o funcţie de stare numită energie internă. Principiul I nu face o deosebire calitativă între formele schimbului de energie căldură şi lucru mecanic.



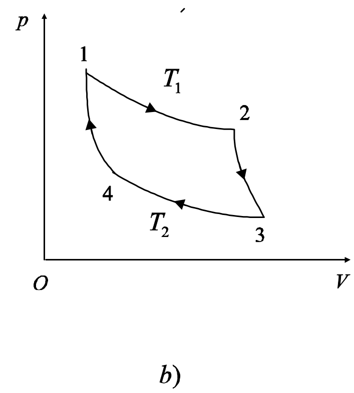


Figura 3.2: a) Maşină termică bitermă. b) Ciclul Carnot

Dacă considerăm un proces ciclic $\Delta U = 0$ rezultă că $Q = L$. Din punct de vedere practic ne interesează ca sistemul să efectueze lucru mecanic, sau mai precis să transforme o cantitate de căldură în lucru mecanic util. Problema care s-a pus a fost aceea să se transforme întreaga cantitate de căldură în lucru mecanic. Pentru aceasta procesul ciclic ar trebui să fie unul monoterm, adică sistemul să fie în contact cu o singură sursă de căldură de la care să preia căldura şi să o transforme în lucru mecanic. Carnot a ajuns la concluzia că un astfel de proces nu poate avea loc. O formulare care descrie într-un mod general acest rezultat este aceea dată de Thomson care spune că:

Într-o transformare ciclică monotermă sistemul nu poate ceda lucru mecanic în exterior. Dacă transformarea este şi reversibilă sistemul primeşte lucru mecanic din exterior.

O formulare echivalentă este cea a lui Clausius:

Este imposibil de realizat o transformare al cărui unic rezultat să fie transferul căldurii de la o sursă cu temperatură dată la o sursă cu temperatură mai mare.

3.7.2 Maşină termică bitermă

Având în vedere faptul că nu se poate crea o maşină termică monotermă, vom considera o maşină termică bitermă (Fig. 3.2a)

Considerând o transformare ciclică

$$Q - L = 0 \tag{3.63}$$

$$Q_1 + Q_2 - L = 0 \tag{3.64}$$

$$L = Q_1 + Q_2 = Q_1 - |Q_2| \tag{3.65}$$

Numim Q_1 căldura primită de la sursa caldă iar $|Q_2|$ căldura cedată sursei reci. Definim randamentul maşinii termice ca:

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} \tag{3.66}$$

3.7.3 Ciclul Carnot reversibil

Ciclul Carnot este ciclul format din două izoterme şi două adiabate. În Fig. 3.2b, este prezentat ciclul Carnot efectuat de un gaz ideal.

Căldurile schimbate cu mediul extern pe cele patru transformări sunt:

$$Q_{12} = L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT_1}{V} dV = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} > 0 \tag{3.67}$$

Deoarece Q_{12}este pozitivă, ea este o căldură primită. Pe transformarea 2 - 3:

$$Q_{23} = 0 \tag{3.68}$$

deoarece transformarea este una adiabatică.

$$Q_{34} = \nu RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} < 0 \tag{3.69}$$

Deoarece Q_{34} este negativă ea este căldura cedată.

$$Q_{41} = 0 \tag{3.70}$$

deoarece transformarea 4-1 este o transformare adiabatică. Rezultă:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{34}|}{Q_{12}} = 1 - \frac{\nu RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\nu RT_1 \ln \frac{V_1}{V_2}} \tag{3.71}$$

Ţinând cont de ecuaţiile transformărilor adiabatice 2-3 şi 4-1

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \tag{3.72}$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1} \tag{3.73}$$

rezultă:

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V2}$$

Notând $Q_1 \equiv Q_{12}$ căldura schimbată de sistem cu sursa caldă, şi $Q_2 \equiv Q_{34}$ căldura schimbată de sistem cu sursa rece, randamentul Ciclului Carnot se scrie:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \tag{3.74}$$

Trebuie remarcat că randamentul ciclului Carnot depinde doar de temperaturile izvorului cald şi a celui rece. Afirmaţia rămâne adevărată şi în cazul că se modifică substanţa de lucru. Astfel randamentul ciclului Carnot depinde numai de temperaturile surselor rece şi caldă.

Din relaţia (3.74) se obţine că:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \tag{3.75}$$

Fie un sistem care suferă o transformare ciclică reversibilă în cursul căruia sistemul schimbă cu cele n termostate de temperaturi $T_i(i = 1, ..., n)$, cantităţile de căldură $Q_i(i = 1, ..., n)$. Se poate demonstra, ca şi în cazul ciclului Carnot, că:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i} = 0 \tag{3.76}$$

Dacă se consideră acum că sistemul suferă o transformare ciclică reversibilă în cursul căreia sistemul schimbă căldură cu o infinitate de termostate a căror temperaturi variază continuu, atunci egalitatea (3.76) se scrie:

$$\oint \frac{\delta Q_{rev}}{T} = 0 \tag{3.77}$$

Semnul $\oint$ arată că avem de-a face cu o integrală pe o curbă închisă; indicele rev arată că parcursul este unul reversibil. Egalitatea (3.77) arată că din punct de vedere matematic mărimea $\frac{\delta Q}{T}$ este o diferenţială totală exactă. Astfel putem da o formă cantitativă Principiului al II-lea al termodinamicii.

Există o funcţie de stare S numită entropie, a cărei variaţie dS, într-un proces reversibil în care sistemul schimbă căldura δQ cu un termostat aflat la temperatura T, este:

$$dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T} \tag{3.78}$$

Spunem că $\frac{1}{T}$ este factor integrant pentru forma diferenţială δQ. Formele diferenţiale care admit factori integranţi poartă numele de *forme diferenţiale olonome*.

De aici rezultă diferenţa matematică între lucrul mecanic şi căldură. Forma diferenţială δL care exprimă lucrul mecanic elementar nu este o formă diferenţială olonomă.

Egalitatea (3.77) poartă numele de egalitatea lui Clausius.

Ţinând cont că $\delta Q = TdS$ şi $\delta L = \sum A_i da_i$, relaţia (3.17) care reprezintă forma diferenţială a Principiului I se scrie:

$$dU = TdS - \sum A_i da_i \tag{3.79}$$

Această relaţie este ecuaţia fundamentală pentru procesele reversibile.

În cazul proceselor adiabatice reversibile $\delta Q = 0$. Atunci $dS = 0$ şi $S = const$.

O altă caracteristică a entropiei este aceea că este o mărime extensivă. Entropia a două sisteme este egală cu suma entropiilor sistemelor luate separat.

3.7.4 Variaţia entropiei în procese ireversibile

Pentru a vedea modul în care această mărime variază, vom considera cazul unui proces ireversibil în care schimbul de căldură cu mediul exterior este nul.

Pentru aceasta vom considera destinderea adiabatică în vid (Fig. 3.3).

Gazul ideal se află în volumul V_1 la temperatura T. Volumul V_2 este vidat, iar învelişul izolează adiabatic cele două compartimente. Se deschide robinetul şi gazul pătrunde în compartimentul de volum V_2. În acest proces ireversibil $Q = 0$. În plus, $L = 0$, deoarece trecerea gazului în cel de-al doilea compartiment se face datorită agitaţiei termice. Atunci $\Delta U = 0$. Cum $U = \nu C_{\mu V} T$, este energia internă a gazului ideal, rezultă $\Delta T = 0$.

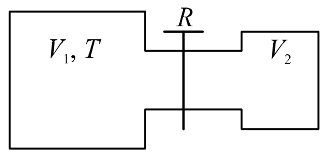


Figura 3.3: Destinderea adiabatică în vid

Deoarece entropia este funcţie de stare, nu are importanţă modul în care se ajunge la starea finală. Din acest motiv considerăm o transformare izotermă de la volumul V_1 la volumul $V_1 + V_2$. Căldura schimbată de sistem cu mediul este:

$$Q = L = \nu RT \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} \tag{3.80}$$

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \nu R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} > 0 \tag{3.81}$$

Rezultă că variaţia entropiei este pozitivă. Astfel într-o transformare ireversibilă *entropia sistemului creşte* (în lipsa schimbului de căldură).

Din exemplul anterior, putem lega entropia de dezordinea în sistem. Astfel în starea iniţială când volumul ocupat de gaz este mic, dezordinea în sistem este mai mică decât în starea finală, când volumul ocupat de gaz este mai mare.

Astfel, pentru un proces infinitezimal ireversibil în care sistemul nu schimbă căldură cu mediul extern:

$$dS = d_i S > 0 \tag{3.82}$$

unde cu indicele i am pus în evidenţă caracterul ireversibil al procesului.

Deoarece pentru un sistem izolat variaţia entropiei nu poate fi decât pozitivă, atunci starea de echilibru a unui astfel de sistem se obţine când entropia are valoare maximă.

Dacă sistemul nu este izolat variaţia de entropie este datorată şi schimbului de căldură cu mediul extern:

$$d_e S = \frac{\delta Q}{T} \tag{3.83}$$

unde T este temperatura mediului sau a termostatului cu care sistemul este în contact. Astfel, variaţie totală de entropie este:

$$dS = d_i S + d_e S = d_i S + \frac{\delta Q}{T} \tag{3.84}$$

Cum $d_iS > 0$

$$dS > \frac{dQ}{T} \tag{3.85}$$

Considerând un proces ciclic ireversibil:

$$\oint dS > \oint \frac{dQ}{T} \tag{3.86}$$

Deoarece $\oint dS = 0$, rezultă că pentru procese ireversibile:

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0 \tag{3.87}$$

Relaţia (3.87) poartă numele de inegalitatea lui Clausius.

Aplicaţie

Presupunem că $m_1 = 1$ kg de apă la $t_1 = 0$ °C este amestecat cu o masă de $m_2 = 3$ kg de apă cu $t_2 = 100$ °C. Să se calculeze variaţia de entropie a sistemului. Căldura specifică a apei este $c = 4185$ J/kg·K.

Soluţie:

Din ecuaţia calorimetrică (cantitatea de căldură cedată de un corp este egală cu cantitatea de căldură primită de celălalt corp)

$$m_1c\,(t_e - t_1) = m_2c\,(t_2 - t_e)$$

rezultă temperatura de echilibru:

$$t_e = \frac{m_1t_1 + m_2t_2}{m_1 + m_2} = \frac{3 \times 100}{4} = 75 \text{ °C}$$

Deoarece entropia este o mărime de stare presupunem că cele două mase de apă suferă transformări reversibile astfel că:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_e} \frac{m_1cdT}{T} + \int_{T_2}^{T_e} \frac{m_2cdT}{T} = m_1c\ln\frac{T_e}{T_1} + m_2c\ln\frac{T_e}{T_2} = 144,68 \text{ J/K}$$

3.7.5 Legătura dintre ecuaţia calorică de stare şi ecuaţia termică de stare

Considerând un proces reversibil, variaţia energiei interne a sistemului este:

$$dU = \delta Q - pdV = TdS - pdV \tag{3.88}$$

rezultă:
$$dS = \frac{dU + pdV}{T} \tag{3.89}$$

Deoarece:
$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

rezultă:
$$dS = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \frac{p}{T}\right] dV \tag{3.90}$$

Atunci:
$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \tag{3.91}$$
$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \frac{p}{T} \tag{3.92}$$

Deoarece pentru funcţii continue şi de două ori derivabile, derivatele de ordin doi comută (teorema Schwartz-Clairaut), se poate scrie:

$$\frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V\right]_T = \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \frac{p}{T}\right]_V \tag{3.93}$$
$$\frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} = -\frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - \frac{p}{T^2}$$
$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \tag{3.94}$$

O astfel de relaţie permite calculul energiei interne a unui sistem dacă se cunoaşte ecuaţia termică de stare. Ca exemplu vom considera cazul gazului real a cărui ecuaţie de stare este cea dată de relaţia van der Waals:

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT \tag{3.95}$$

Din ecuaţia (3.95) presiunea este:

$$p = \frac{\nu RT}{V + \nu b} - \frac{\nu^2 a}{V^2} \tag{3.96}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_T = \frac{\nu R}{V + \nu b} \tag{3.97}$$

Astfel ţinând cont de relaţiile (3.94), (3.96) şi (3.97) se obţine:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p = \frac{\nu^2 a}{V^2} \tag{3.98}$$

Atunci

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = \nu C_{\mu V} dT + \frac{\nu^2 a}{V^2} dV \tag{3.99}$$

Considerînd căldura molară la volum constantă independentă de temperatură prin integrarea relaţiei (3.99) se obţine:

$$U = U_0 + \nu C_{\mu V} T - \frac{\nu^2 a}{V} \tag{3.100}$$

Relaţia (3.100) arată că energia internă a gazului real este definită doar până la o constantă aditivă.

3.8 Funcţii caracteristice

O modalitate de a studia un sistem termodinamic este aceea prin care se introduc anumite funcţii de stare, numite funcţii caracteristice sau potenţiale termodinamice. O funcţie caracteristică este o funcţie de stare din cunoaşterea căreia se pot determina toate proprietăţile sistemului.

3.8.1 Energia internă

Ecuaţia fundamentală a termodinamicii:

$$dU = TdS - pdV \tag{3.101}$$

leagă cinci mărimi: p, V, T, U, S. Starea sistemului pentru un fluid este determinată de doi parametri, V şi T. Rezultă că ecuaţia fundamentală conţine încă trei mărimi necunoscute. Pentru determinarea acestora mai este nevoie de încă două ecuaţii, şi anume:

- ecuaţia termică de stare $p = p(V, T)$;
- ecuaţia calorică de stare $U = U(V, T)$.

Trebuie să remarcăm că dacă alegem pentru energia internă variabilele independente S şi V este nevoie doar de o singură ecuaţie $U = U(S, V)$ pentru a descrie sistemul. Astfel:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S dV \tag{3.102}$$

Din relaţiile (3.101) şi (3.102) rezultă:.

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V \text{ şi } p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S \tag{3.103}$$

În plus dacă se calculează derivata a doua se obţine capacitatea calorică şi coeficientul de compresibilitate adiabatică:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\right)_V = \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V = \frac{1}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V} = \frac{T}{T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V} = \frac{T}{C_V} \tag{3.104}$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial V^2}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S = -\frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S} = -\frac{1}{V}\frac{T}{\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S} = \frac{1}{Vk_S} \tag{3.105}$$

unde $K_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S$ este coeficientul de compresibilitate adiabatică.

Astfel, din cunoaşterea energiei interne a sistemului în funcţie de entropie şi volum se pot determina ceilalţi parametri, precum şi diverşi coeficienţi calorici şi termici. Totuşi, o astfel de dependenţă este una greu de obţinut. Din acest motiv nu se lucrează cu energia internă ca funcţie caracteristică.

3.8.2 Energia liberă

Energia liberă se defineşte ca:

$$F = U - TS \tag{3.106}$$

$$dF = dU - TdS - SdT = TdS - pdV - TdS - SdT \tag{3.107}$$

$$dF = -pdV - SdT \tag{3.108}$$

Această relaţie sugerează faptul că energia liberă este o funcţie caracteristică în V şi T:

$$F = F(V, T) \tag{3.109}$$

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T dT + \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V dV \tag{3.110}$$

Rezultă că din cunoaşterea energiei libere se obţine presiunea şi entropia:

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \text{ şi } S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \tag{3.111}$$

Ca şi în cazul energiei interne, efectuând derivatele de ordin doi se pot calcula capacitatea calorică la volum constant şi coeficientul de compresibilitate izotermă:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_V = -\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$$

Astfel putem exprima capacitatea calorică la volum constant:

$$C_V = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = -T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_V$$

O altă derivată este:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\right)_T = -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$$

Atunci coeficientul de compresibilitate izoterm se exprimă ca:

$$k_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{1}{V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T} = \frac{1}{V}\frac{1}{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\right)_T}$$

În cazul că $T = const.$ (proces izoterm ireversibil) lucrul mecanic efectuat de sistem este egal cu minus variaţia energiei libere.

$$dF = -pdV = -\delta L \tag{3.112}$$

Aceasta înseamnă că atunci când sistemul efectuează un lucru mecanic energia liberă scade. Să considerăm un proces ireversibil izoterm:

$$\frac{\delta Q}{T} \leq dS \tag{3.113}$$

$$\frac{Q}{T} \leq S_f - S_i \tag{3.114}$$

$$Q \leq TS_f - TS_i \tag{3.115}$$

$$\Delta U + L \leq TS_f - TS_i \tag{3.116}$$

$$L \leq -\Delta U + T\Delta S = -\Delta U + \Delta(TS) = -\Delta(U + TS) \tag{3.117}$$

$$L \leq -\Delta F \tag{3.118}$$

Lucrul mecanic maxim pe care îl efectuează un sistem termodinamic aflat în contact cu un termostat este egal cu minus variaţia energiei libere. Acesta este motivul pentru care funcţia poartă denumirea de energie liberă. Variaţia ei este legată de lucrul mecanic care poate fi efectuat, sau mai precis de cantitatea de energie termică din sistem care poate fi transformată în energie mecanică (cât din energia dezordonată se poate transforma în energie ordonată).

3.8.3 Condiţia de echilibru pentru un sistem cu volum constant aflat în contact cu un termostat.

În cazul unui sistem izolat $dS \geq 0$. Aceasta înseamnă că entropia unui sistem izolat când în interiorul lui au loc procese ireversibile creşte. Rezultă că atunci când se atinge echilibrul entropia va avea valoarea maximă. Să considerăm cazul unui sistem aflat la $T = ct.$ şi $V = ct.$

$$F = U - TS \tag{3.119}$$

$$U = F + TS \tag{3.120}$$

$$dU = dF + TdS + SdT \tag{3.121}$$

$$dQ = dF + TdS + SdT - pdV \tag{3.122}$$

Dar:

$$dQ \leq TdS \tag{3.123}$$

$$TdS \geq dF + TdS + SdT - pdV \tag{3.124}$$

$$dF \leq -SdT - pdV \tag{3.125}$$

Se observă că atunci când $T = const.$ şi $V = const.$

$$dF \leq 0 \tag{3.126}$$

Aceasta înseamnă, că un sistem aflat la temperatură constantă şi volum constant ajunge la echilibru termodinamic când valoarea energiei sale libere devine minimă.

3.8.4 Entalpia

Entalpia se defineşte ca:

$$H = U + pV \tag{3.127}$$

$$dH = TdS - pdV + Vdp + pdV == TdS + Vdp \tag{3.128}$$

Cum $H = H(S, p)$ atunci:

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p dS + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S dp \tag{3.129}$$

Rezultă:

$$T = -\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p \text{ şi } V = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S \tag{3.130}$$

3.8.5 Entalpia liberă (potenţialul Gibbs)

În multe transformări termodinamice presiunea şi temperatura sistemului nu variază şi rămân egale cu presiunea şi temperatura mediului ambiant. Să considerăm o transformare la temperatură constantă şi presiunea constantă. Atunci:

$$L = p\,[V_f - V_i]$$

Deoarece transformarea se efectuează la temperatură constantă:

$$L \leqslant F_i - F_f$$

Astfel:

$$pV_f - pV_i \leqslant F_i - F_f$$

$$F_f + pV_f \leqslant F_i + pV_i$$

Definim o nouă funcţie de stare pe care o notăm cu:

$$G = F + pV = U - pV - TS \tag{3.131}$$

şi care poartă numele de *entalpie liberă* sau *potenţialul Gibbs*. Atunci:

$$G_f \leqslant G_i$$

a

Rezultă că într-o transformare efectuată la temperatură constantă şi presiune constantă potenţialul Gibbs nu poate să crească. Prin urmare, dacă presiunea şi temperatura unui sistem termodinamic sunt menţinute constante, starea sistemului în care entalpia liberă este minimă, este o stare de echilibru.

Diferenţiem relaţia (3.131) şi se obţine:

$$dG = TdS - pdV + pdV + Vdp - TdS - SdT \tag{3.132}$$

$$dG = Vdp - SdT \tag{3.133}$$

Deoarece $G = G(p, T)$:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p dT \tag{3.134}$$

rezultă:

$$V = -\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T \text{ şi } S = -\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_p \tag{3.135}$$

3.8.6 Entropia

Din egalitatea fundamentală a termodinamicii:

$$dU = TdS - pdV \tag{3.136}$$

$$dS = \frac{dU + pdV}{T} \tag{3.137}$$

Rezultă că entropie S poate fi considerată o funcţie caracteristică în U şi V adică $S = S(U, V)$. Astfel:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V \text{ şi } \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{p}{T} \tag{3.138}$$

3.9 Sisteme deschise

Considerăm că sistemul este deschis. În acest caz, entropia se va exprima ca fiind funcţie de energia internă, volumul şi masa sistemului:

$$S = S(U, V, M) \tag{3.139}$$

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right) dU + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right) dV + \left(\frac{\partial S}{\partial M}\right) dM \tag{3.140}$$

Semnificaţia primelor două derivate este dată de relaţiile (3.138):

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}; \qquad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{p}{T} \tag{3.141}$$

iar:

$$\frac{\partial S}{\partial M} = -\frac{\mu}{T} \tag{3.142}$$

unde μ poartă numele de *potenţial chimic*. Astfel:

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV - \frac{\mu}{T}dM \tag{3.143}$$

$$dU = TdS - pdV + \mu dM \tag{3.144}$$

În cazul când $S = const.$ şi $V = const.$

$$dU = \mu dM \tag{3.145}$$

Rezultă că în cazul sistemelor deschise când sistemul schimbă masă cu mediul extern, μ reprezintă energia raportată la unitatea de masă pe care sistemul o schimbă cu sistemul extern în condiţii de entropie şi volum constante.

Trebuie remarcat faptul că relaţia $S = S(U, V, M)$ conţine numai mărimi extensive. Împărţim sistemul în n părţi egale:

$$U \to U/n, V \to V/n,\ M \to M/n,\ S \to S/n$$

şi apoi le unim într-un sistem ce conţine m părţi. Atunci:

$$U \to mU/n, V \to mV/n,\ M \to mM/n,\ S \to mS/n.$$

Astfel:

$$\frac{m}{n}S = S\left(\frac{m}{n}U,\ \frac{m}{n}V,\ \frac{m}{n}M\right)$$

Notând cu $k = m/n$ se obţine:

$$S(kU,\ kV,\ kM) = kS(U,\ V,\ M)$$

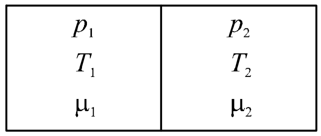


Figura 3.4: Două sisteme termodinamice izolate de exterior care pot schimba între ele masă.

Derivăm această relaţie în raport cu k:

$$\frac{\partial S}{\partial(kU)}U + \frac{\partial S}{\partial(kV)}V + \frac{\partial S}{\partial(kM)}M = S(U,V,M) \tag{3.146}$$

Facem $k \to 1$. Rezultă:

$$S = \frac{\partial S}{\partial U}U + \frac{\partial S}{\partial V}V + \frac{\partial S}{\partial M}M \tag{3.147}$$

$$S = \frac{1}{T}U + \frac{p}{T}V - \frac{\mu}{T}M \tag{3.148}$$

Atunci:

$$\mu = \frac{U + pV - ST}{M} = \frac{G}{M} = g(p,T) \tag{3.149}$$

Rezultă că pentru o substanţă pură, potenţialul chimic este egal cu entalpia liberă a unităţii de masă.

3.10 Echilibrul de fază

Până în momentul de faţă discuţia s-a axat asupra unor sisteme omogene, adică asupra unor sisteme în care proprietăţile sunt aceleaşi în diverse puncte ale sistemului. În continuare ne vom referi la sisteme eterogene. Aceste sisteme sunt formate din două sau mai multe sisteme omogene sau faze. Prin *fază* înţelegem orice parte fizic distinctă, separată de celelalte părţi ale sistemului de o suprafaţă bine definită pe care diverse mărimi suferă discontinuităţi. Un sistem format din două faze poartă numele de sistem bifazic. Ca exemplu de sisteme bifazice se pot menţiona: sistemul apă - vapori de apă: Să considerăm două faze care pot schimba masă între ele (Fig. 3.4). Pentru întregul sistem izolat de exterior:

$$U = U_1 + U_2; \quad V = V_1 + V_2; \quad M = M_1 + M_2 \tag{3.150}$$

Deoarece sistemul total este izolat de exterior, energia internă U, volumul V şi masa M sunt constante. Rezultă:

$$dU_1 = -dU_2,\ dV_1 = -dV_2,\ dM_1 = -dM_2 \tag{3.151}$$

Entropia sistemulul este suma entropiilor celor două subsisteme:

$$S = S_1 + S_2 \quad ; \qquad dS = dS_1 + dS_2 \tag{3.152}$$

$$dS = \left(\frac{dU_1}{T_1} + \frac{p_1}{T_1}dV_1 - \frac{\mu_1}{T_1}dM_1\right) + \left(\frac{dU_2}{T_2} + \frac{p_2}{T_2}dV_2 - \frac{\mu_2}{T_2}dM_2\right) \tag{3.153}$$

Când sistemul este în echilibru, entropia atinge un maxim şi $dS = 0$. Ţinând cont de (3.151) se obţine:

$$dS = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) dU_1 + \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right) dV_1 - \left(\frac{\mu_1}{T_1} - \frac{\mu_2}{T_2}\right) dM_1 = 0 \tag{3.154}$$

De aici:

$$\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = 0;\ T_1 = T_2 \tag{3.155}$$

Aceasta este condiţia de echilibru termic.

$$\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} = 0; \quad p_1 = p_2 \tag{3.156}$$

Aceasta este condiţia de echilibru mecanic.

$$\frac{\mu_1}{T_1} - \frac{\mu_2}{T_2} = 0; \quad \mu_1 = \mu_2 \tag{3.157}$$

Relaţia (3.157) reprezintă condiţia de echilibru chimic.

Deoarece pentru o substanţă pură potenţialul chimic este egal cu entalpia unităţii de masă rezultă:

$$g_1(p, T) = g_2(p, T) \tag{3.158}$$

Egalitatea (3.158) este o curbă a cărei proiecţie în planul (p, T) reprezintă curba de echilibru a fazelor.

3.11 Tranziţii de fază

Trecerea dintr-o fază în alta poartă numele de *tranziţie de fază*. De exemplu, în cazul substanţelor pure prin tranziţii de fază putem menţiona topirea, vaporizarea şi sublimarea.

Noţiunea de stare de agregare nu coincide întotdeauna cu cea de fază. Astfel numeroase corpuri se găsesc sub diverse forme cristaline care corespund aceloraşi stări de agregare. Fenomenul este cunoscut sub numele de *polimorfism*. Un exemplu extrem de cunoscut este fierul care la temperatura $T_1 = 1183$ K trece din structura cristalină cubică cu volum centrat în structura cubică cu feţe centrate, iar la $T_2 = 1663$ K trece din nou în structura cubică cu volum centrat.

Trecerea de la o fază la alta se caracterizează printr-o discontinuitate a entropiei. Aceasta determină existenţa unei călduri latente. Aceste transformări poartă numele de *tranziţii de fază de speţa I*.

În afara acestui tip de tranziţie există şi un alt tip de tranziţie de fază care are loc fără căldură latentă. Ea poartă numele de *tranziţie de fază de speţa a II-a*.

Ca exemplu de tranziţii de speţa I, amintim schimbările stărilor de agregare (topire-solidificare, vaporizare-condensare, sublimare-desublimare). Astfel de tranziţii au loc la temperatură constantă iar căldura schimbată cu mediul este de forma:

$$Q = \lambda m \tag{3.159}$$

unde λ este căldura latentă specifică. În cazul topirii, sublimării şi vaporizării sistemul primeşte căldură, în timp ce în cazul desublimării, solidificării şi lichefierii sistemul cedează căldură.

3.11.1 Izotermele lui Andrews

Izotermele Andrews reprezintă izotermele gazului real. Pentru obţinerea lor se consideră un gaz real care se comprimă la temperatură constantă. Vom considera ca substanţă de lucru bioxidul de carbon. La temperaturi scăzute (mai mici de 31,1 °C), presiuni scăzute şi volume mari comprimare izotermă urmează aproximativ legea Boyle-Mariote. Creşterea presiunii prin micşorarea volumului se face până la o anumită valoare, de la care micşorarea volumului în continuare nu mai duce la creşterea presiunii în sistem. Se constată începerea lichefierii gazului. Presiunea rămâne constantă până

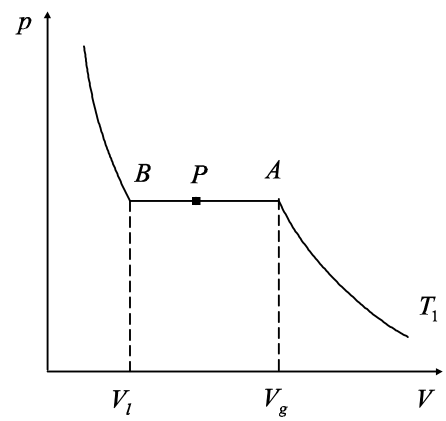


Figura 3.5: Izotermă Andrews

se lichefiază tot gazul. Când aceasta s-a petrecut, pentru micşorarea în continuare a volumului sistemului sunt necesare presiuni foarte mari. Într-un punct P de pe palierul AB al izotermei I (Fig.3.5) starea sistemului constă în existenţa a două faze, una gazoasă şi una lichidă aflate în echilibru.

Aceasta deoarece fixând volumul sistemului la valoarea V_1 la temperatura T_1 masa în stare de lichid şi gaz nu mai variază în timp. Echilibrul care se realizează este un echilibru dinamic, în sensul că numărul de molecule de lichid ce trec din lichid în stare de gaz în unitatea de timp este egal cu numărul de molecule ce trec din stare de gaz în stare de lichid în unitatea de timp. Gazul aflat în echilibrul cu lichidul din care provine reprezintă *vaporii saturaţi* iar presiunea sa este presiunea vaporilor saturaţi. Presiunea vaporilor saturaţi este presiunea maximă a vaporilor care pot exista la o anumită temperatură. Porţiunea orizontală AB descrie o transformare de fază.

Prin creşterea temperaturii, lungimea palierelor izotermelor se reduce până când ajunge la un punct. Acest punct se numeşte *punct critic.* În acest punct are loc lichefierea întregii cantităţi de substanţă. Parametrii sistemului în punctul critic se numesc *parametrii critici* (temperatură critică, presiune critică şi volum critic). Temperatura critică şi presiunea critică sunt parametrii ce depind doar de substanţa considerată. Volumul critic depinde şi de masa sistemului. Pentru CO_2 temperatura critică este de $t_c = 31,1\,^\circ\mathrm{C}$ şi presiunea critică este $7,38$ MPa. În punctul critic dispare orice deosebire dintre lichid şi vapori. Pe izotermele cu temperaturi mari $t > 31,1\,^\circ\mathrm{C}$ nu mai apare fenomenul de lichefiere al lichidului.

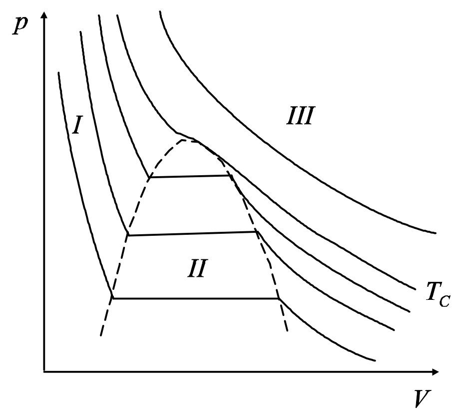


Figura 3.6: Familie de izoterme Andrews

Trasând o mulţime de izoterme în coordonate $p - V$ se pot distinge trei regiuni (Fig3.6):

I - în care substanţa este sub formă de lichid;

II - în care starea lichidă este în echilibru cu vapori saturanţi;

III - în care substanţa este în stare de gaz.

În a treia regiune când $T < T_C$ gazul poate fi lichefiat şi el poartă denumirea de vapori. Când $T > T_C$, gazul nu mai poate fi lichefiat. Atunci prin gaz vom înţelege acea stare a substanţei care nu se poate lichefia, temperatura ei fiind peste temperatura critică.

În timpul lichefierii gazului sistemul cedează în exterior o cantitate de căldură numită căldură latentă de vaporizare. Acestă căldură raportată la unitatea de masă, reprezintă căldura latentă specifică.

3.11.2 Vaporizarea

Este procesul de trecere a unei substanţe din starea lichidă în starea gazoasă. Ea depinde de condiţiile în care se află lichidul.

Vaporizarea în vid (în volum limitat)

Experimental, s-a constatat că vaporizarea în vid prezintă următoarele caracteristici:

- este instantanee

- ea încetează când presiunea vaporilor atinge o valoare maximă care este egală cu presiunea vaporilor saturanţi la temperatura la care are loc vaporizarea. Când la o anumită temperatură presiunea vaporilor este mai mică decât presiunea maximă (a vaporilor saturanţi) se spune că aceşti vapori sunt nesaturaţi. Referitor la vaporii saturaţi presiunea acestora are următoarele proprietăţi:

- nu depinde nici de masa fazei lichide nici de masa fazei gazoase;
- la o temperatură dată depinde doar de substanţa din care au provenit;
- este presiunea maximă a vaporilor unui lichid la o temperatură dată;
- creşte cu creşterea temperaturii (presiunea la care se obţin palierele de pe izotermele lui Andrews creşte cu creşterea temperaturii).

Vaporizarea în atmosfera gazoasă (în volum limitat)

- este lentă şi are loc până ce presiunea parţială a vaporilor ajunge la presiunea parţială a vaporilor saturanţi;

-presiunea vaporilor saturanţi nu depinde de presiunea atmosferei în care are loc vaporizarea.

Evaporarea

Este vaporizarea unui lichid prin suprafaţa sa liberă într-o atmosferă nelimitată. Vaporizarea lichidului prin suprafaţa sa face ca imediat deasupra lichidului să se găsească vapori amestecaţi cu aer. Aceasta nu înseamnă că presiunea totală creşte în spaţiul de deasupra lichidului, ci se micşorează presiunea parţială a aerului. Vaporii migrează în sus astfel că nu se va ajunge la o valoare a presiunii parţiale a vaporilor deasupra lichidului egală cu presiunea vaporilor saturanţi. Astfel procesul de evaporare va continua până când tot lichidul se va transforma în vapori. Pentru a avea loc evaporarea este necesar ca presiunea atmosferică să depăşească valoarea presiunii vaporilor saturaţi. În caz contrar, va avea loc o fierbere forţată. În plus este necesar ca atmosfera să nu fie saturată cu vaporii substanţei respective. Viteza de evaporare reprezintă masa de lichid care se evaporă în unitatea de timp:

$$v = k\frac{(p_m - p)}{p_0}S$$

unde p_m este presiunea vaporilor saturanţi la temperatura la care are loc evaporarea, p este presiunea atmosferică, S suprafaţa lichidului iar k un

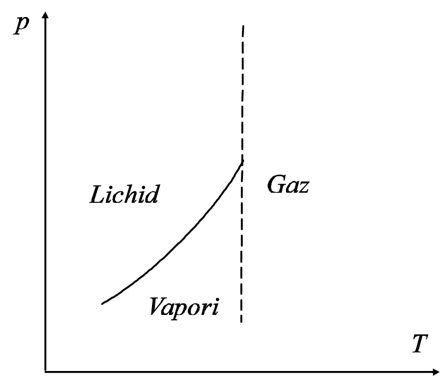


Figura 3.7: Echilibru lichid-gaz

factorul de proporţionalitate de ce depinde de viteză relativă a aerului de deasupra lichidului.

Fierberea

Fierberea reprezintă vaporizarea în toată masa lichidului. Legile fierberii sunt:

1. La o presiune dată deasupra lichidului, fierberea are loc la o temperatură mereu aceiaşi, pentru fiecare lichid, numită temperatură de fierbere.

2. La temperatura de fierbere presiunea vaporilor saturanţi este egală cu presiunea ce se exercită deasupra lichidului.

3.11.3 Diagrame de echilibru

Diagrama de echilibru lichid-vapori (vaporizare si condensare)

Graficul presiunii corespunzătoare echilibrului lichid-vapori în funcţie de temperatură este prezentat în Fig.3.7. El se obţine reprezentând presiunea palierelor izotermelor lui Andrews în funcţie de temperatură.

Acest grafic poate fi interpretat ca dependenţa presiunii vaporilor în funcţie de temperatură. Mai mult, o astfel de dependenţă o putem privi ţinând cont de legea a doua a fierberii, ca fiind dependenţa temperaturii de fierbere de presiune (fierberea are loc când presiunea vaporilor saturaţi este egală cu presiunea vaporilor de deasupra lichidului).

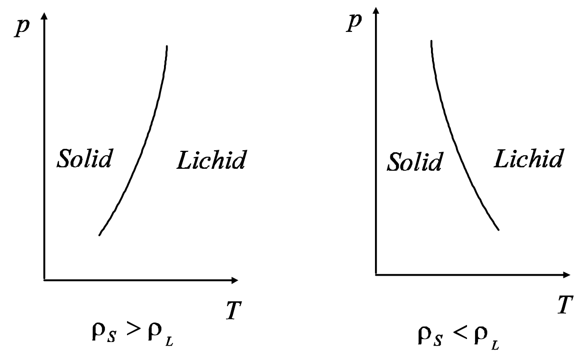


Figura 3.8: Curbe de echilibru solid -lichid

Echilibrul solid lichid (topirea şi solidificarea)

Topirea reprezintă trecerea unui corp din faza solidă în cea lichidă, iar solidificarea procesul invers.

În cazul topirii corpurilor amorfe (care nu au o structură cristalină), nu se poate preciza o temperatură de topire ci numai un anumit interval de temperatură pe care are loc trecerea treptată a corpului din starea lichidă în cea solidă.

Topirea corpurilor solide cu structură cristalină se deosebeşte de topirea corpurilor amorfe. În acest caz:

1 - La o presiune dată topirea are loc întotdeauna la aceiaşi temperatură pentru un corp în stare pură.

2 - Temperatura rămâne constantă în tot timpul topirii. Odată cu topirea are loc şi o variaţie a volumului corpului. În general prin topire volumul corpului creşte, astfel încât pentru o astfel de substanţă creşterea presiunii externe duce la o întârziere a topirii şi duce la creşterea temperaturii de topire. Pentru substanţele al căror volum se micşorează la topire, mărirea presiunii este favorabilă procesului de topire şi temperatura de topire scade (Fig.3.8).

În timpul topirii unui corp trebuie să i se furnizeze căldură din exterior, numită căldură latentă de topire. Procesele de topire şi solidificare fiind reversibile temperatura de solidificare este aceiaşi cu temperatura de topire, iar căldurile latente specifice sunt egale.

Variaţia energiei interne a unui corp prin topire este:

$$\triangle U = Q - L = m\lambda_t - p\left(V_{lichid} - V_{solid}\right) \tag{3.160}$$

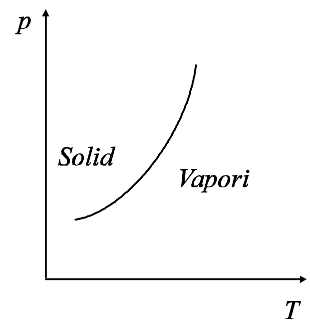


Figura 3.9: Echilibrul solid- gaz.

unde λ_t este căldura latentă specifică.

Echilibrul solig - gaz (sublimarea şi desublimarea)

Trecerea unei substanţe direct din faza solidă în cea gazoasă se numeşte *sublimare* iar procesul invers *desublimare*. Exemplu de substanţe care sublimează sunt iodul, naftalina, apa.

Vaporii aflaţi în echilibru cu faza solidă se numesc tot vapori saturanţi iar presiunea lor se numeşte presiune de vapori saturanţi. Ca şi în cazul celorlalte transformări de fază, se poate trasa o curbă de echilibru solid-vapori. Ea poate fi interpretată ca fiind modul în care variază presiunea vaporilor saturaţi proveniţi direct din stare solidă cu temperatura (Fig.3.9).

Punctul triplu

Punctul triplu este punctul de intersecţie al curbelor de echilibru vapori-solid, solid-lichid, lichid-vapori al unei substanţe. În acest punct cele trei faze: solidă, lichidă şi gazoasă, sunt în echilibru. Punctul triplu al unei substanţe e caracterizat de o anumită temperatură şi presiune. Astfel în cazul apei temperatura punctului triplu este de $t_t = 0,01\ ^\circ\mathrm{C}$ şi $p_t = 4,6$ torr. 1 torr este presiunea care este creată de o coloană de mercur cu înălţimea de 1 mm şi este egală cu 133,3 Pa. 1 atm (atmosferă) este presiunea creată de o coloană de mercur cu înălţimea de 760 mm, adică o atmosferă este egală cu 760 torr sau $1,013 \times 10^5$ Pa. Deoarece abaterile mici de la valorile presiunii şi temperaturii punctul triplu conduc la dispariţia uneia din faze, punctul triplu al apei este ales ca reper fix al scării temperaturii absolute. Pentru apă curbele de echilibru şi punctul triplu sunt arătate în Fig.3.10.

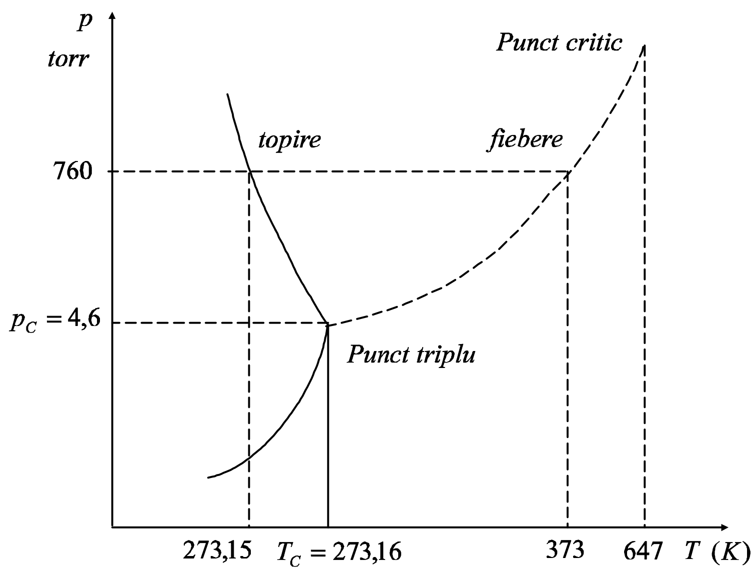


Figura 3.10: Punctul triplu pentru apă.

3.11.4 Ecuaţia Clausius-Clapeyron

Să considerăm două faze şi să exprimăm condiţia de echilibru chimic dintre acestea:

$$g_1(p,T) = g_2(p,T) \tag{3.161}$$

Se derivează egalitatea în raport cu temperatura şi se ţine cont că presiunea nu este o variabilă independentă ci depinde şi ea de temperatură. Atunci:

$$\left(\frac{\partial g_1}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial g_1}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dT} = \left(\frac{\partial g_2}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial g_2}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dT} \tag{3.162}$$

Notând cu

$$\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_p = -s \tag{3.163}$$

entropia unităţii de masă şi

$$\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)_T = v \tag{3.164}$$

volumul unităţii de masă, rezultă:

$$-s_1 + v_1\frac{dp}{dT} = -s_2 + v_2\frac{dp}{dT} \tag{3.165}$$

Atunci:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1} \tag{3.166}$$

Variaţia de entropie se calculează considerând egalitatea fundamentală a termodinamicii şi faptul că transformarea de fază are loc la temperatură constantă:

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{\delta q}{T} = \frac{\lambda_{1\to 2}}{T} \tag{3.167}$$

unde $\lambda_{1\to 2}$ este căldura latentă specifică necesară ca substanţa să treacă din starea 1 în starea 2. Rezultă;

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T}\frac{\lambda_{12}}{v_2 - v_1} \tag{3.168}$$

Aplicaţie: Variaţia presiunii vaporilor saturanţi cu temperatura.

Considerăm că faza 1 reprezintă apa în stare lichidă iar faza 2 corespunde stării de vapori. Se ţine cont că $v_2 \gg v_1$ (volumul specific al apei în stare de vapori este mai mare decât cel în stare lichidă). Atunci:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T}\frac{\lambda_{12}}{v_2} \tag{3.169}$$

unde λ_{12} este căldura latentă de vaporizare.

Din ecuaţia de stare a gazelor:

$$pV_2 = \frac{M}{\mu}RT \tag{3.170}$$

prin împărţirea cu M rezultă şi ţinând cont că $v_2 = V_2/M$:

$$pv_2 = \frac{1}{\mu}RT \tag{3.171}$$

rezultă:

$$v_2 = \frac{RT}{\mu p} \tag{3.172}$$

Atunci:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda_{12}\mu}{R}\frac{p}{T^2} \tag{3.173}$$

Notând cu $A = \dfrac{\lambda_{12}\mu}{R}$ relaţia (3.170) devine:

$$\frac{dp}{dT} = A\frac{dT}{T^2} \tag{3.174}$$

Integrând rezultă:

$$\ln p = -\frac{A}{T} + const. \tag{3.175}$$

$$p = const. \exp\left(-\frac{A}{T}\right) \tag{3.176}$$

3.12 Principiul al III-lea al termodinamicii

Principiul al II-lea introduce funcţia de stare numită entropie astfel:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \tag{3.177}$$

Din această definiţie entropia este determinată până la o constantă aditivă. Această constantă trebuie determinată exact deoarece ea intervine în numeroase măsurători experimentale cum ar fi cele în care se determină căldurile de reacţie.

W. Nernst a studiat o serie de prosese chimice şi a constatat că pe măsură ce temperatura scade, variaţiile entropiei sunt din ce în ce mai mici. Acest fapt a condus la următoarea constatare:

La temperatura de zero absolut entropia unui corp chimic pur are o valoare constantă independentă de variaţia altor parametri:.

$$\lim_{T\to 0} S = S_0 \tag{3.178}$$

Ulterior, Planck a pornit de la considerente de mecanică statistică şi a arătat că la temperatura de zero absolut S_0 are valoarea zero. Astfel, Planck a enunţat Principiul al III-lea în modul următor:

Când temperatura tinde către zero absolut, entropia unui corp chimic pur tinde către zero:

$$\lim_{T\to 0} S = 0 \tag{3.179}$$

Consecinţe ale Principiului al III-lea:

a) Capacităţilor calorice tind la zero când temperatura tinde la zero absolut

Vom discuta acest lucru pentru o capacitate calorică la volum constant:

$$\delta Q = C_V dT \tag{3.180}$$

Atunci:

$$dS = \frac{C_V dT}{T} \quad \text{şi} \quad S = \int_0^T \frac{C_V T}{T} \tag{3.181}$$

Astfel problema calculării entropiei se reduce la determinarea dependenţei căldurilor specifice. Din relaţiile (3.181), se observă că pentru $T \to 0$, capacitatea calorică tinde la zero, deoarece în caz contrar integralele ar diverge.

b) Coeficienţilor calorici tind la zero când temperatura tinde la zero absolut

Pentru aceasta vom alege ca exemplu coeficientul de dilatare izobar:

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

Deoarece:

$$dG = -SdT + Vdp = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T dp \tag{3.182}$$

$$S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p \quad \text{şi} \quad V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T$$

Deoarece:

$$\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p\right]_T = \left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T\right]_p$$

rezultă:

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

Astfel coeficientul coeficientul de dilatare izobar se poate exprima:

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \tag{3.183}$$

Când $T \to 0$ coeficientul de compresie izobar tinde la zero, deoarece variaţia entropiei în apropiere de zero absolut tinde la zero conform Principiului al III-lea.

Şi coeficientul termic al presiunii

$$\gamma = +\frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \tag{3.184}$$

tinde la zero când $T \to 0$. Pentru aceasta se ţine cont că

$$dF = -SdT - pdV \tag{3.185}$$

şi:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \tag{3.186}$$

Atunci:

$$\gamma = +\frac{1}{p}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_V \to 0 \tag{3.187}$$

c)Atingerea temperaturii de zero absolut este imposibilă.

Considerăm un Ciclu Carnot reversibil cu sursa caldă la temperatura $T_1 = T$ şi cu sursa rece $T_1 = 0$. Conform egalităţii lui Clausius:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0 \tag{3.188}$$

şi:

$$\Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41} = 0$$

unde procesele 1 - 2 şi 4 - 1 sunt izoterme iar procesele 2 - 3 şi 3 - 4 sunt adiabate.

$\Delta S_{23} = \Delta S_{34} = 0$, deoarece procesele sunt adiabate, $\Delta S_{34} = 0$ deoarece entropia este nulă la $T = 0$ K. Rezultă:

$$\Delta S_{12} = \frac{Q_{12}}{T} = 0 \tag{3.189}$$

Se ajunge la o contradicţie deoarece $Q_{12} \neq 0$. Această contradicţie arată că este imposibil de construit un ciclu Carnot cu o izotermă la temperatură nulă.

3.13 Probleme

3.1 O bucată de metal cu masa $m_1 = 0,05$ kg cu temperatura egală cu $t_1 = 200$ °C este introdusă într-un calorimetru care conţine $m_2 = 0,4$ kg de apă care se află iniţial la temperatura $t_2 = 20$ °C. Temperatura finală devine $t_e = 22,4$°C. Să se determine căldura specifică a metalului cunoscând căldura specifică a apei $c_a = 4185$ J/kg°C.

3.2 Să se calculeze modificarea entropiei a 250 g de apă încălzită de la 20 °C la 80 °C. Căldura specifică a apei este $c = 4185$ J/kg°C.

3.3 Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de un gaz când se destinde adiabatic din starea iniţială $(p_1,\ V_1)$ în starea finală $(p_2,\ V_2)$. Se cunoaşte exponentul adiabatic al gazului γ.

3.4 Ecuaţia Van-der-Waals pentru un gaz este

$$\left(p + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT$$

Să se determine lucrul mecanic într-o transformare izotermă a gazului când gazul se destinde de la V_1 la V_2. Se consideră cazul a $\nu = 2$ moli de etan care se destind de la $V_1 = 2$ l la $V_2 = 6$ l, la temperatură $T = 300$ K . Se cunosc $a = 0,544$ Jm^3/mol^{2}şi $b = 6,38 \times 10^{-5}$ m^3/mol.

3.5 În apropierea lui 0 K căldura molară la presiunea constantă C_p a unui metal este:

$$C_p = aT^3 + bT$$

În cazul unui mol de substanţă, la presiunea $p_0 = 1$ atm constantele a şi b sunt: $a = 1,16 \times 10^{-5}$ Jmol^{-1}K^{-4} şi $b = 7,14 \times 10^{-4}$ Jmol^{-1}K^{-2}. Să se determine variaţia entropiei unui mol de de substanţă ΔS când temperatura creşte de la valoarea $T_1 = 1$ K la valoarea $T_2 = 3$ K.

3.6 În motorul unui automobil amestecul de aer şi vapori de benzină este comprimat în raportul 9:1 (raportul de compresie). Presiunea iniţială este de 1 atm şi 27 °C. Dacă presiunea după comprimare este 21,7 atm să se găsească temperatura amestecului comprimat.

3.7 Un motor preia o cantitate de căldură egală cu $Q_1 = 2 \times 10^3$ J de la rezervorul cald şi transferă rezervorului rece căldura $|Q_2| = 1,5 \times 10^3$ J.

a) Să se calculeze randamentul motorului.
b) Care este lucrul mecanic efectuat ?

3.8 Temperatura sursei calde a unui motor care execută un ciclul Carnot este 400 K. Care este temperatura sursei reci dacă $\eta = 30$ %.

3.9 Un solid are căldura latentă λ şi temperatura de topire T. Să se calculeze variaţia entropiei când masa m de substanţă se topeşte.

3.10 Un mol de gaz urmează ecuaţia van der Waals.

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

Dacă energia internă a unui mol este

$$U = CT - \frac{a}{V}$$

unde V este volumul molar iar C şi a sunt constante să se calculeze căldurile molare la volum şi presiune constantă C_V şi C_p.

3.11 Un gram de apă se vaporizează izobar la presiunea atmosferică $p = 1,013 \times 10^5$ Pa. Volumul apei în stare lichidă este $V_l = 1$ cm^3 iar volumul apei în starea de vapori este $V_v = 1671$ cm^3. Să se găsească lucrul mecanic efectuat în cursul presiunii şi variaţia energiei interne. Se neglijează interacţiunea vaporilor cu aerul înconjurător. Se cunoaşte căldura latentă de vaporizare $\lambda = 2,26 \times 10^6$ J/kg.

4.14 Heliul lichid are la presiunea de $p_0 = 1$ atm punctul de fierbere la 4,2 K iar la presiunea de $p = 1$ mm de Hg fierbe la 1,2 K. Să se determine căldura latentă de vaporizare a heliului lichid.

3.15 Viteza unei unde longitudinale în gaz este:

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

Să se calculeze:
a) viteza în cazul în care compresia şi rarefierea gazului sunt izoterme;

b) viteza în cazul în care compresia şi rarefierea gazului sunt adiabate.

3.16 Un sistem are entalpia liberă de forma:

$$G\left(p,T\right)=RT\ln\left[\frac{ap}{\left(RT\right)^{5/2}}\right]$$

unde a şi R sunt constante. Să se determine C_p.

Capitolul 4

Elemente de fizică statistică

4.1 Presiunea gazului ideal

Pentru a calcula presiunea pe care un gaz o exercită asupra pereţilor vasului în care se află, trebuie considerat un model pentru acesta. Cel mai simplu model pentru un gaz este acela al gazului ideal:

a) moleculele sunt considerate puncte materiale;

b) moleculele se află într-o mişcare permanentă total dezordonată, mişcare care se supune legilor mecanicii newtoniene;

c) forţele de interacţiune dintre molecule se neglijează;

d) moleculele interacţionează doar în timpul ciocnilor dintre ele şi cu pereţii vasului. Ciocnirile dintre molecule şi cu pereţii vasului sunt perfect elastice.

Să considerăm un vas cubic de latură L în care se află N molecule de gaz. Ne vom concentra asupra unei molecule "i" de masă m a cărei viteză pe direcţia Ox este v_{ix}. Atunci când molecula se ciocneşte cu peretele componenta vitezei pe axa Ox se modifică brusc la valoarea $-v_{xi}$ (Fig. 4.1). Variaţia impulsului moleculei pe direcţia Ox este:

$$\Delta p_{xi} = -mv_{ix} - mv_{ix} = -2mv_{ix} \tag{4.1}$$

Timpul între două ciocniri cu acelaşi perete este:

$$\Delta t = \frac{2L}{v_{ix}} \tag{4.2}$$

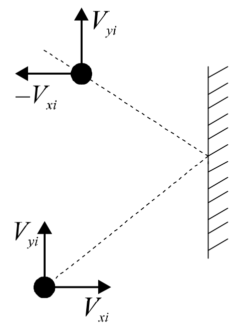


Figura 4.1: Ciocnirea unei molecule de gaz cu peretele

Forţa medie cu care peretele acţionează asupra moleculei "i" este:

$$F_i = \frac{\Delta p_{ix}}{\Delta t} = -\frac{mv_{ix}^2}{L} \tag{4.3}$$

Conform legii a III-a mecanicii,forţa cu care molecula acţionează asupra peretelui este:

$$F_{pi} = -F_i = \frac{mv_{ix}^2}{L} \tag{4.4}$$

Forţa totală cu care moleculele acţionează asupra peretelui este suma forţelor cu care fiecare moleculă acţionează asupra peretelui este:

$$F = \sum_{i=1}^{N} \frac{mv_{ix}^2}{L} = \frac{m}{L} \sum_{i=1}^{N} v_{ix}^2 \tag{4.5}$$

Definim media pătratului componentei pe axa Ox a vitezei:

$$\overline{v_x^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} v_{xi}^2}{N} \tag{4.6}$$

Atunci:

$$F = \frac{m}{L} N \overline{v_x^2} \tag{4.7}$$

Dar

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \tag{4.8}$$

şi mediind relaţia (4.8) se obţine.

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \tag{4.9}$$

Mărimea $\overline{v^2}$ poartă numele de viteză pătratică medie. Deoarece nici una din axele de coordonate nu este privilegiată, mediile componentelor vitezelor pe cele trei axe sunt egale:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} \tag{4.10}$$

Atunci:

$$\overline{v_x^2} = \frac{\overline{v^2}}{3} \tag{4.11}$$

şi forţa care acţionează asupra peretelui este:

$$F = \frac{m}{3L} N \overline{v^2} \tag{4.12}$$

Presiunea care acţionează asupra peretelui extern este:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{m}{3L^3} N \overline{v^2} = \frac{2}{3} n \left(\frac{1}{2} m \overline{v^2} \right) = \frac{2}{3} \bar{\varepsilon}_c \tag{4.13}$$

Mărimea $\bar{\varepsilon}_c = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$ reprezintă energia cinetică a moleculelor. Raportul N/L^3 reprezintă concentraţia de molecule n din volumul considerat. Rezultă că presiunea gazului este proporţională cu numărul de molecule din unitatea de volum şi cu energia cinetică medie a moleculelor.

Astfel am legat o mărime macroscopică care este presiunea, de o mărime microscopică care este viteza pătratică medie sau energia cinetică medie.

4.2 Interpretarea moleculară a temperaturii şi gradele de libertate

Considerând ecuaţia de stare a gazelor ideale

$$pV = \nu RT = \frac{N}{N_A} RT \tag{4.14}$$

Se împărte relaţia (4.14) prin V şi se ţinem cont că $n = N/N_A$ şi că $R/N_A = k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J/kmol·K. Se obţine:

$$p = n k_B T \tag{4.15}$$

Prin compararea relaţiilor (4.13) şi (4.15) rezultă:

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = 3\frac{k_BT}{2}$$

Rezultatul arată că temperatura este o măsură a gradului de agitaţie termică, deoarece măsura gradului de agitaţie termică este măsurată prin energia cinetică medie.

Energia unei molecule de gaz monoatomic se poate exprima ca o sumă de trei termeni:

$$\varepsilon = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} + \frac{mv_z^2}{2}$$

Se observă că fiecare termen reprezintă un mod în care o moleculă de gaz monoatomic poate stoca energia. Aceste moduri distincte în care se poate stoca energia poartă numele de grade de libertate. Astfel o moleculă monoatomică are trei grade de libertate. În cazul general numărul de grade de libertate a unui sistem reprezintă numărul minim de parametri necesari pentru a caracteriza sitemul respectiv. Deoarece nici o direcţie nu este privilegiată rezultă că:

$$\frac{m\overline{v_x^2}}{2} = \frac{m\overline{v_y^2}}{2} = \frac{m\overline{v_z^2}}{2} = \frac{1}{2}k_BT \tag{4.16}$$

Aceasta arată că fiecare grad de libertate de translaţie este caracterizat de aceeaşi cantitate de energie $\frac{kT}{2}$. Acest rezultat poate fi generalizat. Se obţine astfel **teorema echipartiţiei energiei:**

Fiecărui grad de libertate îi corespunde o energie medie $k_BT\ /2$.

Cu ajutorul acestei teoreme putem calcula căldura molară la volum constant a unui gaz.

Vom considera pentru început un gaz ideal monoatomic. Energia internă a gazului ideal monoatomic este suma energiilor fiecărei molecule. Deoarece fiecare moleculă are $i = 3$ grade de libertate energia internă a unui mol de gaz ideal este:

$$U = N_A 3\frac{k_BT}{2} = \frac{3RT}{2} \tag{4.17}$$

Deoarece:

$$U = C_{\mu V}T \tag{4.18}$$

Rezultă căldura molară la volum constant:

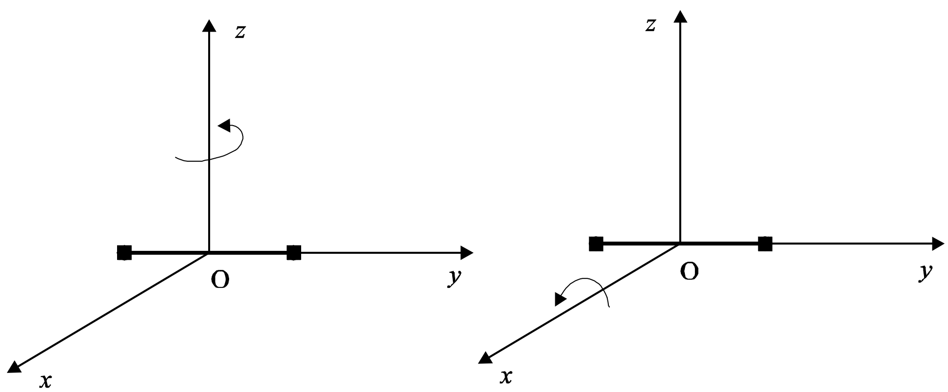


Figura 4.2: Mişcările de rotaţie a unei molecule biatomice.

$$C_{\mu V} = \frac{3R}{2} \tag{4.19}$$

În cazul gazelor biatomice este necesar să se ţină cont şi de mişcările proprii ale moleculei, cum ar fi mişcarea de rotaţie şi vibraţie. Dacă considerăm molecula sub forma unei haltere (cu distanţa dintre atomii mult mai mare decât dimensiunea atomilor) mişcarea de rotaţie poate avea loc doar în jurul a două axe de rotaţie (energia de rotaţie în jurul axei care leagă cei doi atomi este nulă) ca în Fig. **??**. Astfel energia datorată rotaţiei este de forma

$$\varepsilon_r = \frac{L_x^2}{2I_x} + \frac{L_z^2}{2I_z} \tag{4.20}$$

unde cu L_x şi L_z sunt componentele momentului cinetic pe axele Ox şi Oz, iar I_x şi I_z sunt momentele de inerţie corespunzătoare. Rotaţia în jurul axei Oy se neglijează deoarece atomii moleculei se consideră puncte materiale. Rezultă că alături de gradele de libertate de translaţie mai apar două grade de libertate de rotaţie în jurul axelor Ox şi Oz astfel că pentru acest tip de gaz $i = 5$ şi

$$U = N_A 5\frac{kT}{2} = \frac{5RT}{2} \tag{4.21}$$

Atunci

$$C_{\mu V} = \frac{5R}{2} \tag{4.22}$$

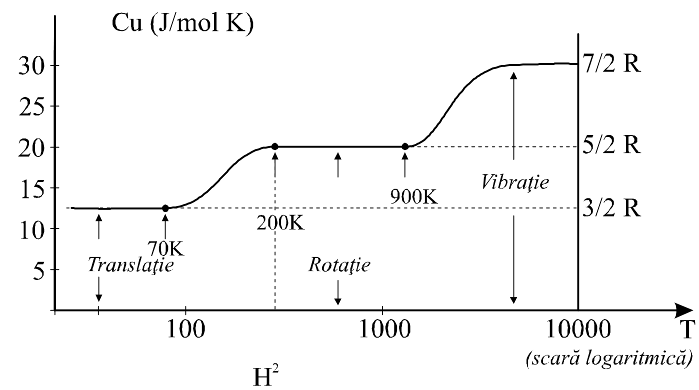


Figura 4.3: Dependenţa de temperatură a căldurii molare la volum constant pentru hidrogen

În plus este posibil ca cei doi atomi ce formează moleculele să se apropie unul de altul, adică să vibreze. Energia de vibraţie are doi termeni:

$$\varepsilon_v = \frac{1}{2\mu} p_{rel}^2 + \frac{k}{2} x_{rel}^2 \tag{4.23}$$

unde $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ este masa redusă şi $p_{rel} = \mu v_{rel}$. Mărimile care au indicele "rel" se referă la mărimi relative. Pentru acest tip de molecule $i = 7$ şi

$$C_{\mu V} = \frac{7R}{2} \tag{4.24}$$

Trebuie remarcat că dacă se trasează o curbă care prezintă căldura molară la volum constant în funcţie de temperatură se obţine graficul din Fig. 4.3.

Graficul arată că la temperaturi joase hidrogenul se comportă ca un gaz monoatomic astfel încât spunem că gradele de libertate de rotaţie sunt îngheţate. La temperaturi foarte mari şi gradele de libertate de vibraţie trebuie luate în considerare.

4.3 Căldura specifică a solidelor

Căldura specifică a solidelor descreşte rapid când temperatura se apropie de zero absolut. La temperaturi înalte (peste 300 K) valoarea căldurii molare este $3R \approx 25$ J/mol·K rezultat care poartă numele de legea Dulong-Petit.

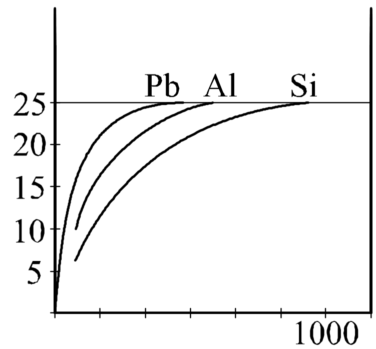


Figura 4.4: Dependenţa de temperatură a căldurii molare la volum constant

Putem exprima căldura molară a solidelor utilizând teorema echipartiţiei energiei. Pentru deplasări mici ale unui atom faţă de poziţia de echilibru, acesta execută o mişcare simplă armonică. Energia asociată cu mişcarea pe axa Ox este:

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{4.25}$$

Expresiile energie asociate mişcărilor pe direcţiile Oy şi Oz se scriu în acelaşi fel. Deoarece orice atom are$i = 6$ grade de libertate conform teoremei echipartiţiei energiei, energia medie a atomilor coprpului solid este:

$$6 \times \frac{1}{2}k_BT = 3k_BT \tag{4.26}$$

Atunci energia internă a unui mol este:

$$U = N_A 3k_BT = 3RT \tag{4.27}$$

Rezultă căldura molară $C_{\mu V} = 3R$. Acest rezultat poartă numele de legea Dulong-Petit. Cunoscând căldura molară se poate determina căldura specifică:

$$c_V = \frac{C_{\mu V}}{\mu}$$

În Tabelul 4.1 este prezentată o comparaţie dintre rezultatele obţinute cu ajutorul legii Dulong-Petit şi cele experimentale. Se observă o foarte bună concordanţă între acestea ţinând cont de simplitatea modului folosit.

Tabelul 4.1
Căldura specifică a solidelor

Material	$c_{\rm exp}$ (J/kg·K)	μ (kg/kmol)	$c_t = \frac{3R}{\mu}$ (J/kg·K)
Al	895	26,9	927
Ag	235	107	233
Cu	395	53,54	465
Ni	400	59,71	417
Pt	120	195	127
Pb	125	207	120
Zn	340	65	381

4.4 Distribuţia Maxwell după viteze într-un gaz

Presupunem că într-un gaz s-a stabilit o stare de echilibru. În conformitate cu datele experimentale, presupunem că moleculele gazului se distribuie în întreg volumul recipientului cu o densitate constantă. Moleculele aşa cum am mai spus prezintă viteze uniform distribuite în spaţiu. Stabilirea mişcării haotice este condiţionată de existenţa interacţiilor dintre molecule. Atunci când moleculele se ciocnesc se produce o continuă schimbare a direcţiilor de mişcare. Rolul ciocnirilor nu se reduce însă la stabilirea unei distribuţii uniforme a vitezelor după direcţii. Pe lângă modificările direcţiei de mişcare moleculele suferă variaţii ale vitezelor în valoare absolută. Atunci când gazul este închis într-un recipient apare o distribuţie a vitezelor moleculelor. În gaz apar molecule cu viteze mai mari, un număr de molecule cu viteze medii şi un număr de molecule cu viteze mici. Această distribuţie este staţionară atât timp cât nu apare o acţiune exterioară. Problema care se pune este aceea a determinării numărului de molecule care au o viteză dată. Deoarece vitezele variază în mod continuu atunci problema care se pune este aceea a determinării numărului de molecule care au o viteză apropiată de o valoare dată.

4.4.1 Deducerea formei funcţiei de distribuţie

Notăm cu dN numărul de molecule care au componentele vitezei situate între v_x şi $v_x + dv_x$, $v_y + dv_y$, $v_z + dv_z$. Probabilitatea ca o moleculă să aibă componentele vitezelor în intervalul de mai sus este:

$$d\mathcal{P} = \frac{dN}{N} = f(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z \tag{4.28}$$

$f(v_x, v_y, v_z)$ poartă numele de funcţia de distribuţie după viteze. Observăm că funcţia de distribuţie trebuie să se să îndeplineacă condiţia de normare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv = 1 \tag{4.29}$$

Deoarece vitezele sunt distribuite uniform în toate direcţiile atunci funcţia de distribuţie depinde doar de modulul vitezei.

$$f(v_x, v_y, v_z) = f(v) \tag{4.30}$$

Elementul de volum din spaţiul vitezelor este în coordonate sferice:

$$dv_x dv_y dv_z = v^2 \sin\theta dv d\theta d\varphi \tag{4.31}$$

Dacă nu intereseează distribuţia după direcţi a moleculelor putem integra după θ şi φ şi obţinem astfel o nouă funcţie de distribuţie $F(v)$ după modulul vitezei.

$$F(v) = \left(\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\right) f(v)\, v^2 = 4\pi f(v)\, v^2$$

În demonstraţie (care nu este riguroasă) apare în mod clar rolul ciocnirilor şi al ipotezei caracterului haotic al mişcării moleculare. Să considerăm procesul de ciocnire a două particule care se mişcă cu vitezele $\vec{v}_1$şi $\vec{v}_2$. În urma ciocnirii vitezele moleculelor variază şi iau valorile $\vec{v}_3$ şi $\vec{v}_4$. Numărul de ciocniri de acest fel în unitatea de timp trebuie să fie proporţional cu numărul perechilor de molecule cu vitezele $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$, adică proporţional cu produsul $f(\vec{v}_1) f(\vec{v}_2)$. Să considerăm apoi procesul invers adică ciocnirile în care vitezele moleculelor variază de la $\vec{v}_3$ şi $\vec{v}_4$ la $\vec{v}_1$şi $\vec{v}_2$. Numărul de ciocniri în acest timp este proporţional cu produsul $f(\vec{v}_3) f(\vec{v}_4)$.

Ţinem cont de presupunerea că într-un gaz care se află într-o stare staţionară că numărul de molecule cu valori date ale vitezei nu variază datorită proceselor de ciocnire se consideră că numărul de molecule ale căror viteze variază de la $\vec{v}_3$ şi $\vec{v}_4$ la $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ este egal cu numărul de molecule ale căror viteze variază de la $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ la $\vec{v}_3$ şi $\vec{v}_4$. Atunci:

$$f\left(\vec{v}_1\right) f\left(\vec{v}_2\right) = f\left(\vec{v}_3\right) f\left(\vec{v}_4\right) \tag{4.32}$$

Deoarece în procesul de ciocnire are loc conservarea energiei. Probabilitatea ca molecula să aibă:

$$v_1^2 + v_2^2 = v_3^2 + v_4^2 \tag{4.33}$$

Deoarece funcţia de distribuţie nu depinde de direcţia vitezei relaţia (4.32) poate fi transcrisă sub forma:

$$f(v_1^2)f(v_2^2) = f(v_3^2)f(v_4^2) \tag{4.34}$$

Din relaţiile (4.33) şi (4.34) rezultă forma funcţie $f\left(v\right)$:

$$f(v) = Ae^{-\beta v^2} \tag{4.35}$$

şi

$$F(v) = 4\pi A v^2 e^{-\beta v^2} \tag{4.36}$$

Determinarea constantelor A şi β se face pornind de la condiţia de normare:

$$\int_0^{\infty} F(v)dv = 1 \tag{4.37}$$

şi de faptul că viteza pătratică medie este legată de temperatură prin relaţia:

$$\overline{v^2} = \int_0^{+\infty} v^2 F(v)dv = \frac{3k_BT}{m} \tag{4.38}$$

Rezultă:

$$\beta = \frac{m}{2k_BT} \quad ; \quad A = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \tag{4.39}$$

Astfel:

$$F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \tag{4.40}$$

Rezultă că forma funcţiei de distribuţie $f\left(v\right)$ este:

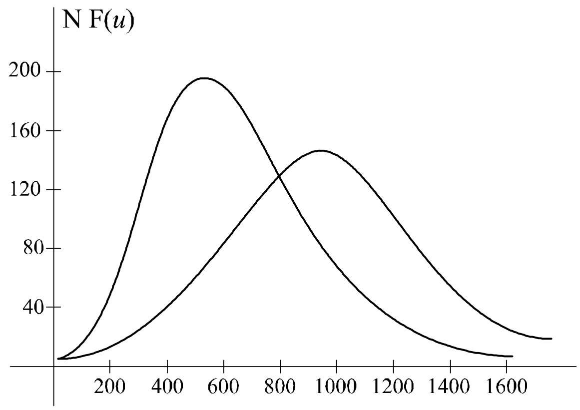


Figura 4.5: Distribuţia Maxwell după viteze

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 \tag{4.41}$$

În Fig. 4.5 este reprezintă distribuţia după viteze unde $N = 10^5$

Pornind de la expresia funcţiei de distribuţie se va putea calcula viteza medie

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \tag{4.42}$$

şi viteza cea mai probabilă:

$$v_p = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \tag{4.43}$$

4.4.2 Distribuţia Boltzmann într-un câmp de forţe omogen

Problema care se pune este aceea de a determina modul în care sunt distribuite moleculele în câmpuri de forţe conservative. Ca un exemplu vom studia distribuţia moleculelor unui gaz în câmp gravitaţional (Fig. 4.6.)

Să considerăm o coloană de gaz cu suprafaţa S aflată între coordonatele z şi $z + dz$. Punem condiţia ca această coloană să fie în repaus. Pentru aceasta:

$$Sp(z) = Sp(z + dz) + S\rho g dz \tag{4.44}$$

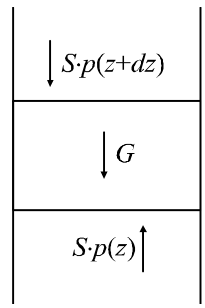


Figura 4.6: Porţiune dintr-un gaz aflat în câmp gravitaţional.

unde $\rho = mn$ este densitatea, m este masa unei molecule şi n este concentraţia moleculelor.Rezultă:

$$p(z+dz) - p(z) = dp = -\rho g dz = -mngdz \tag{4.45}$$

Din ecuaţia de stare:

$$p = nkT \tag{4.46}$$

considerând temperatura constantă

$$dp = kTdn \tag{4.47}$$

Astfel din relaţiile 4.45 şi 4.47 se obţine:

$$kTdn = -mngdz \tag{4.48}$$

$$\frac{dn}{n} = -\frac{mg}{k_B T} dz \tag{4.49}$$

Integrăm de la $z = 0$ unde concentraţia moleculelor este $n = n_0$. Atunci:

$$\int_0^n \frac{dn}{n} = +\frac{mg}{k_B T} \int_0^y dz \quad \Longrightarrow \quad \ln \frac{n}{n_0} = -\frac{mgz}{k_B T}$$

$$n = n_0 e^{-\frac{mgz}{k_B T}} \tag{4.50}$$

Astfel numărul de molecule aflate între z şi $z + dz$:

$$dn \sim e^{-\frac{mgz}{k_B T}} dz \tag{4.51}$$

Atunci probabilitatea ca o moleculă să se găsească între z şi $z + dz$ este:

$$d\mathcal{P} \sim e^{-\frac{mgz}{k_B T}} dz \tag{4.52}$$

Putem rescrie formula de mai sus ţinând cont că $mgz = E_p$ este energia potenţială şi că $dz \sim dE_p$. Astfel probabilitatea ca o moleculă să aibă energia cuprinsă în intervalul $dE,\ E_p + dE_p$ este:

$$d\mathcal{P} \sim e^{-\frac{E_p}{k_B T}} dE_p \tag{4.53}$$

4.5 Distribuţia Maxwell-Boltzmann

Probabilitatea ca molecula să se găsească la o înălţime cuprinsă între z şi $z + dz$ şi să aibă viteza cuprinsă între $\vec{v}$ şi $\vec{v} + d\vec{v}$ se obţine combinând rezultatele obţinute la studiul distribuţie Maxwell şi distribuţiei Boltzmann:

$$d\mathcal{P} = Ae^{-\frac{\frac{mv^2}{2}+mgz}{k_B T}} dv_x dv_y dv_z dz \tag{4.54}$$

unde A este o constantă.

În continuare vom generaliza concluziile din discuţia anterioară în cazul că energia staţionară în care se poate afla sistemul formează un şir discret $E_1,\ E_2,\ E_3$.., Probabilitatea ca sistemul să se afle în starea de energie E_k este:

$$P_k = C \exp\left(-\frac{E_k}{k_B T}\right) \tag{4.55}$$

Constanta C se determină din condiţia de normare:

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = C \sum_{k=1}^{n} \exp\left(-\frac{E_k}{k_B T}\right) \tag{4.56}$$

Aplicaţie

Atomii pot ocupa două nivele discrete a energiei. Să considerăm un gaz la 2500 °C care are două nivele energetice separate prin 1,5 eV. Să se determine raportul dintre numărul de atomi care ocupă nivelul de energie mai mare şi numărul de atomic care ocupă nivelul de energie mai mic.

Soluţie:

Conform statisticii Boltzmann

$$\frac{n(E_2)}{n(E_1)} = \frac{\exp\left[-E_2/k_B T\right]}{\exp\left[-E_1/k_B T\right]} = \exp\left[\frac{(E_1 - E_2)}{k_B T}\right] = 1,9 \times 10^{-3}$$

4.6 Entropia din punct de vedere microscopic

Putem trata entropia din punct de vedere microscopic pornind de la analiza statistică a mişcării moleculare.

În teoria cinetică moleculară, moleculele sunt reprezentate ca particule care se mişcă haotic. Să presupunem că iniţial gazul este în volumul V_i. Pentru o distribuţie a gazului în volum există un mare număr de microstări echivalente compatibile cu starea macroscopică dată.

Vom calcula numărul de microstări considerând că fiecare moleculă ocupă un volum microscopic V_m. Numărul total al locaţiilor pe care molecula le poate ocupa în starea iniţială este $w_i = V_i/V_m$.

Numărul w_i poate fi interpretat ca numărul de moduri în care molecula poate fi plasată în volumul V_i. Presupunem că probabilităţile ca molecula să ocupe orice locaţie sunt egale. Dacă se adaugă molecule în sistem numărul de posibilităţi în care moleculele se pot aranja în sistem creşte. Astfel dacă w_1 reprezintă numărul de locaţii posibile pentru prima moleculă şi w_2 numărul de locaţii pentru a doua moleculă numărul total de moduri în care se pot plasa cele două molecule este $w_1 w_2$

Neglijând probabilitatea (extrem de mică) ca două molecule să ocupe acelaşi volum, numărul de locaţii pe care-l poate ocupa fiecare moleculă este acelaşi, numărul de moduri în care N molecule pot ocupa volumul inţial V_i este:

$$\Omega_i = (w_i)^N = (V_i/V_m)^N \tag{4.57}$$

Considerând că gazul suferă o destindere adiabatică în vid până la volumul final V_f. În acelaşi mod, numărul de moduri în care cele N molecule pot ocupa volumul V_f este:

$$\Omega_f = (w_f)^N = (V_f/V_m)^N \tag{4.58}$$

$$\frac{\Omega_f}{\Omega_i} = \left(\frac{V_f}{V_i}\right)^N \tag{4.59}$$

Numărul total de moduri în care molecule pot ocupa volumul V reprezintă numărul de microstări ale sistemului care sunt compatibile cu macrostarea considerată. Din relaţia (4.59) se obţine:

Logaritmând şi multiplicând cu constanta Boltzmann se obţine:

$$k_B \ln \frac{\Omega_f}{\Omega_i} = N k_B \ln \frac{V_f}{V_i} = \nu N_A k_B \ln \frac{V_f}{V_i} = \nu R \ln \frac{V_f}{V_i} \tag{4.60}$$

de unde

$$k_B \ln \Omega_f - k_B \ln \Omega_i = \nu R \ln \frac{V_f}{V_i} \tag{4.61}$$

Dar în cazul că are loc o expansiune a gazului în vid am dedus că:

$$\Delta S = S_f - S_i = \nu R \ln \frac{V_f}{V_i} \tag{4.62}$$

Rezultă că:

$$S = k_B \ln \Omega \tag{4.63}$$

În concluzie cu cât sunt mai multe microstări, cu atât creşte entropia sistemului. Ecuaţia (4.63) arată că entropia este o măsură a dezordinii unui sistem. Aşa cum am spus stările microscopice sunt egal probabile. Deoarece numărul de microstări compatibile cu o stare dezordonată este mult mai mare decât numărul de microstări compatibile cu o stare mai ordonată rezultă că starea dezordonată este mult mai probabilă.

Aplicaţie

Apa fierbe la 100 °C la nivelul mării. La ce temperatură fierbe apa pe un munte la o înălţime de 5 km de nivelul mării. Considerăm masa molară a aerului $\mu = 28,9$ g/mol şi că temperatura mediului ambiant este $t = 20$ °C. Căldura latentă de vaporizare este $2,26 \times 10^6$ J/kg

Soluţie:

Presiunea vaporilor saturanţi funcţie de temperatură variază după legea

$$p_v = k_1 \exp\left[-\frac{\lambda\mu}{RT_f}\right]$$

unde T_f este temperatura de fierbere iar k_1 este o constantă. La nivelul mării $p_v = p_0 = 1$ atm şi temperatura de fierbere $T_f = T_{f0} = 373,15$ K. Atunci:

$$p_0 = k_1 \exp\left[-\frac{\lambda\mu}{RT_{f0}}\right]$$

Presiunea atmosferică funcţie de înălţime este:

$$p = p_0 \exp\left[-\frac{mgz}{k_BT}\right] = p_0 \exp\left[-\frac{\mu gz}{RT}\right]$$

Fenomenul de fierbere are loc atunci când presiunea vaporilor saturanţi la temperatura de fierbere este egală cu presiunea atmosferică:

$$k_1 \exp\left[-\frac{\lambda\mu}{RT_f}\right] = p_0 \exp\left[-\frac{\mu gz}{RT}\right]$$

Rezultă:

$$T = \frac{1}{\frac{1}{T_f} + \frac{gz}{\lambda T}} = \frac{1}{\frac{1}{373{,}15} + \frac{9{,}8\times 5000}{2{,}26\times 10^6\times 293{,}15}} = 363,13 \text{ K}$$

Aceasta corespunde la 90 °C.

4.7 Probleme

4.1 O centrifugă este un dispozitiv care este utilizat pentru a separa particule prin rotirea acesteia cu viteza unghiulară ω. Ea este formată dintr-un tub de lungime R care se roteşte în plan orizontal în jurul unui capăt al acesteia. Să se determine densitatea particulelor în interiorul centrifugii.

4.2 Frecvenţa de rotaţie a unei molecule. Molecula de N_2 are lungimea de 0,12 nm. Să se estimeze frecvenţa de rotaţie a N_2 a rotaţie la 20 °C.

4.3 Să se determine viteza medie a moleculelor unui gaz ideal aflat la temperatura T.

4.4 Să se determine viteza ce mai probabilă a moleculelor unui gaz ideal aflat la temperatura T.

Capitolul 5

Electricitate

5.1 Electrostatică

5.1.1 Sarcina electrică

Sarcina electrică este o mărime scalară care măsoară starea de electrizare a unui corp. Există două tipuri de sarcină: una pozitivă (a protonilor) şi una negativă (a electronilor). Unitatea sarcinii electrice este Coulombul (C). Cea mai mică cantitate de sarcină este sarcina $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C. Sarcina $+e$ este sarcina protonilor iar sarcina $-e$ este sarcina electronilor.

5.1.2 Legea lui Coulomb

Legea lui Coulomb este o lege experimentală care afirmă că: forţa de interacţie dintre două sarcini punctiforme este de atracţie dacă sarcinile sunt de semne contrare şi de respingere dacă sarcinile sunt de acelaşi fel; forţa acţionează de-a lungul dreptei ce uneşte cele două sarcini; mărimea forţei este invers proporţională cu pătratul distanţei dintre sarcini şi este direct proporţională cu produsul sarcinilor. Forma matematică a legii lui Coulomb în sistemul de unităţi internaţional SI este:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \tag{5.1}$$

unde $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$ C^2/N·m^2 este o constantă numită permitivitatea vidului. $\vec{r}_{12}$. Forţa $\vec{F}_{12}$ reprezintă forţa cu care sarcina q_1 acţionează asupra

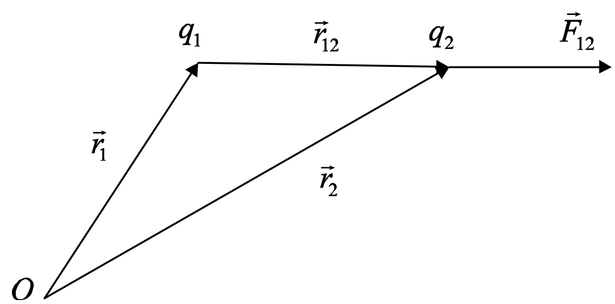


Figura 5.1: Forţa dintre două sarcini electrice punctiforme de acelaşi semn.

sarcinii q_2. În Fig. 5.1 este reprezentat cazul când cele două sarcini au acelaşi semna. Se observă că relaţia (5.1) pune în evidenţă caracterul atractiv sau repulsiv al forţei. Considerând că semnele sarcinilor sunt incluse în q_1 şi q_2, când $q_1 q_2 > 0$ (adică ambele sarcini au acelaşi semn) $\vec{F}_{12}$ are sensul vectorului $\vec{r}_{12}$ şi forţa este repulsivă, iar când $q_1 q_2 < 0$ (sarcinile au semne contrare) $\vec{F}_{12}$ are sens contrar lui $\vec{r}_{12}$ şi forţa este atractivă.

Aplicaţie

Electronul şi protonul atomului de hidrogen se află la o distanţă medie de $5,3 \times 10^{-11}$ m. Să se determine forţa care acţionează între ei.

Soluţie:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{\left(1,6 \times 10^{-19}\right)^2}{\left(5,3 \times 10^{-11}\right)^2} = 8,2 \times 10^{-8} \text{ N}$$

unde am ţinut cont că:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$$

5.1.3 Câmp electric

Noţiunea de câmp se referă la cazul interacţiei când două corpuri nu sunt în contact. Astfel asupra unui corp lăsat liber deasupra pământului acţionează o forţă. Spunem că acel corp se află în câmpul gravitaţional al pământului. Dacă un corp cu o sarcină foarte mică şi de dimensiuni foarte mici, numit corp de probă, este adus în apropierea unor corpuri încărcate electric şi considerate fixe asupra lui acţionează o forţă. Spunem că în regiunea în care asupra corpului de probă acţionează o forţă există un câmp

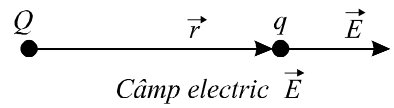


Figura 5.2: Vectorul intensitatea câmpului electric

electric. Pentru a caracteriza câmpul electric se defineşte intensitatea câmpul electric într-un punct ca fiind:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \tag{5.2}$$

unde $\vec{F}$ este forţa ce acţionează în punctul respectiv asupra corpului de probă încărcat cu sarcina$q$.

Un corp punctiform cu sarcina Q, crează un câmp electric a cărui intensitate este (Fig. 5.2):

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{5.3}$$

şi

$$|\vec{E}| = \frac{|Q|}{4\pi\varepsilon r^2} \tag{5.4}$$

Pentru a obţine o reprezentare a câmpului electric, se pot defini liniile de câmp, ca fiind curbele la care în fiecare punct vectorul intensitate câmp electric este tangent. Sensul unei linii de câmp este sensul în care începe să se deplaseze o sarcină pozitivă pe linia de câmp când este lăsată liberă. Liniile de câmp electric pornesc de pe sarcinile încărcate pozitiv şi se termină pe sarcinile încărcate negativ (Fig. 5.3). Ele nu se intersectează deoarece câmpul este definit în mod univoc într-un punct dat.

5.1.4 Distribuţii continue de sarcini

Adesea distanţele dintre sarcinile unui grup de sarcini sunt mult mai mici decât distanţa de la grupul de sarcini la punctul în care trebuie calculată intensitatea câmpului electric. În acest caz sistemul poate fi modelat ca un sistem continuu de sarcină. Pentru a evalua câmpul electric creat de o distribuţie continuă de sarcină se utilizează următorul procedeu: se divizează distribuţia de sarcină în elemente mici fiecare conţinând sarcina

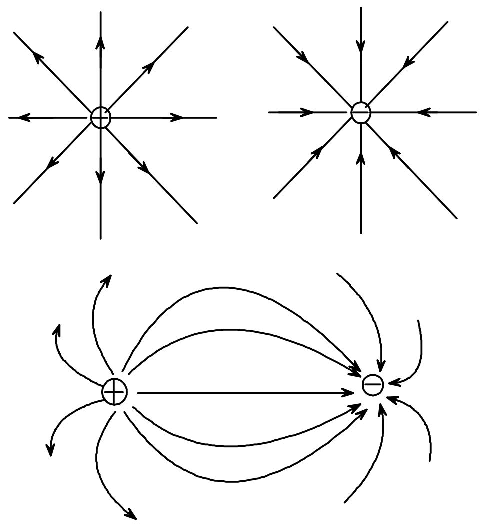


Figura 5.3: Linii de câmp electric.

dq. Câmpul produs în P de sarcina dintr-un element va fi:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{5.5}$$

Pentru a obţine intensitatea totală se însumează contribuţiile aduse de fiecare element. Pentru aceasta se integrează relaţia (5.5) pe tot volumul în care se află sarcinile electrice:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{5.6}$$

Dacă notăm cu ρ densitatea de sarcină şi se ţine cont că $q = \rho dv$ se obţine:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\iiint_V \frac{\rho(\vec{r})}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}dv \tag{5.7}$$

5.1.5 Legea lui Gauss

Fluxul câmpului electric

Fie o suprafaţă S străbătută de un câmp electric uniform $\vec{E}$ (Fig 5.4a). Fluxul câmpului electric prin suprafaţa S se defineşte ca:

$$\phi = \left(\vec{E}\vec{n}\right)S = ES\cos\alpha \tag{5.8}$$

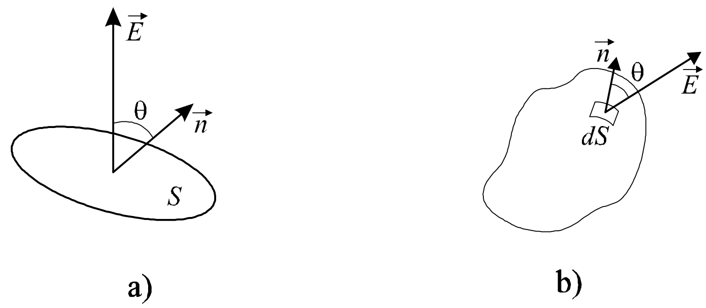


Figura 5.4: a) Fluxul cîmpului electric b) Fluxul câmpului electric printr-o suprafaţă elementară dS

unde $\vec{n}$ este normala pe suprafaţa S.

În cazul unui cîmp neuniform se împarte această suprafaţă în elemente mici dS. Considerând unul din aceste elemente, normala pe acest element de $\vec{n}$, (Fig. 5.6b) şi $\vec{E}$ valoarea intensităţii câmpului electric pe acesta, fluxul electric elementar este:

$$d\phi = \vec{E}\vec{n}dS = (EdS)\cos\alpha \tag{5.9}$$

Fluxul total prin suprafaţa S se obţine prin adunarea fluxurilor prin toate elementele dS. Atunci:

$$\phi = \iint_S \vec{E}\vec{n}dS = \iint_S \vec{E}d\vec{S} \tag{5.10}$$

unde vectorul $d\vec{S}$ se defineşte ca $d\vec{S} = \vec{n}dS$.

Să considerăm un caz particular şi anume o sarcină în centrul unei sfere. În orice punct al sferei modulul intensităţii câmpului electric este:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Fluxul electric elementar printr-o suprafaţă dS este:

$$d\phi = EdS \tag{5.11}$$

şi:

$$\phi = \iint EdS = E\iint dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

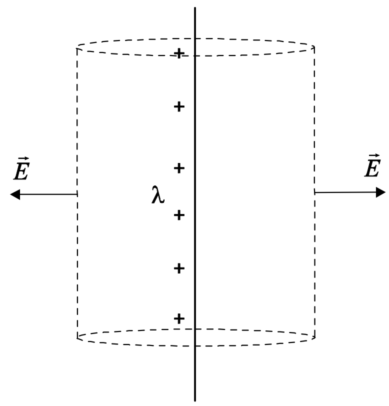


Figura 5.5: Câmpul electric creat de o distribuţie liniară de sarcină

Rezultă că fluxul printr-o suprafaţă sferică produs de sarcina din centru este proporţional cu sarcina. Această proprietate se poate generaliza şi pentru o suprafaţă închisă oarecare anume:

$$\phi = \iint_S \vec{E}\vec{n}dS = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \tag{5.12}$$

unde q_{int} este sarcina din interiorul volumului închis de suprafaţa S.

Aplicaţie

Se dă o distribuţie liniară de sarcină, a cărei densitate este λ (sarcina pe unitatea de lungine). Să se găsească expresia intensităţii câmpului electric la distanţa r dacă distribuţia de sarcină se găseşte în vid.

Soluţie:

Din considerente de simetrie, $\vec{E}$ are o direcţie radială ca în Fig. 5.5. Pentru determinarea câmpului electric se utilizează legea lui Gauss. Pentru aceasta se alege o suprafaţă cilindrică a cărei axă de simetrie o constituie distribuţia liniară de sarcină. Se observă că fluxul câmpului electric este diferit de zero doar pe suprafaţă laterală a suprafeţei cilindrice de rază r. Pe baze fluxul câmpului electric este nul deoarece unghiul dintre normală şi direcţia câmpului electric este $\pi/2$. Atunci:

$$\Phi = 2\pi r l E = \frac{q}{\varepsilon_o} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

Rezultă:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}$$

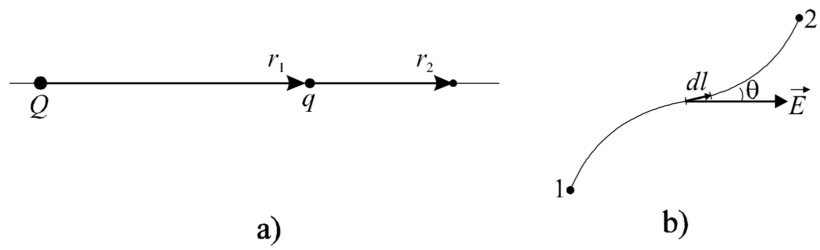


Figura 5.6: a) Lucrul mecanic efectuat de câmpul produs o sarcină Q asupra unei sarcini de probă q. b) Deplasarea unei sarcini de-a lungul unei curbe.

Aplicaţie

Să se determine câmpul electric determinat de o sferă conductoare de rază R încărcată cu sarcina Q în exteriorul acesteia.

Soluţie

Pentru un punct situat la distanţa $r > R$ considerăm o sferă concentrică cu sfera încărcată. Din motive de simetrie câmpul electric este perpendicular pe suprafaţa sferei de rază r deoarece toate punctele de pe această sferă sunt echivalente. Atunci conform legii lui Gauss:

$$\Phi = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Rezultă:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{5.13}$$

Astfel câmpul electric creat de o sferă încărcată cu sarcina Q, în exteriorul ei, este identic cu cel care ar fi determiant dacă sarcina Q s-ar afla concentrată în centru. Câmpul în interiorul sferie este nul. Vom arăta că în interiorul conductoarelor aflate în echibru electrostatic (în care nu există deplasări ordonate de sarcini electrice) câmpul electric este nul.

5.1.6 Potenţialul electric

Lucrul mecanic efectuat de câmpul electric.

Pentru simplificare vom considera câmpul creat de o sarcină electrică Q în care se deplasează o sarcină q de-a lungul unei linii de câmp de la distanţa r_1 la distanţa $r_2 > r_1$. Presupunem în plus că cele două sarcini au acelaşi semn (Fig 5.6a). Lucrul mecanic elementar efectuat de câmp când sarcina este deplasată de la r la $r + dr$ este:

$$\delta L = Fdr = Fdr = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr \tag{5.14}$$

Atunci

$$L = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \tag{5.15}$$

Relaţia (5.15) este valabilă şi în cazul în care deplasarea sarcinii se face pe un drum oarecare între două puncte aflate la distanţele r_1 şi r_2 faţă de sarcina Q. Deoarece lucrul mecanic nu depinde de drum, forţele electrostatice sunt forţe conservative.

Să considerăm deplasarea sarcinii q într-un câmp electric de-a lungul unei curbe între două puncte (Fig 5.6b). Deplasarea infinitezimală de-a lungul curbei o vom nota cu $d\vec{l}$. Lucrul mecanic elementar efectuat de câmpul electric este:

$$\delta L = q\vec{E}d\vec{l} = qE\cos\theta dl \tag{5.16}$$

Lucrul mecanic total este:

$$L_{12} = q\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} \tag{5.17}$$

Această integrală este o integrală curbilinie şi cum forţele electrostatice sunt conservative, valoarea ei nu depinde de drum. Din acest motiv se poate defini energia potenţială a sarcinii q în câmpul electric $\vec{E}$.

$$\Delta E_p = E_{p_2} - E_{p_1} = -L_{12} = -q\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} \tag{5.18}$$

Energia potenţială este definită până la o constantă aditivă astfel că semnificaţie fizică are doar diferenţa ei. Din acest motiv se poate alege o poziţie de referinţă în care energia potenţială este nulă. Dacă se consideră punctul 2 ca punct de referinţă (R) $E_{p2} = 0$. Atunci:

$$E_{p_1} = L_{1R} = q\int_1^R \vec{E}d\vec{l} \tag{5.19}$$

Se observă că mărimea

$$\frac{E_{p_1}}{q} = -\frac{L_{1R}}{q} = \int_1^R \vec{E}d\vec{l}$$

este independentă de sarcina q. Această mărime poartă numele de potenţial. Mai general:

$$V = \frac{E_p}{q} = \frac{L_R}{q} \tag{5.20}$$

unde $L_R = L_{1R}$ este lucrul mecanic efectuat de câmpul electric când sarcina q este deplasată din punctul considerat în punctul de referinţă. Relaţia de mai sus poate fi privită ca o relaţie de definiţie pentru potenţial. *Potenţialul unui punct al corpului este egal cu lucrul mecanic efectuat de forţele câmpului pentru deplasarea unităţii de sarcină pozitivă din punctul considerat în punctul de referinţă al cărui potenţial se consideră egal cu zero.*

Ca observaţie trebuie să remarcăm că potenţialul este o mărime cu care putem caracteriza câmpului electrostatic. Diferenţa de potenţial între două puncte 1 şi 2 se defineşte ca:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{\Delta E_p}{q} = -\frac{L_{12}}{q} = -\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} \tag{5.21}$$

Atunci putem exprima lucrul mecanic efectuat de un câmp electric între două puncte în funcţie de diferenţa de potenţial

$$L_{12} = -q\Delta V = q\left(V_1 - V_2\right)$$

Ca şi în cazul energiei potenţiale, doar diferenţa de potenţial are semnificaţie fizică. Unitatea de măsură a potenţialului şi a diferenţei de potenţial este voltul:

$$1\mathrm{V} \equiv \frac{1\mathrm{J}}{1\mathrm{C}}$$

În multe aplicaţii practice potenţialul Pământului se consideră egal cu zero.

Diferenţa de potenţial într-un câmp determinat de o sarcină punctiformă

Ţinând cont de expresia lucrului mecanic efectuat de câmpul electric al unei sarcini punctiforme asupra altei sarcini (5.15) rezultă că diferenţa de potenţial dintre două puncte este:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\frac{L}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \tag{5.22}$$

Alegând poziţia de referinţă la infinit se pune $r_1 \to \infty$ şi $V_1 = 0$. Atunci expresia potenţialului determinat de sarcina Q este (renunţând la indicele 2):

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{5.23}$$

5.1.7 Suprafeţe echipotenţiale

Numim suprafaţă echipotenţială locul geometric al punctelor cu potenţial constant. Rezultă că lucrul mecanic la deplasarea unei sarcini pe o suprafaţă echipotenţială este egal cu zero. Liniile de câmp sunt perpendiculare pe suprafeţele echipotenţiale.

Pentru a demonstra acest lucru se consideră o suprafaţă echipotenţială pe suprafaţa căreia se deplasează o sarcină q pe o distanţă egală cu dl. Dacă $\vec{E}$ este intensitatea câmpului electric pe această suprafaţă, forţa care acţionează asupra sarcinii q este $\vec{F} = q\vec{E}$ şi lucrul mecanic se exprimă ca:

$$\delta L = F dl \cos\alpha = qEdl\cos\alpha \tag{5.24}$$

unde $\alpha-$ este unghiul dintre direcţia lui $\overrightarrow{E}$ şi deplasarea dl. Pe de altă parte lucrul este egal cu zero, deoarece diferenţa de potenţial a celor două puncte de pe suprafaţa echipotenţială este nulă. Atunci

$$qEdl\cos\alpha = 0$$

Cum q, E, dl sunt diferite de zero, rezultă $\cos\alpha = 0$ adică $\alpha = \pi/2$. Astfel intensitatea câmpului electric este perpendiculară pe suprafaţa echipotenţială. Deoarece intensitatea câmpului electric este tangentă la liniile de câmp rezultă că şi liniile de câmp sunt perpendiculare pe suprafaţa echipotenţială.

5.1.8 Legătură dintre câmpul electric şi diferenţa de potenţial

Pentru a determina relaţia dintre intensitatea câmpului electric $\vec{E}$ şi diferenţa de potenţial se consideră un corp de probă cu sarcina q care se deplasează în câmpul electric pe distanţa $d\vec{l}$. Atunci variaţia energiei potenţiale a sarcinii q este:

$$dE_p = -\delta L = -q\vec{E}d\vec{l} \tag{5.25}$$

Diferenţa de potenţial este:

$$dV = \frac{dE_p}{q} = -\vec{E}d\vec{l} \tag{5.26}$$

Vom considera cazul unui câmp electrostatic care are numai componenta după axa Ox: $dE = E_x\vec{e}_x$. Deoarece $d\vec{l} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$ rezultă:

$$dV = -E_x dx$$

şi

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

Dacă câmpul este uniform $E_x = const.$ şi atunci

$$\Delta V = -E_x \Delta x \tag{5.27}$$

Relaţia (5.27) ia în considerare faptul că intenstatea câmpului electric este îndreptată de valori mari ale potenţialului la valori mici ale acestuia. Dacă nu se ţine cont de acest lucru şi se consideră difernţa de potenţia ΔV o cantitate pozitivă, iar $\Delta x = d$, rezultă că

$$\Delta V = Ed \tag{5.28}$$

unde E_x a fost notat cu E. În relaţia (5.28) d este considerat de-a lungul unei linii de câmp.

În cazul general vom considera că intensitatea câmpului electric are componente după toate cele trei axe de coordonate:

$$\vec{E} = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_{zs}\vec{e}_z$$

Se exprimă lucrul mecanic efectuat de câmpul electric în două moduri:

$$\delta L = \vec{F}d\vec{l} = q\vec{E}d\vec{l} = qE_x dx + qE_y dy + qE_z dz \tag{5.29}$$

şi

$$\delta L = -q dV = -q\left[V(x+dx, y+dy, z+dz) - V(x,y,z)\right]$$

$$\delta L = -q\left[V(x,y,z) + \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz - V(x,y,z)\right]$$

$$\delta L = -q\left[\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right] \tag{5.30}$$

Comparând expresiile 5.29 şi 5.31, şi ţinând cont că dx, dy, dz sunt arbitrare rezultă:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x},\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y},\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Astfel expresia intensităţii câmpului electric este:

$$\vec{E} = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z\right] = -\operatorname{grad} V = -\nabla V \tag{5.31}$$

5.1.9 Conductori în echilibru electrostatic

Un conductor este un corp care posedă sarcini (de regulă electroni) care se pot mişca cvasiliber în interiorul său. El se află în echilibru electrostatic dacă sarcina cvasiliberă din interiorul său nu suferă o mişcare ordonată.

În cazul echilibrului electrostatic câmpul electric este egal cu zero în interiorul conductorului iar potenţialul este constant.

Pentru a demonstra prima parte a acestei afirmaţii se consideră că intensitatea câmpului electric în conductori este diferită de zero. Atunci electronii liberi vor fi puşi într-o mişcare ordonată în sens contrar câmpului, fapt ce ar însemna că nu ne găsim în condiţii de echilibru electrostatic aşa cum am presupus. Rezultă că în conductori câmpul este nul. Datorită acestui fapt conform ecuaţiei 5.31 rezultă că potenţialul este constant în toate punctele din interiorul conductorului.

Sarcina electrică netă este repartizată în întregime pe suprafaţa conductorilor şi nu în interiorul lor.

Pentru a arăta acest lucru imaginăm o suprafaţă închisă S în interiorul unui conductor pentru care aplicăm legea lui Gauss. Deoarece în interiorul conductorului şi deci şi pe suprafaţa S intensitatea câmpul electric este nulă:

$$\iint_S \vec{E}d\vec{S} = 0 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

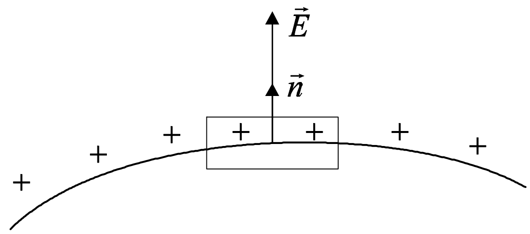


Figura 5.7: Câmpul electric la suprafaţa unui conductor

De aici rezultă că sarcina Q_{int} din interiorul suprafeţei este nulă. Cum suprafaţa considerată poate lua orice formă, aceasta poate fi făcută să tindă spre suprafaţa conductorului care închide tot volumul său. Rezultă că sarcina din interiorul unui conductor va fi nulă. Sarcina se distribuie pe suprafaţa conductorului.

La suprafaţa unui conductor în echilibru electrostatic câmpul electric este orientat întotdeauna normal la suprafaţa acestuia, iar suprafaţa conductoriului este o suprafaţă echipotenţială.

Dacă intensitatea câmpului electric nu este normală la suprafaţa conductorului, atunci ar exista o componentă tangenţială a câmpului electric. Cum sarcina este dispusă pe suprafaţa conductorului rezultă că această sarcină ar fi pusă în mişcare şi conductorul nu ar mai fi în echilibru electrostatic.

Se va calcula în continuare valoarea câmpului electric la suprafaţa conductorilor cunoscând σ densitatea superficială de sarcină (sarcina de unitatea de suprafaţă). În Fig. 5.7 este reprezentată o porţiune din suprafaţa unui conductor pe care densitatea superficială de sarcină este $+\sigma$. Se consideră o suprafaţă foarte mică sub formă de cilindru cu o bază aflată în interiorul conductorului iar o alta în afară. Bazele cilindrului se aleg astfel încât, pe cea exterioară conductorului, intensitatea câmpului electric să fie perpendiculară pe ea. Se aplică legea lui Gauss pentru această suprafaţă şi se observă că numai integrala prin baza situată în vid aduce o contribuţie diferită de zero la fluxul câmpului (în interiorul conductorului $\vec{E} = 0$ iar pe feţele laterale $\vec{E} \perp \vec{n}$). Atunci:

$$\iint_S \vec{E} d\vec{S} = E\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0} \qquad (5.32)$$

unde $\sigma\Delta S$ este sarcina totală din interiorul suprafeţei considerate. Din (5.32) rezultă câmpul la suprafaţa conductorului:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{5.33}$$

Aplicaţie

Să se determine potenţialul unei sfere conductoare de rază R încărcată cu sarcina Q.

Soluţie:

Deoarece în interiorul sferei câmpul electric este nul, potenţialul tuturor punctelor sferei este acelaşi. Cunoscând câmpul determinat de sarcina Q (5.23) şi considerând că la infinit potenţialul creat de sarcina de pe sfera este nul, rezultă:

$$V = \int_R^\infty E\left(r\right) dr = \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

5.1.10 Densitatea de energie a câmpului electric

Pentru aceasta vom considera un caz particular şi anume energia înmagazinată într-un condensator plan.

Un condensator constă din două conductoare încărcate cu sarcini electrice egale şi de sens contrar. Definim capacitatea unui condensator ca raportul dintre sarcina de pe armături şi diferenţa de potenţial dintre ele.

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \tag{5.34}$$

Unitatea de măsură a capacităţii este faradul

$$1\text{F} = \frac{1\text{C}}{1\text{V}}$$

Condensatorul plan este format din două armături plane egale, paralele aflate la o distanţă d una de alta.

Pentru a se calcula diferenţa de potenţial dintre cele două armături este necesar să se calculeze câmpul electric creat de un conductor plan infinit încărcat astfel încât σ densitatea de sarcină are aceiaşi valoare în orice punct al suprafeţei.

Din motive de simetrie, câmpul electric $\vec{E}$ este perpendicular pe suprafaţă. Alegem o suprafaţă cilindrică astfel încât cele două baze ale sale să fie simetrice faţă de suprafaţa încărcată. Fluxul prin suprafaţa respectivă este:

$$\Phi = \Phi_{baze} + \Phi_{lateral} = 2ES$$

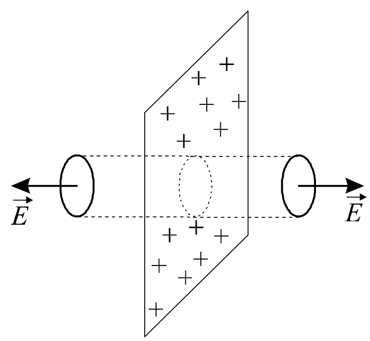


Figura 5.8: Câmpul creat de o distribuţie plană de sarcini electrice.

deoarece fluxul pe suprafaţa laterală $\Phi_{lateral} = 0$, $\vec{E}$ fiind paralel cu aceasta adică per,pendicular pe normala la suprafaţă, iar $\Phi_{baze} = 2ES$.

Dar $\Phi = q/\varepsilon_0$ unde $q = \sigma S$ este sarcina din interiorul cilindrului. Rezultă:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{5.35}$$

Revenind la cazul condensatorului plan se observă că în interior câmpul este suma câmpurilor create de sarcinile pozitivă şi cea negativă de pe cele două armături (se neglijează efectele de margine):

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

deoarece cele două câmpuri sunt orientate în acelaşi sens. Cum $\Delta V = Ed$:

$$C = \frac{Q}{Ed} = \varepsilon_0 \frac{\sigma S}{\sigma d} = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \tag{5.36}$$

Presupunem că la un moment dat condensatorul este încărcat cu sarcina q. Pentru a mări sarcina de pe condensator cu cantitatea dq trebuie să se transfere sarcina dq de pe placa încărcată negativ pe cea încărcată pozitiv. Lucrul mecanic efectuat (din exterior) este:

$$\delta L = (\Delta V)\, dq = \frac{q}{C} dq$$

Dar W energia înmagazinată în condensator este egală cu lucrul mecanic efectuat la încărcarea condensatorului:

$$L = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} C\, (\Delta V)^2$$

Cum $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$, $\Delta V = Ed$ rezultă:

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 (dS)$$

Cum volumul în care se află câmpul electric este $V = Sd$, densitatea de energie a câmpului electric va fi:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \tag{5.37}$$

Această relaţie, deşi a fost dedusă pentru un caz particular este valabilă pentru orice câmp electric.

Aplicaţie

Să se determine capacitatea unui condensator sferic care constă din două sfere concentrice de raze R_1 şi R_2.

Soluţie:

Presupunem că sfera cu raza mai mică este cea cu raza R_1 pe care se află sarcina negativă $-Q$. Câmpul electric între cele două sfere este:

$$E = E(Q) + E(-Q) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + 0$$

unde $R_1 < r < R_2$. Am ţinut cont că în interiorul sferei încărcată cu sarcina $-Q$, câmpul este nul. Diferenţa de potenţial dintre cele două sfere este:

$$V_2 - V_1 = -\int_{R_1}^{R_2} Edr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Capacitatea condensatorului este

$$C = \frac{Q}{V_2 - V_1} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_2 R_1}{(R_2 - R_1)}$$

Aplicaţie

Să se arate că energia asociată cu o sferă conductoare de rază R încărcată cu sarcina Q este

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R}$$

Soluţie

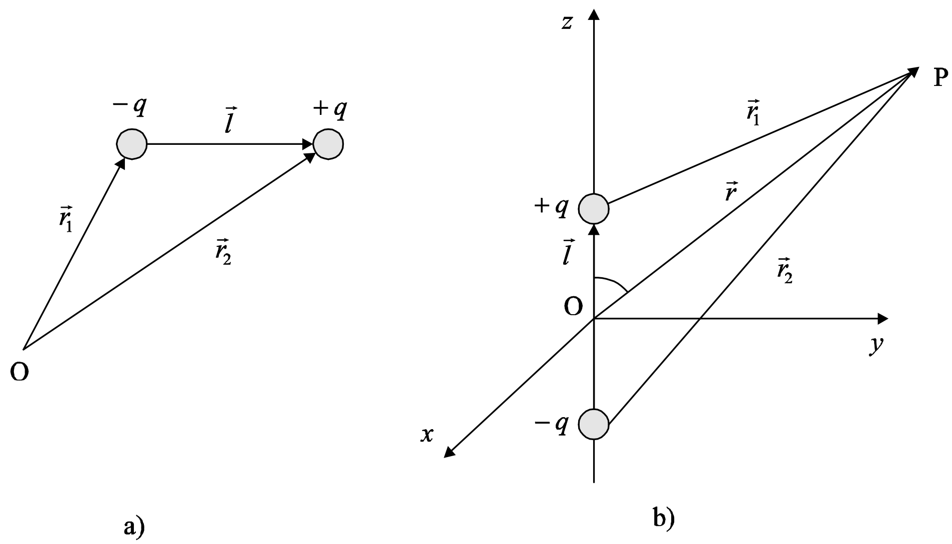


Figura 5.9: a) Dipol electric b) Calculul potenţialului creat de un dipol. Originea se află la mijlocul distanţei dintre cele două sarcini.

Când pe sferă se află sarcina q potenţialul sferei este:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Pentru a se aduce o sarcină dq pe sferă trebuie să se efectueze un lucru mecanic egal cu:

$$\delta L = V dq = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} dq$$

Astfel:

$$W = L = \int_0^Q \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} dq = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{R}$$

5.2 Dielectrici

5.2.1 Dipol electric

Dipolul electric este un sistem de două sarcini de mărimi egale şi de semne contrare aflate la o distanţă l una faţă de cealaltă (Fig 5.9a).

Definim momentul de dipol

$$\vec{p} = q\vec{r}_1 - q\vec{r}_2 = q\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = q\vec{l} \tag{5.38}$$

Potenţialul creat de un dipolul electric este egal cu suma potenţialelor create de fiecare sarcină în parte. Se va considera cazul în care punctul în care se calculează potenţialul se află la o distanţă mult mai mare decât distanţa dintre sarcinile dipolului. Se presupune că sarcinile sunt situate pe axa Oz. Potenţialul în punctul P va fi (Fig. Fig 5.9b):

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \tag{5.39}$$

unde:

$$r_2^2 = r^2 + \frac{1}{4}l^2 - lr\cos\theta = r^2\left(1 + \frac{l^2}{4r^2} - \frac{l}{r}\cos\theta\right)$$

$$r_1^2 = r^2 + \frac{1}{4}l^2 + lr\cos\theta = r^2\left(1 + \frac{l^2}{4r^2} + \frac{l}{r}\cos\theta\right)$$

Deoarece s-a presupus că $r \gg l$ atunci:

$$\frac{1}{r_2} = \left(r_2^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{l^2}{4r^2} - \frac{l}{r}\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{l}{2r}\cos\theta + ...\right)$$

$$\frac{1}{r_1} = \left(r_1^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{l^2}{4r^2} + \frac{l}{r}\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{l}{2r}\cos\theta + ...\right)$$

Rezultă:

$$V = \frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{5.40}$$

Se observă că $\vec{p}\vec{r} = p\,r\cos\theta = qlr\cos\theta$. Relaţia (5.40) se poate scrie:

$$V = \frac{\vec{p}\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{5.41}$$

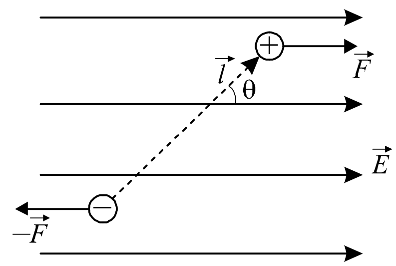


Figura 5.10: Efectul câmpului electric asupra unui dipol electric.

Dipol plasat în câmp electric extern

Presupunem dipolul ca fiind plasat într-un câmp electric extern $\vec{E}$ (Fig. 5.10). Câmpul electric extern este determinat de o altă distribuţie de sarcină. Forţele care acţionează asupra fiecărei sarcini sunt $\vec{F} = q\vec{E}$ şi $-\vec{F} = -q\vec{E}$. Cele două forţe formează un cuplu care are tendinţa să alinieze dipolul paralel cu direcţia câmpului electric în care se află. Momentul cuplului care acţionează asupra dipolului este:

$$\vec{M} = \vec{l} \times \vec{F} = \vec{l} \times q\vec{E} = q\left(\vec{l} \times \vec{E}\right) = q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E} \tag{5.42}$$

Modulul acestui moment este

$$M = pE\sin\theta \tag{5.43}$$

Se poate determina energia potenţială a dipolului în câmpul electric. Pentru aceasta se observă că lucrul mecanic efectuat de câmpul electric este egal cu minus variaţia energiei potenţiale a dipolului.

$$dE_p = -\delta L = Md\theta = pE\sin\theta d\theta$$

deoarece momentul cuplului tinde să micşoreze unghiul θ şi $d\theta < 0$. Atunci

$$E_{pf} - E_{pi} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} pE\sin\theta d\theta = pE\int_{\theta_i}^{\theta_f} \sin\theta d\theta = pE\left(\cos\theta_i - \cos\theta_f\right) \tag{5.44}$$

Termenul care conţine pe θ_i este o constantă care depinde de orientarea iniţială a dipolului. Este convenabil să utilizăm ca poziţie de referinţă poziţia în care $\theta_i = 90^{\circ}$ în care alegem $E_{pi} = 0$. Energia potenţială este:

$$E_p = -pE\cos\theta = -\vec{p}\vec{E}$$

expresie în care am neglijat indicele f.

5.2.2 Dipoli electrici la nivel atomic şi molecular

Dipoli electrici induşi în atomi

Atomul este un sistem format dintr-un nucleu în jurul căruia se rotesc electronii cu viteze de 10^6 m/s. Deoarece raza atomică este de aproximativ $10^{-9} - 10^{-10}$ m, la scară macroscopică nu poate fi observată decât media acestor mişcări. Astfel imaginea fizică a unui atom dintr-un dielectric, se apropie de imaginea dată de mecanica cuantică care consideră că nucleul pozitiv este înconjurat de un nor de sarcină negativă. În general norul este uniform distribuit în jurul nucleului şi centrul sarcinilor negative (determinate de electroni) coincide cel al sarcinilor pozitive (nucleul), astfel că momentul de dipol al moleculelor este nul.

Dacă atomul este introdus într-un câmp electric atunci nucleul este deplasat în sensul câmpului în timp ce norul electronic este deplasat în sens contrar până se ajunge din nou într-o stare de echilibru stabil. Un astfel de atom prezintă un moment electric de dipol. Spunem că atomul este polarizat iar dipolul astfel format poartă numele de dipol indus. Se demonstrează că moemtul de dipol indus este proporţional cu intensitatea câmpului electric:

$$p = \alpha E$$

unde α poartă numele de polarizabilitate.

Aplicaţie

Un model simplu al atomului de hidrogen este acela în care acesta constă dintr-un nucleu cu sarcina $+e$, înconjurat de un nor electronic cu sarcina $-e$ cu raza $a = 0,529$ Å. Să se calculeze polarizabilitatea acestui atom.

Soluţie:

În prezenţa unui câmp electric, nucleul se va deplasa în sensul câmpului electric iar norul electronic în sens invers. Distanţa dintre nucleu şi centrul sarcinilor negative devine d, astfel că apare dipolul indus $p = ed$. Asupra nucleului acţionează forţa datorată câmpului electric eE şi, în sens contrar, forţa determinată de norul electronic eE_e. La echilibru cele două forţe sunt egale. Atunci:

$$E = E_e$$

Calculul câmpului electric datorat norului electronic E_e se face cu legea lui Gauss. Se consideră o sferă de rază d, cu centrul în centrul sarcinilor negative. Atunci:

$$4\pi d^2 E_e = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{3e}{4\pi a^3}\frac{4\pi d^3}{3}\frac{1}{\varepsilon_0}$$

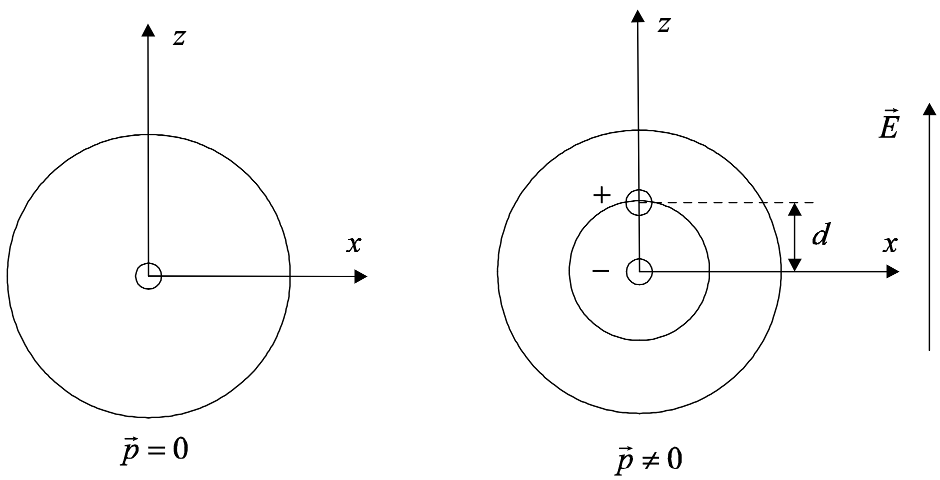


Figura 5.11: Atomul de hidrogen în câmp electric.

$$E_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ed}{a^3}$$

Astfel:

$$p = ed = \left(4\pi\varepsilon_0 a^3\right) E$$

Rezultă polarizabilitatea $\alpha = 4\pi\varepsilon_0 a^3$.

În Tabelul 5.1 sunt date polarizabilităţile câtorva atomi

Tabel 5.1
Polarizabilităţi

Atom	α [F·m^2]
H	$7,34 \times 10^{-41}$
He	$2,34 \times 10^{-41}$
Ne	$4,45 \times 10^{-41}$
C	$6,68 \times 10^{-41}$
Li	$14,48 \times 10^{-41}$
Na	$304,40 \times 10^{-41}$
K	$378,40 \times 10^{-41}$

Se observă că pentru gazele nobile He, Ne, Ar unde atomii sunt puternic legaţi de nucleu polarizabilitatea este mică. În cazul elementelor alcaline unde electronii de valenţă sunt slab legaţi de nucleu polarizabilitatea este mai mare.

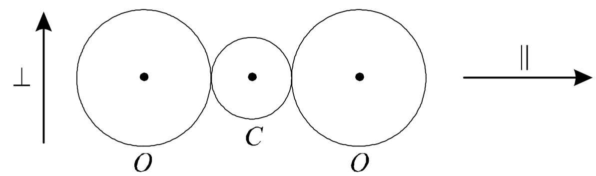


Figura 5.12: Molecula CO_2

Dipoli induşi în molecule nepolare

Există molecule unde centrul sarcinilor negative coincide cu centrul sarcinilor pozitive. Astfel de molecule poartă numele de molecule nepolare. Există două tipuri de astfel de molecule unele cu simetrie sferică şi altele cu simetrie mai joasă.

Moleculele cu simetrie sferică precum CH_4 sau BCl_3 au un moment de dipol $\vec{p} = \alpha\vec{E}$. Trebuie remarcat că polarizabilitatea lor moleculară nu este suma polarizabilităţilor atomilor constituenţi.

În cazul moleculelor care nu au simetrie sferică precum CO_2 (Fig. 5.12) polarizabilitatea moleculelor depinde de direcţia câmpului extern. Pentru această moleculă $\alpha_{||} > \alpha_{\perp}$ unde $||$ şi $\perp$ se referă la orientarea câmpului faţă de axa lungă a moleculei. Astfel când câmpul este aplicat de-a lungul moleculei va induce un moment de dipol mai mare decât atunci când câmpul este aplicat perpendicular pe aceasta. Acest lucru rezultă din faptul că molecula este mai uşor deformabilă în lungul axei propri decât într-o direcţie perpendiculară.

Dipolii moleculelor polare

Există molecule care datorită structurii lor chiar în absenţa unui câmp electric exterior posedă un moment electric dipolar, deoarece centrul sarcinilor pozitive nu coincide cu centrul sarcinilor negative. Orice moleculă biatomică formată din atomi de natură diferită posedă momente de dipol permanente. Această proprietate se datorează faptului că la formarea unor astfel de molecule, ca de exemplu HCl, HBr sau HI, o parte din norul electronic al atomului de hidrogen se transferă ionilor de clor, brom sau iod. Rămâne astfel un exces de sarcini de sarcină pozitivă la extremitatea moleculei ce conţine ionul de hidrogen şi un exces de sarcină negativă la cealălată extremitate. În Tabelul 5.2 sunt prezentate diverse valori pentru dipoli electrici.

Tabelul 5.2

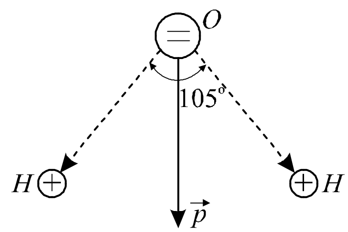


Figura 5.13: Molecula de apă

Valori ale dipolilor pentru diverse molecule

Moleculă	p [Cm]
CO	$7,34 \times 10^{-30}$
HI	$2,34 \times 10^{-30}$
HB_2	$4,45 \times 10^{-30}$
HCl	$17,8 \times 10^{-30}$
NH_2	$6,68 \times 10^{-30}$
H_2S	$14,48 \times 10^{-30}$

Un alt exemplu de moleculă care posedă moment electric permanent este molecula de apă care are centrul sarcinilor negative în apropierea oxigenului (5.13). Practic momentul de dipol electric este determinat prin compunerea celor două momente de dipol O−H. El are valoarea

$$p = 6,2 \times 10^{-30}\ \mathrm{C} \cdot \mathrm{m}$$

Aplicaţii

a) Încălzirea apei în cuptoarele cu microunde.

Când funcţionează, cuptoarele cu microunde generează câmpuri electrice care variază extrem de rapid şi fac ca moleculele de apă să intre într-o puternică mişcare de oscilaţie datorită interacţiei câmpului electric şi momentul de dipol al moleculei de apă. Datorită ciocnirilor dintre molecule energia absorbită de la câmpul electric se transformă în energie termică şi apa se încălzeşte.

b) Spălatul cu apă şi săpun.

Grăsimile şi uleiurile sunt formate din molecule nepolare care nu sunt atrase de apă. Apa simplă nu poate îndepărta aceste molecule. Săpunul conţine molecule lungi numite surfactanţi. Unul din capetele moleculei este nepolar şi celălalt capăt acţionează ca o moleculă polară. Capătul polar al surfactantului se leagă de molecula de apă iar capătul nepolar se poate atasa moleculelor de grăsime. Astfel de molecule servesc ca legături între moleculele grăsimilor şi moleculele de apă.

Prin introducerea în câmp electric a unui material în care există molecule cu momente dipolare permanente sau în care se pot induce momente dipolare, dipolii vor tinde să se alinieze paralel cu câmpul electric. Alinierea însă nu va fi una perfectă din două motive:

- agitaţia termică se opune alinierii;

- dipolii însăşi vor determina un câmp electric astfel că asupra fiecărui dipol va acţiona un câmp electric extern şi unul determinat de dipolii vecini.

Totuşi pentru dielectricii omogeni şi izotropi putem considera că dipolii sunt aliniaţi paralel cu câmpul electric.

Ca exemple de dielectrici se pot da: sticla, hârtia, ceramica, materialele plastice. Ele sunt materiale care nu posedă sarcini electrice libere adică nu sunt conductoare. Proprietatea fundamentală a unui dielectric este aceea că în câmpuri electrice materialul se polarizează, adică are loc alinierea dipolilor paralel cu direcţia intensităţii câmpul electric aplicat.

5.2.3 Densitate de polarizare

Polarizarea unui material dielectric este caracterizată de mărimea numită densitate de polarizare care reprezintă momentul de dipol al unităţii de volum:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V} \tag{5.45}$$

unde $\sum \vec{p}_i$ reprezintă suma momentelor de dipol care există în volumul ΔV.

În cazul unui dielectric omogen format dintr-un singur tip de molecule polare cu momentul de dipol $\vec{p}$ care se orientează paralel cu câmpul extern, densitatea de polarizare are expresia:

$$\vec{P} = n\vec{p} \tag{5.46}$$

unde n este concentraţia de dipoli din unitatea de volum.

Densitatea de polarizare a unui material omogen

Fie un dielectric omogen aflat în câmp electric în care datorită orientării dipolilor electrici apare o densitate de polarizare P.

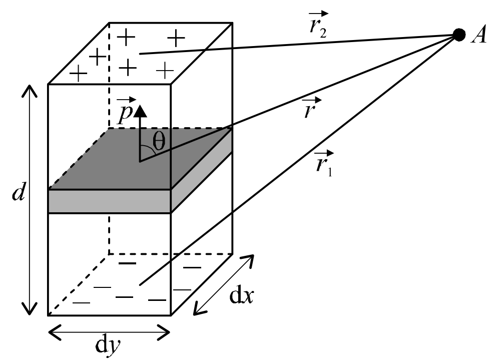


Figura 5.14: Material dielectric uniform polarizat.

Considerăm din acest dielectric o porţiune de grosime d având suprafaţa $dxdy$ (Fig. 5.14). Deoarece dielectricul este omogen şi izotrop direcţia vectorului de polarizare coincide cu direcţia câmpului electric. Un element de volum a cărui înălţime este dz i se poate asocia un moment de dipol egal cu:

$$Pdv = Pdxdydz \tag{5.47}$$

Potenţialul creat de acest element de volum

$$dV = \frac{Pdxdydz\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Deoarece $dr = -dz\cos\theta$, $dS = dxdy$ rezultă:

$$V = -\frac{PdS}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} \tag{5.48}$$

$$V = -\frac{PdS}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{Pd\sigma}{4\pi\varepsilon_0 r_2} - \frac{Pd\sigma}{4\pi\varepsilon_0 r_1} \tag{5.49}$$

Relaţia este echivalentă cu expresia potenţialului creat de două sarcini punctiforme egale şi de sens contrar având valoarea PdS. Rezultă că o placă dielectrică introdusă într-un câmp electric care determină apariţia unei polarizări, poate fi înlocuită cu două distribuţii de sarcini cu densităţile superficiale $\sigma_1 = +P$ şi $\sigma_2 = -P$ pe cele două feţe ale plăcii.

Observaţie: Dacă vectorul $\vec{P}$ nu este normal pe suprafaţa dielectricului densitatea de sarcină de pe suprafaţa dielectricului este egală cu componenta normală a polarizării

5.2.4 Modalităţi de polarizare a unui dielectric

Polarizare electronică

Se manifestă la dielectrici formaţi din molecule sau atomi simetrici în care centrul sarcinilor pozitive coincide cu centrul sarcinilor negative. Aşa cum am spus în prezenţa unui câmp electric are loc o deplasare relativă a centrului sarcinilor negative faţă de nucleu, astfel încât întreg ansamblul atomic se manifestă ca un dipol. Această deplasare nu depinde de agitaţie termică, deoarece în acest caz avem de-a face cu procese la nivel atomic. Astfel densitatea de polarizare este:

$$P = n\alpha_e E \tag{5.50}$$

unde α_e este polarizabilitatea electronică iar n este concentraţia de atomi.

Polarizarea orientaţională

Este prezentă în dielectricii constituiţi din molecule nesimetrice (molecule polare) în care centrul sarcinilor pozitive nu coincide cu centrul sarcinilor negative. Astfel de molecule prezintă un moment dipolar permanent datorită separării sarcinilor de semn contrar. În prezenţa unui câmp electric dipolii tind să se orienteze în direcţia acestuia. În acest caz energia potenţială a unui dipol de moment $\vec{p}$ în câmpul electric $\vec{E}$ este:

$$E_p = -\vec{p}\vec{E} = -pE\cos\theta \tag{5.51}$$

unde α este unghiul făcut de dipol cu câmpul electric.

Pentru a determina densitatea de polarizare a materialului trebuie să se calculeze media proiecţiei momentului de dipol pe direcţia câmpului electric care va fi considerată ca axa Oz. Componentele momentului de dipol pe direcţie perpendiculară a câmpului electric au valori arbitrare si sunt orientate aleatoriu. Media acestora este nulă.

Vom considera că distribuţia direcţiilor momentelor de dipol este o distribuţie Boltzmann. Probabilitatea ca direcţia momentului de dipol să fie în interiorul unghiului solid $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ din jurul direcţiei $\vec{\Omega}$ este:

$$d\mathcal{P} = Ce^{\frac{pE\cos\theta}{k_BT}}\sin\theta d\theta d\varphi$$

Constanta C se obţine din condiţia de normare

$$C\int_0^{\pi} e^{\frac{pE\cos\theta}{k_BT}}\sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 1$$

Atunci

$$d\mathcal{P} = \frac{e^{\frac{pE\cos\theta}{k_BT}}\sin\theta d\theta d\varphi}{\int_0^\pi e^{\frac{pE\cos\theta}{k_BT}}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi}$$

Valoarea medie a proiecţiei momentului dipolar pe direcţia câmpului electric este:

$$\bar{p}_z = \int p\cos\theta d\mathcal{P} = p < \cos\theta >= p\frac{\int_0^\pi e^{\frac{pE\cos\theta}{k_BT}}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi}{\int_0^\pi e^{\frac{pE\cos\theta}{k_BT}}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi} \quad (5.52)$$

Notând cu

$$x = \cos\theta; \quad a = \frac{pE}{k_BT}$$

se obţine:

$$\bar{p}_z = p\frac{\int_{-1}^{+1}xe^{ax}dx}{\int_{-1}^{+1}e^{ax}dx} \quad (5.53)$$

Cele două integrale se calculează astfel:

$$\int_{-1}^{+1}e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}\Big|_{-1}^{1} = \frac{e^a - e^{-a}}{a} = \frac{2}{a}\frac{e^a - e^{-a}}{2} = \frac{2}{a}\mathrm{sh}a$$

unde sh$a$ este sinusul hiperbolic

$$\int_{-1}^{+1}ae^{ax}dx = \frac{d}{da}\left[\int_{-1}^{+1}e^{ax}dx\right] = \frac{d}{da}\left[\frac{2}{a}\mathrm{sh}a\right] = \frac{2\mathrm{ch}a}{a} - \frac{2\mathrm{sh}a}{a^2}$$

Atunci:

$$\bar{p}_z = p\frac{\frac{2\mathrm{ch}a}{a} - \frac{2\mathrm{sh}a}{a^2}}{\frac{2}{a}\mathrm{sh}a} = p\left(\coth a - \frac{1}{a}\right) = pL\left(a\right)$$

unde ch$a$ este cosinus hiperbolic iar $\coth a$ este cotangenta hiperbolică. $L(a)-$ poartă numele de funcţie Langevin (Fig. 5.15). Atunci densitatea de polarizare este:

$$P = n\bar{p}_z = npL\left(-\frac{pE}{k_BT}\right)$$

În cazul unor câmpuri slabe când $pE \ll k_BT$ şi $a \ll 1$. Atunci relaţia (5.53), ţinând cont că $e^{ax} = 1 + ax$, devine:

$$\bar{p}_z = p\frac{\int_{-1}^{+1}x(1+ax)dx}{\int_{-1}^{+1}(1+ax)dx} = p\frac{a}{3}$$

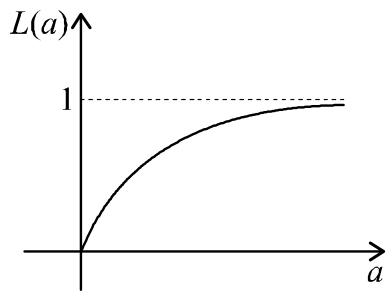


Figura 5.15: Funcţia Langevin.

Rezultă:

$$P = np\frac{a}{3} = np\frac{pE}{3k_BT} = n\frac{p^2}{3k_BT}E \tag{5.54}$$

Dacă exprimăm densitatea de polarizare sub forma $P = n\alpha E$ polarizabilitatea (orientaţională) este:

$$\alpha = \frac{p^2}{3k_BT} \tag{5.55}$$

5.2.5 Permeabilitatea şi susceptibilitatea

Considerăm un condensator plan a cărui capacitate este C_0 (Fig. 5.16). Dacă în interiorul consensatorului se introduce un dielectric capacitatea acestuia se modifică la valoarea C. Raportul dintre C şi C_0 poartă numele de permitivitate relativă a dielectricului:

$$\varepsilon_r = C/C_0 \tag{5.56}$$

Permitivitatea relativă este o mărime specifică materialului dielectric respectiv.

Introducerea materialului dielectric în câmpul electric îl polarizează şi apare o sarcină superficială la suprafaţa dielectricului cu densitatea superficială σ_p. Considerăm o suprafaţă Σ pe care aplicăm legea lui Gauss:

$$ES = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sigma - \sigma_p\right)S \tag{5.57}$$

unde σ este densitatea de sarcină pe armăturile condensatorului. Deoarece densitatea de sarcină care apare pe suprafaţa dielectricului este egală cu

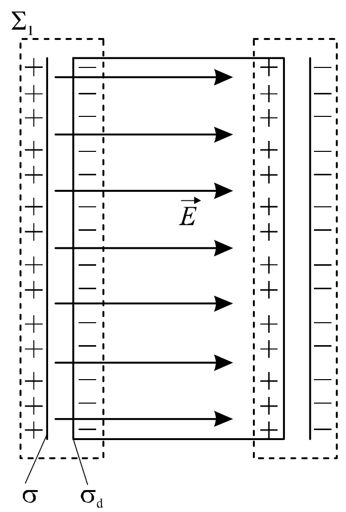


Figura 5.16: Placă de dielectric introdusă în interiorul unui condensator plan

densitatea de polarizare din (5.57) rezultă;

$$\sigma = \varepsilon_0 E + \sigma_p = \varepsilon_0 E + P \tag{5.58}$$

Atunci

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma S}{Ed} = \frac{(\varepsilon_0 E + P)\,S}{Ed} = \left(1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}\right)\frac{\varepsilon_0 S}{d} = \left(1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}\right) C_0 \tag{5.59}$$

Rezultă că:

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E} \tag{5.60}$$

De aici:

$$P = (\varepsilon_r - 1)\,\varepsilon_0 E \tag{5.61}$$

Definim susceptibilitatea electrică ca:

$$\chi_e = \varepsilon_r - 1 \tag{5.62}$$

Astfel densitatea de polarizare se poate scrie ca:

$$P = \chi_e \varepsilon_0 E \tag{5.63}$$

5.2.6 Inducţia câmpului electric

Sarcina de pe armăturile consensatorului este:

$$Q = \sigma S = (\varepsilon_0 E + P)\, S \tag{5.64}$$

Atunci:

$$\frac{Q}{S} = \varepsilon_0 E + P \tag{5.65}$$

Mărimea din partea dreaptă poartă numele de inducţie a câmpului electric:

$$D = \varepsilon_0 E + P \tag{5.66}$$

Deoarece $\vec{E}$ şi $\vec{P}$ sunt vectori şi $\vec{D}$ este un vector:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{5.67}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + (\varepsilon_r - 1)\, \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \tag{5.68}$$

5.2.7 Densitatea de polarizare în cazul materialelor neomogene

Alături de consideraţiile făcute până acum asupra polarizării uniforme este important să se considere şi cazul în care polarizarea nu este uniformă. Acest lucru se datorează neuniformităţii dielectricului sau a variaţiei intensităţii câmpului electric în funcţie de poziţia din interiorul dielectricului. Pentru a putea determina polarizarea trebuie să ţinem cont că în afara sarcinilor induse la suprafaţa dielectricului apar sarcini induse în interiorul acestuia.

Fie un cub în interiorul unui dielectric neutru cu volumul $\delta x \delta y \delta z$ (Fig. 5.17). Cubul este mic la scară macroscopică dar suficient de mare la scară microscopică pentru a conţine suficient de mulţi atomi. Dacă aplicăm un câmp electric acesta se polarizează.

Presupunem pentru simplificare că polarizarea în interiorul cubului este diferită de zero pe direcţia Ox, că este dependentă de x şi independentă de y şi z. O consecinţă a polarizării este deplasarea sarcinilor câmpul electric. Atunci sarcinile de pe feţele cubului perpendiculare pe axa Ox sunt $\sigma\,(x)\,\delta y \delta z = P(x) \delta z \delta y$ şi $-\sigma\,(x + \delta x)\,\delta z \delta y = -P(z + \delta z) \delta z \delta y$, deoarece

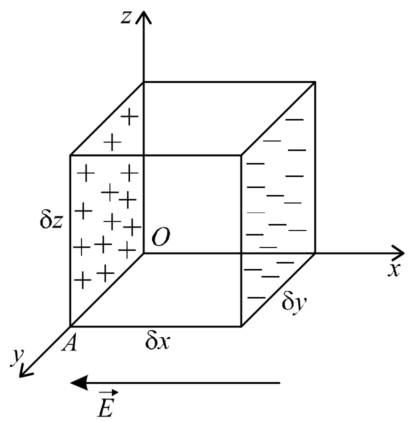


Figura 5.17: Porţiune dintr-un dielectric neomogen aflată în câmp electric

densităţile superficiale de sarcină sunt egale cu densităţile de polarizare. Aceste sarcini determină o sarcină netă:

$$\delta q_p = -\left[P(x+\delta x) - P_x(x)\right]\delta y \delta z = -\frac{\partial P_x}{\partial x}\delta x \delta y \delta z$$

Generalizând în cazul că direcţia câmpului $\vec{E}$ este arbitrară, putem afirma că există contribuţii similare pentru toate componentele lui $\vec{P}$ pe direcţiile Oy şi Oz astfel că sarcina totală δq a cubului este:

$$\delta q_p = -\left[\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right]\delta x \delta y \delta z$$

Atunci densitatea sarcinilor de polarizare este:

$$\rho_p = \frac{\delta q}{\delta x \delta y \delta z} = -\left[\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right] = -\operatorname{div}\vec{P} = -\nabla \vec{P} \tag{5.69}$$

Aplicaţie

O sarcină Q pozitivă este distribuită uniform în interiorul unei sfere de rază R. Să se determine câmpul electric în interiorul sferei. Să se exprime rezultatul şi în funcţie de densitatea volumică de sarcină ρ.

Soluţie:

Considerăm o sferă de rază r în interiorul sferei de rază R concentrică cu aceasta. Sarcina din interiorul sferei de rază r este q. Utilizăm legea lui Gauss:

$$\iint \vec{E}\vec{n}dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

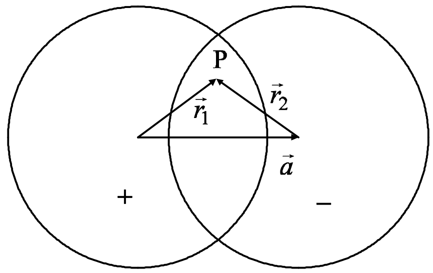


Figura 5.18: Sfere încărcate care se intersectează.

Din considerente de simetrie direcţia câmpului electric are direcţia razei sferei. Atunci:

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Ţinând cont că $q = \rho v = Qv/V$ unde v este volumul sferei de rază r, iar V este volumul sferei de rază R, se obţine

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{v}{V} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{r^3}{R^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}$$

Deoarece $Q = \rho V$ cu $V = 4\pi R^3/3$ intensitatea câmpului electric se mai exprimă ca:

$$E = \frac{\rho V}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

Vectorial această relaţie se scrie astfel:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$$

Aplicaţie

Care este câmpul electric într-o cavitate formată prin intersecţia a două sfere încărcate cu densităţile de sarcina ρ şi $-\rho$ uniform distribuite în volumul lor. Distanţa dintre centrele celor două sfere este a.

Soluţie:

Ţinţnd cont de rezultatele din problema anterioară câmpurile create de cele două sfere încărcate în punctul P (Fig. 5.18) sunt:

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1 \quad \text{şi} \quad \vec{E}_2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_2$$

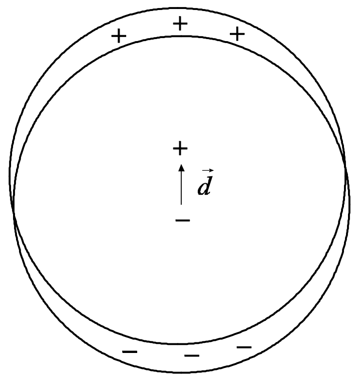


Figura 5.19: Calculul polarizării unei sfere polarizate uniform.

Astfel în punctul P câmpul electric total este:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1 - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$

Aplicaţie

Să se găsească câmpul electric produs în interiorul unei sfere de rază R uniform polarizată, cu densitatea de polarizare $\vec{P}$.

Soluţie:

Considerăm că există două sfere încărcate uniform, o sferă încărcată pozitiv şi o sferă încărcată negativ suprapuse. Dacă cele două sfere se suprapun perfect sarcinile se anulează şi nu există polarizare, deoarece nu există momente electrice.

Dacă deplasăm puţin cele două sfere (Fig. 5.19), cu excepţia capetelor celor două sfere se formează o mulţime de dipoli. Notând cu N numărul de sarcini (dipoli) în unitatea de volum, cu d deplasarea şi cu q mărimea unei sarcini individuale, densitatea de polarizare este:

$$\vec{P} = N\vec{p} = Nq\vec{d} = \rho\vec{d}$$

Dar cum, conform cu rezultatul obţinut în aplicaţia anterioară:

$$\vec{E} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{d}$$

deoarece $\vec{d}$ este vectorul de la centrul sarcinilor negative la centrul sarcinilor pozitive. Rezultă:

$$\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

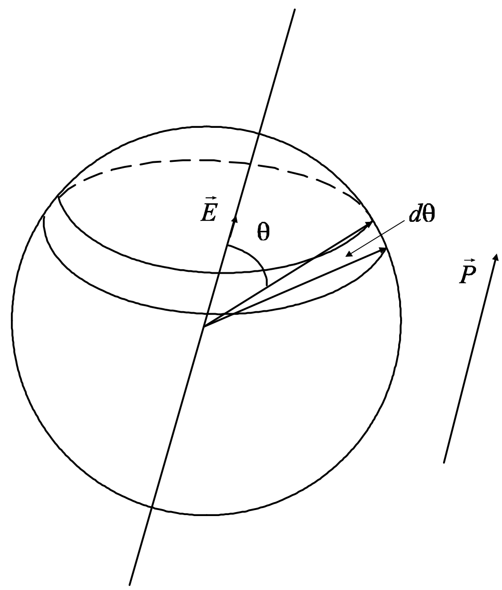


Figura 5.20: Cavitate în interiorul unui dielectric uniform polarizat.

Aplicaţie

Să se determine câmpul electric din centrul unei sfere goale de raza r, aflată într-un material dielectric polarizat având densitatea de polarizare $\vec{P}$.

Soluţie:

Considerăm sfera din interiorul dielectricului ca în Fig. 5.20 şi o dreaptă care trece prin centrul sferei paralele cu $\vec{P}$. Densitatea de sarcină de pe suprafaţă interioară a sferei depinde de polarizare prin relaţia

$$\sigma = -P\cos\theta$$

Pe un inelul de rază $r\sin\theta$ şi de lăţime $rd\theta$ se găseşte sarcina dq

$$dq = \sigma dS = -P\cos\theta\,(2\pi r\sin\theta)\,rd\theta$$

Considerând două sarcini egale diametral opuse pe inelul considerat intenstatea câmpului electric rezultant în centrul sferei este orientat după o direcţie paralelă cu $\vec{P}$ care trece prin acest punct. Astfel intensitatea câmpului creat de sarcina de pe tot inelul în centrul sferei este paralel cu $\vec{P}$ şi are valoarea:

$$dE_p = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta = \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta = -\frac{P\cos^2\theta\sin\theta d\theta}{2\varepsilon_0}$$

Integrând

$$E_p = -\int_0^\pi \frac{P\cos^2\theta\sin\theta d\theta}{2\varepsilon_0} = \frac{P}{3\varepsilon_0}$$

Rezultă:

$$\vec{E} = \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

Aplicaţie

Să se determine relaţia dintre polarizabilitatea α şi permitivitatea relativă ε_r.în cazul unui dielectric omogen, ale cărui molecule nepolare capătă în câmp electric un momentul de dipol indus $\vec{p} = \alpha\vec{E}$. Se cunoaşte N numărul de molecule din unitatea de volum a dielectricului.

Soluţie

Se consideră că fiecare moleculă a dielectricului se află în centrul unei cavităţi sferice din interiorul acestuia. Ea se află sub acţiunea unui câmp electric local care este este suma dintre câmpul electric extern şi câmpul datorat polarizării dielectricului.

$$\vec{E}_{local} = \vec{E} + \vec{E}_d = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} = \vec{E} + \frac{\varepsilon_0\chi_e\vec{E}}{3\varepsilon_0} = \left(1 + \frac{\chi_e}{3}\right)\vec{E}$$

Densitatea de polarizare este

$$\vec{P} = N\vec{p} = N\alpha\vec{E}_{local}$$

Atunci:

$$\varepsilon_0\chi_e\vec{E} = N\alpha\left(1 + \frac{\chi_e}{3}\right)\vec{E}$$

Rezultă:

$$\alpha = \frac{\varepsilon_0\chi_e}{N\left(1 + \frac{\chi_e}{3}\right)}$$

Cum:

$$\chi_e = \varepsilon_r - 1$$

Atunci:

$$\alpha = \frac{3\varepsilon_0\left(\varepsilon_r - 1\right)}{N\left(\varepsilon_r + 2\right)}$$

Acestă relaţie poartă numele de formula Clausius - Mossotti.

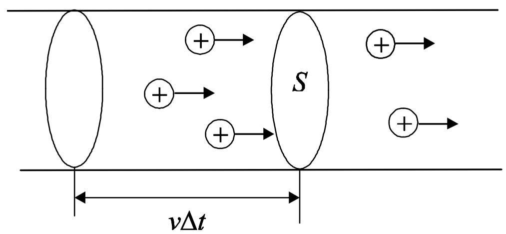


Figura 5.21: Deplasarea sarcinilor electrice prin suprafaţa S

5.3 Curentul electric

Prin curent electric se înţelege deplasarea dirijată a sarcinilor electrice sub acţiunea unui câmp electric. De exemplu în cazul unui metal aflat la o temperatură diferită de 0 K, electronii de conducţie sunt într-o continuă stare de agitaţie termică. Prin aplicarea unui câmp electric, peste mişcarea de agitaţie termică se suprapune o mişcare dirijată în sens invers câmpului electric.

Un mediu care conţine purtători cvasiliberi capabili să se deplaseze sub acţiunea unui câmp electric poartă numele de conductor.

Un mediu fără purtători de sarcini capabile să se deplaseze sub acţiunea unui câmp electric poartă numele de izolator.

5.3.1 Mărimi ce caracterizează curentul electric

Pentru a defini curentul mai precis presupunem că sarcinile se mişcă perpendicular pe o suprafaţă de arie S (Fig. 5.21).

Curentul reprezintă sarcina netă care traversează aria S în unitatea de timp. Dacă în intervalul de timp Δt prin suprafaţa S trece sarcina ΔQ intensitatea medie a curentului care trece este:

$$I_m = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{5.70}$$

Dacă în intervale de timp egale prin suprafaţa S trec cantităţi diferite de sarcini, este necesar să se definească intensitatea instantanee a curentului. Pentru aceasta se face ca intervalul de timp Δt să tindă la zero:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \tag{5.71}$$

În sistemul internaţional de unităţi (SI) intensitatea curentului este o mărime fizică fundamentală iar unitatea sa de măsură este Amperul (A)

$$1\mathrm{A} = 1\mathrm{C}/1\mathrm{s} \tag{5.72}$$

Relaţia (5.72) nu este o relaţie de definiţie pentru Amper. Relaţia de mai sus poate fi utilizată mai degrabă pentru definirea unităţii de sarcină care este coulombul.

Sarcinile care pot trece prin suprafaţa S pot fi pozitive sau negative. În mod convenţional se consideră că sensul de curgere al curentului este acelaşi cu sensul în care s-ar deplasa sarcinile electrice pozitive în interiorul conductorului. Astfel când se discută despre curent într-un metal (de exemplu cupru) direcţia de deplasare a curentului este opusă direcţiei de deplasare a electronilor.

Densitatea de curent

Considerăm un conductor omogen şi izotrop în care concentraţia purtătorilor de sarcină q este n şi care se deplasează cu viteza medie $\vec{v}$ pe direcţia câmpului, numită viteză de drift. Dacă sarcinile sunt pozitive viteza de drift este orientată în sensul intensităţii câmpului, iar dacă sarcinile sunt negative viteza este orientată în sens contrar. În intervalul de timp Δt, toţi purtătorii de sarcină din cilindrul cu aria bazei S şi înălţime $v\Delta t$ vor trece prin secţiunea S din dreapta (Fig. 5.21). Deoarece numărul de purtători de sarcină din cilindru este:

$$N = nSv\Delta t \tag{5.73}$$

sarcina care trece prin aria bazei este $\Delta Q = Nq = nSvq\Delta t$. Atunci intensitatea curentului este:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nvqS \tag{5.74}$$

Densitatea de curent se defineşte ca fiind sarcina ce trece în unitatea de timp prin unitatea de suprafaţă:

$$j = \frac{I}{S} = nqv \tag{5.75}$$

Deoarece viteza este o mărime vectorială, rezultă că şi densitatea de curent este o mărime vectorială:

$$\vec{j} = nq\vec{v}$$

Acest rezultat poate fi generalizat, în cazul că în materialul respectiv există mai multe tipuri de purtători de sarcină cu concentraţiile n_i, viteze de drift $\vec{v}_i$ şi sarcinile q_i:

$$\vec{j} = \sum \vec{j}_i = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i \tag{5.76}$$

Dacă conductorul este neomogen concentraţia purtătorilor de sarcină depinde de poziţie $n = n(x, y, z)$ astfel că şi densitatea de curent este diferită de la punct la punct. Rezultă că densitatea de curent $\vec{j} = \vec{j}(x, y, z)$ este o mărime care caracterizează local curentul electric. În acest caz pentru a determina intensitatea curentului printr-o suprafaţă S, împărţim suprafaţa S într-o mulţime de suprafeţe elementare dS. Dacă direcţia densităţii de curent nu este perpendiculară pe suprafaţa dS, la intensitatea curentului contribuie doar componenta normală pe suprafaţa dS a densităţi de curent. Atunci curentul dI care trece prin suprafaţa elementară dS este:

$$dI = \vec{j}\vec{n}dS = \vec{j}d\vec{S} \tag{5.77}$$

Pentru determinarea curentului total ce trece prin suprafaţa S se integrează relaţia (5.77) pe întreaga suprafaţă considerată:

$$I = \iint_S dI = \iint_S \vec{j}d\vec{S} \tag{5.78}$$

5.3.2 Ecuaţia de continuitate

Fie o suprafaţă închisă S în interiorul unui conductor care cuprinde volumul V. Normala la suprafaţa închisă fiind îndreptată întotdeauna înspre exteriorul acesteia, integrala $\iint_S \vec{j}d\vec{S}$ reprezintă sarcina care iese în unitatea de timp din volumul V prin S. Conform legii conservării sarcinii, sarcina electrică care iese din volumul V în unitatea de timp este egală cu minus variaţia sarcinii în unitatea de timp d din acest volum. Rezultă:

$$\iint_S \vec{j}d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt} \tag{5.79}$$

Dacă se exprimă Q în funcţie de densitatea de sarcină din volumul V

$$Q = \iiint_V \rho dv \tag{5.80}$$

atunci

$$\iint_S \vec{j} d\vec{S} + \iiint_V \frac{d\rho}{dt} dv = 0 \tag{5.81}$$

Relaţia poartă numele de ecuaţia de continuitate şi reprezintă legea de conservare a sarcinii electrice.

5.3.3 Teoria clasică a conducţiei în metale

Teoria a fost elaborată în anul 1900 de Drude şi a fost perfecţionată de Lorentz în anul 1910. Teoria se bazează pe ipoteza existenţei gazului electronic în metale adică a existenţei unor electroni cvasiliberi în interiorul acestora. Prin electroni cvasiliberi, se înţeleg electronii de valenţă care nu sunt legaţi de nici un atom al reţelei cristaline şi care se pot deplasa în interiorul metalului pe distanţe relativ mari.

Conform acestei teorii în absenţa câmpului electric electronii se mişcă haotic în toate direcţiile care este analoagă cu mişcarea de agitaţie termică a moleculelor unui gaz. Când se aplică un câmp electric electronii sunt supuşi unei forţe care le imprimă o mişcare direcţionată pe direcţia câmpului, mişcare care sse suprapune peste mişcarea lor haotică. În mişcarea lor electronii suferă ciocniri cu ionii reţelei cristaline care la rândul lor execută mişcări oscilatorii. După fiecare ciocnire electronii îşi pierd "memoria", adică viteza căpătată prin accelerare în câmp electric revine la zero. Astfel dacă timpul mediu dintre două ciocniri este τ, viteza căpătată de electron înainte de ciocnire este:

$$v = a\tau = \frac{eE}{m_e}\tau \tag{5.82}$$

unde cu m_e se notează aşa numita masă efectivă a electronului. Noţiunea de masă efectivă este introdusă deoarece electronul sub acţiunea câmpului electric E se mişcă nu în spaţiu liber, ci în câmpul reţelei cristaline a metalului. Astfel electronii se mişcă în interiorul metalelor cu o de viteză de drift egală cu viteza medie pe care o capătă între două ciocniri cu ionii reţelei cristaline:

$$v_d = \frac{v}{2} = \frac{eE}{2m_e}\tau \tag{5.83}$$

Atunci densitatea de curent se exprimă ca:

$$j = nev_d = \frac{ne^2\tau}{2m_e}E \tag{5.84}$$

Rezultă că densitatea de curent este proporţională cu E. O astfel de dependenţă se numeşte ohmică:

$$j = \sigma E \tag{5.85}$$

Relaţia (5.85) se poate scrie vetorial:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \tag{5.86}$$

unde $\sigma-$ poartă numele de conductivitate. Comparând relaţiile (5.84) şi (5.86) rezultă:

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{2m_e}$$

Relaţia $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ este valabilă pentru un mare număr de materiale inclusiv semiconductori. Dacă în cazul metalelor variaţia lui σ este foarte mică în funcţie de temperatură, în cazul semiconductorilor această variaţie este importantă, datorită variaţiei concentraţiei purtătorilor de sarcini în funcţie de temperatură.

Legea lui Ohm

Să considerăm un conductor de lungime l şi secţiune S la capătul căruia se aplică o diferenţă de potenţial egală cu U. Câmpul electric în interiorul conductorul este:

$$E = \frac{U}{l}$$

Acest câmp determimă apariţia unei densităţi de curent egală cu:

$$j = \sigma E \tag{5.87}$$

Deoarece $j = I/S$ şi $E = U/l$ relaţia (5.87) se poate scrie ca:

$$\frac{I}{S} = \sigma \frac{U}{l} \tag{5.88}$$

de unde:

$$U = \sigma \frac{l}{S} I = RI \tag{5.89}$$

Mărimea R poartă numele de rezistenţă:

$$R = \sigma \frac{l}{S} \tag{5.90}$$

Rezistenţa se măsoară în Ohmi (Ω).

$$1\Omega = \frac{1\text{V}}{1\text{A}}$$

Inversa conductivităţii σ poartă numele de rezistivitate:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \tag{5.91}$$

Pentru metale rezistivitatea ρ depinde de temperatură după legea:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t) \tag{5.92}$$

unde ρ_0 este rezistivitatea la 0 °C şi α este coeficientul de variaţie cu temperatura al rezistivităţii. În Tabelul 5.3 sunt prezentate o serie de valori ale lui ρ_0 şi α.

Tabelul 5.3
Valori ale rezistivităţii ρ şi a coeficientului de variaţie a rezistivităţii cu temperatura α

Material	ρ [Ωm]	α $\left[{}^\circ\text{C}^{-1}\right]$
Argint	$1,59 \times 10^{-8}$	$3,8 \times 10^{-3}$
Cupru	$1,7 \times 10^{-8}$	$3,9 \times 10^{-3}$
Aur	$2,44 \times 10^{-8}$	$3,4 \times 10^{-3}$
Aluminiu	$2,82 \times 10^{-8}$	$3,9 \times 10^{-3}$
Tungsten	$5,6 \times 10^{-8}$	$4,5 \times 10^{-3}$
Fier	10×10^{-8}	$5,0 \times 10^{-3}$
Platină	11×10^{-8}	$3,92 \times 10^{-3}$
Plumb	11×10^{-8}	$3,9 \times 10^{-3}$
Carbon	3500×10^{-8}	$-0,5 \times 10^{-3}$

5.3.4 Tensiunea electromotoare

Pentru menţinerea unui curent electric într-un circuit este necesar ca purtătorii de sarcină să fie acţionaţi de forţe care să le asigure deplasarea pe o durată de timp suficient de mare.

Sarcinile electrice transferă în mod continuu şi ireversibil energia lor atomilor din nodurile reţelei cristaline prin efect Joule. Aceasta înseamnă că pe lângă forţele de natură electrostatică asupra sarcinilor acţionează şi forţe de natură neelectrostatică numite forţe imprimate.

Ele iau naştere în anumite puncte ale circuitului în care se găsesc surse de tensiune electromotoare (pile electrice, acumulatoare care transformă energia liberă prin diferite reacţii chimice în energie electrică).

Forţele imprimate determină un câmp electric numit câmp electric imprimat

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}_i}{q} \tag{5.93}$$

Câmpul electric total este suma dintre câmpul electric imprimat şi câmpul electrostatic. Lucrul mecanic efectuat asupra unei sarcini care se deplasează din punctul 1 în punctul 2 este:

$$L_{12} = q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + q_0 \int_1^2 \vec{E}_i d\vec{l} \tag{5.94}$$

$$L_{12} = q_0 \left(V_1 - V_2\right) + q_0\mathcal{E}_{12}$$

unde cu $\mathcal{E}_{12}$ am notat tensiunea electromotoare

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_i d\vec{l} \tag{5.95}$$

Definim căderea de tensiune între punctele 1 şi 2:

$$U_{12} = \frac{L_{12}}{q} = (V_1 - V_2) + \mathcal{E}_{12} \tag{5.96}$$

Se observă că dacă tensiunea electromotoare este nulă, căderea de tensiune este egală cu diferenţa de potenţial. Pentru un circuit închis

$$L = q\oint \vec{E}d\vec{l} + q\oint \vec{E}_i d\vec{l} \tag{5.97}$$

Dar pentru un câmp electrostatic:

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = 0 \tag{5.98}$$

Rezultă că tensiunea electromotoare pe un circuit reprezintă raportul dintre lucrul mecanic efectuat pentru a deplasa sarcina q prin circuit şi acea sarcină:

$$\mathcal{E} = \frac{L}{q} = \oint \vec{E}_i d\vec{l} \tag{5.99}$$

Astfel tensiunea electromotoare ce acţionează într-un circuit este egală cu lucrul mecanic necesar pentru a deplasa unitatea de sarcină pe întregul circuit.

Aplicaţie

Un curent electric are expresia:

$$I = 100 \times \sin 120\pi t \quad \text{Amperi}$$

unde t este exprimat în secunde. Să se calculeze sarcina ce trece printr-o secţiune a conductorului în timpul $t_1 = 1/240$ s.

Soluţie:

$$Q = \int_0^{t_1} I dt = 100 \int_0^{t_1} (\sin 120\pi t)\, dt = -\frac{100}{120\pi} \cos 120\pi t|_0^{t_1} = 0,265 \text{ C}$$

Aplicaţie

Să se determine sarcina de pe un condensator cu capacitatea C care se descarcă pe o rezistenţă R în funcţie de timp. Iniţial condensatorul este încărcat cu sarcina Q. Care este intensitatea curentului care trece prin rezistor.

Soluţie:

La un moment de timp dat tensiunea de pe condensator este:

$$U = \frac{q}{C}$$

Curentul care trece prin rezistenţa R este:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{q}{RC}$$

Cum

$$I = -\frac{dq}{dt}$$

deoarece variaţia sarcinii pe condensator este negativă, rezultă ecuaţia diferenţială:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} \quad \text{şi} \quad \int_Q^q \frac{dq}{q} = \int_0^t -\frac{dt}{RC}$$

Atunci:

$$q = Q \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Produsul RC poartă numele de constanta de timp a circuitului.

5.4 Magnetism

Constatarea proprietăţilor magnetice a fost făcută încă din antichitate, numele de magnet provenind de la numele unei regiuni din Asia Mică "Magnesia" unde se găseau roci cu astfel de proprietăţi.

În 1269 un francez Piere de Maricourt a găsit că direcţiile unor ace lângă un magnet sferic natural formează linii care înconjoară sfera şi trec prin două puncte diametral opuse. Punctele respective au fost numite polii magnetului. Experienţele ulterioare au arătat că indiferent de forma lor magneţii au doi poli: nord (N) şi sud (S) care exercită forţe asupra polilor altui magnet. Astfel interacţiile N-N şi S-S sunt de respingere în timp ce interacţiile N-S sunt întotdeauna de atracţie. Polii au primit numele datorită modului în care un magnet (de exemplu o busolă) se comportă în prezenţa câmpului magnetic terestru. Dacă un ac magnetic este suspendat de centrul său şi se poate mişca liber în plan orizontal, el se va roti până ce polul său nord se va poziţiona către polul nord geografic şi polul sau sud se va poziţiona către sudul geografic. Trebuie remarcat că polul nord geografic din punct de vedere magnetic este un pol sud iar polul sud geografic este din punct de vedere magnetic un pol nord.

În 1600 William Gilbert a realizat o serie de experienţe noi cu o varietate de materiale. Utilizând faptul că magneţii se poziţionează într-o direcţie preferenţială, el a sugerat că Pământul este un magnet uriaş.

În 1750 experimentele realizate cu o balanţă de torsiune au arătat că forţele care se exercită între polii unor magneţi sunt invers proporţionale cu pătratul distanţei dintre polii care interacţionează. Deşi forţele între aceşti poli sunt similare cu cele dintre sarcinile electrice cu privire la modul în care variază cu distanţa, un singur pol magnetic nu a putut fi izolat aşa cum sarcinile pozitive şi cele negative pot fi izolate. Astfel dacă se taie un magnet de-a lungul unui plan perpendicular pe axa ce uneşte cei doi poli se obţin doi magneţi.

În anul 1820 Hans Christian Öersted a găsit o legătură între electricitate şi magnetism. El a descoperit că dacă se aduce un ac magnetic în apropiera unui conductor prin care trece un curent electric, asupra acului magnetic se va exercita o forţă. La puţin timp de la descoperirea lui Öersted, Ampère a arătat că între doi conductori străbătuţi de curent electric se exercită forţe de atracţie sau de respingere în funcţie de sensul curenţilor. Ele nu au aceiaşi natură ca şi forţele care se exercită între sarcinile electrice. Dacă se introduce o placă metalică între cei doi conductori forţa de interacţie dintre ei nu se modifică. S-a presupus că o astfel de forţa are aceiaşi natură ca şi forţa care se exercită între un conductor parcurs de curent electric şi un ac magnetic.

Pentru a găsi o corespondenţă între un ac magnetic şi un conductor străbătut de un curent electric, Ampère a presupus că acul magnetic conţine un număr foarte mare de curenţi microscopici (care formează mici bucle de curent) pe care i-a denumit curenţi moleculari.

Ulterior Maxwell a afirmat că astfel de forţe se exercită între orice sarcini electrice în mişcare. Aceste forţe pot fi atribuite existenţei în jurul sarcinilor în mişcare a unui câmp numit câmp magnetic. În consecinţă putem afirma că sursele câmpului magnetic sunt sarcinile electrice în mişcare.

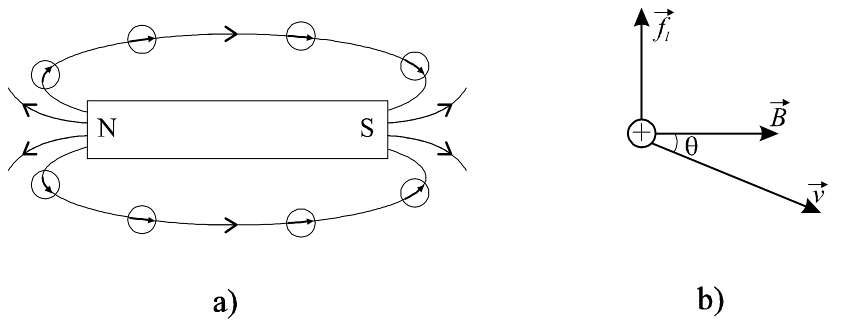


Figura 5.22: a) Liniile de câmp ale unui magnet. b) Direcţia forţei Lorentz faţă de direcţiile vitezei şi câmpului magnetic

5.4.1 Forţa Lorentz. Inducţia câmpului magnetic.

Câmpul magnetic poate fi descris cu ajutorul unui vector $\vec{B}$ numit inducţie a câmpului magnetic. Direcţia lui $\vec{B}$ este direcţia în care se poziţionează un ac magnetic în punctul respectiv. Ca şi în cazul câmpului electric vom putea defini liniile de câmp magnetic ca fiind curbele la care vectorul $\vec{B}$ este tangent în fiecare punct. În Fig. 5.22a sunt reprezentate liniile de câmp ale unui magnet în formă de bară. Experimental ele se pot trasa cu ajutorul unei busole.

Pentru definirea inducţiei câmpului magnetic se utilizează forţa Lorentz $\vec{f_l}$ care este forţa care acţionează asupra unei particule ce se deplasează în câmp magnetic cu viteza $\vec{v}$ (Fig. 5.22b). Experimental s-a demonstrat că :

$$\vec{f_l} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{5.100}$$

Relaţia (5.100) poate fi privită ca o relaţie de definiţie pentru inducţia câmpului magnetic. În Fig (2.3b) sunt prezentate direcţia şi sensul forţei Lorentz pentru o sarcină pozitivă. Mărimea forţei Lorentz este:

$$f_l = qvB\sin\theta \tag{5.101}$$

Deoarece forţa Lorentz este perpendiculară pe viteză ea este perpendiculară şi pe deplasare. Astfel lucrul mecanic efectuat de forţa Lorentz este nul. Atunci conform teoremei variaţiei energiei cinetice rezultă că variaţia energiei cinetice a unei particule încărcate în câmp magnetic este nulă. În câmp magnetic poate varia doar direcţia vitezei unei particule încărcate nu şi mărimea sa.

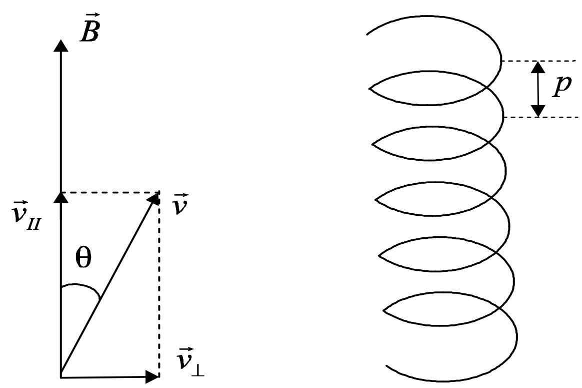


Figura 5.23: Mişcarea elicoidală a unei sarcini care intră sub un unghi diferit de $\pi/2$ într-un câmp magnetic.

Din relaţia 5.101 rezultă că unitatea de măsură pentru B care poartă numele de Tesla este

$$\mathrm{T}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}\cdot\mathrm{m/s}}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}}$$

O unitate tolerată este gaussul (G):

$$1\mathrm{T} = 10^4\mathrm{G}$$

Aplicaţie

Să se determine ce fel de mişcare execută o particulă de masă m încărcată cu sarcina q care intră cu viteza $\vec{v}$ sub un unghi α într-un câmp magnetic uniform de inducţie $\vec{B}$.

Soluţie:

Se descompune viteza $\vec{v}$ în două componente astfel : $\vec{v}_\perp$ după o direcţie perpendiculară pe direcţia vectorului $\vec{B}$ şi $\vec{v}_\parallel$ după direcţia vectorului $\vec{B}$ (Fig. 5.23). Atunci $\vec{v}_\perp$ determină o mişcare circulară a particulei deoarece tot timpul forţa Lorentz este perpendiculară pe viteză. Deoarece $\vec{f}_l \perp \vec{B}$ şi $\vec{v}_\perp \perp \vec{B}$ forţa Lotentz şi viteza se află în acelaşi plan. Rezultă că forţa Lorentz este o forţă de tip centripet:

$$qv_\perp B = \frac{mv_\perp^2}{R}$$

Din această relaţie rezultă raza mişcării circulare:

$$R = \frac{mv_\perp}{qB} = \frac{mv\sin\alpha}{qB}$$

Componenta $\vec{v}_\parallel$ determină o mişcare uniformă a particulei în lungul direcţiei lui $\vec{B}$ deoarece această componentă nu determină apariţia unei forţe Lorentz:

$$\left|\vec{f_l}\right| = qv_\parallel B\sin 0 = 0$$

Prin suprapunerea mişcării uniforme şi a mişcării circulare se obţine în acest caz o mişcare elicoidală.

O caracteristică a acestei mişcări este pasul elicei care reprezintă deplasarea particulei în lungul direcţiei lui $\vec{B}$ în cursul unei perioade (în timpul când se execută o rotaţie completă).

$$p = v_\parallel T = v_\parallel\frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi mv}{qB}\cos\alpha$$

Aplicaţie

Printr-o placă metalică conductoare paralelipipedică trece un curent I. Curentul trece perpendicular printr-o secţiune de laturi b şi d. Placa se află într-un câmp magnetic uniform de inducţie B paralel cu feţele plăcii aflate la distanţa d una de alta. Să se determine diferenţa de potenţial dintre aceste feţe. Se cunoaşte concentraţia de electroni n din unitatea de volum a metalului din care este realizată placa.

Soluţie

Viteza de drift a electronilor este în sens invers sensului de curgere al curentului. Deoarece electronii se mişcă în câmpul magnetic $\vec{B}$, asupra lor va acţiona o forţă Lorentz

$$f_l = evB$$

al cărei sens este arătat în Fig. 5.24. Atunci faţa D se va încărca cu sarcină negativă iar faţa A cu sarcină pozitivă. Apare un câmp electric $\vec{E}$ care face ca asupra purtătorilor de sarcină să acţioneze şi o forţă electrică $F_E = eE$ care este în sens contrar forţei Lorentz. Pe măsură ce încărcarea feţelor A şi D creşte, creşte şi valoarea forţei electrice. Particulele nu vor mai fi deviate atunci când forţa electrică echilibrează forţa Lorentz.

$$eE = evB$$

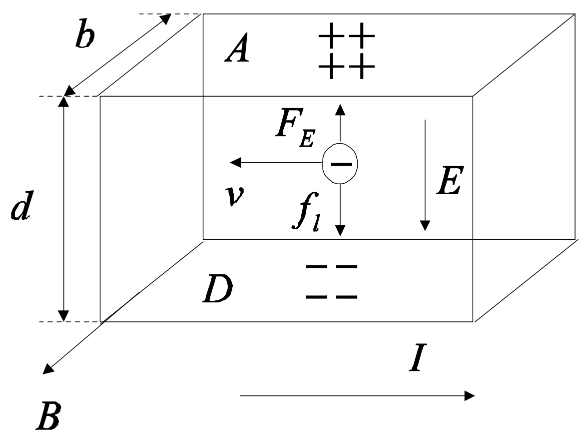


Figura 5.24: Forţele care acţionează asupra unor sarcini electrice ce trec printr-un conductor aflat în câmp magnetic.

Rezultă:

$$E = vB$$

Dacă distanţa dintre feţele A şi D este d, diferenţa de potenţial dintre acestea devine:

$$V_A - V_D = Ed = vBd$$

Ţinând cont de expresia intensităţii curentului electric

$$I = neSv$$

unde n este concentraţia de electroni, e este sarcina electronului, S este secţiunea şi v este viteza de drift a particulelor, rezultă viteza de drift a sarcinilor electrice:

$$v = \frac{I}{neS} = \frac{I}{nedb}$$

Atunci

$$V_A - V_D = \frac{I}{nedb}Bd = \frac{IB}{neb}$$

Trebuie remarcat că diferenţa de potenţial variază invers proporţional cu concentraţia de sarcini electice. Din acest motiv pentru punerea ăn evidenţă a acestui efect, numit efect Hall, este bine să fie utilizat un material semiconductor care are o concentraţie mică de purtători de sarcini.

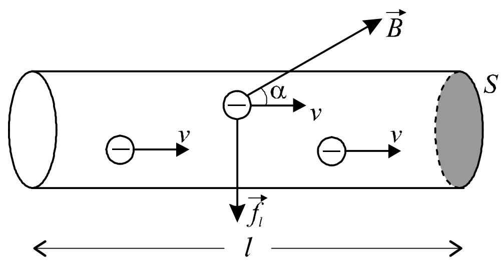


Figura 5.25: Modul în care apare forţa electromagnetică care acţionează asupra unui conductor plasat în câmp magnetic.

5.4.2 Forţa electromagnetică

Dacă asupra unei particule se exercită o forţă atunci când aceasta se deplasează în câmp magnetic, este de aşteptat ca asupra unui conductor prin care trece un curent aflat în câmp magnetic să se exercite o forţă (Fig. 5.25). Să considerăm o porţiune de conductor prin care trece un curent $I = neSv$ aflată în câmp magnetic. Asupra fiecărei sarcini (în cazul nostru electroni) acţionează o forţă Lorentz.

$$\vec{f_l} = e\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{5.102}$$

În porţiunea de conductor considerată numărul de purtători de sarcini este:

$$N = nSl$$

unde n este concentraţia de electroni liberi, S este secţiunea conductorului şi l lungimea conductorului. Atunci forţa totală care acţionează asupra porţiunii de conductor este

$$\vec{F} = N\vec{f_l} = nlSe\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{5.103}$$

Vom introduce în loc de $\vec{v}$ vectorul $\vec{l}$ care are modulul egal cu lungimea porţiuni de conductor şi sensul vitezei. Putem scrie $l\vec{v} = v\vec{l}$.

Atunci

$$\vec{F} = nvSe\left(\vec{l} \times \vec{B}\right) \tag{5.104}$$

$$\vec{F} = I\left(\vec{l} \times \vec{B}\right) \tag{5.105}$$

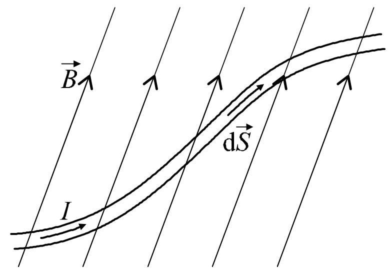


Figura 5.26: Conductor de formă oarecare în câmp magnetic uniform

Să considerăm un conductor având o formă oarecare într-un câmp magnetic uniform (Fig. 5.26).

Forţa care acţionează asupra porţiunii $d\vec{s}$ este

$$d\vec{F} = I\left(d\vec{s} \times \vec{B}\right) \tag{5.106}$$

unde $d\vec{F}$ este perpendicular pe planul hârtiei, înspre cititor. Ecuaţia poate fi considerată ca o ecuaţie alternativă pentru definirea câmpului magnetic $\vec{B}$. Forţa totală care se exercită asupra conductorului este:

$$\vec{F} = I\int_a^b d\vec{s} \times \vec{B} \tag{5.107}$$

unde a şi b reprezintă capetele conductorului.

Considerăm cazul când conductorul formează o curbă închisă şi este plasat într-un câmp magnetic uniform. Atunci

$$\overrightarrow{F} = I\oint d\vec{s} \times \vec{B} = I\left(\oint d\vec{s}\right) \times \vec{B} \tag{5.108}$$

Dar:

$$\oint d\vec{s} = 0 \tag{5.109}$$

Rezultă $\vec{F} = 0$. Putem concluziona că forţa electromagnetică care acţionează asupra oricărei bucle de curent aflată într-un câmp magnetic uniform este nulă.

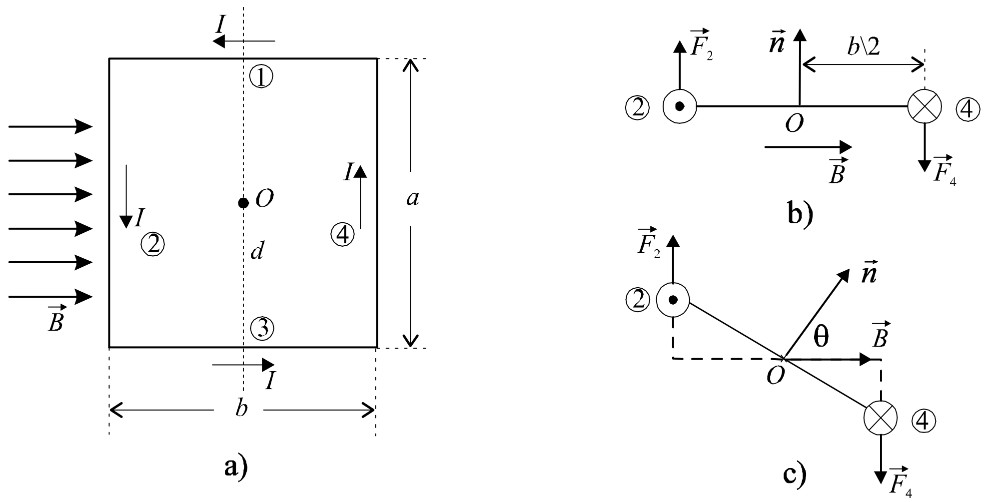


Figura 5.27: a) Buclă dreptunghiulară în câmp magnetic uniform. b) Forţe ce acţionează asupra unei bucle de curent aflată în câmp magnetic când direcţia inducţiei câmpului magnetic este perpendiculară pe direcţia normalei la suprafaţa buclei. c) Forţe ce acţionează asupra unei bucle de curent aflată în câmp magnetic când direcţia inducţie câmpului magnetic face un unghi oarecare cu direcţia normalei la suprafaţa buclei

5.4.3 Buclă de curent în câmp magnetic uniform

Să considerăm o buclă de curent de formă dreptunghiulară într-un câmp magnetic uniform ca în Fig. 5.27a.

Asupra laturilor 1 şi 3 nu acţionează nici o forţă deoarece conductorii respectiv sunt paraleli cu liniile câmpului magnetic.

Forţele electromagnetice acţionează asupra laturilor 2 şi 4 deoarece acestea sunt orientate perpendicular pe câmp. Valorile acestor forţe sunt:

$$F_2 = F_4 = IaB \tag{5.110}$$

Direcţiile lui F_2 şi F_4 sunt arătate în Fig. 5.27b. Forţele sunt egale paralele şi actionează în sensuri contrare. Ele formează un cuplu de forţe care are tendinţa să rotească bucla în jurul axei d. Momentul cuplului faţă de această axă este:

$$M = F_2 \frac{b}{2} + F_4 \frac{b}{2} = IaB\frac{b}{2} + IaB\frac{b}{2} \tag{5.111}$$

$$M = IaB = ISB \tag{5.112}$$

Când bucla este rotită câmpul magnetic şi normala fac un unghi de $\theta < 90^{\circ}$ ca în Fig 5.27c. Forţele F_2 şi F_4 acţionează pe aceiaşi direcţie în sensuri opuse şi rezultanta lor este nulă. Momentul cuplului care acţionează asupra buclei este:

$$M = F_2 \frac{b}{2} \sin\theta + F_4 \frac{b}{2} \sin\theta = IaB\frac{b}{2}\sin\theta + IaB\frac{b}{2}\sin\theta = ISB\sin\theta \quad (5.113)$$

unde $S = ab$. Generalizând, momentul care acţionează asupra unei bucle de curent este:

$$M = IS\left(\vec{n} \times \vec{B}\right) = I\left(\vec{S} \times \vec{B}\right) = \left(I\vec{S}\right) \times \vec{B} \quad (5.114)$$

unde $\vec{S} = S\vec{n}$, iar $\vec{n}$ este normală pe suprafaţa buclei. Putem scrie

Mărimea $I\vec{S}$ poartă numele de moment magnetic de dipol:

$$\vec{m} = I\vec{S} \quad (5.115)$$

Atunci momentul forţei care acţionează asupra buclei se poate scrie ca:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (5.116)$$

Acest moment tinde să alinieze bucla perpendicular pe câmpul magnetic

Putem defini o energie potenţială a buclei de curent în câmpul magnetic extern. Pentru aceasta trebuie calculat lucrul mecanic pe care îl efectuează câmpul asupra buclei când o roteşte cu un unghi.

$$L = -\int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = -\int_{\theta_1}^{\theta_2} mB\sin\theta d\theta = mB(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \quad (5.117)$$

S-a ales $-d\theta$ deoarece în cursul rotirii unghiul θ scade şi $d\theta < 0$. Deoarece

$$\Delta E_p = -L = mB\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right) \quad (5.118)$$

Rezultă:

$$E_p = -ISB\cos\theta + const. \quad (5.119)$$

Considerăm că atunci când $\theta = \pi/2$, $E_p = 0$, rezultă:

$$E_p = -mB\cos\theta = - - \vec{m}\vec{B} \quad (5.120)$$

Aplicaţie

Fie un corp cilindric gol de lungime L având razele R_1 şi R_2 ($R_1 < R_2$) încărcat cu densitatea volumică de sarcină ρ. Să se determine momentul magnetic, dacă cilindrul se roteşte cu viteza unghiulară ω în jurul axei.

Soluţie:

Considerând o porţiune din aflată la distanţa r de grosime dr. Sarcina din această porţiune de material este:

$$dq = (2\pi Lrdr)\,\rho$$

Curentul echivalent datorat rotaţiei acestei sarcini este:

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\omega dq}{2\pi} = \omega L\rho r dr$$

Momentul magnetic determinat de acest curent este:

$$dm = \left(\pi r^2\right) dI = \rho L\omega\pi r^3 dr$$

$$m = L\omega\rho\pi \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{1}{4} L\omega\rho\pi \left(R_2^4 - R_1^4\right)$$

5.4.4 Legătura dintre momentul de dipol magnetic şi momentul cinetic al unui electron

Să considerăm un electron aflat pe o orbită circulară, perioada de rotaţie fiind T. Mişcarea electronului este echivalentă cu un curent

$$I = -\frac{e}{T} = -\frac{e\omega}{2\pi} = -\frac{ev}{2\pi r} \tag{5.121}$$

Semnul minus apare deoarece sarcina electronului este negativă.

$$m = SI = -\pi r^2 \frac{ev}{2\pi r} = -\frac{evr}{2} = -\frac{evrm_e}{2m_e}$$

unde m_e este masa electronului. Cum momentul cinetic orbital este:

$$L = m_e v r$$

rezultă relaţia dintre momentul magnetic de dipol şi momentul cinetic

$$m = -\frac{e}{2m_e} L = -\gamma L \tag{5.122}$$

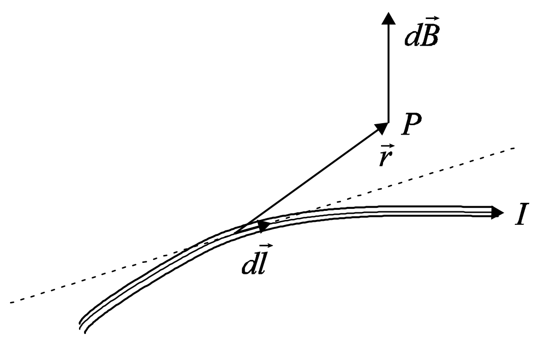


Figura 5.28: Câmpul magnetic creat de o porţiune de conductor de lungime dl prin care trece un curent cu intensitatea I.

Vectorial relaţia (5.122) se scrie ca:

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e}\vec{L} = -\gamma\vec{L} \tag{5.123}$$

Mărimea $\gamma = e/2m_e$ poartă numele de raport giromagnetic orbital al electronului.

5.4.5 Sursele câmpului magnetic. Legea Biot Savart.

La puţin timp după ce Öersted a descoperit că acul unei busole este deviat de un conductor prin care trece un curent, Jean Bapiste Biot (1774-1862) şi Felix Savart au realizat experimente cantitative pentru determinarea forţei exercitate de un curent asupra unui magnet. Pornind de la rezultatele experimentale obţinute, Biot şi Savart au ajuns la o expresie matematică pentru câmpul magnetic $d\vec{B}$ datorat unui element de lungime $d\vec{l}$ din conductor străbătut de curentul I într-un punct P situat la distanţa r de elementul considerat (Fig. 5.28).

Vectorul $d\vec{B}$ este perpendicular pe $d\vec{l}$ şi pe vectorul de poziţie $\vec{r}$. Experimental s-a constata că mărimea lui $d\vec{B}$ este invers proporţională cu r^2, proporţională cu lungimea segmentului $d\vec{l}$, cu intensitatea curentului I şi cu $\sin\theta$ unde θ este unghiul dintre $\vec{r}$ şi $d\vec{l}$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} \tag{5.124}$$

unde $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$Tm/A este o constantă numită permeabilitatea vidului.

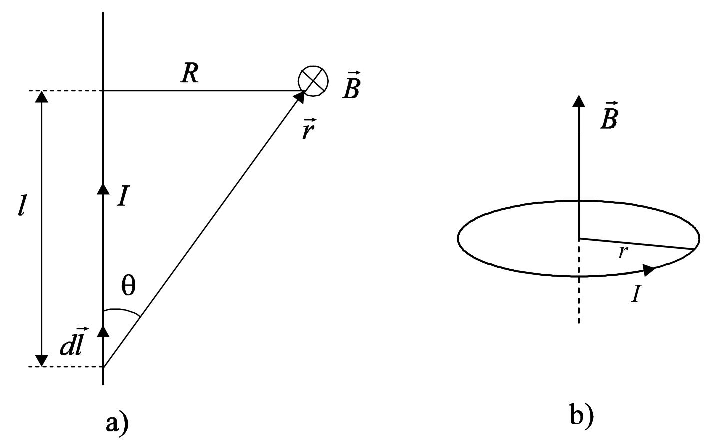


Figura 5.29: a) Câmpul magnetic produs de un curent liniar. b) Câmpul magnetic produs de un curent circular

Pentru calculul câmpului magnetic total trebuie însumate toate contribuţiile elementare:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \tag{5.125}$$

Exemple:

1) Calculul câmpului magnetic produs de un curent liniar (Fig. 5.29a)

Din relaţia (5.124) rezultă:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin\theta}{r^2}$$

Pentru a calcula pe B vom nota:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$$

şi ţinem cont că φ variază de la $-\pi/2$ la $\pi/2$. Deoarece $l = R\mathrm{tg}\varphi$ rezultă:

$$dl = \frac{R}{\cos^2\varphi} d\varphi$$

Cum:

$$r = \frac{R}{\cos\varphi}$$

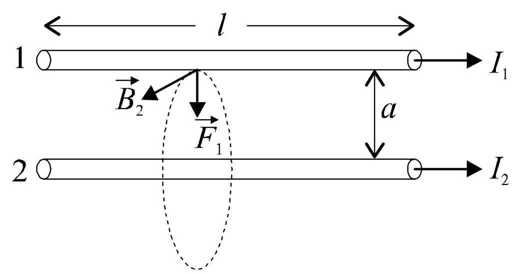


Figura 5.30: Conductoare paralele parcurse de curenţi electrici.

atunci

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{R d\varphi}{\cos^2\varphi} \times \frac{\cos^2\varphi}{R^2} \times \cos\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{\cos\varphi d\varphi}{R}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi d\varphi}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{R} \sin\varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \tag{5.126}$$

Astfel rezultă că liniile câmpului magnetic sunt cercuri concentrice în jurul conductorului.

2) Calculul câmpului magnetic produs pe o spiră circulară în centrul ei (Fig. 5.29b)

Folosind legea Biot Savart rezultă că o porţiune de lungime dl din spiră determină un câmp magnetic dB

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \tag{5.127}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\pi r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

5.4.6 Forţa de interacţie dintre doi conductori paraleli

Să considerăm doi conductori, lungi, drepte paralele aflate la o distanţă a unul faţă de celălalt (Fig. 5.30).

Conductorul 2 prin care trece curentul I_2 creează câmpul magnetic $\vec{B}_2$ în locul unde se află primul conductor. Direcţia lui $\vec{B}_2$ este perpendiculară pe conductorul 1, aşa cum este prezentat în Fig. 5.30. Atunci forţa care acţionează asupra primului conductor este:

$$F_1 = I_1 l B_2$$

unde:

$$B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2a\pi}$$

Rezultă:

$$F_1 = \mu_0 \frac{I_1 I_2 l}{2a\pi} \tag{5.128}$$

Conform legii acţiunii şi reacţiunii forţa F_1 care acţionează asupra primului conductor este egală şi de sens contrar cu F_2 care acţionează asupra celui de-al doilea conductor.

Trebuie observat că dacă curenţii care trec prin cele două conductoare au acelaşi sens, conductoarele se atrag. Dacă curenţii sunt în sensuri contrare conductoarele se resping. Pornind de la relaţia 5.128 se poate exprima forţa pe unitatea de lungime:

$$\frac{F}{l} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2a\pi}$$

Pornind de la această expresie se poate defini Amperul

Amperul este intensitatea curentului care trece prin două conductoare paralele infinit de lungi aflate la distanţa de 1 m unul de altul care determină o forţă pe unitatea de lungime 2 $\times 10^{-7}$ N/m.

5.4.7 Legea lui Ampère pentru cureţi staţionari

Să considerăm un conductor rectiliniu infinit străbătut de curentul staţionar I. Considerăm o linie a câmpului magnetic, care pentru un curent rectilinu este un cerc de rază r într-un plan perpendicular pe planul conductorului. Centrul cercului este punctul în care conductorul intersectează planul considetat. Se evaluează integrala $\oint \vec{B} d\vec{l}$ numită circulaţia vectorului $\vec{B}$ de-a liniei de câmp magnetic. Pentru aceasta se ţine cont că inducţia câmpului magnetic produs de curentul I la distanţa r este dată de relaţia (5.126). Rezultă:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \oint B dl = B \oint dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 I \tag{5.129}$$

Deşi rezultatul a fost determinat pentru cazul particular al unui conductor liniar, rezultatul este valabil pentru orice curbă închisă străbătută de un curent I. Relaţia a fost stabilită pentru cazul unui curent staţionar. Legea lui Ampère descrie apariţia câmpului magnetic datorită unui curent continuu.

Dacă se ţine cont că intensitatea I a curentului se poate exprima funcţie de densitatea de curent pe o suprafaţă S care se sprijină pe curba C pe care se calculează circulaţia vectorului $\vec{B}$ rezultă:

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_S \vec{j}d\vec{S} \tag{5.130}$$

Aplicaţie

Să se determine câmpul magnetic în interiorul şi exteriorul unui cilindru de rază R prin care circulă un curent de densitate j ştiind că liniile de câmp sunt cercuri concentrice în plane perpendiculare pe axa cilindrului.

Soluţie:

a) Pentru calculul câmpului magnetic în interiorul cilindrului se aplică legea lui Ampere pe un contur circular cu centrul pe axa cilindrului aflat într-un plan perpendicular pe cilindru de raza $r < R$.

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j}d\vec{S}$$

unde S este suprafaţa care sprijină pe conturul C. Rezultă

$$2\pi r B = \mu_0 j \pi r^2$$

de unde

$$B = \frac{\mu_0 j r}{2}$$

b) Pentru calculul câmpului magnetic în exteriorul cilindrului se aplică legea lui Ampere pe un contur cu centrul pe axa cilindrului $r > R$. Se obţine:

$$2\pi r B = \mu_0 j \pi R^2$$

de unde

$$B = \frac{\mu_0 j R^2}{2r}$$

Aplicaţie

Să se determine câmpul magnetic de unui solenoid care constă din n spire pe unitatea de lungime aflate pe un cilindru de rază R.

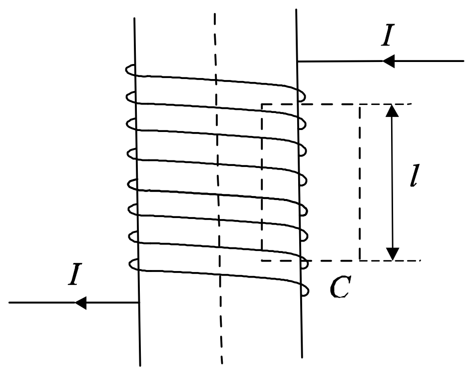


Figura 5.31: Solenoid străbătut de curent electric.

Soluţie

Presupunem solenoidul ca fiind ideal. Pentru acest tip de solenoid câmpul magnetic în exterior este nul. În interiorul solenoidului câmpul este unul uniform, liniile de câmp fiind paralele cu axa acestuia. Considerăm curba C aleasă ca în Fig. 5.31

Aplicăm pe această curbă legea lui Ampère.

$$\oint_{(1)} \vec{B} d\vec{l} = Bl = \mu_0 NI$$

unde N reprezintă numărul de spire pe distanţa l. În general se consideră N numărul de spire al întregului solenoid şi l lungimea acestuia. Rezultă că interiorul solenoidului inducţia câmpului magnetic este:

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

5.4.8 Fluxul câmpului magnetic

Fluxul câmpului magnetic este definit în acelaşi mod în care este definit ca şi fluxul câmpului electric. Fluxul câmpului magnetic printr-o suprafaţă elementară dS se defineşte ca:

$$d\Phi = \vec{B}\vec{n}dS = \vec{B}d\vec{S}$$

Pentru întreaga suprafaţă :

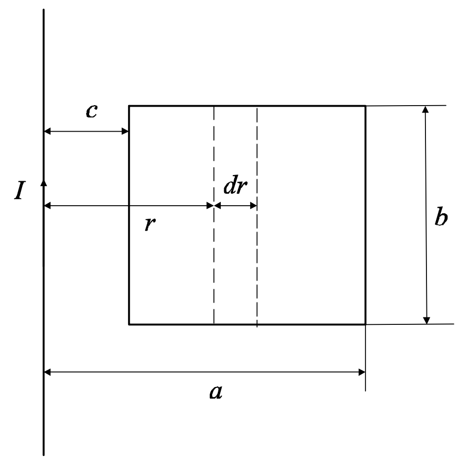


Figura 5.32: Cadru aflat în apropierea unui curent liniar.

$$\Phi = \iint_S \vec{B}\vec{n}dS \tag{5.131}$$

Dacă câmpul magnetic este uniform şi suprafaţa este plană:

$$\Phi = BS\cos\theta \tag{5.132}$$

unde θ este unghiul dintre normala la suprafaţă şi direcţia inducţiei magnetice. Unitatea de măsură a fluxului se numeşte Weber (Wb).

$$\mathrm{Wb} = \mathrm{T}\cdot\mathrm{m}^2 \tag{5.133}$$

Aplicaţie

Să se determine fluxul câmpului magnetic produs de un curent liniar printr-o suprafaţă dreptunghiulară ca în Fig. 5.32.

Soluţie:

Câmpul magnetic la distanţa r de curent este

$$B = \mu_0\frac{I}{2\pi r}$$

Fluxul magnetic elementar printr-un dreptunghi cu laturile b şi dr aflat la distanţa r de curent este:

$$d\Phi = \ Bbdr = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi r}dr$$

Atunci

$$\Phi = \int_c^a \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\ln\frac{a}{c}$$

5.4.9 Legea lui Gauss pentru câmpul magnetic

Când s-a stabilit Legea lui Gauss pentru un câmp electric a rezultat că fluxul câmpului electric printr-o suprafaţă închisă este proporţional cu sarcina din interiorul ei. În cazul că sarcina totală este nulă rezultă că şi fluxul total este nul.

Deoarece în cazul câmpului magnetic nu există sarcini magnetice, prin analogie cu situaţia câmpului electric rezultă că fluxul câmpului magnetic prin orice suprafaţă închisă este nul.

$$\oint \vec{B}\vec{n}dS = 0 \tag{5.134}$$

5.4.10 Curent de deplasare şi forma generală a legii lui Ampère

Sarcinile electrice în mişcare produc câmpul magnetic. Pentru un curent continuu care este produs de un câmp electric constant în timp legea lui Ampère are forma $\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I$ unde integrala este considerată se efectuează pe o curbă închisă C care înconjoară curentul, iar curentul I este curentul ce trece printr-o suprafaţă care se sprijină pe curba C

Trebuie remarcat că Legea lui Ampère scrisă în această formă este valabilă numai în cazul câmpului electric constant în timp. Maxwell a observat această limitare şi a modificat Legea lui Ampère pentru a include câmpurile electrice variabile în timp.

Putem înţelege acest lucru considerând un condensator care se încarcă cu sarcină electrică ca în Fig. 5.33. Când curentul de conducţie este prezent, sarcina armăturii pozitive se schimbă, dar între plăcile condensatorului nu există nici un fel de curent de conducţie.

Să considerăm două suprafeţe S_1 şi S_2 ca în Fig. 5.33 mărginite de aceeaşi curbă închisă P. Aplică legea lui Ampere sub forma dată de relaţia (5.130) în două situaţii:

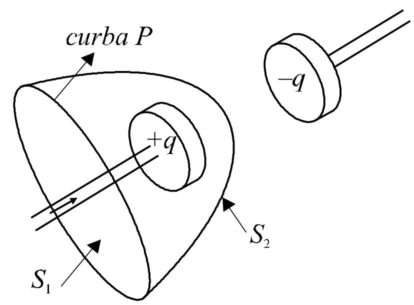


Figura 5.33: Determinarea legii lui Ampere în cazul general

Când curba P se consideră că înconjoară suprafaţa S_1, $\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I$,
iar când curba P se consideră înconjoarată de suprafaţa S_2, $\oint \vec{B}d\vec{l} = 0$.

Rezultă o situaţie contradictorie datorată discontinuităţii curentului. Maxwell a rezolvat problema prin postularea unui nou termen care este adăugat în membrul drept al ecuaţiei 5.130 şi care poartă numele de curent de deplasare:

$$I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint \vec{E}\vec{n}dS = \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} \tag{5.135}$$

unde integrala se face pe suprafaţa care se sprijină pe curba care încojoară curentul de conducţie considerat.

Când condensatorul se încarcă sau se descarcă câmpul electric variabil este echivalent cu un curent numit curent de deplasare. Cu acest nou termen forma generală a legii lui Ampere devine:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{5.136}$$

sau

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \iint \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \vec{n}dS = \mu_0 I + \mu_0 \iint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \vec{n}dS \tag{5.137}$$

unde $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ este inducţia câmpului electric.

5.5 Magnetism în medii materiale

5.5.1 Momentul magnetic al atomilor

Am arătat că pentru un electron care se deplasează pe o orbită circulară, momentul magnetic orbital al electronului poate fi scris sub forma:

$$\vec{m}_L = -\frac{e}{2m_e}\vec{L}$$

Comform mecanicii cuantice momentul cinetic orbital poate lua doar valorile discrete $\left|\vec{L}\right| = \hbar\sqrt{l\,(l+1)}$ unde $l = 0, 1, 2, ...$ poartă numele de număr cuantic orbital, iar $\hbar = h/2\pi$, unde $h = 6,63\times 10^{-34}$ Js este constanta lui Planck. Rezultă că şi momentul magnetic asociat mişcării orbitale este cuantificat:

$$m_L = \frac{e\hbar}{2m_e}\sqrt{l\,(l+1)} \qquad l = 0, 1, 2, ... \tag{5.138}$$

Deşi orice substanţă conţine electroni cele mai multe substanţe nu sunt magnetice deoarece momentul magnetic al unui electron este anulat de momentul magnetic al altui electron care se roteşte în direcţie opusă. Rezultă este că momentul magnetic produs de mişcarea orbitală este ori zero ori foarte mic.

În plus un electron (ca şi protonii şi alte particule) au un moment cinetic propriu numit spin. Într-o reprezentare clasică momentul propriu provine din mişcarea de rotaţie a particulei în jurul axei sale. Mărimea spinului unui electron este:

$$S = \hbar\sqrt{s\,(s+1)} \tag{5.139}$$

unde s poartă număr cuantic de spin şi pentru electroni are valoarea $1/2$. Momentul magnetic caracteristic asociat cu spinul electronului este:

$$m_S = 2\frac{e\hbar}{2m_e}\sqrt{s\,(s+1)} \tag{5.140}$$

Se observă că momentul magnetic asociat mişcării orbitale şi momentul magnetic determinat de spinul electronului sunt exprimate cu ajutorul mărimii

$$\mu_0 = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27\times 10^{-24}\mathrm{Am}^2 \tag{5.141}$$

care poartă numele de magneton Bohr.

În atomi care conţin mai mulţi electroni aceştia se împerechează doi câte doi cu spini opuşi; astfel momentul datorat spinului se anulează. Oricum atomii care conţin un număr impar de electroni au cel puţin un electron neîmperecheat şi există un moment magnetic de spin. Momentul magnetic total este suma dintre momentele magnetice de spin şi orbital.

În Tabelul 5.4 de mai jos sunt prezentate momentele magnetice ale câtorva atomi

Tabelul 5.4
Momente magnetice a unor atomi

Atomi	μ (A·m^2)
H	$9,27 \times 10^{-24}$
He	0
Ne	0
Ca^{3+}	$19,8 \times 10^{-24}$

Nucleul atomilor are de asemenea un moment magnetic asociat, determinat de constituenţii săi (protonii şi neutronii). Oricum momentele magnetice ale protonului şi neutronului sunt mult mai mici decât ale electronului astfel că într-o primă aproximaţie momentul magnetic asociat nucleului se neglijează.

5.5.2 Vectorul densitate de magnetizare şi vectorul intensitate câmp magnetic

Starea de magnetizare a unei substanţe este descrisă de vectorul densitate de magnetizare $\vec{M}$ care este definit ca momentul magnetic al unităţii de volum.

Aşa cum este de aşteptat inducţia totală a câmpului magnetic $\vec{B}$ într-un câmp dintr-o substanţă depinde de câmpul magnetic $\vec{B}_0$ produs de curenţii liberi (care trec prin conductor) şi de magnetizarea substanţei.

Se consideră o regiune umplută cu substanţă magnetică în care câmpul magnetic $\vec{B}_0$ este produs de curenţii care trec prin conductoare şi $\vec{B}_m$ este câmpul produs de substanţă magnetică:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$$

Vom încerca să determinăm o relaţie între $\vec{B}_m$ şi densitatea de magnetizare $\vec{M}$. Pentru aceasta considerăm că $\vec{B}_m$ este determinat mai degrabă de un solenoid decât de o substanţă magnetică.

$$B_m = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 \frac{NSI}{lS} \tag{5.142}$$

unde N este numărul de spire, l este lungimea iar S este secţiunea solenoidului. Observăm că la numărător $N\,(SI)$ reprezintă momentul magnetic $\vec{m}$ al solenoidului, iar numitorul $lS = V$ este volumul acestuia.

Atunci B_m poate fi exprimat ca:

$$B_m = \mu_0 \frac{m}{V} = \mu_0 M \tag{5.143}$$

Astfel când o substanţă este plasată în câmp magnetic, inducţia totală a câmpului magnetic în acea substanţă se exprimă ca:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M} \tag{5.144}$$

Când se analizează câmpurile magnetice datorate magnetizării este convenabil să se introducă o mărime numită intensitatea câmpului magnetic $\vec{H}$ în interiorul substanţei. Ea este determinată doar de curenţi de conducţie şi este definită ca:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \tag{5.145}$$

deoarece inducţia magnetică $\vec{B}_0$ este produsă doar de curenţii de conducţie. Atunci relaţia (5.144) se scrie ca:

$$B = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \tag{5.146}$$

Unitatea de măsură a intensităţii câmpului magnetic H este A/m.

5.5.3 Clasificarea substanţelor magnetice

Substanţele magnetice pot fi clasificate în trei categorii: substanţe feromagnetice, substanţe paramagnetice şi diamagnetice. Substanţele paramagnetice şi feromagnetice sunt constituite din atomi care au momentele magnetice permanente. Materialele diamagnetice sunt materiale ale căror atomi nu prezintă momente magnetice permanente. În cazul substanţelor diamagnetice momentele magnetice sunt induse de câmpul magnetic.

Pentru substanţele paramagnetice şi diamagnetice omogne şi izotrope densitatea de magnetizare este proporţională cu intensitatea câmpului magnetic $\vec{H}$:

$$\vec{M} = \chi\vec{H} \tag{5.147}$$

unde χ este un factor adimensional numit susceptibilitate magnetică relativă. Pentru substanţele paramagnetice $\chi > 0$ şi $\vec{M}$ este în acelaşi sens cu $\vec{H}$. Pentru substanţele diamagnetice $\chi < 0$ şi $\vec{M}$ are sensul opus lui $\vec{H}$. Inducţia câmpului magnetic în aceste substanţe este:

$$\vec{B} = \mu_0(1+\chi)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} \tag{5.148}$$

unde μ_r este o constantă care poartă numele de permeabilitate magnetică relativă şi este legată de susceptibilitatea magnetică prin relaţia:

$$\mu_r = (1+\chi) \tag{5.149}$$

Se poate defini şi o permeabilitate absolută prin relaţia

$$\mu = \mu_0\,(1+\chi)$$

Pentru substanţele paramagnetice $\mu > \mu_0$ iar pentru cele diamagnetice $\mu < \mu_0$. Pentru substanţele paramagnetice şi diamagnetice susceptibilitatea magnetică χ este foarte mică (de ordinul $10^{-6} - 10^{-4}$), astfel că practic $\mu \simeq \mu_0$ pentru aceste substanţe. Pentru substanţele feromagnetice μ poate fi de mii de ori mai mare decât μ_0.

Relaţia simplă (5.147) dintre $\vec{H}$ şi $\vec{M}$ nu este valabilă pentru substanţele feromagnetice. Se găseşte că pentru acest tip de substanţe $\vec{M}$ nu mai este o funcţie liniară de $\vec{H}$. Mai mult densitatea de magnetizare $\vec{M}$ depinde nu numai de intensitatea câmpului magnetic $\vec{H}$ ci şi de stările anterioare prin care trece substanţa, adică de istoria ei. Acest lucru este valabil şi pentru inducţia câmpului magnetic din substanţele feromagnetice, deoarece aceaste este legată de densitatea de magnetizare prin relaţia $\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0\vec{M}$.

În Tabelul 5.5 sunt prezentate câteva susceptibilităţi pentru substanţe paramagnetice şi diamagnetice.

Tabel 5.5
Susceptibilităţi magnetice pentru substanţe paramagnetice şi diamagnetice

Substanţe paramagnetice		Substanţe diamagnetice	
Aluminiu	$2{,}3\times10^{-5}$	*Bismut*	$-1{,}66\times10^{-5}$
Calciu	$1{,}9\times10^{-5}$	*Cupru*	$-9{,}8\times10^{-5}$
Crom	$2{,}7\times10^{-5}$	*Diamant*	$-2{,}2\times10^{-5}$
Litiu	$2{,}1\times10^{-5}$	*Aur*	$-3{,}6\times10^{-5}$
Magneziu	$1{,}2\times10^{-5}$	*Plumb*	$-1{,}7\times10^{-5}$
Niobiu	$2{,}6\times10^{-4}$	*Mercur*	$-2{,}9\times10^{-5}$
Oxigen	$2{,}1\times10^{-6}$	*Azot*	-5×10^{-5}
Platină	$2{,}9\times10^{-4}$	*Argint*	$-2{,}6\times10^{-5}$
Tungsten	$6{,}8\times10^{-5}$	*Siliciu*	$-4{,}2\times10^{-5}$

5.5.4 Feromagnetism

Un mic număr de substanţe pot prezenta o magnetizare permanentă. Ele sunt substanţele feromagnetice. Aceste substanţe conţin momente magnetice permanente care au tendinţa să se alinieze în câmpuri magnetice. Odată momentele magnetice aliniate, substanţa rămâne magnetizată după ce câmpul extern este anulat. Acest fapt se datorează faptului că între momentele magnetice vecine există o cuplare puternică ce poate fi explicată cu ajutorul mecanicii cuantice.

Toate substanţele feromagnetice sunt formate din microdomenii în care momentele magnetice sunt aliniate. Aceste domenii au volume cuprinse în intervalul $10^{-12} - 10^{-8}$ m^3 şi conţin în jur de $10^{17} - 10^{21}$ atomi. Frontierele dintre diversele domenii cu orientări diferite ale magnetizării sunt numite pereţi. Într-o probă nemagnetică momentele magnetice ale microdomeniilor sunt orientate aleatoriu astfel că momentul magnetic total este nul. Când proba este plasată într-un câmp magnetic extern de intensitate $\vec{H}$ dimensiunile domeniilor magnetice ale căror momente sunt paralele cu $\vec{H}$ îşi cresc volumul rezultând astfel o probă magnetizată. Când câmpul magnetic devine foarte puternic domeniile în care momentele nu sunt aliniate devin foarte mici. Când câmpul magnetic este anulat proba rămâne cu o magnetizare în sensul câmpului iniţial. La temperaturi obişnuite, agitaţia termică nu este suficient de puternică pentru a distruge orientarea momentelor magnetice.

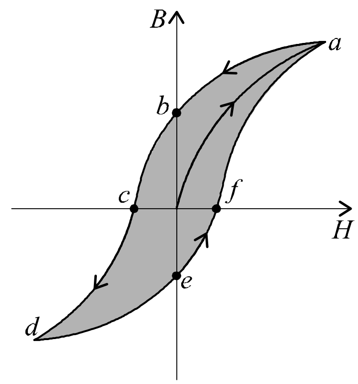


Figura 5.34: Curba de histerezis

Dacă se măsoară B în funcţie de H se observă că atunci când H creşte, inducţia câmpului magnetic ajunge la o valoare de saturaţie. Când H scade la zero (punctul b) inducţia magnetică nu ajunge la zero. Valoarea poartă numele de inducţie magnetică remanentă. Dacă sensul lui $\vec{H}$ se schimbă, momentele magnetice se reorientează până ce proba devine nemagnetizată când $\vec{B} = 0$. Valoarea intensităţii câmpului magnetic la care inducţia magnetică $\vec{B}$ aajung din nou la zero poartă numele de intensitate a câmpului magnetic coercitiv. O creştere în sens invers determină o magnetizare în sens invers ajungând în punctul de saturaţie. O comportare similară se petrece când H se reduce din nou. În acest caz curba urmează drumul d, e, f. Dacă H creşte suficient de mult se ajunge din nou în punctul de saturaţie a. Efectul poartă numele de histerezis şi arată că magnetizarea substanţelor feromagnetice depinde de istoria substanţei şi de intensitatea câmpului magnetic.

Curba închisă reprezentată în Fig. 5.34 se numeşte curbă de histerezis. Curba de magnetizare este importantă din alt punct de vedere: aria închisă de curba de magnetizare reprezintă energia necesară pentru realizarea ciclului histerezis.

Când temperatura unei substanţe feromagnetice creşte şi depăşeşte o anumită temperatură numită temperatură Curie substanţa îşi pierde magnetizarea permanentă şi devine paramagnetică. Sub temperatura Curie momentele magnetice sunt aliniate şi substanţa este feromagnetică. Deasupra acestei temperaturi agitaţia termică este suficient de puternică să determine o orientare haotică a momentelor magnetice.

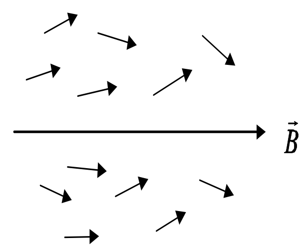


Figura 5.35: Orientarea momentelor magnetice în câmp extern în cazul unei substanţe paragnetice.

5.5.5 Paramagnetism

Substanţele paramagnetice au susceptibilitatea magnetică mică şi pozitivă $\chi > 0$, fiind determinată de prezenţa atomilor şi a ionilor care posedă un moment magnetic. Aceste momente interacţionează slab unele cu altele şi sunt orientate haotic în lipsa unui câmp extern. Când o substanţă paramagnetică este plasată într-un câmp magnetic extern, momentele magnetice tind să se alinieze cu câmpul magnetic (Fig. 5.35). Acest proces este în competiţie cu procesul de agitaţie termică care se opune alinierii momentelor magnetice.

Pierre Curie (1859-1906) a găsit experimental că densitatea de magnetizarea substanţelor paramagnetice este proporţională cu câmpul magnetic aplicat şi invers proporţională cu temperatura absolută:

$$M = C\frac{H}{T} \tag{5.150}$$

unde C este o constnată. Această lege poartă numele de Legea Curie iar C este constanta Curie.

5.5.6 Diamagnetism

Când un câmp magnetic extern este aplicat unei substanţe diamagnetice, apare un moment mangetic slab în direcţie opusă câmpului magnetic aplicat. Deşi diamagnetismul este prezent în toate materialele, efectele sunt mult mai mici decât acelea determinate de paramagnetism şi feromagnetism.

Pentru a înţelege diamagnetismul să considerăm doi electroni care se învârtesc în jurul nucleului în direcţii opuse. Deoarece momentele magnetice ale celor doi electroni sunt egale în mărime şi opuse în direcţie ele se anulează reciproc.

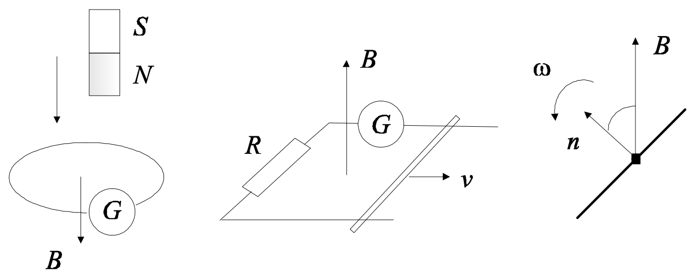


Figura 5.36: Metode de obţinere a fenomenului de inducţie electromagentică

Când un câmp extern este aplicat asupra electronilor acţionează o forţă Lorentz $q\vec{v}\times\vec{B}$. Aceasta se adaugă forţei coulombiene şi creşte viteza orbitală a electronului al cărui moment magnetic este antiparalel cu câmpul şi scade viteza electronului al cărui moment magnetic este paralel cu câmpul. Ca rezultat al compunerii celor două momente magnetice rezultă un moment magnetic invers câmpului magnetic aplicat.

5.6 Inducţia electromagnetică

5.6.1 Introducere

Fenomenul de inducţie electromagnetică a fost descoperit de Faraday în 1831 şi el constă în faptul că variaţia fluxului inducţiei magnetice prin suprafaţa unui circuit electric determină apariţia un curent electric prin acel circuit. Acest curent se numeşte curent de inducţie.

Pornind de faptul că fluxul câmpului magnetic are expresia:

$$\Phi = BS\cos\alpha \tag{5.151}$$

există mai multe moduri de a crea un flux magnetic variabil (Fig.5.36).

1. Existenţa unui câmp magnetic variabil. Aceasta se realizează prin apropierea unui magnet permanent de circuitul considerat. Apropierea magnetului face ca inducţia câmpului magnetic să crească pe suprafaţa circuitului. Dacă magnetul este oprit $\vec{B}$ rămâne constant, fluxul magnetic rămâne constant şi curentul prin circuit se anulează.

2. Varierea suprafeţei circuitului într-un câmp magnetic constant. Aceasta se poate realiza prin deplasarea unei bare mobile AB pe două conductoare paralele fixe legate printr-o rezistenţă afla într-un cîmp magnetic.

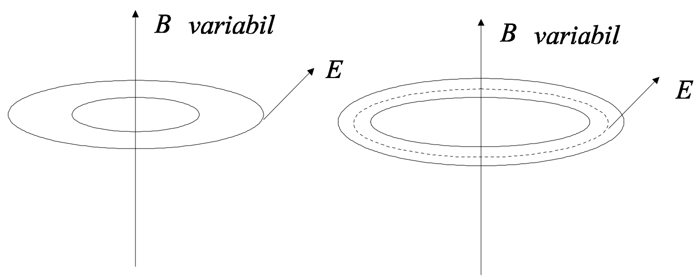


Figura 5.37: Liniile câmpului electric într-o regiune cu un câmp magnetic variabil

3. Varierea unghiului α dintre $\vec{n}$ şi $\vec{B}$. Aceasta se poate realiza prin rotirea unei spire într-un câmp magnetic în jurul unui ax perpendicular pe B.

4. Un flux magnetic variabil se obţine şi atunci când există combinaţii ale celor trei cazuri prezentate anterior.

Trebuie remarcat însă că apariţia fenomenului de inducţie electromagnetică nu este neapărat legată de existenţa circuitului:

În cazul general fenomenul de inducţie electromagnetică se poate defini ca fiind fenomenul de apariţie a unui câmp electric cu liniile închise în regiunile din spaţiu unde există un câmp magnetic variabil.

Liniile câmpului electric indus sunt în plane perpendiculare pe $\overrightarrow{B}$. Fie un inel introdus într-un câmp magnetic variabil astfel ca acesta să conţină o linie a câmpului electric indus $\vec{E}$. Linia de câmp este reprezentată punctat în Fig.5.37. Se consideră o porţiune dl foarte mică din acest conductor. Deoarece în interiorul său există un câmp electric $\overrightarrow{E}$ sarcinile din interiorul acestuia vor fi puse în mişcare. Lucrul mecanic efectuat de câmpul indus pentru a deplasa sarcina q pe lungimea dl este:

$$\delta L = F dl = qEdl \tag{5.152}$$

Definim tensiunea electromotoare (t.e.m) indusă pe porţiunea dl ca fiind:

$$d\mathcal{E} = \frac{\delta L}{q} = Edl \tag{5.153}$$

Mai general relaţia (5.153) se scrie ca:

$$d\mathcal{E} = \vec{E}\vec{dl} \tag{5.154}$$

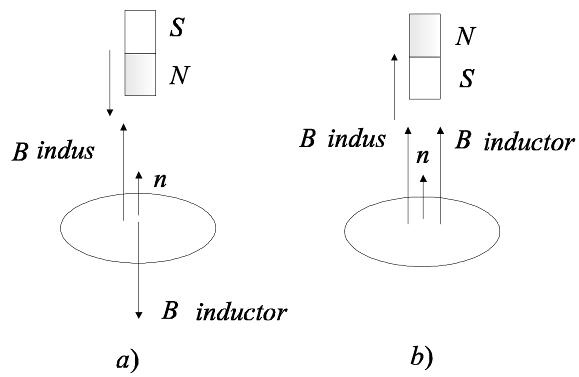


Figura 5.38: Legea lui Lentz

Pe întregul conductor tensiunea electromotoare indusă va fi o sumă a tensiunilor electromotoare induse pe fiecare porţiune de circuit. Rezultă că într-un circuit a cărui suprafaţă este constantă şi în care apare fenomenul de inducţie tensiunea electromotoare indusă este distribuită de-a lungul întregului circuit.

5.6.2 Legea lui Lentz

Într-un circuit închis t. e. m indusă şi curentul indus au un astfel de sens ca variaţia fluxului magnetic indus să se opună variaţiei fluxului magnetic inductor.

Legea lui Lentz se referă la curenţii induşi, ceea ce înseamnă că ea se aplică numai la circuite închise. Dacă circuitul este deschis putem raţiona în funcţie de ce s-ar întâmpla dacă circuitul ar fi închis. Vom exemplifica legea lui Lentz în cazul unui magnet ce se apropie de o spiră fixă (Fig. 5.38a). Deoarece magnetul se apropie de spiră, să zicem cu polul nord inducţia câmpului magnetic inductor creşte.

Atunci:

$$\Phi_{inductor} = \vec{B}_{inductor}\vec{n}S = \; - B_{inductor}\; S \tag{5.155}$$

Cum $\vec{B}_{inductor}$ creşte rezultă că $\Phi_{inductor}$ creşte "în sens negativ". Pentru a se opune unei astfel de variaţii a fluxului magnetic inductor, fluxul magnetic indus trebuie să crească " în sens pozitiv", adică $\Phi_{indus} > 0$ de unde rezultă că $\vec{B}_{indus}$ trebuie să fie în acelaşi sens cu $\vec{n}$. Curentul va circula prin spiră în sens trigonometric.

În cazul circuitelor închise pentru care suprafaţa nu variază, putem realiza raţionamentul luând în consideraţie numai vectorul inducţie magnetică. În cazul de mai sus $\vec{B}_{indus}$ trebuie să se opună variaţiei lui $\vec{B}_{inductor}$. Aceasta se realizează dacă $\vec{B}_{indus}$ este în sens contrar lui $\vec{B}_{inductor}$.

În mod asemănător putem judeca situaţia când un magnet se depărtează de o spiră fixă, polul sud al magnetului fiind îndreptat spre spiră (Fig .5.38b) $\vec{B}_{inductor}$ este îndreptat înspre polul sud al magnetului şi el scade când magnetul se îndepărtează de spiră. Atunci $\vec{B}_{indus}$ trebuie să se opună acestei variaţii şi el va fi în sensul lui $\vec{B}_{inductor}$.

5.6.3 Legea inducţiei electromagnetice

Apariţia tensiunii electromotoare induse $\mathcal{E}$ într-un circuit este datorată variaţiei unui flux magnetic prin acesta. Faraday a ajuns la concluzia că tensiunea electromotoare indusă $\mathcal{E}$ este proporţională cu viteza de variaţie a fluxului prin circuitul respectiv:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{5.156}$$

Semnul minus ia în considerare legea lui Lentz. Dar

$$\Phi = \iint_S \vec{B} d\vec{S}$$

Atunci:

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \tag{5.157}$$

Tensiunea electromotoare pentru circuit se obţine din relaţia (5.154):

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} d\vec{l} \tag{5.158}$$

Dinrelaţiile (5.157) şi (5.158) se obţine:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \tag{5.159}$$

Câmpul electric produs datorită fenomenului de inducţie electromagnetică nu este asociat unor sarcini electrice ci variaţiei câmpului magnetic. Deşi ambele tipuri de câmpuri electrice determină forţe asupra sarcinilor electrice, ele totuşi se deosebesc. Astfel liniile câmpului datorat sarcinilor sunt deschise în timp ce liniile câmpului electric indus sunt închise. În cazul câmpului electric produs de sarcini diferenţa de potenţial dintre două punct este:

$$V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec{E}d\vec{l}$$

Dacă punctele 1 şi 2 coincid $V_2 = V_1$ integrala se realizează pe o curbă închisă. Rezultă condiţia ca acest câmp să fie unul conservativ:

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = 0$$

În cazul câmpului electric datorat variaţiei câmpului magnetic, $\oint \vec{E}d\vec{l} \neq 0$. Un astfel de câmp nu mai este unul conservativ şi nu se mai poate defini un potenţial.

5.6.4 T.e.m. indusă într-un conductor deplasat în câmp magnetic

Considerăm cazul în care conductorul este deplasat perpendicular pe liniile câmpului magnetic. Când conductorul se deplasează cu viteza v, el mătură suprafaţa $dS = lvdt$ unde l este lungimea conductorului respectiv. Fluxul magnetic măturat este:

$$d\Phi = BdS = Blvdt \tag{5.160}$$

Atunci t.e.m. indusă este, făra a ţine cont de sensul ei:

$$|\mathcal{E}| = \frac{d\Phi}{dt} = Blv \tag{5.161}$$

Sensul t. e. m. poate fi stabilit cu ajutorul regulii mâinii drepte: Se aşează mâna în lungul conductorului, astfel ca vectorul $\vec{B}$ să intre în palmă, iar degetul mare să fie în sensul vitezei de deplasare a conductorului. Celelalte patru degete vor indica sensul t. e. m. induse.

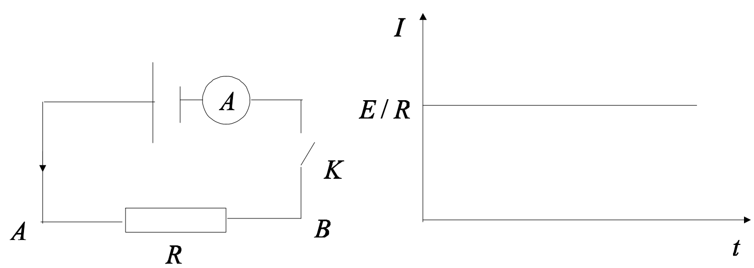


Figura 5.39: Curentul într-un circuit cu rezistenţă după închiderea comutatorului

Pentru un conductor rectiliniu perpendicular pe liniile de câmp, deplasat cu o viteză $\vec{v}$ perpendiculară pe conductor şi care face un unghi α cu vectorul inducţie magnetică $\vec{B}$ tensiunea electromotoare indusă are expresia:

$$\mathcal{E} = Blv \sin\alpha \tag{5.162}$$

5.6.5 Autoinducţia

Autoinducţia este fenomenul de inducţie electromagnetică produs într-un circuit datorită variaţiei intensităţii curentului prin acel circuit.

Pentru punerea în evidenţă a fenomenului de autoinducţie se pot realiza o serie de experienţe. Astfel prin închiderea comutatorului K din circuitul din Fig.5.39 intensitatea curentului ajunge practic instantaneu la valoarea:

$$I = \frac{E}{R} \tag{5.163}$$

În cazul că în serie cu rezistenţa R se pune un solenoid ideal (Fig. 5.40) se constată că intensitatea curentului creşte lent până la valoarea E/R. În acest caz prin închiderea comutatorului, curentul având o tendinţă de creştere prin bobină, determină un flux magnetic variabil care are ca efect apariţia unei t.e.m. induse. Această t.e.m. indusă conform Legii lui Lentz trebuie să aibă un astfel de sens încât să se opună variaţiei fluxului magnetic inductor, deci şi a curentului din circuit. Ea poartă numele de t.e.m. autoindusă şi apariţia ei determină o încetinire a creşteri a curentului în circuit.

În cazul unui circuit parcurs de un curent de intensitate I inducţia câmpului magnetic produs B este proporţional cu I. Cum fluxul câmpului magnetic este proporţional cu B rezultă că fluxul magnetic propriu prin

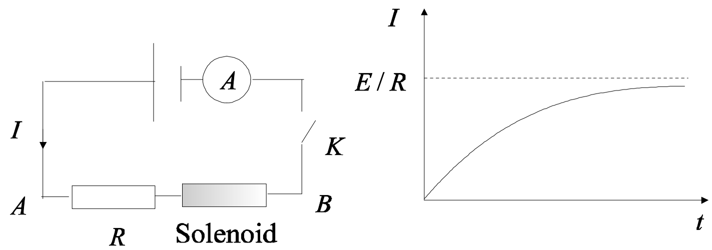


Figura 5.40: Curentul într-un circuit cu rezistenţă şi bobină după închiderea comutatorului

suprafaţa unui circuit este direct proporţional cu intensitatea curentului I din acel circuit

$$\Phi = LI \tag{5.164}$$

Mărimea L se numeşte inductanţa circuitului şi se măsoară în Henry (H=Wb/m^2). Inductanţa circuitului este o caracteristică a fiecărui circuit, ea depinde de forma geometrică a circuitului precum şi de mediul aflat în interiorul circuitului.

Legea autoinducţiei se determină pornind de la legea inducţiei

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \tag{5.165}$$

Rezultă că t.e.m. autoindusă este proporţională cu viteza de variaţie a intensităţii curentului electric prin circuit.

5.6.6 Inductanţa unui solenoid

Fluxul magnetic ce străbate un solenoid de lungime l cu secţiunea S şi numărul de spire N străbătut de curentul I este $\Phi = NBS$. Deoarece

$$B = \mu_0\mu_r\frac{NI}{l} \tag{5.166}$$

rezultă

$$\Phi = \mu_0\mu_r\frac{N^2S}{l}I \tag{5.167}$$

Comparând cu $\Phi = LI$ rezultă că

$$L = \mu_0\mu_r\frac{N^2S}{l} \tag{5.168}$$

unde μ_r este permeabilitatea relativă a miezului solenoidului.

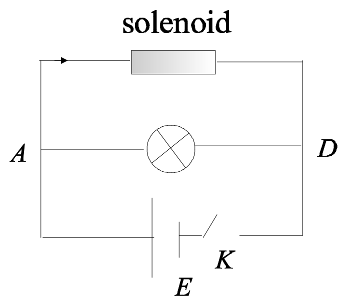


Figura 5.41: Circuit cu bobină şi bec

5.6.7 Energia câmpului magnetic

Se consideră circuitul din Fig.5.41 realiziat astfel ca atunci când comutatorul K este închis becul să nu lumineze. Când se deschide comutatorul K se constată, că pentru un scurt timp becul luminează. Aceasta o putem explica prin faptul că energia câmpului magnetic al solenoidului se transformă în energie electrică. Deschiderea comutatorului K determină apariţia unei tensiuni electromotoare autoinduse:

$$\mathcal{E} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t} = -L\frac{(0-I)}{\Delta t} = +\frac{LI}{\Delta t} \tag{5.169}$$

unde I este intensitatea curentului prin solenoid înainte de deschiderea comutatorului K. Energia electrică transferată W circuitului după deconectarea sursei, când datorită apariţiei t. e. m. autodinduse prin circuitul format din bec şi solenoid trece sarcina Δq este:

$$W = \mathcal{E}\Delta q \tag{5.170}$$

Cum prin solenoid intensitatea curentului scade în Δt de la valoarea I la valoarea 0, intensitatea medie a curentului este

$$I_m = \frac{I+0}{2} = \frac{I}{2} \tag{5.171}$$

Atunci

$$\Delta q = I_m \Delta t = \frac{I}{2}\Delta t \tag{5.172}$$

Energia câmpului magnetic este egală cu cea transferată circuitului:

$$W = \mathcal{E}\Delta q = \frac{LI^2}{2} \tag{5.173}$$

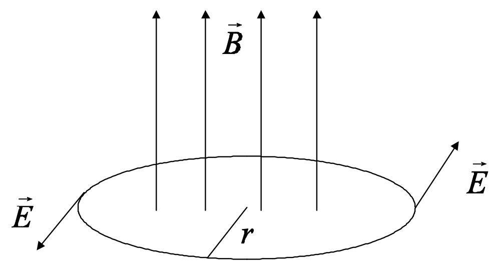


Figura 5.42: Spiră circulară în câmp magnetic uniform.

Considerând că nu există nici un miez în interiorul solenoidului ($\mu_r = 1$), relaţia (5.173) se scrie ţinând cont de (5.168) astfel:

$$W = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 S I^2}{2l} = \frac{Sl}{2} \left(\frac{NI}{l} \right) \left(\mu_0 \frac{NI}{l} \right) = V \frac{HB}{2}$$

unde V este volumul ocupat de câmpul magnetic. Astfel densitatea de energie a câmpului magnetic este

$$w = \frac{W}{V} = \frac{HB}{2} \tag{5.174}$$

Deşi expresia densităţii de energie a câmpului magnetic a fost dedusă într-un caz particular, ea este valabilă pentru orice câmp magnetic.

Aplicaţie

O spiră circulară se află într-un câmp magnetic uniform (Fig. 5.42). Dacă inducţia câmpului magnetic se modifică în timp, care este câmpul electric indus (Fig. 5.42)

Soluţie:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$2\pi r E = -\frac{d}{dt} \left(\pi r^2 B \right) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

$$E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

Aplicaţie

Să se determine tensiunea electromotoare indusă într-o spiră de arie S care se roteşte cu viteză unghiulară constantă în jurul unui ax perpendicular pe vectorul inducţie câmp magnetic $\vec{B}$ al unui câmp uniform.

Soluţie:

Aceasta constituie o metodă de producere a curentului alternativ. Fluxul magnetic ce străbate spira la un moment dat este

$$\Phi = \vec{B}\vec{n}S = BS\cos\alpha$$

unde $\alpha = \alpha_0 + \omega t$ şi α_0 reprezintă unghiul dintre normala $\overrightarrow{n}$ şi vectorul $\vec{B}$ la începutul mişcării.

$$\phi = BS\cos(\omega t + \alpha_0)$$

Atunci:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = BS\omega\sin(\omega t + \alpha_0) = \mathcal{E}_{\max}\sin(\omega t + \alpha_0)$$

Aplicaţie

Într-o regiune din spaţiu există un câmp magnetic uniform paralel cu axa Oz. Mărimea lui variază în timp astfel:

$$B = B_0\sin\omega t$$

Să se determine intensitatea câmpului electric indus.

Soluţie:

Pentru a calcula câmpul electric vom alege un contur de rază r într-un plan perpendicular pe axa Oz. Se aplică legea inducţiei electromagnetice:

$$\oint\vec{E}d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$$

unde Φ este fluxul magnetic prin suprafaţa $S = \pi r^2$. Dar:

$$\oint\vec{E}d\vec{l} = 2\pi rE$$

şi

$$\phi = BS = \pi r^2 B_0\sin\omega t$$

Atunci din legea inducţiei rezultă:

$$2\pi rE = -\pi r^2 B_0\omega\cos\omega t$$

Intensitatea câmpului electric este:

$$E = -\frac{1}{2}rB_0\omega\cos\omega t$$

5.7 Ecuaţiile Maxwell

Ecuaţiile Maxwell reprezintă formularea matematică a principalelor postulate ale electrodinamicii clasice. Ele sunt un sistem complet de ecuaţii în sensul că determină univoc câmpul electromagnetic. Ele sunt valabile în anumite situaţii, şi anume atunci când corpurile materiale sunt imobile iar constantele de material ε , μ , σ nu depind de timp sau de intensitatea câmpurilor. Se face abstracţie de prezenţa unor materiale ce prezintă momente electice şi magnetice dipolare permanente. Nu se ia în considerare dependenţa constantelor de material de temperatură. Aceste ecuaţii se exprimă sub forma unor legi generale precum şi a unor legi de material.

5.7.1 Legea fluxului electric

Îm vid legea lui Gauss pentru câmp electric se scrie ca

$$\iint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dv \tag{5.175}$$

unde dv este elementul de volum, iar S este o suprafaţă închisă care înconjoară volumul V. Integrala de suprafaţă se poate transforma în una de volum:

$$\iint_S \vec{E} d\vec{S} = \iiint_V \nabla \vec{E} dv \tag{5.176}$$

unde ∇ este operatorul divergenţă şi:

$$\nabla \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{5.177}$$

Rezultă că:

$$\iiint_V \nabla \vec{E} dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dv \tag{5.178}$$

şi:

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{5.179}$$

În mediile materiale densitatea totală de sarcină este suma dintre densitatea sarcinilor libere ρ_l şi densitatea sarcinilor de polarizare ρ_p:

$$\rho = \rho_l + \rho_p \tag{5.180}$$

Astfel:
$$\nabla\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_l + \rho_p}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho - \nabla\vec{P}\right) \tag{5.181}$$
deoarece relaţia dintre densitatea de polarizare şi densitatea sarcinilor de polarizare este:
$$\nabla\vec{P} = -\rho_p \tag{5.182}$$

Din relaţia (5.181) se obţine:

$$\varepsilon_0\nabla\vec{E} + \nabla\vec{P} = \nabla\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right) = \rho_l \tag{5.183}$$

Deoarece inducţia câmpului electric $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$, rezultă1:

$$\nabla\vec{D} = \rho_l \tag{5.184}$$

Aceasta este forma diferenţială a legii lui Gauss pentru medii materiale. Forma integrală a acestei legii este:

$$\iint_S \vec{D}d\vec{S} = \iiint_V \rho_l dV \tag{5.185}$$

unde suprafaţa S este o suprafaţă închisă care înconjoară volumul V.

Relaţiile (5.184) şi (5.185) arată că inducţia câmpului electric este determinată de sarcinile libere, relaţia (5.182) arată că densitatea de polarizare este determinată de sarcinile legate, iar relaţiile (5.175) şi (5.179) arată că intensitatea câmpului electric este determinată de totalitatea sarcinilor (libere şi legate)

5.7.2 Legea lui Gauss pentru magnetism

Deoarece câmpul magnetic nu este produs de sarcini magnetice, fluxul inducţei câmpului magnetic printr-o suprafaţă închisă este nul

$$\iint_S \vec{B}d\vec{S} = 0 \tag{5.186}$$

unde S este o suprafaţă închisă. Integrala de suprafaţă poate fi transformată într-o integrală de volum, astfel că

$$\iint_S \vec{B}d\vec{S} = \iiint \nabla\vec{B} = 0 \tag{5.187}$$

Rezultă astfel forma locală a legii lui Gauss pentru câmpul magnetic:

$$\nabla \vec{B} = 0 \tag{5.188}$$

Ecuaţiile de mai sus sunt o consecinţă a faptului că liniile de câmp sunt închise.

5.7.3 Legea inducţiei electromagnetice

Legea inducţie magnetice sub forma integrală este

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} d\vec{S} \tag{5.189}$$

unde S este o suprafaţă care se spijină pe curba închisă C. Integrala curbilinie poate fi transformată într-una pe suprafaţă:

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = \iint_S \left(\nabla \times \vec{E}\right) d\vec{S} \tag{5.190}$$

Atunci

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{E}\right) d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \tag{5.191}$$

Rezultă astfel formă diferenţială a acestei legi:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{5.192}$$

unde operatorul $\nabla \times$ este operatorul rotor şi:

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \tag{5.193}$$

Relaţiile (5.189) şi (5.192) arată că un câmp magnetic variabil în timp produce un câmp electric ale cărui linii de câmp sunt închise. Acest câmp electric este unul imprimat şi nu derivă dintr-un potenţial.

5.7.4 Legea lui Ampère

În vid forma generală a legii lui Ampère este:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \tag{5.194}$$

Dar în vid $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$. Se obţine astfel o formă mai generală a legii lui Ampère:

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = I + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \tag{5.195}$$

Dar cum:

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \iint_S \left(\nabla \times \vec{H}\right) d\vec{S}$$

şi

$$I = \iint_S j d\vec{S}$$

relaţia 5.195 devine:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{5.196}$$

Relaţia 5.196 arată că există două surse ale câmpului magnetic: curenţii şi câmpurile electrice variabile în timp.

5.7.5 Legile de material

Experimental se constată existenţa unor relaţii între $\vec{P}$ şi $\vec{E}$, $\vec{H}$ şi $\vec{M}$ şi între $\vec{j}$ şi $\vec{E}$. Ele sunt determinate de starea mediului.

Legătura dintre $\vec{P}$ şi $\vec{E}$

În general densitatea de polarizare $\vec{P}$ este o sumă formată din doi termeni:

$$\vec{P} = \vec{P}_p + \vec{P}_t \tag{5.197}$$

Termenul $\vec{P}_p$ este polarizarea permanentă şi este independentă de existenţa câmpului electric (se poate obţine o polarizare permanentă tensionând pe o anumită direcţie un cristal piezoelectric).

Termenul $\vec{P}_t$ poartă numele de polarizare temporală şi este determinat de acţiunea câmpului electric.

$$\vec{P}_t = \vec{P}_t\left(\vec{E}\right) \tag{5.198}$$

Astfel în mediile anizotrope dar liniare:

$$\begin{aligned} P_x &= \varepsilon_0\left(\chi_{xx}^e E_x + \chi_{xy}^e E_y + \chi_{xz}^e E_z\right) \\ P_y &= \varepsilon_0\left(\chi_{yx}^e E_x + \chi_{yy}^e E_y + \chi_{yz}^e E_z\right) \\ P_z &= \varepsilon_0\left(\chi_{zx}^e E_x + \chi_{zy}^e E_y + \chi_{zz}^e E_z\right) \end{aligned} \tag{5.199}$$

Mărimile χ_{ij}^e unde $i\ ,\ j = x\ ,\ y\ ,\ z$ sunt componentele unui tensor simetric, denumit tensorul susceptibilităţii electrice. Există un anumit sistem de referinţă în care tensorul respectiv are diferite de zero doar componentele pe diagonală. Relaţiile (5.199) se pot scrie condensat:

$$\vec{P}_t = \varepsilon_0\overline{\overline{\chi^e}}\vec{E} \tag{5.200}$$

Într-un mediu omogen şi izotrop mărimea tensorială $\overline{\overline{\chi^e}}$ devine un scalar χ_e.

$$\vec{P} = \varepsilon_o\chi_e\vec{E} \tag{5.201}$$

În cazul în care nu există polarizare permanentă pentru mediile anizotrope liniare, inducţia câmpului electric se scrie că:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0\overline{\overline{\chi^e}}\vec{E} = \varepsilon_0\left(1 + \overline{\overline{\chi^e}}\right)\vec{E} = \varepsilon_0\overline{\overline{\varepsilon}}\vec{E} \tag{5.202}$$

unde

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = 1 + \overline{\overline{\chi^e}} \tag{5.203}$$

este tensorul permitivităţii relative a mediului respectiv.

În cazul mediilor izotrope fără polarizare permanentă

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\left(1 + \chi_e\right)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E} \tag{5.204}$$

iar permitivitatea relativă este un scalar:

$$\varepsilon = 1 + \chi_e \tag{5.205}$$

Legătura dintre $\bar{H}$ şi $\vec{M}$

Densitatea de magnetizare a unui material este dată de suma a doi termeni:

$$\vec{M} = \vec{M}_p + \vec{M}_t \tag{5.206}$$

unde $\vec{M}_p$ este magnetizarea permanentă, independentă de câmpul magnetic şi $\vec{M}_t$ magnetizarea temporală, dependentă de câmpul magnetic. Corpurile feromagnetice prezintă magnetizare permanentă. Magnetizarea temporală se întâlneşte la toate corpurile şi în general are o valoare foarte mică:

$$\vec{M}_t = \vec{M}_t \left(\vec{H}\right) \tag{5.207}$$

În mediile anizotrope liniare fără magnetizare permanentă:

$$\vec{M} = \vec{M}_t = \overline{\overline{\chi^m}}\vec{H} \tag{5.208}$$

unde $\overline{\overline{\chi^m}}$ este tensorul permeabilităţii magnetice. În cazul mediilor izotrope liniare tensorul degenerează într-un scalar:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

În cazul mediilor anizotrope fără magnetizare permanentă inducţia câmpului magnetic este:

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M}\right) = \mu_0 \left(1 + \overline{\overline{\chi^m}}\right) \vec{H} = \mu_0 \overline{\overline{\mu_r}} \vec{H} \tag{5.209}$$

unde $\overline{\overline{\mu}}$ este tensorul permeabilităţii relative.

În mediile izotrope liniare cei doi tensori devin scalari:

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M}\right) = \mu_0 \left(1 + \chi_m\right) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \tag{5.210}$$

5.7.6 Legătura dintre $\vec{j}$ şi $\vec{E}$

În mediile anizotrope şi liniare legătura dintre vectorii $\vec{j}$ şi $\vec{E}$ este dată de legea lui Ohm a cărei formă generală este:

$$\vec{j} = \overline{\overline{\sigma}} \left(\vec{E} + \vec{E}_i\right) \tag{5.211}$$

unde $\overline{\overline{\sigma}}$ este tensorul conductivităţii, iar $\vec{E}_i$ este intensitatea câmpurilor electrice de origine neelectrostatică. $\vec{E}_i$ se numeşte câmp electric imprimat.

5.8 Probleme

5.1 Trei sarcini punctiforme pozitive sunt situate pe axa Ox. Sarcina $q_1 = 20\ \mu$C este situată la coordonata $x_1 = 3$ m iar sarcina $q_2 = 10\ \mu$C se află în origine. Unde trebuie situată o sarcină q_3 astfel încât asupra acesteia forţa care acţionează asupra ei să fie nulă.

5.2 Să se determine câmpul electric creat de un dipol care constă din două sarcini q şi $-q$ aflate la distanţa $2a$. pe axa dipolului.

5.3 Un inel de rază R este încărcat uniform cu o sarcină pozitivă Q. Să se calculeze câmpul electric într-un punct aflat la distanţa x de centrul inelului perpendicular pe planul acestuia.

5.4 Un inel de rază R este încărcat uniform cu o sarcină pozitivă Q. Să se determine potenţialul creat de sarcină într-un punct aflat la distanţa x de centrul inelului perpendicular pe planul acestuia.

5.5 Un disc de rază R este încărcat uniform cu sarcina Q cu densitatea de sarcină σ. Să se determine potenţialul şi câmpul electric creat de sarcină într-un punct aflat la distanţa x de centrul discului perpendicular pe planul acestuia.

5.6 Să se determine potenţialul şi câmpul electric creat de un dipol cu sarinile q şi $-q$ aflate la distanţa a una de alta la distanţa x de centrul dipolului pe direcţia axei care leagă cele două sarcini.

5.7 O bară de lungime l situată de-a lungul axei Ox cu unul din capete în origine este încărcată uniform cu sarcină electrică pozitivă cu densitatea liniară λ. Să se determine potenţialul într-un punct situat pe axa Oy la coordonata a pozitivă pe această axă.

5.8 Potenţialul într-o regiune a spaţiului este

$$V\left(x, y, z\right) = 5x - 3x^2 + 2yz^2$$

unde potenţialul este considerat în volţi iar x, y şi z în metri. Să se determine câmpul electric în punctul $(1,\ 0,\ -2)$.

5.9 Moleculele de apă momentul de dipol $p = 6,3 \times 10^{-30}$ Cm. O probă de apă ce conţine $N = 10^{21}$ molecule care au dipoli orientaţi în sensul unui câmp de intensitate $E = 2,5 \times 10^5$ N/C (V/m). Care este lucrul mecanic pentru a orienta dipoli perpendicular pe câmp.

5.10 O sarcină q pozitivă este distribuită uniform în interiorul unei sfere dielectrice omogene cu permitivitatea ε. Se cere intensitatea câmpului electric în interiorul şi în afara sferei.

5.11 Când o diferenţă de 100 V este aplicată armăturilor unui plan paralel, acestea se încarcă cu o sarcină superficială cu densitatea egală cu 30 nC/cm^2. Să se determine distanţa dintre armături. Se cunoaşte $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$ F/m.

5.12 Un condensator plan constă din două armături $S = 10$ cm^2, separate la distanţa de 2 mm în aer. Cele două armături se află la o diferenţă de potenţial $U = 10$ V.

a) Să se calculeze câmpul electric dintre armături.
b) Să se determine densitatea superficială de sarcină.
c) Să se calculeze capacitatea condensatorului.
d) Să se afle sarcina de pe fiecare armătură.

5.13 O sferă conductoare de rază a încărcată cu sarcina Q este învelită într-un strat dielectric cu permitivitatea relativă ε_r, astfel încât raza sferei astfel construită este b. Să se determine potenţialul la care se află sfera.

5.14 O sferă dielectrică cu permitivitatea relativă ε, aflată într-un câmp electric uniform $\vec{E}$. Să se determine polarizarea acestei sferei.

5.15 Un cablu coaxial de 50 m este format dintr-un conductor cu diametrul de 2,5 mm şi are o sarcină $Q = 8$ nC. Conductorul care înconjoară firul are 7,5 mm şi are o sarcină $-Q = -8$ nC. Să se calculeze:

a) Capacitatea cablului
b) Diferenţa de potenţial dintre cele două conductoarea cablului coaxial

5.16 Un consensator cu capacitate de 3 μF este conectat la o diferenţă de potenţial de 12 V. Care este energia stocată în condensator.

5.17 Armăturile unui condensator plan paralel aflate în aer sunt separate prin distanţa $d = 1,00$ mm. Care este densitatea de energie a câmpului electric dintre armăturile condensatorului, dacă acesta este încărcat la o diferenţă de potenţial $U = 500$ V.

5.18 Un conductor de cupru are secţiuena $S = 3 \times 10^{-6}$ m^2. Dacă prin conductor trece un curent de 10 A, care este viteza de drift a electronilor? Densitatea cuprului este $\rho = 8950$ kg/m^3. Se consideră că fiecare atom contribuie cu un electron la electonii de conducţie. Masa molară a cuprului este $\mu = 29$ kg/kmol.

5.19 O sârmă de cupru are diametru $d = 1$ mm. Prin acest conductor trece un curent $I = 1,8$ A. Densitatea de electroni liberi este $n = 8,5 \times 10^{28}$ electroni/m^3. Să se găsească:
a) densitatea de curent;
b) viteza de drift.

5.20 Într-un atom Bohr electronul are o traiectorie circulară cu raza $r = 5,29 \times 10^{-11}$ m cu vieza $v = 2,19 \times 10^6$ m/s. Care este curentul efectiv asociat cu această mişcare.

5.21 Un cablu coaxial de lungime l este format dintr-un conductor cu diametrul a şi altul coaxial cu diametrul b. Între cele două conductoare există un material plastic cu rezistivitatea ρ. Să se calculeze rezistenţa radială a cablului.

5.22 Un condensator cu capacitatea C este cuplat cu ajutorul unui comutator într-un circuit care constă dintr-o sursă de tensiune electromotoare E şi rezistenţa R. Să se determine modul în care variază intensitatea curentului de încărcare a condensatorului funcţie de timp.

5.23 Presupunem că un curent care trece printr-un conductor descreşte exponenţial după ecuaţia

$$I\left(t\right) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Să se determine sarcina ce trece printr-o secţiune a conductorului în intervalele de timp $(0, 6\tau)$ şi $(0, 60\tau)$.

5.24 O bucată de material de formă paralelipipedică se extinde de la $z = -a$ la $z = +a$. Prin ea trece un curent a cărei densitate este

$$\vec{j} = j\vec{e}_x$$

Să se determine câmpul magnetic funcţie de z.

5.25 Să se determine câmpul magnetic în interiorul unei bobine toroidale. O bobină toroidală este un solenoid de lungime finită curbat în formă de tor. Se cunoaşte N (numărul de spire) şi curentul I care trece prin bobină.

5.26 Să se determine câmpul magnetic pe axa unui inel de rază R, străbătut de curentul I, la distanţa x de centrul inelului, perpendicular pe planul în care se află inelul.

5.27 În circuitul exterior al unei surse cu t.e.m. E sunt legate în serie un rezistor cu rezistenţa R şi o bobină cu inductanţa L. Rezistorul şi bobina se conectează în cirucuit prin intermediul unui comutator, care inţial este deschis. Cu variază intesitatea curentului în circuit după închiderea comutatorului?

5.28 O bară conductoare OE se roteşte în jurul axei AB cu viteza unghiulară constantă ω pe un conductor perfect circular de rază R. Bara intersectează liniile unui câmp magnetic uniform de inducţie B perpendiculare pe suprafaţa inelului conductor. Să se determine tensiunea ce poate fi măsurată între punctele C şi F .

Capitolul 6

Optică

6.1 Unde electromagnetice

Existenţa undelor electromagnetice a fost pusă în evidenţă prima dată de către Rudolf Hertz (1857-1894) în anul 1887. El a găsit că viteza de propagare a undelor electromagnetice este aceeaşi cu viteza luminii. Hertz a arătat printr-o serie de experimente polarizarea undelor electromagnetice precum şi existenţa fenomenelor de interferenţă şi de difracţie. A devenit astfel clar că undele electromagnetice sunt similare undelor luminoase, de care diferă prin lungimea de undă.

Spre deosebire de undele mecanice, undele electromagnetice nu au nevoie de un suport material pentru a se propaga. Obţinerea ecuaţiilor de propagare se face pornind de la ecuaţiile Maxwell care scrise în spaţiul vid, unde nu există sarcini electrice şi curenţi datoraţi deplasării sarcinilor. În plus se ţine cont că:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \tag{6.1}$$

şi

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \tag{6.2}$$

Atunci ecuaţiile Maxwell în vid scrise sub formă integrală iau forma:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 0 \tag{6.3}$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \tag{6.4}$$

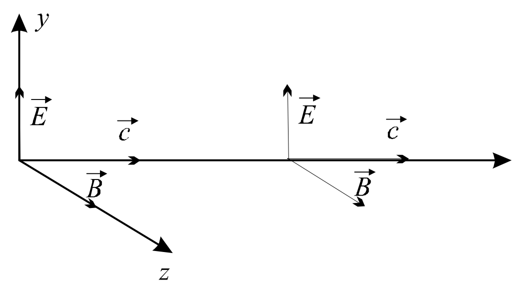


Figura 6.1: Undă electromagnetică ce se propagă în sensul axei Ox cu viteza c. Intensitatea câmpului electric $\vec{E}$ este orientată de direcţia axei Oy iar intensitatea câmpului magnetic $\vec{B}$ este orientată pe direcţia axei Oz.

În relaţiile (6.3) şi (6.4) S este o suprafaţă închisă.

$$\oint_C \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}d\vec{S} \tag{6.5}$$

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\iint_S \vec{E}d\vec{S} \tag{6.6}$$

În relaţiile (6.5) şi (6.6) de mai sus C este o curbă închisă pe care se sprijină suprafaţa S care în acest caz nu mai este o suprafaţă închisă.

6.1.1 Ecuaţia undelor electromagnetice plane

Pentru simplificare se consideră că unda electromagnetică se propagă pe direcţia Ox. Mai mult se va presupune că intensitatea câmpului electric este orientată de-a lungul axei Oy iar inducţia câmpului magnetic în direcţia a axei Oz. Această presupunere are ca suport rezultatele experimentale obţinute de Hertz asupra undelor electromagnetice. O astfel de undă poartă numele de undă plană liniar polarizată Fig. 6.1.

Considerăm un contur dreptunghiular de latură l şi lungine dx în planul xOy şi vom evalua circulaţia vectroului $\vec{E}$ pe o curbă $\oint_C \vec{E}d\vec{l}$ şi fluxul câmpului magnetic pe o suprafaţă care se spijină pe curba C, $\iint_S \vec{B}d\vec{l}$, adică vom evalua mărimile care intervin în ecuaţia (6.5). Pentru aceasta vom considera curba C ca fiind conturul unui dreptunghi de laturi dx şi l aflat în planul xOy (Fig. 6.2). Suprafaţa S este suprafaţa din planul xOy mărginită de conturul considerat.

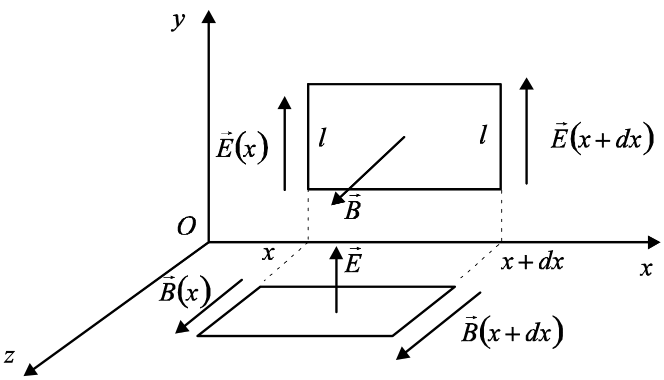


Figura 6.2: Contur dreptunghiular in planul xOy pe care se aplică legea inducţiei electromagnetice şi contur dreptunghiular în planul zOx în care se aplică legea lui Ampère.

Atunci

$$\oint_C \vec{E}d\vec{l} = E(x+dx,\ t)l - E(x,\ t)l \tag{6.7}$$

Am considerat sensul de parcurs al conturului ca fiind cel trigonometric. Pe laturile de lungime dx, $\vec{E}d\vec{l} = 0$ deoarece $\vec{E}$ şi $d\vec{l}$ sunt perpendiculare. Cum:

$$E(x+dx,\ t) = E(x,\ t) + \frac{\partial E}{\partial x}dx \tag{6.8}$$

rezultă:

$$\oint_C \vec{E}d\vec{l} = \frac{\partial E}{\partial x}ldx \tag{6.9}$$

Fluxul câmpului magnetic prin suprafaţa S este:

$$\iint_S \vec{B}d\vec{S} = Bldx \tag{6.10}$$

şi

$$\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}d\vec{S} = \frac{\partial B}{\partial t}ldx \tag{6.11}$$

Ţinând cont de relaţiile (6.9) şi (6.11) relaţia (6.5) devine:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{6.12}$$

În mod similar evaluăm mărimile $\oint_C \vec{B}d\vec{l}$ şi $\frac{d}{dt}\iint_S \vec{E}d\vec{S}$ din ecuaţia (1.7) în jurul unui contur dreptunghiular situat în planul zOx (Fig. 6.2).

Atunci:

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = B(x,\ t)l - B(x+dx,\ t)l = -l\frac{\partial B}{\partial x}dx \tag{6.13}$$

iar

$$\frac{d}{dt}\iint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{\partial E}{\partial t}ldx \tag{6.14}$$

Atunci ecuaţia (6.6) devine:

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t} \tag{6.15}$$

Derivând relaţia (6.12) în raport cu x se obţine:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right) \tag{6.16}$$

Înlocuind în această ecuaţie expresia lui $\frac{\partial B}{\partial x}$ din relaţia (6.15) se obţine:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \tag{6.17}$$

În mod analog se obţine o ecuaţie similară pentru inducţia câmpului magnetic:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \tag{6.18}$$

Ecuaţiile (6.17) şi (6.18) au aceeaşi formă ca şi ecuaţia undelor. Aşadar viteza de propagare a undelor electromagnetice este:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \tag{6.19}$$

Deoarece $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{N/A^2}$ şi $\varepsilon_0 = 8,8549 \times 10^{-12}$ F/m, se găseşte $c = 2,99792 \times 10^8$ m/s.

Cele mai simple soluţii pentru ecuaţiile (6.17) şi (6.18) sunt ecuaţiile undelor armonice plane:

$$E = E_m \cos(\omega t - kx) \tag{6.20}$$

şi

$$B = B_m \cos(\omega t - kx) \tag{6.21}$$

unde E_m şi B_m reprezintă valorile maxime ale intensităţii câmpului electric şi inducţiei câmpului magnetic, $\omega = 2\pi\nu$ estepulsaţia iar $k = 2\pi/\lambda$ este modulul vectorului de undă.

Din ecuaţiile (6.20) şi (6.21) rezultă:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = kE_m \sin(\omega t - kx) \tag{6.22}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\omega B_m \sin(\omega t - kx) \tag{6.23}$$

Ţinând cont de (6.22) şi (6.23) din (**??**) rezultă:

$$kE_m \sin(\omega t - kx) = \omega B_m(\omega t - kx) \tag{6.24}$$

şi

$$\frac{E}{B} = \frac{E_m}{B_m} = \frac{\omega}{k} = c \tag{6.25}$$

Relaţia 6.25 se poate rescrie în termenii de intensitate a câmpului electric E şi intensitate a câmpului magnetic H. Cum $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ şi $B = \mu_0 H$ rezultă:

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \tag{6.26}$$

Consideraţii asemănătoare se pot face atunci când unda electromagnetică se propagă printr-un mediu material omogen şi izotrop caracterizat de permitivitatea relativă ε_r şi permeabilitatea magnetică relativă μ_r. Atunci în expresia vitezei undelor electromagnetice vom înlocui pe ε_0 cu $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ (permitivitatea absolută a mediului) şi pe μ_0 cu $\mu = \mu_r \mu_0$. Astfel într-un mediu material omogen şi izotrop

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \tag{6.27}$$

Mărimea $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$ poartă numele de indice de refracţie al mediului. În acest caz relaţia 6.26 se scrie:

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{6.28}$$

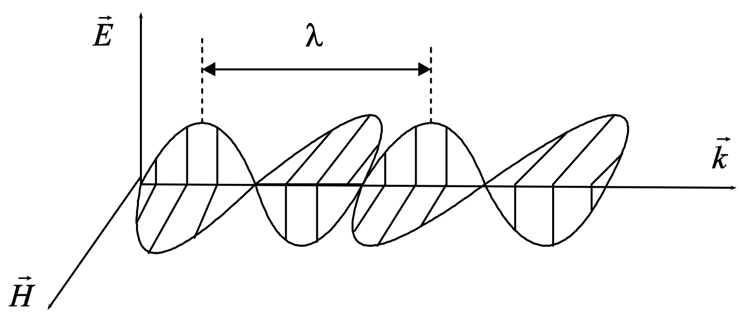


Figura 6.3: Reprezentarea schematică a unei unde plane.

$$\frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = v \tag{6.29}$$

În cazul general (al unei unde electromagnetice plane care se propagă într-o direcţie caracterizată de vectorul de propagare $\vec{u}$, vectorul de undă este $\vec{k} = k\vec{u}$, iar relaţia dintre $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ devine:

$$\vec{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\vec{u} \times \vec{H}\right) \tag{6.30}$$

Astfel $\vec{E}$, $\vec{u}$ şi $\vec{H}$ sau $(\vec{B})$ formează un triedru drept. O reprezentare a unei unde plane este dată în Fig. (6.3).

6.1.2 Energia undelor electromagnetice

O proprietate extrem de importantă a undelor electromagnetice este aceea că ele transportă energie şi impuls. Pentru a caracteriza energia dintr-o regiune a spaţiului unde există o undă electromagnetică vom considera densitatea de energie a componentei electrice a câmpului şi pe cea a componentei magnetice a câmpului. Astfel densitatea de energie a câmpului electric este:

$$w_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \tag{6.31}$$

şi în cazul câmpului magnetic:

$$w_M = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \tag{6.32}$$

Menţionăm că cele două expresii sunt considerate pentru câmpul electromagnetic în vid. Densitatea totală de energie este:

$$w = w_E + w_M = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 \tag{6.33}$$

Dacă se ţine cont de relaţia dintre E şi B din ecuaţia **??** rezultă

$$B = \frac{E}{c} = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}E \tag{6.34}$$

Atunci:

$$w_M = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = w_E \tag{6.35}$$

Astfel energia undei electromagnetice este împărţită în mod egal între componenta electrică şi cea magnetică. Rezultă:

$$w = \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0}B^2 \tag{6.36}$$

Dar E şi B sunt mărimi care variază extrem de rapid în timp şi din acest motiv este mai indicat să se lucreze cu media temporală pe care o vom nota cu $\langle .. \rangle$:

$$\langle w \rangle = \varepsilon_0 \left\langle E^2 \right\rangle \tag{6.37}$$

Se consideră o undă este una armonică plană:

$$\left\langle E^2 \right\rangle = \frac{1}{T}\int\limits_0^T E_m^2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - kx\right) dt = \frac{E_m^2}{2} \tag{6.38}$$

Astfel

$$\langle w \rangle = \varepsilon_0 \frac{E_m^2}{2} \tag{6.39}$$

Dacă se consideră un cilindru cu arie A şi lungime $c\Delta t$ Fig. 6.4 a cărui axă este în direcţia de propagare a undei atunci baza din dreapta este străbătută în intervalul Δt de energia care se găseşte în cilindru la momentul de timp t.

$$W = \langle w \rangle Sc\Delta t \tag{6.40}$$

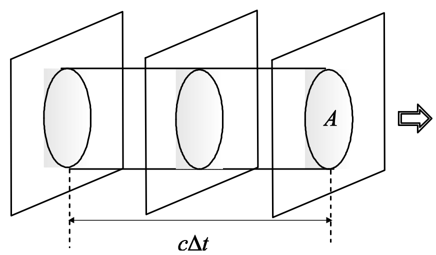


Figura 6.4: Propagarea energiei.

Definim intensitatea undei I ca fiind energia ce străbate unitatea de arie perpendiculară pe direcţia de propagare în unitatea de timp.

$$I = \frac{W}{A\Delta t} = c\left\langle w\right\rangle \tag{6.41}$$

$$I = \left\langle cw\right\rangle = \left\langle c\varepsilon_0 E^2\right\rangle = c\varepsilon_0\left\langle E^2\right\rangle = \frac{c\varepsilon_0}{2}E_m^2 \tag{6.42}$$

Dar cum $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_m^2 = \frac{E_m^2}{2c\mu_0} \tag{6.43}$$

Într-un mediu material caracterizat de permitivitatea absolută ε şi μ.

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_m^2 \tag{6.44}$$

Pornind de la această expresie putem introduce un vector $\vec{S}$ numit vectorul Poyting care este legat de curgerea de energie a câmpului electric printr-o suprafaţă:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) \tag{6.45}$$

sau:

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} \tag{6.46}$$

Ultima definiţie o vom considera ca cea mai generală. Obţinem:

$$\frac{BE}{\mu_0} = \left|\vec{S}\right| \tag{6.47}$$

Cum
$$\left\langle \frac{BE}{\mu_0} \right\rangle = \left\langle \frac{E^2}{c\mu_0} \right\rangle = \frac{\langle E^2 \rangle}{c\mu_0} = \frac{E_m^2}{2c\mu_0} \tag{6.48}$$

Astfel intensitatea undei I este egală cu media temporală a vectorului Poynting:
$$I = \left\langle \left| \vec{S} \right| \right\rangle = \left\langle \frac{BE}{\mu_0} \right\rangle = \frac{E_m^2}{2c\mu_0} \tag{6.49}$$

Astfel media în timp a modulului vectorului Poynting reprezintă energia care trece prin unitatea de suprafaţă în unitatea de timp.

6.1.3 Presiunea şi impulsul radiaţiei

În 1619 Johannes Kepler a considerat că presiunea luminii care acţionează asupra cozii cometelor, determină îndepărtare de Soare a acestora. Acest argument a fost unul în favoarea teoriei corpusculare. Când unda este absorbită, este absorbit şi impulsul corespunzător şi pe suprafaţa respectivă se exercită o presiune. Presupunem că unda electromagnetică trimite normal pe o suprafaţă energia W în intervalul de timp Δt. Maxwell a arătat că dacă această energie este absorbită complet pe suprafaţă ea va transmite un impuls egal cu:
$$p = \frac{W}{c} \tag{6.50}$$

Presiunea P este definită ca forţa pe unitatea de suprafaţă:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{1}{A}\frac{dp}{dt} \tag{6.51}$$

În relaţia (6.51) am notat suprafaţa egală cu A.

$$P = \frac{1}{A}\frac{d}{dt}\left(\frac{W}{c}\right) = \frac{1}{Ac}\frac{dW}{dt} \tag{6.52}$$

Dar cum energia medie care cade pe unitatea de supraţaţă în unitatea de timp este intensitatea undei:

$$\frac{1}{A}\frac{dW}{dt} = \left\langle \left| \vec{S} \right| \right\rangle \tag{6.53}$$

Astfel presiunea radiaţiei este:

$$P = \frac{\left\langle \left| \vec{S} \right| \right\rangle}{c} \tag{6.54}$$

Dacă suprafaţa este perfect reflectătoare şi incidenţa este normală atunci impulsul transmis suprafeţei este de două ori mai mare decât în cazul în care unda este absorbită pe suprafaţă:

$$p = \frac{2W}{c} \tag{6.55}$$

iar presiunea exercitată pe suprafaţă este:

$$P = \frac{2\left\langle \left| \vec{S} \right| \right\rangle}{c} \tag{6.56}$$

6.1.4 Spectrul undelor electromagnetice

Undele radio (10^4 m $- 0,3$ m) sunt rezultatul accelerării sarcinii prin fire conductoare (antene). De exemplu un curent alternativ cu frecvenţa de 50 Hz care trece prin liniile de transmisie a energiei electrice generează o undă electromagnetică cu $\lambda = 6 \times 10^3$ km. Teoretic nu există limită pentru aceste unde. Frecvenţele cele mai mici ale acestei benzi sunt utilizate în emisiile radio şi TV.

Microunde ($0,3$ m-10^{-4} m). Sunt generate de dispozitive electronice. Au frecvenţele cuprinse între 10^9 Hz şi 3×10^{11} Hz. Radiaţiile capabile să penetreze atmosfera Pământului au lungimile de undă cuprinse între 30 cm şi 1 cm. Sunt foarte importante în comunicaţiile cu vehiculele extraterestre. Ele sunt utilizate în cazul sistemelor radar şi pentru studiul proprietăţilor atomilor şi moleculelor.

Radiaţiile infraroşii (10^{-3} m$-$ 7×10^{-7} m). Aceste unde sunt emise de moleculele aflate la temperatura camerei şi sunt uşor absorbite de cele mai multe obiecte. Ca orice creatură cu sânge cald şi omul emite radiaţii infraroşii cu frecvenţele cuprinse între 3000 nm şi 10000 nm. Undele infraroşii au aplicaţii în terapie, fotografii în infraroşu.

Lumina reprezintă cele mai familiare unde electromagnetice şi acea parte din spectrul undelor electromagnetice care poate fi detectată de ochiul uman. Lungimile de undă corespund diferitelor culori ($\lambda = 7 \times 10^{-7}$ m pentru roşu, până la$\lambda = 4 \times 10^{-7}$ m pentru violet). Sensibilitatea ochiului uman depinde de lungimea de undă, având un maxim pentru $\lambda = 5,5 \times 10^{-7}$ m care corespunde culorii verzi.

Radiaţiile ultraviolete ($\lambda = 4 \times 10^{-7}$ m - $\lambda = 6 \times 10^{-10}$ m). Cea mai importantă sursă de unde ultraviolete este Soarele. Loţiunile de plajă sunt absorbante pentru ultraviolete şi transparente pentru lumină. Cea mai mare parte a radiaţiei ultraviolete este absorbită în stratul de ozon.[1].

Radiaţia X ($\lambda = 10^{-8}$ m....$\lambda = 10^{-12}$ m). O metodă practică de obţinere a radiaţiilor X este aceea de a accelera electronii şi de a-i orienta către ţintele realizate din diferite materiale. Razele X sunt utilizate în medicină şi în studiul cristalelor deoarece lungimile de undă sunt comparabile cu distanţele dintre atomi.

Radiaţia γ este emisă de nuclee radioactive (^{60}Co, ^{137}Cs) şi în diverse reacţii nucleare. Radiaţiile γ au lungimi de undă cuprinse între 10^{-10} şi 10^{-14} m sau chiar şi mai mici. Aceste radiaţii sunt puternic peneterante în ţesuturile vii în care produc leziuni importante. Singura protecţie faţă de acest tip de radiaţii sunt ecranele de plumb sau uraniu sărăcit.

6.2 Polarizarea luminii

6.2.1 Polarizarea luminii

Lumina polarizată şi liniar polarizată

În cazul unei unde transversale vibraţia este perpendiculară pe direcţia de propagare a undei. De exemplu dacă direcţia de propagare a axei este Ox, $\vec{E}$ este perpendicular pe aceasta adică se află în planul yOz . Dacă direcţia de vibraţie rămâne paralelă cu o anumită direcţie din spaţiu spunem că lumina este liniar polarizată. Ecuaţia undei polarizate care se propagă de-a lungul axei Oy şi pentru care vectorul intensitate câmp electric $\vec{E}$ oscilează de-a lungul axei Oy este:

$$\vec{E} = E\vec{e}_y \cos(\omega t - kx) \tag{6.57}$$

Direcţia cu care vectorul $\vec{E}$ este paralel se numeşte direcţie de polarizare. Adesea o undă polarizată este descrisă cu ajutorul planului de polarizare.

[1] Stratul superior al atmosferei este numit stratosferă. Pătura de ozon transformă radiaţia ultravioletă cu energie mare în radiaţie infraroşie cu energie joasă care încălzeşte atmosfera.

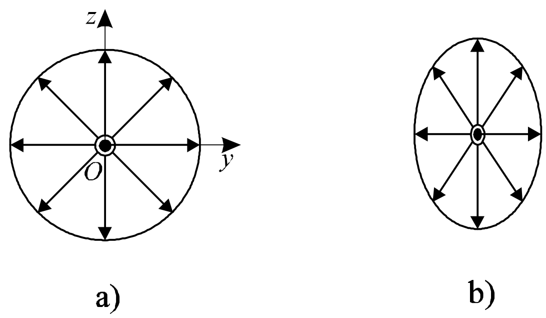


Figura 6.5: a) Lumina nepolarizata. b) Lumină parţial polarizată

Acest plan este determinat de $\vec{E}$ şi de direcţia de propagare $\vec{k}$. Un fascicul de lumină constă dintr-un mare număr de unde emise de atomii sursei de lumină. Fiecare atom produce o undă care este caracterizată de o anumită orientare pentru intensitatea câmpului electric. Dacă direcţia de propagare a acestor unde este Ox toate direcţiile de vibraţie vor fi în planul yOz. Unda electromagnetică rezultantă reprezintă o suprapunere de unde cu diferite direcţii de oscilaţie. O astfel de undă este o undă nepolarizată (Fig. 6.5a).

Dacă undele oscilează după toate direcţiile dar dacă există o direcţie preferenţială după care $\vec{E}$ are o amplitudine maximă, lumina se numeşte lumină parţial polarizată (Fig. 6.5b).

Lumină eliptic polarizată (circular polarizată)

O altă situaţie este aceea a luminii polarizate eliptic. O astfel de situaţie se obţine prin compunerea a două unde armonice plane care au aceeaşi frecvenţă, se propagă pe aceeaşi direcţie şi oscilează pe direcţii perpendiculare:

$$\vec{E}_1 = E_{01}\vec{e}_y \cos(\omega t - kx) = E_y\vec{e}_y \tag{6.58}$$

$$\vec{E}_2 = E_{02}\vec{e}_z \cos(\omega t - kx - \varphi) = E_z\vec{e}_z \tag{6.59}$$

Atunci:

$$\frac{E_y}{E_{01}} = \cos(\omega t - kx)$$
$$\frac{E_z}{E_{02}} = \cos(\omega t - kx - \varphi)$$

sau

$$\frac{E_y}{E_{02}} = \cos(\omega t - kx)\cos\phi + \sin(\omega t - kz)\sin\varphi$$
$$\frac{E_y}{E_{02}} = \cos(\omega t - kx)\cos\phi + \sqrt{1 - \cos^2(\omega t - kz)}\sin\varphi$$

Obţinem astfel:

$$\frac{E_y}{E_{02}} = \frac{E_y}{E_{01}}\cos\varphi + \sqrt{1-\left(\frac{E_y}{E_{01}}\right)^2}\sin\varphi$$
$$\frac{E_z}{E_{02}} - \frac{E_y}{E_{01}}\cos\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{E_y}{E_{01}}\right)^2}\sin\varphi$$

Ridicând la patrat şi adunnd cele două relaţii:

$$\frac{E_y^2}{E_{01}^2} + \frac{E_z^2}{E_{02}^2} - \frac{2E_yE_z}{E_{01}E_{02}}\cos\varphi = \sin 2\varphi \tag{6.60}$$

Aceasta este ecuaţia unei elipse. Să considerăm câteva cazuri particulare a) $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Atunci:

$$\frac{E_y^2}{E_{01}^2} + \frac{E_z^2}{E_{02}^2} = 1 \tag{6.61}$$

Aceasta este o elipsă cu axele Oy şi Oz, rotaţia vectorului $\vec{E}$ având loc în sens trigonometric. Din punct de vedere fizic aceasta înseamnă că rotaţia are loc în sens trigonometric pe măsură ce unda se propaga 6.6.

b) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ şi $E_{01} = E_{02} = E_0$

$$E_y^2 + E_z^2 = E_0^2 \tag{6.62}$$

Unda este polarizată circular.

c) $\varphi = 0$ sau π

$$\left(\frac{E_y}{E_{01}} \pm \frac{E_z}{E_{02}}\right)^2 = 0 \tag{6.63}$$

$$E_z = \pm\frac{E_{02}}{E_{01}}E_y \tag{6.64}$$

Undă este una liniar polarizată (Fig. 6.6)

6.2.2 Modalităţi de obţinere a luminii polarizate

Polarizare prin absorbţie selectivă

În sens larg termenul de dicroism se referă la absorbţia selectivă a uneia din componentele vectorului $\vec{E}$ din fasciculul de lumină incident.

Să considerăm o undă electromagnetică nepolarizată incidentă pe o reţea din fire metalice (Fig.6.7)

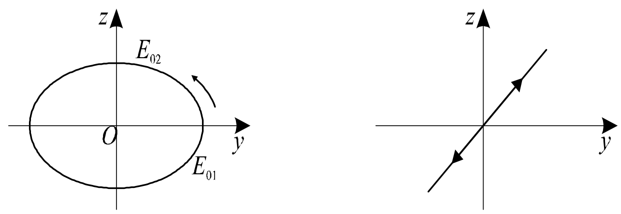


Figura 6.6: Unde polarizate eliptic si liniar

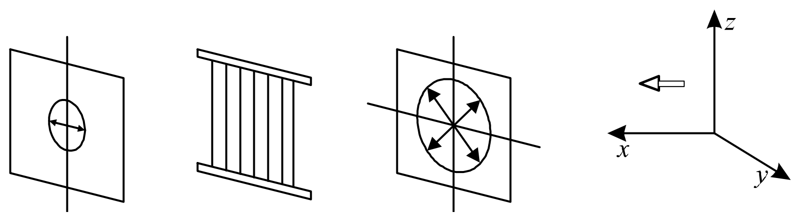


Figura 6.7: Reţeaua de sârme paralele acţionează ca un polarizor pentru undele electromagnetice.

Câmpul electric al unei unde electromagnetice poate fi descompus în două componenente ortogonale una de-a lungul firelor şi cealaltă perpendiculară pe fire. Componenta după direcţia firelor (paralelă cu axa Oz) va determina mişcarea electronilor din sârmă de-a lungul acestora adică va apărea un curent în reţeaua de fire. Energia câmpului electromagnetic datorată acestei componente va fi transferată firelor care se vor încălzi. În plus va apărea o undă electromagnetică ce se va propaga în sens opus propagării iniţiale. Această undă care apare ca undă reflectată tinde să anuleze unda incidentă. Astfel dincolo de reţea unda electromagnetică nu mai posedă componentă paralelă cu Oz.

Din contră pe direcţia Oy electronii nu sunt liberi să se deplaseze deoarece sârmele sunt foarte subţiri. Din acest motiv componenta după Oy a câmpului electromagnetic nu este absorbită. Ipoteza poate fi confirmată cu ajutorul microundelor şi al unei reţele formate din fire conductoare chiar dacă pare extrem de greu o astfel de reţea a fost construită de G.R. Bird ş M Parish Jr (2160 fire pe mm)[2].

Există materiale care prezintă proprietatea de dicroism datorită structurii lor cristaline. Un astfel de material este turmalina (silicat de bariu). Pentru o astfel de substanţă există o anumită direcţie cunoscută ca axa

[2] The wire grid as a near-infrared polarizer in J Opt. Soc Am 50, 886 (1960)

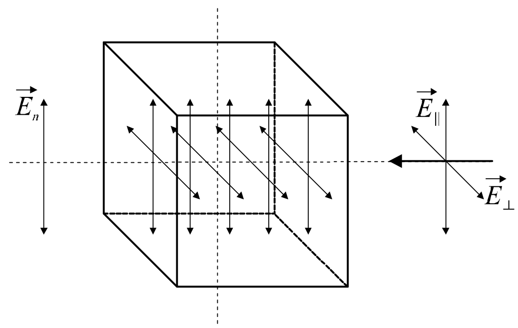


Figura 6.8: Comportarea unei unde luminoase care trece printr-un cristal de turmalină

optică care este determinată de structura optică a substanţei (6.8). Componenta câmpului electric al undei luminoase care este perpendiculară pe axa optică este puternic absorbită. Cu cât grosimea cristalului este mai mare cu atât absorbţia este mai puternică. Astfel o lamă cu feţele paralele cu axa optică constituie un polarizor liniar.

Totuşi utilizarea cristalelor de turmalină pentru obţinerea luminii liniar polarizate nu este practică deoarece cristalele din această substanţă sunt mici iar procesul de absorbţie este dependent de lungimea de undă.

În anul 1938 Lamb a inventat folia polarizoare de tip H care este utilizată ca polarizor şi în zilele noastre.

Ea nu mai conţine cristale discrete ci molecule alungite care joacă rolul reţelei de fire. Pentru obţinerea acesteia se utilizează o folie de alcool polivinilic care se încălzeşte şi este întinsă după o anumită direcţie pentru alinierea moleculelor. Folia este introdusă într-o soluţie de iod. Iodul impregnează plasticul iar moleculele se plasează la capătul moleculelor de alcool polivinilic pe care le uneşte în lanţuri. Electronii de conducţie ai iodului se pot deplasa în lungul acestor lanţuri, ei jucând rolul electronilor de conducţie din reţeaua de fire. Componenta câmpului electric paralelă cu aceste lanţuri acţionează puternic asupra electronilor ea fiind puternic absorbită. În folia de tip H elementele care produc dicroismul sunt moleculele astfel că nu apar probleme datorate împrăştierii luminii. Folia de tip H este un polarizor efectiv pentru întreg spectrul vizibil cu o eficienţă mai mare în regiunea albastră.

Un astfel de dispozitiv pe care cade lumina naturală şi din care iese lumina polarizată se numeşte polarizor.

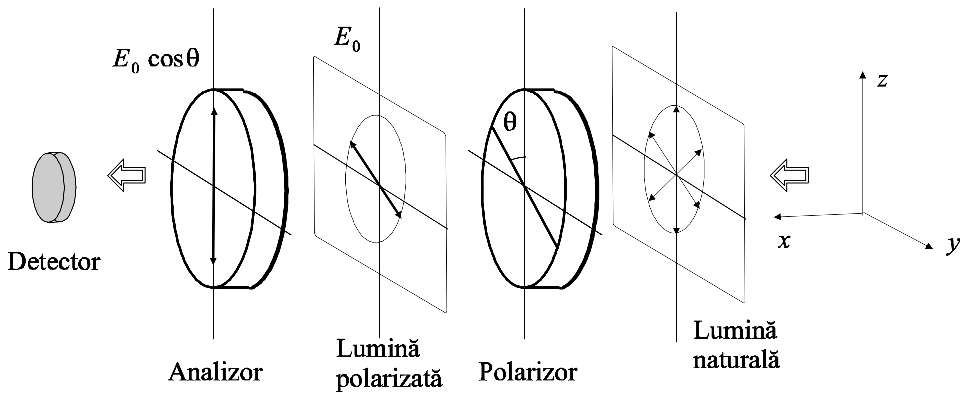


Figura 6.9: Legea lui Malus

Legea lui Malus

În figura 2.7 este reprezentat un fascicul de lumină nepolarizată care cade pe un polarizor. Lumina care trece prin primul polarizor cade pe un altul numit analizor a cărui axă face cu axa de transmisie a primului polarizor un unghi θ (6.9).

Dacă amplitudinea câmpului electric transmis prin primul polarizor este E_0 numai componenta $E_0 \cos\theta$ paralelă cu axa celui de-al doilea polarizor va trece prin acesta. Astfel intensitatea undei care trece prin al doilea polarizor va fi

$$I(\theta) = E_0^2 \cos^2\theta \tag{6.65}$$

Intensitatea maximă a luminii ce ajunge în final pe detector se obţine când $\theta = 0$. Atunci $I(0) = E_0^2$, astfel că ecuaţia de mai sus se scrie ca

$$I(\theta) = I_0 \cos^2\theta \tag{6.66}$$

şi este cunoscută sub denumirea de legea lui Mallus.

Polarizarea prin reflexie

Când fasciculul de lumină nepolarizată este reflectat pe o suprafaţă, lumina reflectată este complet polarizată sau parţial polarizată în funcţie de unghiul de incidenţă. Dacă unghiul de incidenţă $\theta = 0$, lumina reflectată este nepolarizată. Pentru celelalte unghiuri de incidenţă lumina reflectată este parţial polarizată şi pentru un anumit unghi este total polarizată.

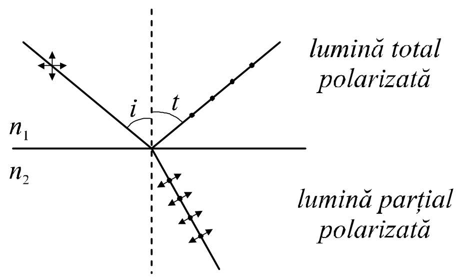


Figura 6.10: Polarizarea prin reflexie

Presupunem că un fascicul este incident pe o suprafaţă ca în Fig. 6.10. Fiecare vector poate fi descompus într-o componentă paralelă cu suprafaţa şi alta perpendiculară pe prima şi pe direcţia de propagare (aflată în planul de incidenţă).

Componenta paralelă cu suprafaţa care este perpendiculară pe planul de incidenţă se reflectă mai puternic decât cealaltă componentă. Se obţine o undă reflectată parţial polarizată. Mai mult şi lumina refractată este parţial polarizată. Experimental se constată că la o anumită valoare a unghiului de incidenţă (numit unghi Brewster) lumina devine total polarizată $\mathrm{tg}\,\mathrm{i_B} = \frac{\mathrm{n_2}}{\mathrm{n_1}}$.

Polarizarea prin reflexie este un fenomen comun. Lumina reflectată pe apă, sticlă şi zăpadă este parţial polarizată. Dacă suprafaţa este orizontală, vectorul câmp electric reflectat are o componentă orizontală puternică.

Polarizarea prin dublă refracţie

Solidele pot fi clasificate în funcţie de structura lor internă. Astfel când atomii sunt aranjaţi într-o structură ordonată solidul este un cristal (ex Na Cl). Solidele în care atomii sunt distribuiţi aleator poartă numele de solide amorfe. Când lumina traversează un solid amorf ea are aceeaşi viteză în toate direcţiile. Aceasta înseamnă că un material amorf este caracterizat de un singur indice de refracţie. În anumit materiale cristaline precum calcitul sau cuarţul viteza luminii nu este aceeaşi în toate direcţiile. Astfel de materiale sunt caracterizate de doi indici de refracţie şi se numesc birefringente.

La intrarea în calcit lumina nepolarizată se împarte în două raze polarizate care traversează cristalul cu viteze diferite (6.10). Cele două raze sunt polarizate pe direcţii perpendiculare. Una din raze se numeşte ordinară şi este caracterizată de indicele de referacţie n_o care are aceeaşi valoare în toate direcţiile (dacă plasăm o sursă punctiformă în interiorul cristalului

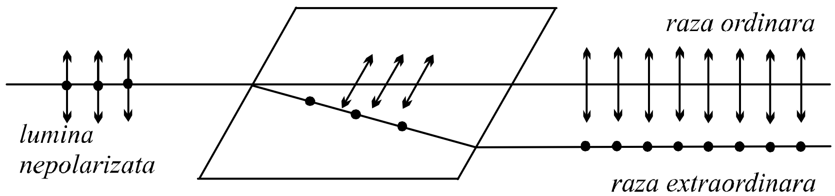


Figura 6.11: Polarizarea prin dubla refracţie. Raza ordinară şi extraordinară care apar după trecerea unei raze de lumină printr-un cristal.

frontul de undă este sferic).

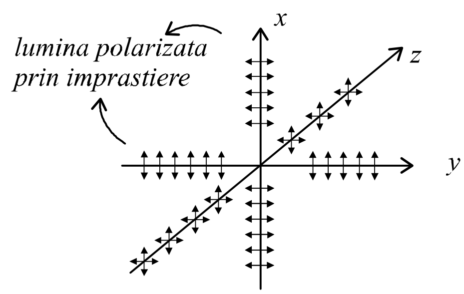
Cea de-a doua rază este numită rază extraordinară, traversează cristalul cu viteza dependent de direcţia de propagare, este caracterizată de indicele de refracţie n_e care variaza cu direcţia. Considerând din nou sursa punctiformă în interiorul cristalului datorită faptului că după diverse direcţii lumina se propagă cu viteze diferite, frontul de undă al undei extraordinare este unul eliptic.

Din figura de mai sus se observă că de-a lungul unei anumite direcţii numită axă optică principală cele două raze se propagă cu aceeaşi viteză şi $n_0 = n_e$. Diferenţa maximă între vitezele celor două raze este maximă într-o direcţie perpendiculară pe axa optică. Astfel pentru calcit $n_0 = 1,658$ pentru $\lambda = 589,3$ iar n_e variază între 1,658 de-a lungul axei optice până la 1,486 perpendicular pe aceasta. În Tabelul 6.1 sunt prezentaţi indici de refracţie pentru câteva cristale care prezintă dublă refracţie.

Tabelul 6.1
Indicii de refracţie pentru cristale care prezintă dublă refracţie

Cristal	n_0	n_e	n_0/n_e
calcit	1,658	1,486	1,116
cuarţ	1,544	1,553	0,994
azotat de sodiu	1,587	1,336	1,118
sulfat de sodiu	1,565	1,515	1,013
clorură de zinc	1,687	1,713	0,985

Dacă lumina cade după o direcţie perpendiculară pe axa optică raza de lumină nu se desparte în două deşi cele două raze de lumină există. Ele se propagă pe aceiaşi direcţie dar cu viteze diferite.



Cel mai simplu mod de a pune în evidenţa dubla reflexie este acela de a pune un cristal peste o foie pe care este scris ceva. Prin cristal se observă două imagini.

Polarizare prin împrăştiere

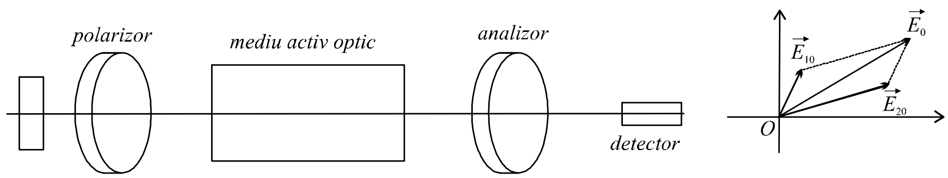
Fenomenul de absorbţie a luminii şi reiradiere este numit împrăştiere. Împrăştierea luminii poate fi demonstrată prin trecerea luminii printr-o cuvă cu apă în care sunt introduse mici cantităţi de lapte praf. Particulele de lapte absorb lumina şi o reemit făcând fasciculul luminos vizibil.

Putem înţelege polarizarea prin împrăştiere dacă privim moleculele ca o antenă dipolară care emite unde cu un maxim de intensitate pe direcţia perpendiculară pe antenă şi având vectorul $\vec{E}$ paralel cu antena. În Fig. **??** este prezentat un fascicul de lumină nepolarizată care se propagă de-a lungul axei Oz. Câmpul electric are componente pe ambele direcţii Oy şi Ox. Aceste componente accelerează electronii materialului împrăştietor pe cele două direcţii. Oscilaţiile în direcţia Ox produc lumină care se propagă pe direcţia Oy cu $\vec{E}$ paralel cu Ox. Oscilaţiile în direcţia Oy produc lumină care se propagă pe direcţia Ox cu $\vec{E}$ paralel cu Oy.

Activitatea optică

Multe din aplicaţiile luminii polarizate implică materiale care prezintă activitate optică. Un material este optic activ dacă roteşte planul de polarizare al luminii car trece prin material. Montajul utilizat este prezentat în Fig. **??** de mai jos.

Pentru determinarea unghiului de rotaţie se roteşte analizorul până când intensitatea detectată devine maximă. Un material optic activ este soluţia de zahăr în apă. Dacă rotirea axei de polarizare se face către dreapta spunem



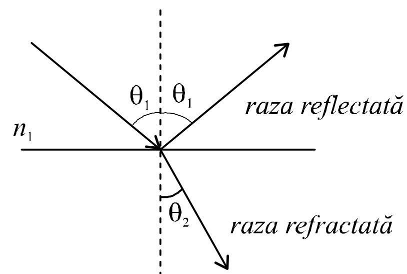


Figura 6.12: Reflexia şi refracţia luminii

că substanţa este dextrogiră iar daca rotirea se face către stânga substanţa este levogiră.

$$\alpha = ct \times \lambda \rho d \tag{6.67}$$

unde λ este lungimea de undă a radiaţiei utilizate, ρ este densitatea substanţei optic active iar d este distanţa parcursă de lumină în substanţă.

Moleculele asimetrice sunt cele care determină activitatea optică a unui material. De exemplu anumite proteine sunt optic active datorită formei lor spiralate. Alte materiale precum sticla şi plasticul devin optic active sub presiune. Cristalele lichide îşi schimbă activitatea prin aplicarea unui potenţial între plăcile în care se află cristalul.

6.3 Reflexia şi refracţia luminii

În cadrul opticii geometrice care implică studiul propagării luminii se face presupunerea că lumina traversează un mediu omogen de-a lungul unor drepte (numite raze de lumină) care îşi schimbă direcţia la suprafaţa de separare dintre două medii. Pentru a înţelege această aproximare observăm că razele unei unde sunt liniile perpendiculare pe suprafaţa de undă.

La suprafaţa de separare a două medii transparente o parte din raza incidentă se reflectă iar o parte se refractă (Fig. 6.12). În cazul reflexiei,

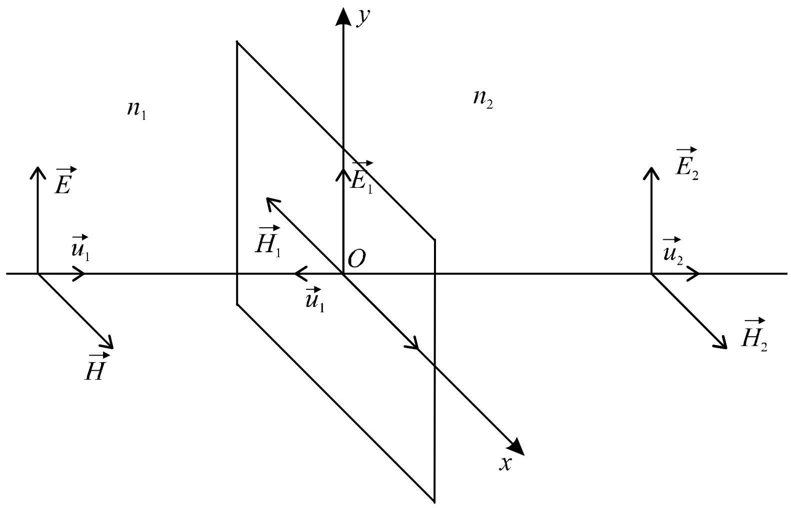


Figura 6.13: Propagarea undelor electromagnetice la suprafaţa de separare a două medii la incidenţă normală.

unghiul format de raza reflectată cu normala este egal cu unghiul format de raza incidentă cu normala.

În cazul refracţiei este adevărată relaţia:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{6.68}$$

6.3.1 Reflexia şi refracţia undelor electromagnetice în cazul incidenţei normale

Să considerăm două medii neconductoare şi nemagnetice care sunt caracterizate de permitivităţile relative ε_1 şi ε_2 . Aceasta înseamnă că indicii de refracţie a celor două medii sunt $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$ şi $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$.

Presupunem că unda provine din mediul 1 şi cade perpendicular pe suprafaţa de separare dintre mediile 1 şi 2 (Fig. 6.13).

Unda incidentă este caracterizată de vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{H}$, unda reflectată de vectorii $\vec{E}_1$ şi $\vec{H}_1$ iar unda refractată de vectorii $\vec{E}_2$ şi $\vec{H}_2$.

Se demonstrează că undele reflectată şi refractată au aceeaşi frecvenţă ca şi unda incidentă. Ecuaţiile celor trei unde (incidentă, reflectată şi refractată) sunt:

$$E = E_{00} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{v_1}\right)\right]; H = \sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\mu_0}} E = n_1\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E \tag{6.69}$$

$$E_1 = E_{10} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{v_1}\right)\right]; H_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\mu_0}} E = n_1\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_1 \tag{6.70}$$

$$E_2 = E_{20} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{v_1}\right)\right]; H_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0}{\mu_0}} E_2 = n_2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_2 \tag{6.71}$$

Condiţiile la limită pentru câmpurile electrice şi magnetice pentru $z = 0$ determină relaţiile între amplitudinile undelor incidentă, reflectată şi refractată:

$$E_{00} + E_{10} = E_{20} \tag{6.72}$$

$$H_{00} - H_{10} = H_{20} \tag{6.73}$$

Ţinând cont de relaţiile dintre intensitatea câmpului electric şi intensitatea câmpului magnetic obţinem

$$E_{00} + E_{10} = E_{20} \tag{6.74}$$

$$n_1 E_{00} - n_1 E_{10} = n_2 E_{20} \tag{6.75}$$

Rezultă că:

$$E_{20} = 2\frac{n_1}{n_1 + n_2} E_{00} \tag{6.76}$$

$$E_{10} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_{00} \tag{6.77}$$

Definim coeficienţii de reflexie r şi de transmisie t astfel:

$$r = \frac{E_{10}}{E_{00}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \tag{6.78}$$

$$t = \frac{E_{20}}{E_{00}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \tag{6.79}$$

Dacă $n_1 > n_2$ remarcăm $E_{10} > 0$. Aceasta înseamnă că $E_1 > E_0$ oscilează în fază.

Dacă $n_1 < n_2$ remarcăm $E_{10} < 0$. Aceasta înseamnă că $E_1 > E_0$ oscilează în opoziţie de fază. Aceasta este echivalentă cu o modificare a fazei undei reflectate egală cu π sau cu o pierdere sau un câştig de $\lambda/2$.

Semnul lui E_{20} coincide totdeauna cu semnul lui E_{00}, aceasta semnificând că întotdeauna unda transmisă este în fază cu unda incidentă. Definim în continuare factorul de reflexie şi transmisie.

Factorul de reflexie reprezintă raportul dintre fluxul mediu de energie din unda reflectată şi fluxul mediu de energie din unda incidentă:

$$R = \frac{\langle S_1 \rangle}{\langle S_0 \rangle} = \frac{E_{10}^2}{E_{00}^2} \tag{6.80}$$

Factorul de transmisie reprezintă raportul dintre fluxul mediu de energie din unda transmisă şi fluxul mediu de energie din unda incidentă.

$$T = \frac{\langle S_2 \rangle}{\langle S_0 \rangle} = \frac{\langle E_2 H_2 \rangle}{\langle EH \rangle} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \frac{\langle E_2 \rangle}{\langle E_1 \rangle} = \frac{n_2}{n_1} \frac{E_{20}^2}{E_{00}^2} \tag{6.81}$$

Atunci

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad ; \quad T = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \tag{6.82}$$

Se verifică egalitatea

$$R + T = 1 \tag{6.83}$$

Egalitatea este o consecinţă a legii conservării energiei în sensul că în lipsa absorbţiei energia incidentă se împarte în energia din unda reflectată şi unda refractată.

Să estimăm factorul de reflexie şi pe cel de transmisie pentru lumina ce cade din aer pe sticlă. Cum $n_1 = 1$ şi $n_2 = 1,5$ se obţine $R = 0,04$ şi $T = 0,96$. Astfel sticla obişnuită reflectă numai o mică parte din lumina care cade pe ea majoritatea fiind transmisă.

6.4 Interferenţa luminii

”
Două unde luminoase interferă dacă intensitatea undei rezultate prin suprapunerea lor nu este egală cu suma intensităţilor fiecărei unde în parte.

$$I \neq I_1 + I_2 \tag{6.84}$$

Vom considera în continuare condiţiile în care poate avea loc interferenţa. Notăm cu $\vec{E}_1$şi $\vec{E}_2$ intensităţile câmpului electric ale celor două unde care se suprapun

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \tag{6.85}$$

Pentru simplificare se consideră că intensitatea undei rezultate este egală cu media temporală a pătratului intensităţii câmpului electric $\vec{E}$:

$$I = \left\langle \vec{E}^2 \right\rangle = \left\langle \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 \right)^2 \right\rangle = \left\langle \vec{E}_1^2 \right\rangle + \left\langle \vec{E}_2^2 \right\rangle + 2 \left\langle \vec{E}_1 \right\rangle \left\langle \vec{E}_2 \right\rangle \tag{6.86}$$

$$I = I_1 + I_2 + 2 \left\langle \overrightarrow{E}_1 \overrightarrow{E}_2 \right\rangle \tag{6.87}$$

Termenul $2\left\langle \vec{E}_1 \vec{E}_2 \right\rangle$ poartă numele de termen de interferenţă. Pentru a avea loc interferenţa este necesar ca acest termen să fie diferit de zero. Pentru ca a ceastă condiţie să fie îndeplinită , în primul rând este necesar (dar nu suficient) $\vec{E}_1$ nu trebuie să fie perpendicular pe $\vec{E}_2$. Vom considera în continuare, pentru simplificare, că $\vec{E}_1$ este paralel cu $\vec{E}_2$. Condiţia $\left\langle \vec{E}_1 \vec{E}_2 \right\rangle \neq 0$ este ăndeplinită atunci când:

a) $\omega_1 = \omega_2$. Aceasta înseamnă că undele care interferă au aceeaşi frecvenţă.

b) între cele două unde diferenţa de fază trebuie să fie constantă în timp.

Undele care îndeplinesc aceste condiţii se numesc unde coerente.

În cazul a două surse ordinare de lumină plasate una lângă alta nu se observă nici un fenomen de interferenţă deoarece undele luminoase sunt emise independent. Undele luminoase provenite de la cele două surse nu păstrează în timp o diferenţă de fază constantă. Mai mult fazele undelor luminoase emise de o sursă de lumină se schimbă aleatoriu la intervale de timp de ordinul nanosecundelor. Astfel de surse se numesc necoerente.

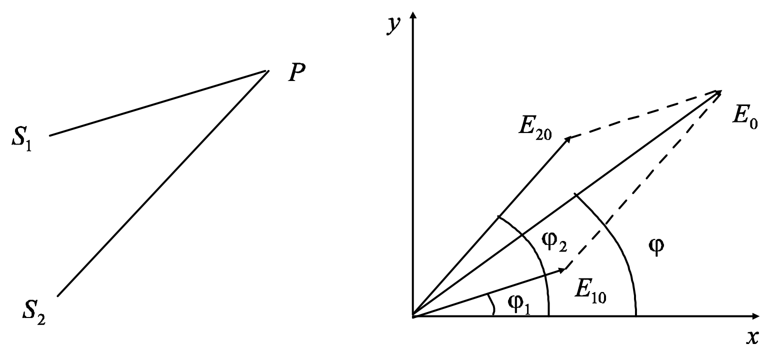
Interferenţa a două unde monocromatice. Considerăm două surse de lumină monocromatică coerente (Fig.**??**) fără să ne punem încă problema sau modul în care se realizează acest lucru, S_1 şi S_2 care oscilează în acest mod:

$$E_1' = E_{10} \cos \omega t \tag{6.88}$$

$$E_2' = E_{20} \cos \omega t \tag{6.89}$$

În punctul P intensităţile celor două unde care interferă sunt:

$$E_1 = E_{10} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r_1}{v} \right) \right] = E_{10} \cos \left[\omega t - \frac{\omega r_1}{v} \right] \tag{6.90}$$



$$E_2 = E_{20} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r_1}{v}\right)\right] = E_{20} \cos\left[\omega t - \frac{\omega r_2}{v}\right] \tag{6.91}$$

Compunerea celor două unde se va face fazorial (Fig.**??**) Rezultă:

$$E_0^2 = E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}^2 E_{20}^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{6.92}$$

unde defazajul dintre cele două unde este:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\omega\,(r_2 - r_1)}{v} = \frac{2\pi n}{cT}\,(r_2 - r_1) \tag{6.93}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi n}{\lambda}\,(r_2 - r_1) \tag{6.94}$$

Definim $\delta_g = r_2 - r_1$, diferenţa de drum geometric dintre cele două unde. Mărimea

$$\delta = n\,(r_2 - r_1) \tag{6.95}$$

poartă numele de diferenţa de drum optic. Rezultă astfel relaţia dintre diferenţa de fază a undelor care interferă şi diferenţa de drum optic.

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta \tag{6.96}$$

Ţinând cont că $I = E_0^2$, $I_1 = E_{10}^2$ şi $I_2 = E_{20}^2$ rezultă că în punctul P intensitatea undei luminoase este:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\Delta\varphi \tag{6.97}$$

Intensitatea undei rezultante este maximă când

$$\cos\Delta\varphi = 1 \tag{6.98}$$

adică

$$\Delta\varphi = 2m\pi; m = \text{număr întreg} \tag{6.99}$$

Atunci

$$\frac{2\pi}{\lambda}\delta = 2m\pi \tag{6.100}$$

Rezultă condiţia ca două unde să interfere constructiv

$$\delta = m\lambda \tag{6.101}$$

Valoarea maximă este:

$$I_M = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2 \tag{6.102}$$

Intensitatea ia valoarea minimă când

$$\cos\Delta\varphi = -1 \tag{6.103}$$

adică

$$\Delta\varphi = (2m+1)\,\pi; m = \text{număr întreg} \tag{6.104}$$

Atunci

$$\frac{2\pi}{\lambda}\delta = (2m+1)\,\pi \tag{6.105}$$

Rezultă

$$\delta = (2m+1)\,\frac{\lambda}{2} \tag{6.106}$$

Valoarea minimă

$$I_M = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2 \tag{6.107}$$

În cazul în care intensitatea celor două unde care interferă $I_1 = I_2 = I_0$ intensitatea în punctele în care este minimă devine nulă.

Obţinerea undelor coerente poate fi realizată în două moduri:

a) prin divizarea frontului de undă. Acest mod se realizează cu ajutorul dispozitivelor interferenţiale: dispozitivul Young, oglinzile Fresnel, biprisma Fresnel, oglinda Lloyd.

b) prin divizarea amplitudinii: aceasta are loc în cazul interferenţei pe lame subţiri.

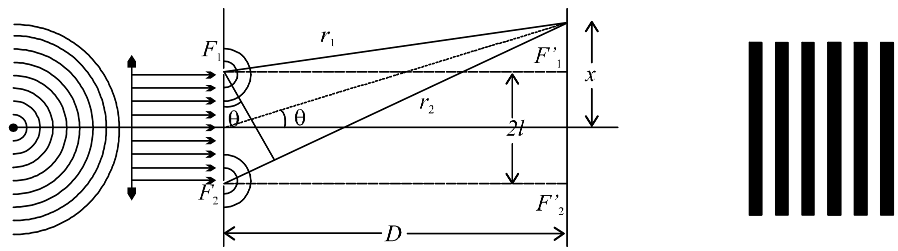


Figura 6.14: Dispozitivul Young

6.4.1 Dispozitivul Young

Dispozitivul Young este prezentat în Fig. 3.120. El constă dintr-un ecran în care sunt practicate două fante F_1şi F_2 şi pe care cade o undă luminoasă plană. Aceasta se obţine cu ajutorul unei lentile convergente în focarul căreia se pune o sursă punctiformă. Conform principiului Huygens fiecare dintre cele două fante devine sursă de unde secundare, care provin din acelaşi front de undă primar. Undele astfel obţinute se suprapun şi interferă pe un ecran aflat la distanţa D de planul fantelor.

În cazul dispozitivului Young distanţa dintre fante $2l$ este de ordinul zecilor de mm, D de ordinul decimetrilor iar x cel mult de ordinul milimetrilor.

În $\Delta F_1 F_1' P$

$$r_1^2 = D^2 + (x - l)^2 \tag{6.108}$$

Iar în $\Delta F_2 F_2' P$

$$r_2^2 = D^2 + (x + l)^2 \tag{6.109}$$

Din scăderea celor două relaţiilor 6.108 şi 6.109 rezultă:

$$r_1^2 - r_2^2 = 4xl \tag{6.110}$$

$$(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = \frac{4xl}{2D} = \frac{2xl}{D} \tag{6.111}$$

Dacă dispozitivul Young se află în aer sau în vid, diferenţa de drum optic coincide cu diferenţa de drum geometric $(r_2 - r_1)$. Având în vedere ordinele de mărime ale lui x şi $2l$ se poate consideră că $r_2 + r_1 \cong 2D$. Astfel diferenţa de drum optic este:

$$\delta_0 = \frac{2xl}{D} \tag{6.112}$$

Pentru a determina poziţiile maximelor pe ecran punem condiţia ca:

$$\delta_0 = m\lambda \tag{6.113}$$

$$\frac{2xl}{D} = m\lambda \tag{6.114}$$

şi

$$x_m = m\frac{\lambda D}{2l} \tag{6.115}$$

Pentru determinarea punctelor în care intensitatea este minimă se pune condiţia

$$\delta_0 = (2m+1)\,\lambda/2 \tag{6.116}$$

$$x_m = (2m+1)\,\frac{\lambda D}{4l} \tag{6.117}$$

Definim interfranja ca fiind distanţa dintre două maxime consecutive

$$i = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda D}{2l} \tag{6.118}$$

Aplicaţie: În practică, studiul fenomenului de interfernţă nu se realizează utilizând surse luminoase monocromatice. Să se determine relaţia dintre $\Delta\lambda$, lărgimea spectrală a radiaţiei folosite şi ordinul de inteferenţă k la care figura de interferenţă nu se mai observă.

Soluţie

Figura de interferenţă nu se mai observă când maximul de ordin k al radiaţiei cu lungimea de undă $\lambda + \Delta\lambda$ cade peste maximul de ordin $k+1$ al radiaţiei cu lungimea de undă λ, adică:

$$\delta = k(\lambda + \Delta\lambda) = (k+1)\lambda$$

Atunci:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{k}$$

Aplicaţie: Într-o experienţă cu oglinzi Lloyd (Fig. 6.15), o undă luminoasă care provine direct de la sursă interferă direct cu unda reflectată de oglinda O. Franjele de interferenţă se obţin pe ecranul E perpendicular pe planul oglinzii. Distanţa dintre sursă şi ecran este d, iar interfranja este i. Dacă distanţa dintre sursă şi oglindă se modifică cu Δh, interfranja se măreşte de η ori. Să se determine lungimea de undă a luminii folosite.

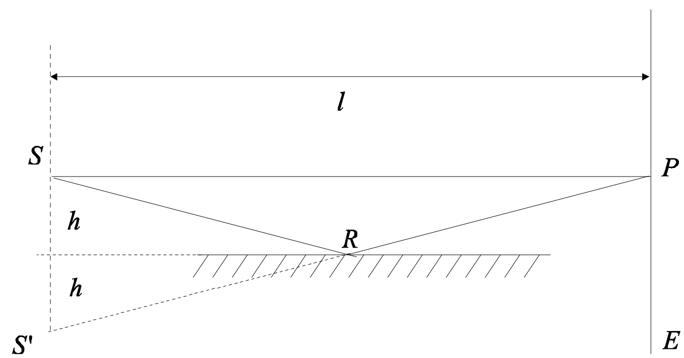


Figura 6.15: Oglinda Lloyd

Soluţie

Putem considera că interferenţa pe ecranul E este datorată undelor ce provin de la sursa S şi de la imaginea lui S în oglinda O, S'. Distanţa dintre cele două surse, una reală (S) şi cealaltă virtuală (S') este $2h$. Interfranja este:

$$i = \frac{2\lambda h}{d}$$

Când sursa se depărtează, noua interfranjă este:

$$i\eta = \frac{2\lambda(h - \Delta h)}{d}$$

De aici rezultă:

$$\lambda = \frac{i(\eta - 1)d}{2\Delta h}$$

Aplicaţie: În Fig. 6.16 este prezentată experienţa de interferenţă cu oglinzi Fresnel. Unghiul dintre cele două oglinzi este $\alpha = 12'$, distanţa dintre muchia comună a oglinzilor şi ecran este $b = 130$ cm. Lungimea de undă a luminii este $\lambda = 0.55$ μm. Să se determine interfranja şi numărul de maxime ce se obţin pe ecran.

Soluţie

Sursele care furnizează lumină coerentă sunt imaginile sursei S în oglinzi. Se observă că sursa S şi imaginile ei S' şi S" se află pe un cerc de rază r. Distanţa dintre planul surselor şi ecran este:

$$D = b + r \sin \alpha$$

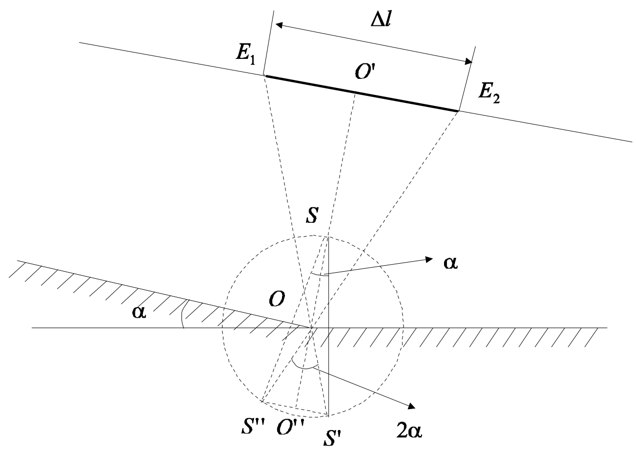


Figura 6.16: Oglinzile Fresnel

Distanţa dintre surse $S'S" = 2r\alpha$. Atunci:

$$\begin{aligned} i &= \frac{\lambda D}{S'S"} = \frac{\lambda D}{2r\alpha} = \frac{\lambda(b + r\sin\alpha)}{2r\alpha} \\ i &\simeq \frac{\lambda(b+r)}{2r\alpha} = 1,1 \text{ mm} \end{aligned}$$

Lungimea Δl pe care se obţine interferenţa este:

$$\Delta l = 2b\alpha = 8,3 \text{ mm}$$

Astfel, numărul de maxime este: N

$$= \frac{\Delta l}{i} + 1 = \frac{2b\alpha 2r\alpha}{\lambda(b+r)} + 1 = \frac{4br\alpha^2}{\lambda(b+r)} + 1 = 9$$

6.4.2 Interferenţa pe straturi subţiri

Fie o undă luminoasă cu amplitudinea egală cu unitatea care cade pe o lamă cu feţele plan paralele sub un unghi de incidenţă foarte mic în raport cu normala (Fig.6.17). Indicele de refracţie al mediului pe care cade lumina este n_0 iar indicele de refracţie al mediului din care vine lumina este n.

Coeficienţii de reflexie şi transmisie pe faţa 1 sunt conform relaţiilor 6.78 şi 6.79:

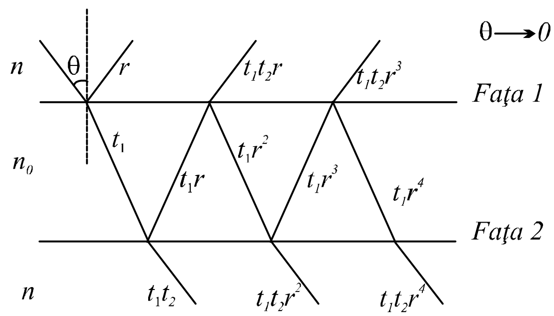


Figura 6.17: Amplitudinile undelor "reflectate" şi transmise

$$r_1 = \frac{n - n_0}{n_0 + n} \quad ; \quad t_1 = \frac{2n}{n_0 + n} \tag{6.119}$$

Pentru faţa 2 aceşti coeficienţi sunt:

$$r_2 = \frac{n_0 - n}{n_0 + n} \quad ; \quad t_2 = \frac{2n_0}{n_0 + n} \tag{6.120}$$

$$t_2 = \frac{2n_0}{n_0 + n} \tag{6.121}$$

Se observă că $r_2 = -r_1$ fapt ce duce la concluzia că la una din suprafeţele de separare una din undele reflectate îşi modifică faza cu $\pi/2$. Din acest motiv în locul lui r_1şi r_2 se va utiliza $r = |r_1| = |r_2|$.

Pentru sticla aflată în aer $n_0 = 1$ şi $n = 1,5$. Considerăm amplitudinea undei incidente egală cu unitatea. Atunci amplitudiniele undelor care revin în primul mediu (undele reflectate) sunt:

$$\begin{aligned} r &= 0,2 \\ t_1t_2r &= 0,192 \\ t_1t_2r^3 &= 0,0076 \\ t_1t_2r^5 &= 0,0003 \end{aligned}$$

Amplitudinile undelor transmise sunt:

$$\begin{aligned} r &= 0,96 \\ t_1t_2r &= 0,038 \\ t_1t_2r^3 &= 0,005 \\ t_1t_2r^5 &= 0,00006 \end{aligned}$$

Rezultă că în cazul luminii treflectate ne putem limita la studiul interferenţei primelor două unde reflectate. Franjele de interferenţă obţinute prin interferenţa undelor reflectate sunt contrastante. În cazul interferenţei prin transmisie, deoarece amplitudinea undelor diferă mult una de alta, franjele sunt foarte puţin contrastante. Pentru sticlă argintată $r = 0,95$ şi $t_1 t_2 = 0,01$.Atunci amplitudinile undelor reflectate sunt:

$$\begin{aligned} r &= 0,95 \\ t_1 t_2 r &= 0,0095 \\ t_1 t_2 r^3 &= 0,0086 \\ t_1 t_2 r^5 &= 0,0077 \end{aligned}$$

Amplitudinile undelor transmise sunt:

$$\begin{aligned} r &= 0,01 \\ t_1 t_2 r &= 0,0095 \\ t_1 t_2 r^3 &= 0,0081 \\ t_1 t_2 r^5 &= 0,0073 \end{aligned}$$

În această situaţie amplitudinile undelor transmise sunt aproximativ egale şi franjele obţinute prin interferenţa acestora sunt cele mai contrastante. Franjele datorate undelor reflectate sunt puţin contrastante.

Diferenţa de drum în cazul unei lame cu feţe plan paralele

Culorile baloanelor de săpun, ale peliculelor de ulei de pe suprafaţa apei sau ale altor pelicule subţiri sunt rezultatul interferenţei luminii.

Să considerăm cazul unei lame subţiri pentru care se poate considera că la interferenţă (prin reflexie) contribuie doar două unde (Fig. 6.18). Acesta este cazul unui coeficient de refracţie mic şi al unui coeficient de reflexie mare.

Pentru razele (1) şi (2), diferenţa de drum optic este

$$\delta = n\,(AB + BC) - (AD - \lambda/2) \tag{6.122}$$

$$\delta = n\frac{2l}{\cos r} - AC\sin i + \frac{\lambda}{2} \tag{6.123}$$

$$\delta = \frac{2ne}{\cos r} - 2e\mathrm{tg\,r(n\sin r)} + \frac{\lambda}{2} \tag{6.124}$$

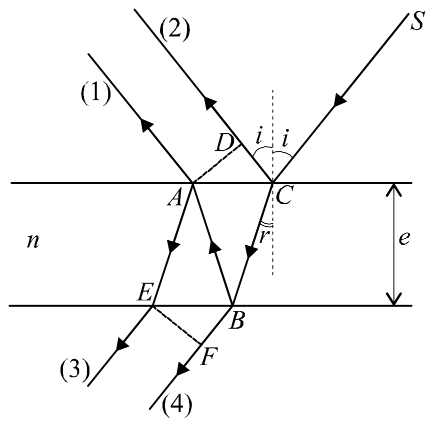


Figura 6.18: Diferenţa de drum dintre undele reflectate care interferă.

$$\delta = 2en\left(\frac{1}{\cos r} - \frac{\sin^2 r}{\cos r}\right) + \frac{\lambda}{2} \tag{6.125}$$

$$\delta = 2en\cos r + \frac{\lambda}{2} \tag{6.126}$$

La incidenţă normală $i \longrightarrow 0, r \longrightarrow 0$ şi

$$\delta = 2en + \lambda/2 \tag{6.127}$$

Diferenţa de drum dintre razele transmise se calculează în mod analog cu precizarea că în acest caz nu avem o pierdere de $\lambda/2$ la reflexie.

$$\delta = 2en\cos r \tag{6.128}$$

Strat antireflex

Pentru a micşora pierderile de energie din fluxul incident pe suprafeţele transparente cum ar fi lentilele obiectivelor fotografice, aceste suprafeţe sunt supuse unor tratamente specifice.

Considerăm o undă cu amplitudinea E_0 care cade pe o suprafaţă sub incidenţă apropiată de cea normală. Pentru a nu avea o intensitatea mare a razelor reflectate este necesar ca interferenţa razelor reflectate să fie una distructivă. Pentru aceasta este necesar ca amplitudinea undelor reflectate (primele două unde) să fie aproximativ egală iar diferenţa de drum optic să fie egală cu un număr impar de semilungimi de undă.

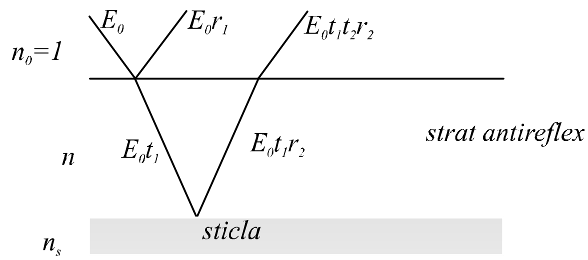


Figura 6.19: Stratul antireflex

Situaţia este prezentată în Fig. 6.19

Coeficienţii de reflexie şi transmisie sunt:

$$t_1 = \frac{2n_0}{n+n_0}; \quad r_1 = \frac{n_0-n}{n_0+n}$$
$$t_2 = \frac{2n}{n+n_s}; \quad r_2 = \frac{n-n_s}{n+n_s}$$

a) Pentru ca amplitudinea primelor două unde să fie egală este necesar ca:

$$r_1 = r_2 t_1 t_2 \tag{6.129}$$

Cum materialul antireflex este unul transparent este necesar ca $t_1t_2 = 1$ şi rezultă:

$$r_1 = r_2 \tag{6.130}$$

Se obţine $n = \sqrt{n_0 n_s}$

Dacă lumina vine din aer pe sticlă $n_0 = 1$ şi $n_s = 1,5$. Rezultă $n = 1,22$. Materiale care să aibă indicii de refracţie atât de mici nu există. Materialele care au un indice de refracţie apropiat de această valoare sunt florura de magneziu MgF_2 ($n = 1.35$) şi criolita $AlF_3 3NoF$ ($n = 1.36$).

b) Punem condiţia ca diferenţa de drum optic între razele care interferă să fie egală cu un număr impar de semilungimi de undă.

$$\delta = 2ne \tag{6.131}$$

deoarece în ambele puncte de reflexie avem pierderi de $\lambda/2$.Atunci:

$$\delta = 2ne = (2m+1)\frac{\lambda}{2} \tag{6.132}$$

unde m este un număr întreg. Astfel:

$$e = \frac{\lambda}{4n}(2m+1) \tag{6.133}$$

Din condiţia $m = 0$. Rezultă:

$$e = \frac{\lambda}{4n} \tag{6.134}$$

Această condiţie se consideră pentru lumina verde la care ochiul are sensibilitate maximă ($\lambda = 550$ nm) . Obţinem pentru stratul antireflex grosimea $e = 0,12$ μm. Deoarece pentru celelalte radiaţii interferenţa nu este total distructivă, apar reflexe bleu sau violet. Prin această tehnică reflexia se poate reduce până la 1%.

Ca observaţie la cele discutate anterior trebuie să remarcăm că interferenţa are loc la infinit pentru a putea observa franjele respective este necesară o lentilă care să adune franjele în planul focal

Aplicaţie: Un fascicul de lumină albă paralel cade pe o lamă cu feţe plan-paralele din mică ($n = 1,33$) sub unghiul de incidenţă $i = 52°$. Pentru ce grosime a lamei lumina reflectată va prezenta un maxim pe culoarea galbenă ($\lambda = 600$ μm).

Aplicaţie

Diferenţa de drum dintre razele care interferă este:

$$\delta = 2nd \cos r + \frac{\lambda}{2}$$

Dar, conform legii Snell-Déscartes:

$$\sin i = n \sin r$$

rezultă

$$\cos r = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}$$

Atunci:

$$\delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \lambda/2$$

Condiţia ca radiaţia cu lungimea de undă λ să prezinte un maxim este:

$$\delta = k\lambda \qquad k = 1, 2, 3, ...$$

Astfel

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \lambda/2 = k\lambda$$

şi punând $k = 1$

$$d = 140 \text{ nm}$$

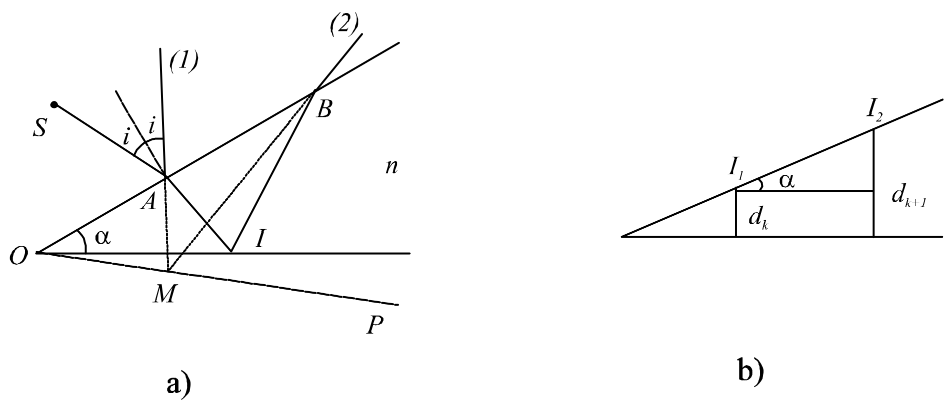


Figura 6.20: a) Pana optică. b) Interfranja în cazul penei optice.

Aplicaţie: Să se determine grosimea minimă a unei pelicule cu indicele de refracţie $n = 1,33$ pentru care lumina cu $\lambda = 0,64$ μm va prezenta un maxim prin reflexie. Unghiul de incidenţă este egal cu 30^o.

Soluţie

Utilizăm formula obţinută în problema precedentă în care punem $k = 1$:

$$d = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = 0,13\ \mu\text{m}$$

Franje de egală grosime

Pana optică

Pana optică este formată din două suprafeţe plane care fac între ele un unghi mic si care delimitează un mediu optic cu indicele de refracţie n (Fig. 6.20a)

Fie n indicele de refracţie al penei în aer, SA raza incidentă şi razele coerente (1) şi (2). Acestea par a proveni dintr-un plan care trece prin O. Acesta este planul de localizare al franjelor provenite de la razele paralele cu SA. În cazul incidenţei normale pe faţa superioară planul de localizare al franjelor devine foarte apropiat de această suprafaţă. Spunem că franjele sunt localizate pe lamă. La incidenţă normală B este foarte apropiat de A iar diferenţa de drum este:

$$\delta = 2nd + \frac{\lambda}{2} \tag{6.135}$$

unde d este grosimea penei în acel loc.

Fie d_m grosimea lamei la care se obţine maximul de ordin m şi d_{m+1} grosimea lamei la care se obţine maximul de ordinul $m+1$. Atunci:

$$2nd_m + \frac{\lambda}{2} = m\lambda \tag{6.136}$$

$$2nd_{m+1} + \frac{\lambda}{2} = (m+1)\lambda \tag{6.137}$$

Prin scăderea celor două relaţii obţinem:

$$2n(d_{m+1} - d_m) = \lambda \tag{6.138}$$

Din Fig.6.20b se observă că interfranja se poate scrie astfel

$$i = I_1 I_2 = \frac{d_{m+1} - d_m}{\sin\alpha} = \frac{1}{2n}\frac{\lambda}{\sin\alpha} \tag{6.139}$$

când α este mic

$$i = \frac{\lambda}{2\sin\alpha} \simeq \frac{\lambda}{\alpha} \tag{6.140}$$

Aplicaţie (Inelele lui Newton): Pe dispozitivul format dintr-o lamă cu feţe plan-paralele pe care se află o lentilă plan-convexă de rază $R = 2,4$ m, cu indicele de refracţie $n = 4/3$, se trimite un fascicul paralel de lumină perpendicular pe acesta, cu lumgimea de undă $\lambda = 600$ nm. Care este raza celui de-al 19-lea inel luminos.

Soluţie

Diferenţa de drum dintre razele (1) şi (2) (vezi Fig. 1.11) este:

$$\delta = 2e - \frac{\lambda}{2}$$

unde $e \simeq II_1$ şi se determină cu ajutorul teoremei înălţimii din $\triangle A_1A_2I$. A_2 este punctul diametral opus punctului A_1, faţă de centrul de curbură O al părţii convexe.

$$II'^2 = I'A_1 \cdot I'A_2$$

Notând prin:

$$r = A_1I_1 = I'I$$

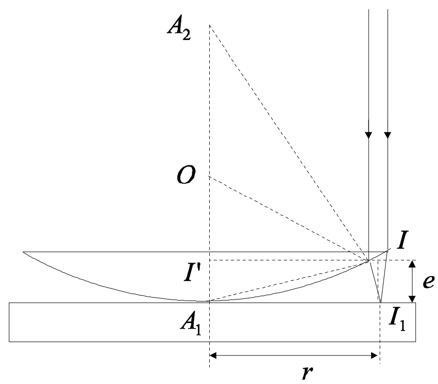


Figura 6.21: Inelele lui Newton

atunci:

$$r^2 = (2R - e)e \simeq 2Re$$

Rezultă că:

$$e = \frac{r^2}{2R}$$

Condiţia de maxim este:

$$\delta = k\lambda$$

şi

$$\frac{r_k^2}{R} - \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

unde r_k este raza inelului luminos de ordin k:

$$r_k = \sqrt{\left(k + \frac{1}{2}\right) R\lambda}$$

Deoarece inelele se numără de la inelul cu $k = 0$, atunci al $k - lea$ inel luminos este inelul luminos de ordin $k - 1$:

$$r_{k-1} = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right) R\lambda} = 5,15 \text{ mm}$$

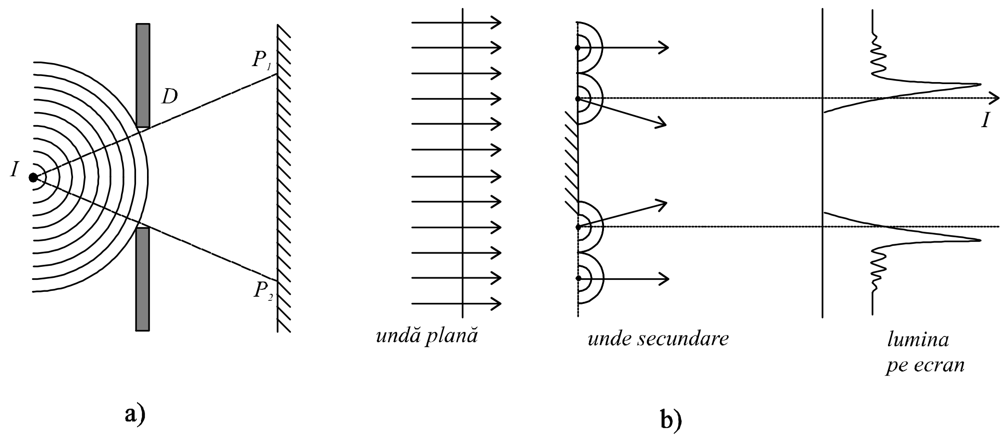


Figura 6.22: a) Difracţia luminii pe o fantă b) Difracţia luminii pe un obstacol de dimensiuni reduse.

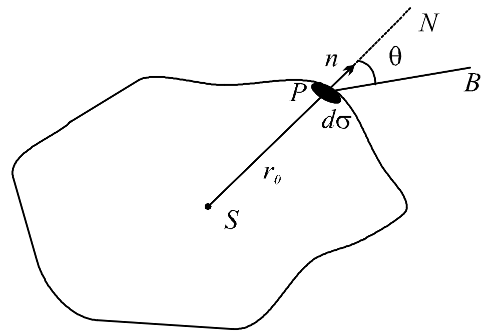
6.5 Difracţia luminii

Difracţia unei unde înseamnă ocolirea de către aceasta a unui obstacol şi pătrunderea ei în regiunile de umbră geometrică. Considerăm situaţia din Fig.**??** în care lumina produsă de sursa punctiformă S care trece prin diafragma D, ajunge pe ecranul E.

În conformitate cu optica geometrică lumina trebuie să ajungă doar în regiunea P_1P_2 restul ecranului fiind ocupat de umbra geometrică. Regiunea luminoasă P_1P_2 ar trebui să aibă marginile nete. Se observă totuşi că lumina pătrunde şi în regiunile de umbră geometrică la marginea conturului umbrei formându-se franje luminoase.

Problema a fost parţial rezolvată de Huygens care a considerat că fiecare punct al frontului de undă la un moment dat devine sursă secundară de oscilaţie. Sursele secundare sunt surse de unde sferice. La un moment ulterior noul front de undă este dat de înfăşurătoarea fronturilor de undă secundare. Ţinând cont de acest principiu se poate înţelege uşor de ce lumina pătrunde în regiunile de umbră geometrică (Fig.**??**) şi de ce ocoleşte practic obstacolele mici (cu dimensiuni comparabile cu lungimea de undă)

Totuşi luarea în consideraţie doar a principiului Huygens nu permite explicarea în detaliu a fenomenelor respective. Nu este elucidată distribuţia intensităţii undelor în zona de difracţie. Deoarece intensitatea luminoasă este proporţională cu pătratul amplitudinii vectorului intensitate câmp electric, problema se reduce la determinarea amplitudinii undelor în zona de



difracţie.

Pentru a rezolva această problema Fresnel a completat principiul lui Huygens dându-i o formă matematică rezultând astfel principiul Huygens-Fresnel.

Înconjurăm sursa S de oscilaţie cu o suprafaţă şi vom considera o perturbaţie care se manifestă în punctul P din exteriorul acestei suprafeţe. Perturbaţia va fi o rezultantă a acţiunii tuturor undelor secundare emise de fiecare element de suprafaţa $d\sigma$. Deoarece oscilaţiile secundare provin de la aceeaşi sursă, ele sunt coerente. Amplitudinea perturbaţiei care ajunge în punctul P datorată suprafeţei $d\sigma$ este proporţională cu $d\sigma$ şi invers proporţională cu diferenţa de drum de la P la $d\sigma$. Unda elementară nu este emisă cu aceeaşi amplitudine după toate direcţiile: după direcţia normalei PN la $d\sigma$ va avea valoarea maximă şi va scădea la zero după direcţia $\theta \geq \frac{\pi}{2}$. Introducerea coeficientului exprimă absenţa undelor ce s-ar propaga în sens opus.

Daca admitem că sursa S oscilează după legea

$$E = E_0 \exp\left(-i\omega_0 t\right) \tag{6.141}$$

În punctul P oscilaţia va fi:

$$\frac{E}{r_0} \exp\left(ikr_0\right) \exp\left(-i\omega_0 t\right) \tag{6.142}$$

În punctul B perturbaţia determinată de elementul de suprafaţa $d\sigma$ are amplitudinea

$$dE = f\left(\theta\right) \frac{E_0}{r_0} e^{ikr_0} \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma \tag{6.143}$$

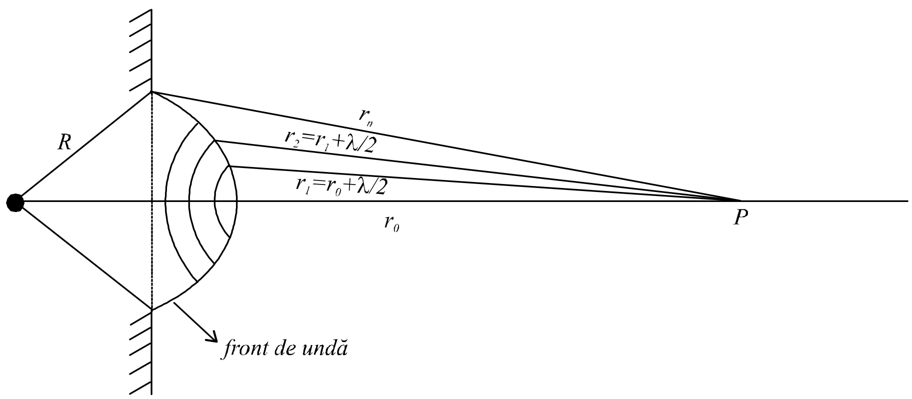


Figura 6.23: Difracţia Fresnel

6.5.1 Clasificarea fenomenelor de difracţie

Cele mai frecvente fenomene de difracţie se obţin cu ajutorul unui ecran opac cu apertură de formă arbitrară. Undele secundare care provin din diversele părţi ale aperturii dau naştere unei imagini de difracţie care este prinsă pe un ecran de observaţie. Fenomenele de difracţie se pot clasifica astfel în două mari clase:

a) Fenomene în care sursa şi ecranul de observaţie se află la distanţă finită faţă de obstacolul care produce difracţia poartă numele de difracţie Fresnel. În acest caz nu se poate neglija curbura suprafeţei de undă a undelor ce ating obstacolul respectiv.

b) Fenomenele în care sursa de lumină şi ecranul pe care se observă figura de difracţie se găsesc la o distanţă infinită faţă de apertura care provoacă difracţia, poartă numele de difracţie Fraunhoffer. Ea este difracţia suferită de undele plane. Pentru a obţine difracţia Fraunhoffer se plasează sursa de lumină în focarul unei lentile convergente şi se observă imaginea de difracţie în planul focal al altei lentile convergente.

6.5.2 Difracţie Fresnel. Teoria zonelor Fresnel.

F ie o sursă S care emite o undă sferică. Difracţia undei sferice printr-o fantă circulară practicată în ecranul E are loc conform Fig. 6.23

Se împarte suprafaţa frontului de undă prin intersecţia frontului de undă cu sfere cu centrul în P şi cu razele:

$$r_0,\ \ r_0+\frac{\lambda}{2},\ r_0+2\frac{\lambda}{2},\ ...,\ \ r_0+n\frac{\lambda}{2}$$

Pe suprafaţa frontului de undă se formează sectoare sferice. Aceste sectoare reprezintă zonele Fresnel. Unda în punctul P este determinată de suprapunerea undelor provenite de la fiecare zonă Fresnel. Datorită modului cum sunt construite zonele Fresnel, undele provenite de la două zone adiacente sunt defazate cu π astfel că interferenţa datorată acestor unde este una destructivă. Mai mult se demonstrează că ariile zonelor Fresnel sunt egale cu:

$$S=\frac{\pi r_0 R\lambda}{R+r_0} \tag{6.144}$$

unde λ este lungimea de undă a radiaţiei care suferă fenomenul de difracţie. Atunci calculul amplitudinii intensităţii câmpului electric care ajunge în punctul P se face astfel:

$$E=E_1-E_2+E_3-E_4+... \tag{6.145}$$

unde E_i este amplitudinea determinată de zona Fresnel i. Amplitudinile E_i sunt cu atât mai mici cu cât i este mai mare.

Regrupăm termenii:

$$E=\frac{E_1}{2}+\left(\frac{E_1}{2}-E_2+\frac{E_3}{2}\right)+\left(\frac{E_3}{2}-E_4+\frac{E_5}{2}\right)+... \tag{6.146}$$

Realizăm o astfel de grupare deoarece:

$$\frac{E_{k-1}}{2}-E_k+\frac{E_{k+1}}{2}\simeq 0 \tag{6.147}$$

Rezultatul sumei 6.146 depinde astfel de numărul de zone Fresnel. Dacă n este impar atunci:

$$E=\frac{E_1}{2}+\left(\frac{E_1}{2}-E_2+\frac{E_3}{2}\right)+...\left(\frac{E_{n-1}}{2}-E_n+\frac{E_{n+1}}{2}\right)+\frac{E_n}{2} \tag{6.148}$$

$$E_{impar}=\frac{E_1}{2}+\frac{E_n}{2} \tag{6.149}$$

şi daca n este par atunci

$$E=\frac{E_1}{2}+\left(\frac{E_1}{2}-E_2+\frac{E_3}{2}\right)+...\left(\frac{E_{n-1}}{2}-E_n+\frac{E_{n+1}}{2}\right)+\frac{E_{n-1}}{2}-E_n \tag{6.150}$$

Pentru n suficient de mare

$$E_n \simeq E_{n-1}$$

Atunci

$$E_{par} = \frac{E_1}{2} - \frac{E_n}{2} \tag{6.151}$$

Astfel

$$E = \frac{E_1}{2} \pm \frac{E_n}{2} \tag{6.152}$$

unde semnul + corespunde lui n impar şi semnul − corespunde lui n par.

Dacă numărul de zone Fresnel este foarte mare atunci $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ şi $E_n \longrightarrow 0$.Atunci

$$E = \frac{E_1}{2} \tag{6.153}$$

şi

$$I_0 = \frac{I_1}{4} \tag{6.154}$$

unde I_1 este intensitatea determinată de prima zonă Fresnel şi I_0 este intensitatea totală.

Dacă se acoperă toate zonele Fresnel cu excepţia primei zone

$$E = E_1 \tag{6.155}$$

şi

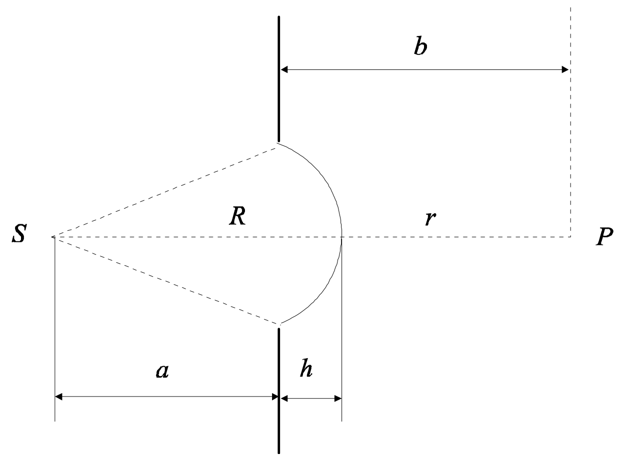
$$I = E_1^2 = 4I_0 \tag{6.156}$$

adică apare o iluminare de patru ori mai intensă în punctul de observaţie decât în cazul că ar acţiona întreaga undă.

Dacă numărul de zone Fresnel este mic gradul de iluminare în punctul P este determinat de paritatea lui n. Dacă n este impar în P se obţine un maxim deoarece $E = \frac{E_1}{2} + \frac{E_n}{2}$ iar dacă n este par în P se obţine un minim deoarece $E = \frac{E_1}{2} - \frac{E_n}{2}$

Aplicaţie: O sursă luminoasă punctuală care emite lumină cu lungimea de undă $\lambda = 0,5$ μm, este situată la distanţa $a = 1,2$ m în faţa unei diafragme ce prezintă o deschidere circulară de rază $r = 1$ mm. Să se găsească distanţa b care separă diafragma de punctul de observaţie corespunzătoare unui număr impar de zone Fresnel.

Soluţie



În Fig. 1.12 este prezentată situaţia din problemă, unde S este sursa iar P este punctul se observaţie. Se observă că:

$$\begin{aligned} R &= a + h \simeq a \\ r &= b - h \simeq b \end{aligned}$$

Suprafaţa unei zone Fresnel este:

$$S = \frac{\pi r \lambda R}{(R + r)} \simeq \frac{\pi a b \lambda}{(a + b)}$$

Suprafaţa deschiderii este πr^2. Atunci, numărul de zone Fresnel este:

$$n = \frac{\pi r^2}{S} = \frac{r^2(a + b)}{a b \lambda}$$

Rezultă:

$$b = \frac{r^2 a}{(n a \lambda - r^2)} = 1,5 \ \ \mathrm{m}$$

6.5.3 Difracţie Fraunhoffer

În instrumentele optice se utilizează de cele mai multe ori fascicule de raze paralele. Trecerea acestor fascicule prin deschideri dreptunghiulare sau circulare este însoţită de fenomene de difracţie.

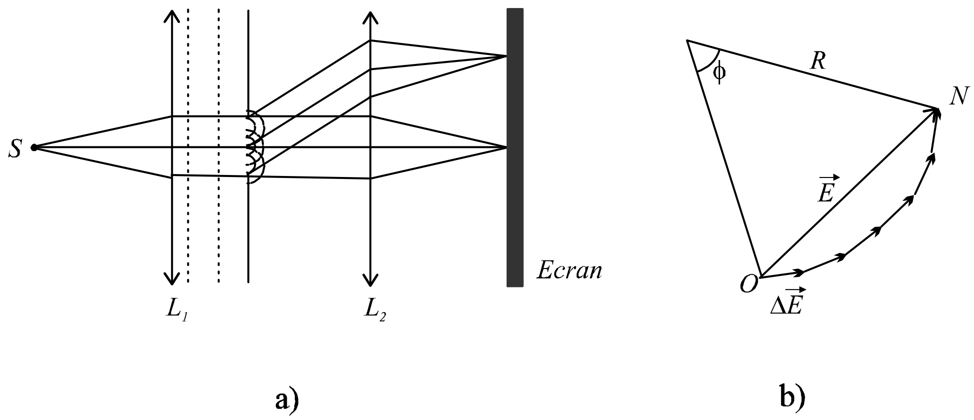


Figura 6.24: a) Difracţia pe o fantă dreptunghiulară b) Calculul câmpului elecric înr-un punct determinat de undele difractate pe o fantă dreptunghiulară.

a) Difracţia pe o fantă dreptunghiulară.

În Fig. 6.24a se prezintă schema unui dispozitiv de observare a difracţiei undelor plane. Undele emise de sursa S sunt transformate de lentila L_1 într-o undă plană şi dau o imagine de difracţie pe un ecran aflat în planul focal al lentilei $L_{2.}$

Aplicarea principiului Huygens-Fresnel în acest caz este foarte simplă. Admitem că suprafaţa σ se confundă cu planul ecranului şi cuprinde apertura considerată. În cazul cel mai simplu, adică al incidenţei normale a undei pe suprafaţa ecranului, diferenţa de drum optic dintre undele care provin din diverse porţiuni ale fantei este determinată de unghiul φ de difracţie.

Calculul intensităţii sistemului de franje de difracţie se rezumă la calculul interferenţei undelor emise de sursele elementare care sunt coerente.

Să considerăm o undă plană care cade pe o fantă de lăţime b practicată în ecranul opac. Divizăm fanta într-un număr mare de zone cu lăţimea Δx fiecare. Fiecare astfel de zonă se comportă ca o sursă de radiaţii coerente şi contribuie la câmpul electric total cu ΔE. Putem calcula câmpul electric total prin însumarea tuturor contribuţiilor zonelor. Intensitatea luminoasă se poate determina uşor ştiind că ea este proporţională cu pătratul intensităţii câmpului electric.Undele emise sub unghiul θ de două zone adiacente sunt defazate cu:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x \sin\theta \tag{6.157}$$

Pentru însumare vom utiliza metoda fazorială când $\Delta\phi = 0$

$$E_0 = N\Delta E \tag{6.158}$$

unde N este numărul de zone.

În cazul că $\Delta\phi \neq 0$ sumarea fazorială se realizează conform figurii următoare unde amplitutinea rezultantă este dată de segmentul $\overrightarrow{ON}$. Diferenţa de fază totală va fi:

$$\phi = N\Delta\phi = N\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x \sin\theta = \frac{2\pi a}{\lambda}\sin\theta \tag{6.159}$$

Dacă numărul de zone este foarte mare lanţul de fazori se transformă într-un arc de cerc a cărui rază este egală cu R. Trebuie remarcat că lungimea arcului de cerc reprezintă chiar E_0 (când $\Delta\phi = 0$).

$$E_0 = R\phi \tag{6.160}$$

Intensitatea câmpului electric obţinută datorită tuturor undelor difractate sub unghiul θ este

$$E = 2R\sin\frac{\phi}{2} \tag{6.161}$$

Rezultă astfel

$$E = E_0\frac{\sin\frac{\phi}{2}}{\frac{\phi}{2}} \tag{6.162}$$

Notăm cu $u = \frac{\phi}{2} = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$ şi se obţine:

$$E = E_0\frac{\sin u}{u} \tag{6.163}$$

Ridicând la pătrat obţinem:

$$I = I_0\frac{\sin^2 u}{u^2} \tag{6.164}$$

unde I este intensitatea determinată de undele difractate sub un unghi θ oarecare iar I_0 este intensitatea determinată de undele difractate sub unghiul $\theta = 0$.

Din acest rezultat se observă că minimele se obţin atunci când $u = m\pi$ $m \neq 0$ deoarece când $u \longrightarrow 0$ şi $\theta \longrightarrow 0$ şi $I \longrightarrow I_0$. Rezultă:

$$\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta = m\pi \quad \text{şi} \qquad \sin\theta_{\min} = m\frac{\lambda}{a} \tag{6.165}$$

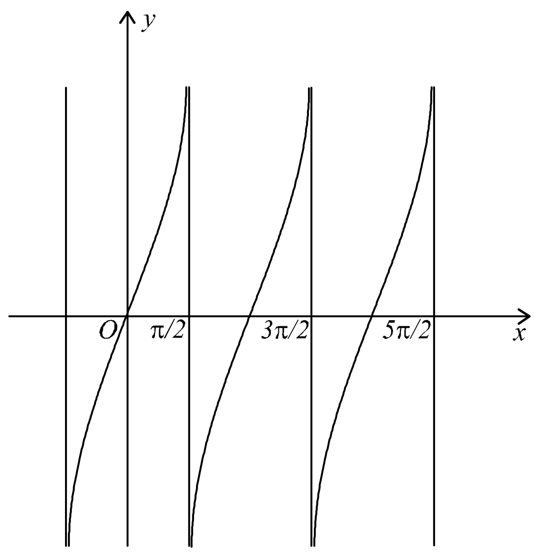


Figura 6.25: Rezolvarea ecuaţiei tg$u = u$

Maximele de interferenţă se obţin când:

$$\frac{dI}{du} = 0 \tag{6.166}$$

Rezultă astfel egalitatea

$$\mathrm{tg}\,\mathrm{u} = \mathrm{u} \tag{6.167}$$

Ecuaţia este una transcedentală a cărei rezolvare se poate face si numeric dar si grafic conform Fig.6.25

Se observă că maximele secundare se obţin când $u = \pi/2,\ 3\pi/2,\ u = 5\pi/2,\ u = 7\pi/2$. În general

$$u = (2p+1)\,\pi/2; \qquad p \geq 1 \tag{6.168}$$

atunci

$$\frac{\pi}{a} b \sin\varphi = (2p+1)\,\frac{\pi}{2} \tag{6.169}$$

$$\sin\phi \simeq (2p+1)\,\frac{\lambda}{2b} \tag{6.170}$$

În Fig. 6.26 este prezentată intensitatea funcţie u. Se observă că intensităţile maximelor de oridn 1 şi 2 sunt mult mai mici.

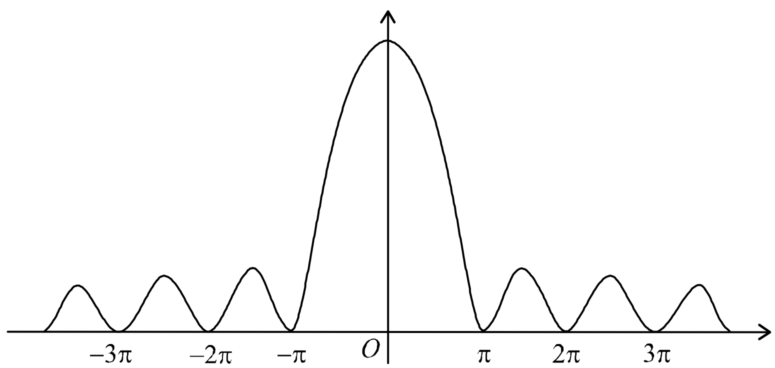


Figura 6.26: Distribuţia intensităţii în cazul difracţiei pe o fantă

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{47}{1000}; \qquad \frac{I_2}{I_0} = \frac{17}{1000} \tag{6.171}$$

Astfel majoritatea fluxului luminos este concentrată în intervalul definit de

$$\sin\theta = \pm\frac{\lambda}{b} \tag{6.172}$$

adică pe maximul de ordinul zero. Doar 5% din fluxul incident se regăseşte pe maximul de ordinul întâi şi aproximativ 2% pe maximul de ordinul al doilea.

Aplicaţie: Să se determine semilărgimea $\Delta\theta$ a maximului central de difracţie Fraunhofer pe o singură fantă de lărgime $b = 0,5$ mm pe care cade lumina cu $\lambda = 0,5$ μm. Semilărgimea este unghiul dintre două puncte de pe figură unde intensitatea este jumătate din cea din centrul figurii de difracţie.

Soluţie

Distribuţia intensităţii luminoase date de o fantă este:

$$I = I_o\frac{\sin^2 u}{u^2}$$

unde

$$u = \frac{\pi b}{\lambda}\sin\varphi$$

cu b lărgimea fantei iar φ este direcţia după care se calculează intensitatea.

Punem condiţia:

$$I = \frac{I_o}{2} = I_o \frac{\sin^2 u}{u^2}$$

de unde se obţine ecuaţia:

$$2\sin^2 u = u^2$$

Ecuaţia este una transcendentală iar soluţia ei se obţine numeric şi este egală cu $u = 1,39$ Atunci:

$$\sin\varphi = \frac{u\lambda}{\pi b}$$

iar semilărgimea este:

$$\Delta\theta = 2\arcsin\frac{u\lambda}{\pi b} = 0,44 \times 10^{-3}\ \mathrm{rad} = 45"$$

6.5.4 Rezoluţia unei fante dreptunghiulare şi a unei aperturi circulare.

Posibilitatea sistemelor optice de a distinge două obiecte (puncte) foarte apropiate este limitată din cauza naturii ondulatorii a luminii. Pentru a o înţelege să considerăm situaţia a două surse de lumină necoerente S_1 şi S_2 (care pot fi de exemplu 2 stele).

Deoarece sursele S_1 şi S_2 sunt necoerente pe ecran se vor observa două puncte luminoase (imagini). Prin urmare vom obţine două figuri de difracţie datorate fiecărei surse.

Dacă sursele S_1 şi S_2 sunt suficient de depărtate cele două maxime principale nu se suprapun iar imaginile sunt distincte (Fig. **??**a , b). Dacă sursele sunt apropiate cele două maxime se suprapun.

Practic imaginile sunt rezolvate dacă maximul uneia dintre surse se situează pe primul minim al cele de-a doua surse (Fig. **??**b). Acest lucru se petrece atunci când:

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{a} \tag{6.173}$$

Relaţia permite calculul celui mai mic unghi pentru care imaginile sunt distincte. Deoarece în general $\lambda \lll a$ rezultă:

$$\theta_{\min} = \frac{\lambda}{a} \tag{6.174}$$

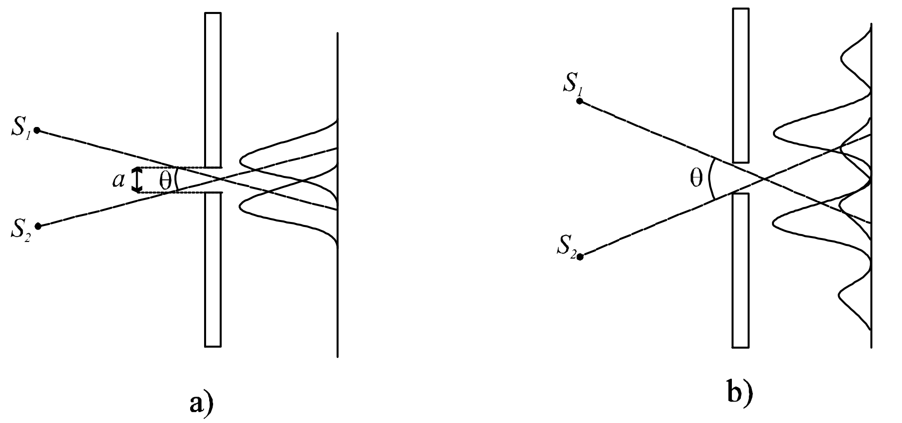


Figura 6.27: a) Imaginile sunt rezolvate dacă maximul uneia dintre surse se situează într-un minim al celeilalte surse b) Sursele S_1 şi S_2 suficient de depărtate determină imagini diferite pe ecranul de observaţie.

Multe sisteme utilizează mai degrabă fante circulare decât fante dreptunghiulare. În acest caz dă unghiul minim de rezoluţie este:

$$\theta_{\min} = 1,22\frac{\lambda}{D} \tag{6.175}$$

unde D este diametrul fantei.

6.6 Reţeaua de difracţie

O reţea de difracţie (Fig. 6.28a) este un dispozitiv extrem de util pentru analiza surselor luminoase. Ea constă dintr-un număr foarte mare de fante rectilinii paralele la distanţe egale una de alta. Se pot construi reţele de reflexie prin trasarea unor zgârieturi cu diamantul pe o oglinda metalica.

În cazul unei reţele de transmisie spaţiile dintre trăsături joacă rolul fantelor. Cu tehnologia actuală se pot realiza reţele cu 5000 trăsături /cm, adică cu o constantă a reţelei egală cu $d = \frac{10^{-2}}{5000} = 2 \times 10^{-6}$ m.

Tratarea elementară a reţelei de difracţie se face considerând că fiecare fantă este o sursă secundară de unde lumina pleacă în toate direcţiile. Diferenţa de drum dintre două raze este:

$$\delta = d\sin\varphi \tag{6.176}$$

Condiţia de a obţinere a maximelor este:

$$\delta = d\sin\varphi = m\lambda \tag{6.177}$$

$$\sin\varphi = m\frac{\lambda}{d} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2... \tag{6.178}$$

Când $m = 0$ atunci $\varphi = 0$ şi se obţine maximul central.

Pentru studiul distribuţiei de amplitudine vom proceda astfel: Amplitudinea unei unde difractate de o singură fantă după direcţia θ este

$$E = E_0\frac{\sin u}{u} \tag{6.179}$$

unde

$$u = \frac{\pi}{\lambda}b\sin\theta \tag{6.180}$$

Pentru undele difractate sub $\theta = 0$, $E = E_0$. Dacă se iau în considerare toate undele difractate sub unghiul $\theta = 0$ amplitudinea rezultantă este:

$$E_{r0} = NE_0 \tag{6.181}$$

Intensitatea după această direcţie este:

$$I_{r0} = N^2E_0^2 \tag{6.182}$$

unde E_0 este amplitudinea dată de o singură fantă pe direcţia $\theta = 0$.

În cazul că $\theta \neq 0$ se realizează construcţia Fresnel. Diferenţa de fază dintre undele emise de două fante alăturate este (Fig. 6.28b):

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda} \tag{6.183}$$

Pentru a însuma undele provenite de la cele N fante utilizăm construcţia Fresnel prezentată în Fig. 6.29. Amplitudinea undei rezultante este egală cu lungimea vectorului $\overrightarrow{ON}$. Vom nota cu E_r amplitudinea undei rezultante:

$$E_r = 2R\sin\frac{N\Delta\varphi}{2} \tag{6.184}$$

În plus intensitatea unei unde difractate de o singură fantă sub unghiul θ este:

$$E = 2R\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \tag{6.185}$$

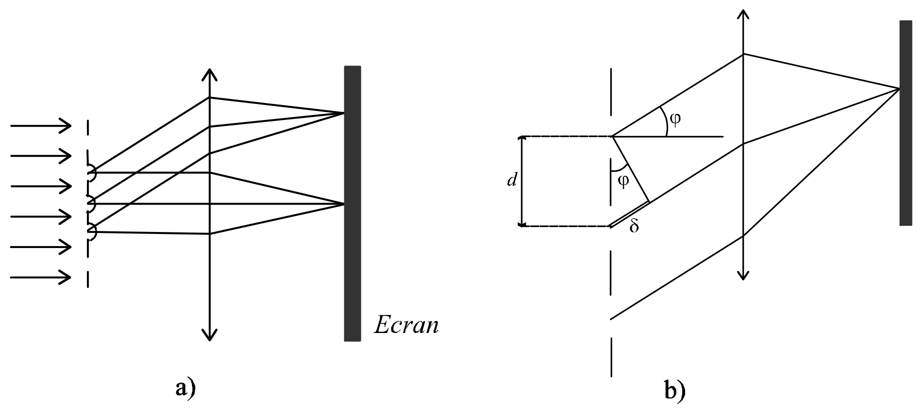


Figura 6.28: a) Reţeaua de difracţie b) Diferenţa de drum dintre două raze succesive în cazul unei reţele de difracţie.

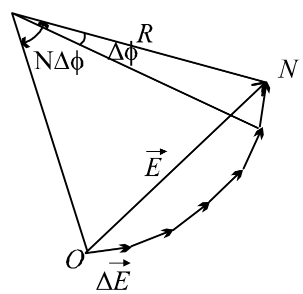


Figura 6.29: Însumarea undelor provenite de la cele N fante.

Împărţind relaţiile de mai sus obţinem:

$$E_r = E\frac{\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}} \tag{6.186}$$

$$E_r = NE_0\frac{\sin u}{u}\frac{\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}}{N\sin\frac{\Delta\varphi}{2}} \tag{6.187}$$

Notăm cu δ mărimea

$$\delta = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda} \tag{6.188}$$

Atunci

$$E_R^{(\theta)} = NE_0\frac{\sin u}{u}\cdot\frac{\sin N\delta}{\sin\delta} \tag{6.189}$$

Intensitatea radiaţiei difractată după această direcţie este:

$$I_R(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \cdot \frac{\sin^2 N\delta}{N^2 \sin^2 \delta} \tag{6.190}$$

Când $\theta \longrightarrow 0$, $u \longrightarrow 0$ şi

$$\frac{\sin^2 N\delta}{N^2 \sin^2 \delta} \longrightarrow 1 \tag{6.191}$$

astfel că $I_R(0) = I_{r0}$

Factorul $\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$ caracterizează variaţia intensităţii luminoase difractate de fiecare fantă. Factorul $\left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta}\right)^2$ ţine cont de interferenţa fasciculelor determinate de toate fantele. Astfel $\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$ modulează amplitudinea. Aşa cum s-a arătat anterior când $d \sin \varphi = m\lambda$ cu $m =$ număr întreg se obţine un maxim de difracţie. Astfel

$$\delta = \pi d \frac{\sin \theta}{\lambda} = m\pi \tag{6.192}$$

Remarcă că limita

$$L = \lim_{\delta \longrightarrow m\pi} \left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta}\right)^2 = \left(\lim_{\delta \longrightarrow m\pi} \frac{\sin N\delta}{\sin \delta}\right)^2 = N^2 \tag{6.193}$$

Atunci

$$(I_0)_{\max} = N^2 I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \tag{6.194}$$

Se observă că atunci când lumina este difractată prin N fante, intensitatea luminoasă creşte nu de N ori ci de N^2 ori. Aceste maxime poartă numele de maxime principale.

Între două maxime principale apar $N - 1$ minime nule corespunzătoare valorilor $\sin N\delta = 0$ şi $\sin \delta \neq 0$. Între aceste maxime ar trebui să existe $N-2$ maxime secundare a căror intensitate luminoasă este neglijabilă în raport cu cea a maximelor principale. Pentru a pune în evidenţă mai uşor condiţiile de formare a acestora vom scrie în ordine crescătoare valorile $N\delta$: 0, π, $2\pi, \ldots (N-1)\pi$, $\underline{N\pi}$, $(N+1)\pi, \ldots, (2N-1)\pi$, $\underline{2N\pi}$

Valorile subliniate sunt cele pentru care $\sin N\delta = 0$ şi $\sin \delta = 0$. Pentru celelalte valori $\sin \delta \neq 0$. Cu cât N devine mai mare maximele sunt separate de distanţe mai mari. În Fig.6.30 este reprezentată intensitatea în funcţie de unghiul de difracţie.

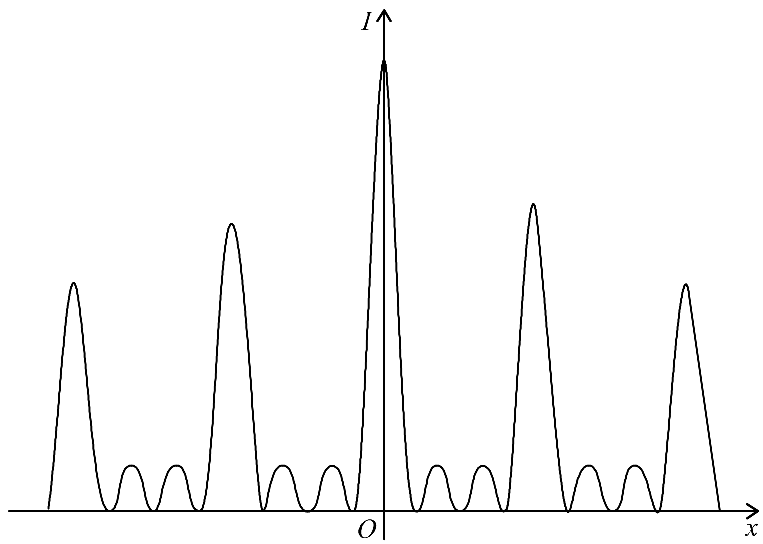


Figura 6.30: Intensitatea în funcţie de unghiul de difracţie în cazul difracţiei pe o reţea cu patru fante.

6.6.1 Dispersia unghiulară

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} \tag{6.195}$$

$d\varphi$ reprezintă variaţia unghiului de difracţie pentru care se obţine din nou un maxim de difracţie de ordin m atunci când lungimea de undă variază cu $d\lambda$. Astfel:

$$d \sin \varphi = m\lambda \tag{6.196}$$

$$d \sin (\varphi + d\varphi) = m (\lambda + d\lambda) \tag{6.197}$$

$$d [\sin \varphi \cos d\varphi + \cos \varphi \sin d\varphi] = m\lambda + md\lambda \tag{6.198}$$

$$d \sin \varphi + d (\cos \varphi) d\varphi = m\lambda + m \cdot d\lambda \tag{6.199}$$

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi} \tag{6.200}$$

6.6.2 Puterea de rezoluţie spectrală

Una din problemele care se pune în cazul unei reţele de difracţie este aceea de a determina diferenţa $\Delta\lambda$ dintre lungimile de undă a două radiaţii monocromatice care să determine două maxime separate. Pentru o reţea de difracţie:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{Nm} \tag{6.201}$$

unde λ este lungimea de undă, N este numărul de fante ale reţelei şi m este ordinul maxim:

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \tag{6.202}$$

Definim puterea de rezoluţie ca fiind:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \tag{6.203}$$

unde $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$. Dacă ţinem cont de relaţia anterioară

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda} Nm$$

$$R = N \cdot m \tag{6.204}$$

Se observă că puterea creşte cu ordinul de difracţie.

Aplicaţie: Fie o reţea de difracţie de lungime $L = 4$ cm având $n = 500$ fante/mm iluminată în domeniul verde al spectrului cu o radiaţie cu $\lambda = 560$ nm. Să se determine:

a. puterea de rezoluţie în spectrul de ordinul 2

b. diferenţa $\Delta\lambda$ în spectrul de ordin 2

c. dispersia unghiulară a reţelei în spectrul de ordin 2

Soluţie

a.

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN = mnL = 4 \times 10^4$$

b.

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = 1,4 \text{ nm}$$

c.

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda}$$

Din condiţia de maxim:

$$\frac{1}{n}\sin\varphi = m\lambda$$

obţinem prin diferenţiere:

$$\frac{1}{n}\cos\varphi d\varphi = md\lambda$$

Atunci:

$$D = \frac{mn}{\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\lambda\cos\varphi} = \frac{1}{\lambda\sqrt{\frac{1}{\sin^2\varphi} - 1}}$$

Deoarece $\sin\varphi = nm\lambda$, dispersia unghiulară devine:

$$D = \frac{nm}{\sqrt{1 - n^2m^2\lambda^2}} = 1,2 \times 10^6$$

Aplilcaţie: O reţea de difracţie are 10^4 linii echidistante pe $2,54$ cm şi este iluminată la incidenţă normală cu lumină galbenă dintr-o lampă cu vapori de sodiu. Această lumină conţine două linii foarte apropiate de lungimi de undă $\lambda = 589$ nm şi $\lambda = 589,59$ nm (dubletul de sodiu).

a. care este unghiul pentru care apare maximul de prim ordin al acestor lungimi de undă?

b. care este diferenţa unghiulară dintre maximele de ordin I ale acestor linii?

Soluţie

a. Condiţia pentru obţinerea maximului de ordin I este:

$$l\sin\alpha = \lambda$$

unde $l = N/L$ este constanta reţelei. Rezultă:

$$\alpha = \arcsin\frac{\lambda L}{N} = 13^o 20'$$

b. Pornim de la definiţia dispersiei:

$$D \equiv \frac{d\alpha}{d\lambda}$$

şi în locul diferenţialelor $d\lambda$ şi $d\alpha$ vom utiliza valorile finite (care sunt foarte mici) $\Delta\lambda$ şi $\Delta\alpha$.Atunci:

$$D = \frac{\Delta\alpha}{\Delta\lambda} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\lambda}$$

Rezultă:

$$\Delta\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\lambda}\Delta\lambda = 2,4 \times 0^{-4}\ \text{rad} = 49,5”$$

6.7 Radiaţia termică

Experienţa arată că orice corp încălzit emite radiaţii termice (simţite sub formă de căldură). Această emisie apare la orice temperatură mai mare de 0 K, ea fiind continuă pe toate lungimile de undă. Procesele care determină o astfel de emisie sunt procese de neechilibru. Dacă emisia are loc în condiţii de echilibru adică energia emisă de corp în acelaşi interval de timp temperatura se menţine constantă, radiaţia termică poartă numele de radiaţie termică de echilibru. La temperaturi joase (sub 500 °C) cea mai mare parte a radiaţiei este concentrată pe lungimile de undă infraroşii (radiaţii care dau senzaţia de căldură), iar la temperaturi mai mari (peste 500 °C) o parte tot mai mare a energiei este emisă în domeniul lungimilor de undă din domeniul vizibil (corpurile devin incandescente). Radiaţia termică emisă de Soare a cărui suprafaţă are o temperatură de aproximativ 6000 K, acoperă toate domeniile lungimilor de undă.

6.7.1 Mărimi fundamentale

1. Fluxul energetic Φ se defineşte ca energia radiată de un corp în unitatea de timp.

$$\Phi = \frac{dE}{dt} \tag{6.205}$$

2. Puterea de emisie $R(T)$ este raportul dintre fluxul energetic emis de unitatea de suprafaţă adică:

$$R(T) = \frac{d\Phi}{dS} \tag{6.206}$$

3. Puterea spectrală de emisie este $r_\lambda(T)$,şi reprezintă partea din puterea de emisie determinată de radiaţia cu lungimea de undă cuprinsă în intervalul $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ şi dλ. Atunci

$$r_\lambda(T) = \frac{dR_\lambda(T)}{d\lambda} \tag{6.207}$$

astfel că puterea de emisie este:

$$R(T) = \int_0^\infty r_\lambda(T) d\lambda \tag{6.208}$$

4. Densitatea volumică a câmpului electromagnetic w se defineşte ca raportul dintre energia W a câmpului electromagnetic aflată în volumul dV şi acel volum la temperatura T.

$$w = \frac{dW}{dV} \tag{6.209}$$

5. Densitatea spectrală de energie este raportul dintre partea din densitatea volumică de energie determinată de radiaţiile cu lungimea de undă cuprinsă în intervalul $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ dw_λ şi $d\lambda$.

$$\rho_\lambda = \frac{dW_\lambda(T)}{d\lambda} \tag{6.210}$$

În cazul unei incinte ai cărei pereţi sunt menţinuţi la temperatura T între $r_\lambda(T)$ şi $\rho_\lambda(T)$ există relaţia

$$\rho_\lambda(T) = \frac{4r_\lambda(T)}{c} \tag{6.211}$$

unde c este viteza luminii. Aceeaşi relaţie se obţine între puterea de emisie şi densitatea de energie. Astfel:

$$\int_0^\infty \rho_\lambda(T) d\lambda = \frac{4}{c} \int_0^\infty r_\lambda(T) d\lambda \tag{6.212}$$

$$W(T) = \frac{4}{c} R(T) \tag{6.213}$$

6. Coeficientul de absorbţie $a_\lambda(T)$ este definit ca fracţia din energia incidentă pe suprafaţa unui corp care este absorbită

$$a_\lambda(T) = \frac{E_a(\lambda, T)}{E(\lambda, T)} \tag{6.214}$$

6.7.2 Corp negru

Corpul negru este definit ca fiind corpul care absoarbe toată energia care cade pe suprafaţa sa. Pentru un astfel de corp:

$$a_\lambda(T) = 1 \tag{6.215}$$

În natură nu există corpuri perfect negre. Cărbunele şi platina au un coeficient de absorbţie apropiat de unitate, într-un domeniu limitat de frecvenţe, dar în regiunea infraroşie acest coeficient este mult mai mic decât unitatea.

Un dispozitiv ale cărui proprietăţi sunt apropiate de cele ale corpului negru este o cavitate menţinută la o temperatură constantă în care este practicat un mic orificiu. Acest orificiu se comportă ca un corp negru. Justificarea este că orice radiaţie incidentă din afara orificiul va trece prin el şi va suferi în interiorul cavităţii reflexii multiple în interiorul acesteia. La fiecare reflexie o parte din energia radiată va fi absorbită astfel încât aproape toată energia este absorbită. Dispozitivul are un coeficient de absorbţie egal cu unitatea. Radiaţia termică absorbită sau emisă de corpul negru poartă numele de radiaţie a corpului negru.

6.7.3 Legile clasice ale radiaţiei termice

Legea lui Kirchoff

Raportul dintre puterea spectrală de emisie $r_\lambda(T)$ şi coeficientul de absorbţie este acelaşi pentru toate corpurile aflate la aceeaşi temperatură şi este egal cu puterea spectrală de emisie a corpului negru $f_\lambda(T)$ care este o funcţie doar de temperatură şi lungimea de undă λ.

$$f_\lambda = \frac{r_\lambda(T)}{a_\lambda(T)} \tag{6.216}$$

Pentru corpul negru $a_\lambda(T) = 1$ şi $r_\lambda(T) = f_\lambda(T)$ care este o funcţie universală.

Legea Ştefan Boltzman

Puterea de emisie este proporţională cu puterea a 4-a a temperaturii absolute

$$R(T) = \delta T^4 \tag{6.217}$$

Coeficientul de proporţionalitate σ poartă numele de constanta Ştefan-Boltzmann şi are valoarea

$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}} \tag{6.218}$$

Aplicaţie: O bilă cu diametrul d se află într-un recipient vidat ai cărui pereţi sunt menţinuţi la temperatura apropiată de zero absolut. Temperatura iniţială a bilei este T_o. Dacă se asimilează suprafaţa bilei cu un corp negru, se cere timpul în care temperatura scade de n ori. Se consideră că bila este confecţionată dintr-un material de densitate ρ şi cădură specifică c.

Soluţie

Puterea de emisie a unui corp negru este:

$$R(T) = \frac{1}{S}\left(-\frac{d\varepsilon}{dt}\right) = \sigma T^4$$

unde ε este energia internă a bilei, iar σ este constanta Stefan-Bolzmann. Ţinând cont că $S = \pi d^2$, energia emisă în unitatea de timp este:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\sigma T^4 \pi d^2$$

Dar, energia internă a bilei poate fi exprimată în funcţie de cădura sa specifică prin relaţia:

$$\varepsilon = mcT = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3 \rho c T$$

Dacă vom deriva ultima relaţie în raport cu timpul şi vom ţine cont de expresia energiei emise în unitatea de timp, se obţine:

$$\frac{4\pi}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3 \rho c T \frac{dT}{dt} = -\sigma T^4 \pi d^2$$

Rezultă ecuaţia diferenţială:

$$dt = -\frac{d\rho c}{6\sigma}\frac{dT}{T^4}$$

care prin integrare

$$\int_0^t dt = -\frac{d\rho c}{6\sigma}\int_{T_o}^{T_o/n}\frac{dT}{T^4}$$

conduce la:

$$t = \frac{(n^3-1)\, d\rho c}{18ct_o^3}$$

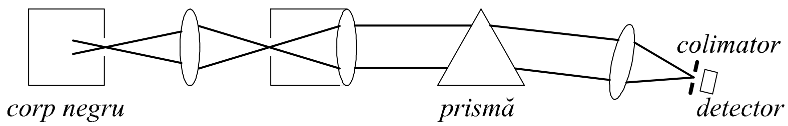


Figura 6.31: Dispozitiv experimental pentru calcularea puterii spectrale de emisie

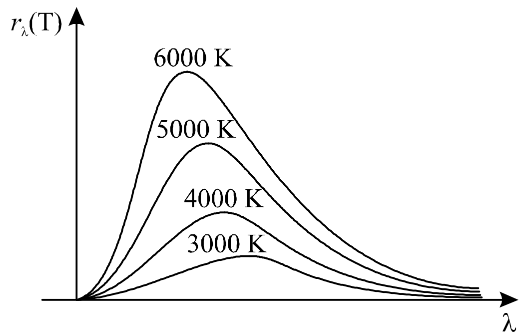


Figura 6.32: Legea lui Wien

Legea lui Wien

Densitatea spectrală de energie este legată de puterea spectrală de emisie prin relaţia:

$$\rho_\lambda(T) = 4r_\lambda(T)/c \tag{6.219}$$

Aceasta înseamnă că $\rho_\lambda(T)$ şi $r_\lambda(T)$ reprezentate în funcţie de λ au aceeaşi formă. Pentru corpul negru obţinerea lui $r_\lambda(T)$ se poate face cu dispozitivul din Fig. 6.31 în felul următor:

Prisma are rolul de a descompune în radiaţiile componente undele electromagnetice provenite de la corpul negru. Prin deplasarea colimatorului pe detector vor cădea toate componentele radiaţiei emise de corpul negru, astfel că se poate înregistra fiecare regiune a spectrului. Rezultatele sunt prezentate în Fig. 6.32.

Wien a demonstrat făcând uz de considerente termodinamice şi de teoria electromagnetică a luminii că densitatea spectrală de energie are forma:

$$\rho_\nu(T) = \nu^3 F(\nu, T) \qquad \text{sau} \qquad \rho_\nu(T) = \frac{c^4}{\lambda^5} F(\lambda, T) \tag{6.220}$$

unde $F(\nu, T)$ sau $F(\lambda, T)$ sunt funcţii a căror formă nu poate fi găsită pe bază de considerente termodinamice.

Legătura dintre cele două forme se poate demonstra pornind de la expresia densităţii de energie pentru un interval de frecvenţe $d\nu$ corespunzător intervalului de lungime de undă $d\lambda$

$$\rho_\lambda(T)d\lambda = -\rho_\nu(T)d\nu \tag{6.221}$$

Semnul minus apare deoarece atunci când $d\nu > 0$, $d\lambda < 0$, adică atunci când frecvenţa de undă creşte, lungimea de undă scade. Astfel:

$$\rho_\lambda(T) = -\rho_\nu(T)\frac{d\nu}{d\lambda} \tag{6.222}$$

Dar

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad ; \qquad \frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2} \tag{6.223}$$

Astfel:

$$\rho_\lambda(T) = \rho_\nu(T)\frac{c}{\lambda^2} = \frac{c^4}{\lambda^5}F(\lambda, T) \tag{6.224}$$

O consecinţă a acestei relaţii este legea deplasării a lui Wien: lungimea de undă corespunzătoare maximului densităţii spectrale de energie este invers proporţională cu temperatura absolută.

Pentru a demonstra aceasta lege se pune condiţia de maxim $\frac{d\rho_\lambda(T)}{d\lambda} = 0$. Se introduce o nouă variabilă $\eta = \lambda T$ şi se obţine:

$$\frac{\rho_\lambda(T)}{d\lambda} = -\frac{5c^4}{\lambda^6}F(\eta) + \frac{c^4}{\lambda^5}\frac{dF(\eta)}{d\eta}\frac{d\eta}{d\lambda} = 0 \tag{6.225}$$

Rezultă:

$$5F(\eta) - \eta\frac{dF\,(\eta)}{d\eta} = 0 \tag{6.226}$$

Există o anumită valoare a lui η, care satisface ecuaţia de mai sus şi face ca $\rho_\lambda(T)$ să fie maximă. Notăm această valoare a lui η cu b. Deoarece funcţia $F(\eta)$ nu este cunoscută valoarea constantei b a fost determinată pe cale experimentală. S-a obţinut $b = 0,289 \times 10^{-2}$ mK. Atunci:

$$\lambda_m T = b \tag{6.227}$$

unde λ_m este lungimea de undă la care densitatea spectrală îşi atinge maximul. Relaţia arată că are loc deplasarea maximului densităţii către lungimi de undă mai mici când temperatura creşte. Aceasta explică de ce un corp capătă culori din ce în ce mai deschise pe măsură ce este încălzit mai puternic.

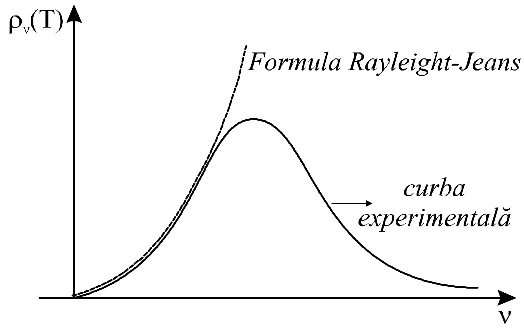


Figura 6.33: Densitatea spectrală de energie. Comparaţie între curba experimentală şi curba Rayleigh Jeans

Legea lui Rayleigh

Legea a fost dedusă din consideraţii clasice. Rayleigh a pornit de la ideea că în interiorul unei incinte ai cărei pereţi sunt menţinuţi la temperatură constantă câmpul electromagnetic poate fi descompus într-o mulţime de unde staţionare. O undă staţionară poartă numele de mod de vibraţie. În cadrul fizicii clasice se demonstrează că fiecărui mod de vibraţie îi corespunde o energie medie $< \varepsilon > k_b T$ şi ea se compune din energiile medii ale câmpului electric şi magnetic fiecare egală cu $k_B T/2$.

Astfel calculul energiei câmpului electromagnetic pentru un domeniu de frecvenţe $\nu, \nu + d\nu$ se reduce la determinarea numărului modurilor de vibraţie dN din acest interval de frecvenţe. Exprimând această energie

$$k_B T dN = V \rho_\nu(T) d\nu \tag{6.228}$$

se poate determina

$$\rho_\nu(T) = \frac{k_B T}{V} \cdot \frac{dN}{d\nu}. \tag{6.229}$$

Rezultă:

$$\rho_\lambda(T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T = \nu^3 \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\right) = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) \tag{6.230}$$

Totuşi formula nu este corectă deoarece nu corespunde cu rezultatele experimentale decât în domeniul temperaturilor înalte (Fig. 6.33).

Deoarece formula duce la o concluzie care este în contradicţie flagrantă cu experienţa, situaţia a fost numită **catastrofa ultravioletă.**

Trebuie remarcat că în 1896 Wien a propus o formulă care este în concordanţă cu datele experimentale pentru frecvenţe mari.

$$\rho_\nu(T) = a\nu^3 \exp\left[-\frac{C_2\nu}{T}\right] \tag{6.231}$$

6.7.4 Teoria lui Planck

Planck a considerat că formula Rayleigh Jeans este parţial corectă. Astfel:

$$\rho_\lambda(T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} < \varepsilon > \tag{6.232}$$

Diferenţa faţă de raţionamentul clasic a fost dată de modul în care Planck a calculat energia medie $< \varepsilon >$. Pentru aceasta Planck a pornit de la ideea că emisia şi absorbţia undelor electromagnetice de frecvenţa ν nu se mai face în mod continuu ci în aşa fel încât energia undelor emise şi absorbite este un multiplu întreg al unei cantităţi de energie a cărei mărime este proporţională cu frecvenţa radiaţiei.

$$\varepsilon = h\nu \tag{6.233}$$

unde $h = 6,623 \times 10^{-34}$ Js este o constantă universală, numită constanta lui Planck.

Pentru calculul energiei medii a unui mod de vibraţie vom considera că probabilitatea ca energia acestuia să fie $nh\nu$ este proporţională cu $\exp\left(-\frac{nh\nu}{k_BT}\right)$ conform legii de distribuţie Boltzmann. Astfel energia medie a unui mod de oscilaţie este:

$$< \varepsilon >= \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} nh\nu \exp\left(-nh\nu\beta\right)}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \exp\left(-nh\nu\beta\right)} \tag{6.234}$$

unde $\beta = \frac{1}{k_BT}$. Din ecuaţia 6.234 se observă că putem scrie:

$$< \varepsilon >= -\frac{d}{d\beta}\left[\ln \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-nh\nu\beta\right)\right] \tag{6.235}$$

$$< \varepsilon >= -\frac{d}{d\beta} \ln \frac{1}{1-\exp\left(-h\nu\beta\right)} = \frac{h\nu\exp(-\beta h\nu)}{1-\exp\left(-h\nu\beta\right)} \tag{6.236}$$

adică

$$< \varepsilon >= \frac{h\nu}{\exp\left[h\nu/k_B T\right] - 1} \tag{6.237}$$

Atunci 6.232 devine

$$\rho_\lambda(T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{\exp\left[h\nu/k_B T\right] - 1} \tag{6.238}$$

Relaţia este în concordanţă cu legea lui Wien iar rezultatul integralei $\int_0^\infty \rho(\nu, T)d\nu$ este finit.

Legile radiaţiei corpului negru furnizează metode de măsurare a temperaturii corpurilor incandescente. Ansamblul de metode de măsură a temperaturilor bazat pe dependenţa dintre temperatură şi puterea spectrală de emisie poartă numele de pirometrie optică. Metodele sunt în principal utilizate pentru corpurile ale căror temperaturi sunt mai mari de 2000 K. Astfel pe baza legii lui Wien a fost determinată temperatura la suprafaţa Soarelui. După efectuarea cercetărilor asupra absorbţiei luminii în aer se ajunge la concluzia că puterea spectrală de emisie are maximul la lungimea de undă $\lambda_m = 4700\,\text{Å}$. Acest maxim corespunde unei temperaturi de 6150 °C, astfel că aceasta este temperatura la suprafaţa Soarelui. Trebuie remarcat în plus că după parcurgerea atmosferei spectrul solar permite un maxim la lungimea $\lambda = 5500\,\text{Å}$ lungimea de undă la care sensibilitatea spectrală a ochiului este maximă.

Aplicaţie: Să se arate că pentru valori mici ale lui ω/T formula lui Planck se reduce la formula lui Rayleight-Jeans, iar pentru valori mari ale lui ω/T la formula lui Wien.

Soluţie

Utilizăm formula lui Planck pentru densitatea spectrală a energiei electromagnetice:

$$\rho_\omega(T) = c_1\frac{\omega^3}{e^{c_2\omega/T} - 1}$$

unde c_1 şi c_2 sunt constante.

a. Pentru valori mici ale lui ω/T dezvoltăm exponenţiala $\exp c_2\omega/T$ în serie Taylor:

$$e^{c_2\omega/T} \simeq 1 + c_2\frac{\omega}{T} + ...$$

ceea ce conduce la următoarea expresie pentru formula Planck:

$$\rho_\omega(T) \simeq c_1\frac{\omega^3}{1 + c_2\omega/T - 1} = c\omega^2 T$$

b. Pentru valori mari ale lui ω/T vom avea:

$$e^{c_2\omega/T} \gg 1$$

şi densitatea spectrală devine:

$$\rho_\omega(T) \simeq c_1\omega^3 e^{-c_2\omega/T}$$

Aplicaţie: Să se arate că formula lui Rayleight-Jeans nu este compatibilă cu legea Stefan-Bolzmann.

Soluţie

Densitatea w a energiei electromagnetice pentru întreg spectrul este:

$$w = \int_0^\infty \rho_\omega(T)d\omega$$

unde

$$\rho_\omega(T) = c\omega^2 T$$

Se obţine:

$$w = \int_0^\infty c\omega^2 T d\omega = \infty$$

ceea ce ne arată că formula lui Rayleight-Jeans nu este compatibilă cu legea Stefan-Bolzmann $w = \sigma T^4$.

6.8 Probleme

6.1.O undă electromagnetică plană care are frecvenţa $\nu = 16$ Hz se propagă în vid după direcţia axei Oz şi are amplitudinea intensităţii câmpului electric $E_x = 2$ V/m.

a. Să se determine amplitudinea, viteza de fază, lungimea de undă şi vectorul de undă.

b. Să se determine amplitudinea şi direcţia de oscilaţie a intensităţii câmpului magnetic.

6.2. Vectorul intensitate a câmpului electric al unei unde electromagnetice plane este:

$$\vec{E} = \vec{E}_o exp\ i[9,42 \times 10^{14}t - \frac{\pi}{3}(\sqrt{12}x + 2y)\ 10^7]\ \text{V/m}$$

Să se determine:

a. direcţia după care oscilează intensitatea câmpului electric
b. direcţia de propagare a undei
c. mărimea amplitudinii intensităţii câmpului electric
d. lungimea de undă
e. pulsaţia şi frecvenţa undei
f. viteza de propagare

6.3. Un laser emite în ultraviolet pulsuri de 2 ns cu diametrul de $2,5$ mm. Fiecare puls are energia de 6 J.

a. Să se determine lungimea în spaţiu a pulsului emis de laser
b. Să se determine densitatea de energie emisă de laser

6.4. O undă electromagnetică plană cade la incidenţă normală pe o lamă cu feţe plan-paralele de grosime d Substanţa din care este confecţionată lama este nemagnetică ($\mu_r = 1$), iar permitivitatea electrică relativă descreşte după legea:

$$\varepsilon_r(x) = \varepsilon_1 e^{-2ax}$$

Să se determine timpul total în care unda străbate lama cu feţe plan-paralele.

6.5. O undă electromagnetică plană se propagă în vid astfel încât câmpul electric are expresia:

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

ıntr-un sistem de coordonate $Oxyz$ cu versorii $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ şi $\vec{e}_z$. Vectorul de undă şi amplitudinea undei au expresiile:

$$\begin{aligned} \vec{k} &= 3\vec{e}_x + 4\vec{e}_z \text{ m}^{-1} \\ \vec{E}_o &= 2\vec{e}_y \text{ V/m} \end{aligned}$$

a. Să se determine direcţia de propagare a undei şi lungimea de undă
b. Să se determine intensitatea câmpul magnetic H
c. Să se determine intensitatea undei

6.6. Două unde coerente plane au direcţiile de propagare ce fac între ele un unghi α foarte mic, căzând aproape normal pe un ecran. Să se determine distanţa dintre două maxime vecine pe ecran (interfranja).

6.7. Una din fantele dispozitivului Young este acoperită cu un strat de mică cu indicele de refracţie $n = 1,58$. În punctul central de pe ecran se găseşte a $7 - a$ franjă luminoasă. Care este grosimea lamei dacă lungimea de undă a luminii folosite este $\lambda = 5500$ Å

6.8 O peliculă de apă ($n = 1,3$) aflată în aer are grosimea $d = 3200$ Å. Dacă lama este iluminată la incidenţă normală, care va fi culoarea predominantă în lumina reflectată?

6.9. O diafragmă cu deschiderea circulară de rază a, variabilă, este plasată între o sursă luminoasă şi un ecran. Distanţele de la diafragmă la sursă şi respectiv ecran sunt $a = 1$ m şi respectiv $b = 1,25$ m. Să se determine lungimea de undă a luminii pentru care se obţine un maxim de intensitate în centrul imaginii de difracţie, pentru o rază $r_1 = 1$ mm a deschiderii, iar următorul maxim se obţine pentru o rază $r_2 = 1,5$ mm.

6.10. O reţea de difracţie are 10^4 linii echidistante pe $2,54$ cm şi este iluminată la incidenţă normală cu lumină galbenă dintr-o lampă cu vapori de sodiu. Această lumină conţine două linii foarte apropiate de lungimi de undă $\lambda = 589$ nm şi $\lambda = 589,59$ nm (dubletul de sodiu).

a. care este unghiul pentru care apare maximul de prim ordin al acestor lungimi de undă?

b. care este diferenţa unghiulară dintre maximele de ordin I ale acestor linii?

6.11. O reţea de difracţie cu lungimea $L = 5$ cm, cu constanta $n = 500$ linii/mm este iluminată paralel de lumina cu lungimea de undă $\lambda = 0,5$ μm. Se cere:

a. ordinul maxim de difracţie

b. unghiurile de difracţie pentru primele două maxime

c. dispersia unghiulară în primele două maxime

d. puterea de rezoluţie pentru maximul de ordin 1

6.12 Câte linii trebuie să aibe o reţea pentru a rezolva dubletul sodiului ($\lambda_1 = 589$ nm şi $\lambda_2 = 589,59$ nm) pentru ordinul al treilea.

6.13 Să se arate că pentru un unghi de incidenţă egal cu unghiul Brewster, unghiul dintre raza reflectată şi cea refractată este $\pi/2$.

6.14 Un fascicul de lumină naturală cade pe o suprafaţă de sticlă cu $n = 1.5$ sub un unghi de incidenţă egal cu 45^o. Să se determine, cu ajutorul formulelor lui Fresnel, gradul de polarizare al luminii reflectate.

$$P = \frac{I_{\perp} - I_{II}}{I_{II} + I_{\perp}} = 0,78$$

6.15 Se consideră două surse (corp negru) de radiaţie termică. Una din ele are temperatura $T_1 = 2500$ K. Să se determine temperatura celeilalte surse dacă lungimea de undă corespunzătoare maximului puterii de emisie este cu $\delta\lambda = 0,5$ μm mai mare ca lungimea de undă corespunzătoare maximului sursei primare. Se cunoaşte constanta lui Wien $A = 0,2898 \times 10^{-2}$ mK.

$$T_2 = \frac{AT_1}{A + T_1 + \delta\lambda} = 1750^oC$$

6.16 Să se calculeze lungimea de undă corespunzătoare intensităţii maxime din spectrul unui corp negru, ştiind că puterea de emisie a acestuia este $R = 5,67$ W/cm^2. Se cunoaşte constanta Wien $A = 0,2898 \times 10^{-2}$ mK.

$$\lambda_m = \frac{A}{T} = 2,89 \times 10^{-8} \text{ m}$$

6.17 Dacă se răceşte un corp negru, atunci lungimea de undă corespunzătoare maximului densităţii spectrale energetice $\rho_\lambda(T)$ se deplasează cu 3000 Å. Se cere să se determine cu câte grade a scăzut temperatura corpului dacă temperatura iniţială a fost 1800^o C. Se cunoaşte constanta Wien $A = 0,2898 \times 10^{-2}$ mK.

$$\Delta T = 366\ K$$