

Contents

1	Unde electromagnetice	3
1.1	Ecuatiile Maxwell pentru medii omogene si izotrope . . .	3
1.2	Ecuatia undelor electromagnetice.	6
1.3	Producerea undelor electromagnetice.	7
1.4	Proprietățile undelor electromagnetice.	9
1.5	Dispersia și absorbția undelor electromagnetice.	13
1.6	Reflexia și transmiterea undelor electromagnetice . . .	17
1.6.1	Coeficienții Fresnel. Factorii Fresnel	17
1.6.2	Reflexia totală	24
1.7	Polarizarea undelor electromagnetice	25
1.7.1	Definiție și caracteristici	25
1.7.2	Procedee de polarizare	29
1.8	Interferența undelor electromagnetice	35
1.8.1	Definiție și caracteristici	35
1.8.2	Dispozitive de interferență	40
1.8.3	Aplicații ale fenomenului de interferență	50
1.9	Difracția undelor electromagnetice	54
1.9.1	Definiție și caracteristici	54
1.9.2	Metoda zonelor Fresnel	55
1.9.3	Difracția Fresnel printr-o fantă circulară	56
1.9.4	Difracția Fraunhofer printr-o fantă dreptunghi- ulară	56
1.9.5	Rețele de difracție plane	58
1.9.6	Difracția radiației X	60
2	Originile fizicii cuantice	61
2.1	Radiația termică	61
2.1.1	Mărimi fizice caracteristice	61
2.1.2	Legile clasice ale radiației termice	63
2.1.3	Ipoteza lui Planck. Formula lui Planck	65
2.2	Efectul fotoelectric	66
2.3	Efectul Compton	68
2.4	Spectre atomice. Structura atomilor	70
2.4.1	Seriile spectrale ale atomului de hidrogen	70
2.4.2	Modelul nuclear al atomului	72
2.4.3	Teoria lui Bohr pentru atomii hidrogenoizi	73
2.4.4	Experiența Franck-Hertz	76
2.5	Elemente de electronică cuantică	77

2.5.1	Emisia și absorbția stimulată. Coeficienții lui Einstein	77
2.5.2	Inversia de populație. Amplificarea radiației . . .	81
2.5.3	Laserii	82
2.6	Natura ondulatorie a particulelor	83
2.6.1	Ipoteza lui de Broglie	83
2.6.2	Experiența Davisson-Germer	84
2.6.3	Caracterul probabilistic al undelor de Broglie . .	85
2.6.4	Relațiile de nedeterminare Heisenberg	85
3	Noțiuni de mecanică cuantică nerelativistă	86
3.1	Starea sistemelor cuantice. Semnificația funcției de undă Ψ	86
3.2	Cuantificarea observabilelor	88
3.3	Conceptul de stare a unei particule	89
3.4	Aplicații ale ecuației Schrödinger	91
3.4.1	Studiul cuantic al unei particule libere	91
3.4.2	Particula în groapă tridimensională de potențial	92
3.4.3	Bariera de potențial. Efectul tunel	94
3.4.4	Studiul cuantic al oscilatorului armonic	96
3.4.5	Interpretarea statistică a relațiilor de nedeterminare Heisenberg	97
4	Anexă	98
4.1	Elemente de analiză matematică	98
4.2	Unele identități referitoare la funcțiile trigonometrice	100

CAPITOLUL 1.

1 Unde electromagnetice

1.1 Ecuatiile Maxwell pentru medii omogene si izotrope

Pentru descrierea clasică a fenomenelor electromagnetice, Maxwell a generalizat legile experimentale ale fenomenelor electrice și magnetice, alcătuiind un sistem de ecuații care exprimă **legile câmpului electromagnetic**.

Aceste legi, sub **formă diferențială** sunt:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{legea lui Gauss pentru câmpul electric} \quad (1.1.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{legea lui Gauss pentru câmpul magnetic} \quad (1.1.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{legea lui Faraday} \quad (1.1.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \vec{j} + \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{legea Ampere-Maxwell} \quad (1.1.4)$$

la care se adaugă **legile de material pentru medii omogene și izotrope**:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad ; \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad ; \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (1.1.5)$$

precum și ecuația de continuitate:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (1.1.6)$$

Observație:

Ecuația de continuitate sau de conservare a sarcinii electrice ne spune că, dacă există un curent net spre exteriorul unei suprafețe închise S , atunci cantitatea de electricitate trebuie să descrească printr-o cantitate corespunzătoare:

$$\int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial Q_{int}}{\partial t} \quad ; \quad Q_{int} = \int_V \rho \, dV \quad (1.1.7)$$

Legile Maxwell sub **formă integrală** sunt:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_i q_i = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \rho \, dV \quad (1.1.8)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.1.9)$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \, d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \, d\vec{S} \quad (1.1.10)$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \, d\vec{l} = \mu \int_S \vec{j} \, d\vec{S} + \varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} \, d\vec{S} \quad (1.1.11)$$

a. *Ecuatiile Maxwell pentru cazul static sau al curgerii staționare*

Cazul câmpurilor statice este caracterizat prin:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{div } \vec{j} = 0 \quad (1.1.12)$$

Ecuatiile Maxwell se vor scrie sub forma:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (1.1.13)$$

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad (1.1.14)$$

ecuații ce caracterizează **câmpul electrostatic** la care se adaugă ecuațiile ce caracterizează **câmpul magnetostatic**:

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (1.1.15)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu \vec{j} \quad (1.1.16)$$

Observații:

- Denumirea de câmp magnetostatic este aproximativă pentru că sarcinile trebuie să fie în mișcare pentru a crea câmpul, dar se consideră că există o curgere staționară a sarcinilor, deci și a densității de sarcină \vec{j} care nu va depinde de timp ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$).

- Ecuația $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ ne arată că sarcinile electrice (sau distribuția volumică ρ) reprezintă sursele câmpului electric de intensitate \vec{E} .

- Ecuația $\text{div } \vec{B} = 0$ ne arată că nu există sarcini magnetice care să creeze câmpul magnetic de inducție \vec{B} (monopoli magnetici) și din care să plece liniile de câmp magnetic.

- Ecuația $\text{rot } \vec{E} = 0$ asigură condiția suficientă ca un câmp vectorial să fie conservativ, deci să poată fi descris de gradientul unei funcții scalare potențiale $\varphi(x, y, z)$: $\vec{E} = -\text{grad } \varphi(x, y, z)$

- Ecuația $rot \vec{B} = \mu \vec{j}$ ne arată ca un câmp magnetic poate apare numai în prezența curenților de densitate \vec{j} cu respectarea ecuației de mai sus, iar liniile de câmp sunt închise și nu diverg niciodată ($div \vec{B} = 0$). De asemenea, faptul că $rot \vec{B} \neq 0$ ne spune că un câmp magnetic nu poate fi exprimat ca fiind gradientul unei funcții scalare potențiale; $div \vec{B} = 0$ ne conduce însă la concluzia că putem exprima câmpul magnetic ca rotorul unei funcții vectoriale, adică prin potențialul vector \vec{A} ($\vec{B} = rot \vec{A}$).

b. Ecuațiile Maxwell pentru cazul curgerii netaționare

Din studiul curgerii staționare ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) s-a observat că cele două câmpuri (electrostatic și magnetostatic) pot exista independent unul de altul fiind caracterizate de ecuațiile Maxwell corespunzătoare (1.1.13 – 1.1.16). Deci, electrostatica și magnetostatica sunt fenomene distincte atâta timp cât sarcinile și curenții sunt statici (staționari).

Atunci când însă avem variații în timp de forma $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ sau $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, deci sarcini și densități \vec{j} netaționare ($\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$) va rezulta o interdependență între \vec{E} și \vec{B} . Conform fenomenului de **inducție electromagnetică**, variația $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ va da naștere la un câmp indus în circuitul electric (*legea Faraday*), deci va reprezenta o sursă de câmp electric, astfel încât ecuația Maxwell (1.1.14), pentru cazul netaționar, va deveni $rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Pe de altă parte, dacă se aplică operatorul divergență ecuației (1.1.16) vom constata că ecuația de continuitate (1.1.6) este satisfăcută numai în cazul staționar. Pentru cazul netaționar ecuația (1.1.16) nu mai este compatibilă cu ecuația de conservare a sarcinii. Pentru a fi respectată această ecuație, Maxwell introduce un nou termen corespunzător, așa numitului fenomen de **inducție magnetostatică** prin care se acceptă ipoteza că variația în timp a câmpului \vec{E} duce la apariția unui câmp magnetic \vec{B} , iar ecuația (1.1.16) devine $rot \vec{B} = \mu \vec{j} + \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ecuație care este compatibilă cu ecuația de continuitate.

Observație:

Cel de-al doilea termen din ecuația (1.1.4) caracterizează așa numitul **curent de deplasare** \vec{j}_d , care apare în cazul materialelor polarizabile.

1.2 Ecuația undelor electromagnetice.

În cazul mediilor dielectrice omogene și izotrope cum ar fi vidul, aerul, apa, sticla etc. caracterizate prin $\vec{j} = 0$, $\rho = 0$, $\sigma = 0$, ecuațiile Maxwell devin:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (1.2.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad (1.2.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1.2.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.2.4)$$

Aplicând rotorul ecuației (1.2.4), prelucrând ambii membri ai ecuației și ținând cont de egalitatea matematică:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{H}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{H}) - \Delta \vec{H} \quad (1.2.5)$$

și respectiv de ecuația (1.2.3), se va obține **ecuația undelor electromagnetice** scrisă cu ajutorul vectorului \vec{H} :

$$\Delta \vec{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2.6)$$

pentru medii dielectrice omogene, izotrope și caracterizate prin permitivitatea electrică ε și respectiv prin permeabilitatea magnetică μ .

Observație Ecuația undelor electromagnetice se poate scrie și cu ajutorul vectorului \vec{E} dacă se aplică rotorul ecuației (1.2.3):

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2.7)$$

Dacă se ține cont acum de ecuația generală de propagare a undelor:

$$\Delta \vec{\Psi}(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\Psi}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2.8)$$

unde $\vec{\Psi}(\vec{r}, t)$ se numește **funcție de undă** iar v reprezintă **viteza de propagare** a undelor în mediul respectiv, atunci, comparând ecuația (1.2.7) cu

ecuația (1.2.8) vom obține, pentru viteza de propagare a undelor electromagnetice, următoare expresie:

$$v^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu} \rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} \quad (1.2.9)$$

unde $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ este viteza de propagare a undelor electromagnetice în vid și va fi egală cu $3 \cdot 10^8$ m/s, valoare ce reprezintă chiar viteza de propagare a luminii în vid determinată experimental de către fizicianul francez Fizeau. Concluzia imediată a lui Maxwell a fost că **lumina este de natură electromagnetică**.

Observație:

Pentru medii dielectrice $\mu_r = 1$ iar viteza de propagare a undelor electromagnetice devine $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$. Se definește indicele de refracție al mediului dielectric $n = \sqrt{\varepsilon_r}$, deci viteza de propagare într-un mediu dielectric se va scrie în funcție de viteza de propagare în vid și respectiv în funcție de indicele de refracție al mediului: $v = \frac{c}{n}$. Pentru vid $\varepsilon_r = 1$, deci $n = 1$ iar viteza de propagare a undelor electromagnetice este $v = c$. Pentru alte medii dielectrice omogene $\varepsilon > 1$, deci $n > 1$ iar viteza de propagare a undelor electromagnetice este $v < c$.

1.3 Producerea undelor electromagnetice.

Fie un circuit oscilant (fig.1a) format dintr-un condensator C și o bobină de inductanță L . Inițial condensatorul este încărcat cu sarcina q iar intensitatea \vec{E} a câmpului electric dintre plăcile condensatorului este maximă. La închiderea întrerupătorului k condensatorul se descarcă și \vec{E} începe să scadă. Ca urmare apare un curent electric în circuit care va genera un câmp magnetic în solenoid. După un timp $t = T/4$, unde $T = 2\pi\sqrt{LC}$ (*formula Thomson*) este perioada proprie de oscilație a circuitului oscilant, condensatorul este complet descărcat, $\vec{E} = 0$ iar inducția magnetică va fi maximă $\vec{B} = \vec{B}_{max}$. Deci, energia electrică a condensatorului a fost transferată total în energia câmpului magnetic al solenoidului (fig.1b).

În această poziție curentul prin circuit este nul, $i = 0$, deci inducția magnetică începe să scadă, apare fenomenul de inducție electromagnetică care dă naștere la un curent autoindus care reîncarcă condensatorul după un timp

Fig.1

$t = T/2$ (fig.1c), dar cu sarcinile electrice orientate invers ca în (fig.1a.), iar fenomenele se repetă (fig.1e) atâta timp cât nu există pierderi energetice.

Deci, într-un circuit oscilant închis câmpul electric \vec{E} și respectiv câmpul magnetic \vec{B} sunt defazate cu $\pi/4$ ($T/4$) și, într-un punct P vor avea forma:

$$\vec{E}_P = \vec{E}_{max} \sin \omega t \quad (1.3.1)$$

$$\vec{B}_P = \vec{B}_{max} \sin(\omega t - \frac{\pi}{4})$$

Atunci când se deschide circuitul oscilant vom avea câmpuri generate reciproc, deci ele vor fi în fază, iar forma câmpurilor electric și respectiv magnetic la distanța x de sursă (circuit), pentru unde electromagnetice plane progresive, va fi:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_{max} \sin \omega(t - \frac{x}{c}) \quad (1.3.2)$$

$$\vec{B}(x, t) = \vec{B}_{max} \sin \omega(t - \frac{x}{c})$$

unde ω reprezintă **pulsația** sursei. Dacă se ține cont că **lungimea de undă** se exprimă prin relația $\lambda = v \cdot T$, atunci vom defini **vectorul de undă**, $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \vec{s}$, unde \vec{s} reprezintă versorul direcție de propagare a unei electromagnetice. Deci, soluțiile (1.3.2) scrise sub formă exponențială și exprimate prin vectorul de undă vor avea forma:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_o e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad (1.3.3)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_o e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

Observație:

Dacă direcția de propagare a unei electromagnetice este de-a lungul axei Oz ($\vec{s} \parallel Oz$) atunci soluțiile (1.3.3) vor fi de forma:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_o e^{i(\omega t - k z)} \quad (1.3.4)$$

$$\vec{H}(z, t) = \vec{H}_o e^{i(\omega t - k z)}$$

Vom considera în continuare o undă electromagnetică (1.3.4) ce se propagă de-a lungul axei Oz care trebuie să respecte ecuația undelor (1.2.7) scrisă cu ajutorul câmpului electric. În urma calculării laplaceanului și respectiv a derivatei temporale de ordin doi se va obține următoarea ecuație:

$$(k^2 - \omega^2 \varepsilon \mu) \vec{E} = 0 \quad (1.3.5)$$

de unde rezultă, pentru $\vec{E} \neq 0$:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \rightarrow k = \frac{\omega}{v} \rightarrow v = \frac{\omega}{k} \quad (1.3.6)$$

unde $v = \frac{\omega}{k}$ reprezintă **viteza de fază** a undelor electromagnetice care este egală cu viteza de propagare.

1.4 Proprietățile undelor electromagnetice.

1. Undele electromagnetice sunt unde transversale, adică vectorii \vec{E} și \vec{H} vibrează perpendicular pe direcția de propagare a undei: $\vec{E} \perp \vec{s}$ și $\vec{H} \perp \vec{s}$. Pentru a demonstra această proprietate se pleacă de la expresia undelor electromagnetice plane (1.3.3); se aplică operatorul div și, ținând cont de relațiile Maxwell pentru medii dielectrice (1.2.1) și (1.2.2) rezultă:

$$\begin{aligned} div(\vec{H}(\vec{r}, t)) &= div(\vec{H}_o e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}) = -i\vec{k}\vec{H} = -ik\vec{s}\vec{H} \\ div(\vec{E}(\vec{r}, t)) &= div(\vec{E}_o e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}) = -i\vec{k}\vec{E} = -ik\vec{s}\vec{E} \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

$$\begin{aligned} div\vec{H} &= 0 \\ div\vec{E} &= 0 \end{aligned}$$

Din ecuațiile (1.4.1) rezultă că:

$$\vec{H}\vec{s} = 0 \rightarrow \vec{H} \perp \vec{s} \quad (1.4.2)$$

$$\vec{E}\vec{s} = 0 \rightarrow \vec{E} \perp \vec{s}$$

2. Vectorii \vec{E} și \vec{H} sunt perpendiculari unul pe celălalt. Pentru a demonstra această proprietate a undelor electromagnetice vom pleca de la expresiile undelor plane (1.3.3) cărora le vom aplica operatorul *rot*:

$$\begin{aligned}
 \text{rot}\vec{H} &= \nabla \times \vec{H} = -i(\vec{k} \times \vec{H}) = -ik(\vec{s} \times \vec{H}) \\
 \text{rot}\vec{H} &= \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon i\omega \vec{E} \\
 \Rightarrow \vec{E} &= -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(\vec{s} \times \vec{H}) \quad (1.4.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{rot}\vec{E} &= \nabla \times \vec{E} = -i(\vec{k} \times \vec{E}) = -ik(\vec{s} \times \vec{E}) \\
 \text{rot}\vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = i\omega \vec{H} \\
 \Rightarrow \vec{H} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(\vec{s} \times \vec{E}) \quad (1.4.4)
 \end{aligned}$$

Din ecuațiile (1.4.3) și (1.4.4) rezultă că vectorii \vec{E} și \vec{H} sunt perpendiculari unul pe celălalt și, ținând cont și de proprietatea **1** rezultă ca vectorii \vec{E} , \vec{H} și \vec{s} formează un triedru drept (fig.2).

Fig.2

Observație:

Vectorul Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ se poate exprima în funcție numai de vectorul \vec{E} sau numai în funcție de vectorul \vec{H} :

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{E} \times (\vec{s} \times \vec{E}) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{E}^2 \vec{s} \quad (1.4.5)$$

și respectiv:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} (\vec{s} \times \vec{H}) \times \vec{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H^2 \vec{s} \quad (1.4.6)$$

3. Vibrațiile vectorilor \vec{E} și \vec{H} sunt în fază, adică valorile lor maxime și respectiv minime se produc în aceleași puncte din spațiu.

$$\sqrt{\varepsilon} |\vec{E}| = \sqrt{\mu} |\vec{H}| \quad (1.4.7)$$

4. Undele electromagnetice pot fi caracterizate prin intensitatea lor I ce reprezintă valoarea medie (temporală) a modulului vectorului Poynting \vec{S} . Fie o undă electromagnetică plană, progresivă de forma (1.3.4). Intensitatea undei se definește ca fiind:

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \langle \vec{E} \times \vec{H} \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_o^2 \langle \sin^2(\omega t - kz) \rangle = \frac{1}{2} E_o^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \quad (1.4.8)$$

unde s-a ținut cont de media temporală a funcției *sin*:

$$\langle \sin^2(\omega t - kz) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t - kz) dt = \frac{1}{2} \quad (1.4.9)$$

Dacă unda electromagnetică plană cade sub un unghi de incidență i pe o suprafață, atunci intensitatea undei devine:

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_o^2 \cos i \quad (1.4.10)$$

sau, scrisă cu ajutorul câmpului magnetic:

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_o^2 \cos i \quad (1.4.11)$$

5. Undele electromagnetice acoperă un domeniu larg de frecvențe respectiv de lungimi de undă (vezi tabelul 1). Domeniul vizibil (optica) conține numai acele unde electromagnetice (lumina) care impresionează ochiul și care au lungimile de undă, în vid, cuprinse între $\lambda(\text{roșu}) \simeq 7600 \text{ \AA}$ și $\lambda(\text{violet}) \simeq 3800 \text{ \AA}$.

Tabelul 1

1.5 Dispersia și absorbția undelor electromagnetice.

Fenomenul de dispersie constă în dependența indicelui de refracție al unui mediu ($n = \frac{c}{v}$) de pulsația ω sau de lungimea de undă λ a unei electromagnetice ce se propagă prin mediu. Această dependență a indicelui de refracție nu rezultă din teoria Maxwell, ci se deduce numai pe baza unor considerente legate de structura microscopică (atomică) a substanței.

Pentru radiația luminoasă fenomenul de dispersie a fost stabilit experimental

de către Newton care a obținut spectrul luminii albe cu ajutorul unei prisme (fig.3). Deducerea dependenței $n(\omega)$ sau $n(\lambda)$ a fost făcută de către Lorentz (teoria electronică a dispersiei), în anumite ipoteze care vor fi expuse mai jos.

Fig.3

Fie un mediu dielectric format din N atomi identici, neutri; fiecare atom posedă câte un electron de valență (optic) care poate efectua o mișcare oscilatorie în jurul restului atomic. Acești electroni determină legăturile de valență precum și spectrele optice ale atomilor. Pentru metale, electronii de valență participă la conducție.

Fie o undă electromagnetică monocromatică de pulsație ω caracterizată prin câmpul electric $\vec{E} = \vec{E}_o e^{i\omega t}$, care cade pe un dielectric și interacționează cu acesta, adică cu electronii optici. Forțele care acționează supra electronului optic de masă m , și care vor determina ecuația de mișcare a acestuia sunt:

- forța electrică $F_e = e\vec{E}$ (forța coulombiană)
- forța cvasielastice ce menține electronul în jurul atomului $\vec{F}_{cvasielas} = -k\vec{r}$, unde k reprezintă constanta elastică a mediului.
- forța de frânare $F_{fr} = -\rho \dot{\vec{r}}$, unde ρ este coeficientul de rezistență mecanică al mediului.

Ecuația de mișcare oscilatorie a electronului este o ecuație diferențială de ordinul doi, omogenă, cu termen liber (mișcarea este neamortizată fiind întreținută de câmpul electric aplicat - unda electromagnetică):

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} - \rho\dot{\vec{r}} + e\vec{E} \quad (1.5.1)$$

care se poate scrie sub forma:

$$\ddot{\vec{r}} + 2\delta\dot{\vec{r}} + \omega_o^2\vec{r} = \frac{e\vec{E}}{m} \quad (1.5.2)$$

unde $\delta = \frac{\rho}{2m}$ este coeficientul de amortizare ce caracterizează amortizarea mișcării electronului datorită rezistenței mecanice a mediului; $\omega_o = \frac{k}{m}$ este pulsația proprie a electronului. Vom alege soluția ecuației diferențiale (1.5.2) de forma:

$$\vec{r} = \vec{r}_o e^{i\omega t} \rightarrow \dot{\vec{r}} = i\omega\vec{r} \rightarrow \ddot{\vec{r}} = -\omega^2\vec{r} \quad (1.5.3)$$

Dacă se introduc relațiile (1.5.3) în ecuația diferențială (1.5.2) vom obține:

$$\begin{aligned} -\omega^2\vec{r} + 2\delta i\omega\vec{r} + \omega_o^2\vec{r} &= \frac{e\vec{E}}{m} \\ \rightarrow \frac{\vec{r}}{\vec{E}} &= \frac{\frac{e}{m}}{(\omega_o^2 - \omega^2) + i2\delta\omega} \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

În continuare vom ține cont că, datorită acțiunii câmpului electric extern (unda electromagnetică), mediul dielectric se polarizează și vom defini $\vec{p} = e\vec{r}$ **momentul dipolar** al sistemului atom-electron. Se definește de asemenea **polarizația electrică** totală datorită deplasării tuturor electronilor de valență, $\vec{P} = N\vec{p}$. Vectorul inducție electrică \vec{D} se poate exprima, pentru un mediu dielectric polarizat, prin relația: $\vec{D} = \epsilon_o\vec{E} + \vec{P}$. Dar, în același timp inducția electrică trebuie să respecte legea de material Maxwell $\vec{D} = \epsilon_o\epsilon_r\vec{E}$. Egalând cele două expresii ale inducției electrice și ținând cont de definiția polarizării \vec{P} precum și de faptul că $\epsilon_r = n^2$ pentru medii dielectrice, vom obține:

$$\frac{\vec{r}}{\vec{E}} = \frac{\epsilon_o(n^2 - 1)}{Ne} \quad (1.5.5)$$

Egalăm în continuare relațiile (1.5.4) și (1.5.5):

$$n^2 = 1 + \frac{\frac{Ne^2}{m\epsilon_o}}{(\omega_o^2 - \omega^2) + i2\delta\omega} \quad (1.5.6)$$

relație ce ne arată că indicele de refracție n^2 (deci și ϵ) este un număr complex și se poate exprima ca $\tilde{n} = n - i\chi$ unde n este indicele real de refracție al dielectricului, iar χ reprezintă coeficientul de absorbție al materialului. Pentru un sistem dielectric în stare gazoasă indicele de refracție complex \tilde{n} are următoarea formă:

$$\tilde{n} = n - i\chi = 1 + \frac{\frac{Ne^2}{2m\epsilon_o}}{(\omega_o^2 - \omega^2) + i2\delta\omega} \quad (1.5.7)$$

de unde, prin egalarea părților reală și imaginară corespunzătoare din membrul stâng și respectiv drept se vor obține dependențele $n(\omega)$ și $\chi(\omega)$:

$$n(\omega) = 1 + \frac{N}{2} \left(\frac{e^2}{m\varepsilon_o} \right) \frac{\omega_o^2 - \omega^2}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \quad (1.5.8)$$

$$\chi(\omega) = \frac{N}{2} \left(\frac{e^2}{m\varepsilon_o} \right) \frac{2\delta\omega}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \quad (1.5.9)$$

Dacă vom reprezenta grafic cele două dependențe $n(\omega)$ și respectiv $\chi(\omega)$ vom obține fig.4 pentru care vom face următoarele comentarii:

- porțiunile AB și CD din grafic reprezintă regimul de **dispersie normală** adică, pe măsură ce ω ia valori crescătoare și indicele de refracție ia valori crescătoare ($\frac{n}{\omega} > 0$)
- porțiunea BC din grafic reprezintă regimul de **dispersie anomală** adică, pentru valori crescătoare ale lui ω indicele de refracție scade ($\frac{n}{\omega} < 0$)
- $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ reprezintă lățimea liniei de absorbție proporțională cu

Fig.4

coeficientul de amortizare (sau de rezistență mecanică) al mediului

- dispersia anomală caracterizează numai benzile de absorbție și are loc în jurul frecvenței de absorbție ω_o .

Observație:

Vom defini vectorul de undă complex \tilde{k} prin relația:

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c} \tilde{n} = \frac{\omega}{c} n - i \frac{\omega}{c} \chi \quad (1.5.10)$$

Fie o undă electromagnetică plană progresivă ce se propagă în vid ($v = c$) și care pătrunde în dielectric pe o porțiune z . Atunci, expresia vectorului $\vec{E}(z)$ (în dielectric) la distanța z față de punctul de incidență va avea forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{i(\omega t - kz)} = \vec{E}_o e^{-\frac{\omega}{c}\chi z} e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c}n)} \\ \text{unde } \vec{E}_o(z) = \vec{E}_o|_{z=0} e^{-\frac{\omega}{c}\chi z} \quad (1.5.11)$$

Cunoscând expresia intensității câmpului electric se poate calcula intensitatea undei la distanța z de la punctul de incidență cu dielectricul:

$$I = I_o e^{-\frac{2\omega}{c}\chi z} = I_o e^{-\mu z} \quad (1.5.12)$$

Din această ultimă relație se observă cum intensitatea undei scade exponențial cu distanța z de pătrundere în materialul dielectric; absorbția se va caracteriza prin **coeficientul liniar de absorbție**:

$$\mu = \frac{2\omega}{c}\chi z \quad (1.5.13)$$

1.6 Reflexia și transmiterea undelor electromagnetice

1.6.1 Coeficienții Fresnel. Factorii Fresnel

Din punct de vedere cantitativ reflexia și transmisia undelor electromagnetice la suprafața de separare dintre două medii optice se caracterizează prin **coeficienții Fresnel** r_{\perp} și r_{\parallel} .

Fie două medii dielectrice omogene **1** și **2**, optic transparente, caracterizate prin indicii de refracție n_1 și respectiv n_2 , prin permitivitățile electrice ε_1 și respectiv ε_2 și prin permeabilitățile magnetice μ_1 și respectiv μ_2 . Vitezele de propagare ale undelor electromagnetice prin cele două medii vor fi $v_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}$ și $v_2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}$. De asemenea, dacă ținem cont că mediile sunt dielectrice indicii de refracție se pot exprima ca fiind $n_1 = c/v_1$ și respectiv $n_2 = c/v_2$. Unda care se propagă spre suprafața de separare se numește **undă incidentă**; unda care se întoarce din mediul din care a venit atunci când întâlnește suprafața de separare se numește **undă reflectată**, iar unda care trece în mediul al doilea se numește **undă refractată**.

Pentru undele electromagnetice, ca și pentru undele mecanice sunt valabile **legile reflexiei și refracției**:

- Direcțiile de propagare ale undelor reflectate și refractate, la suprafața de separare dintre două medii transparente se află în planul de incidență (planul ce conține unda incidentă și normala la suprafața de separare - vezi fig.5)

Fig.5

- pulsația unei refractate este egală cu pulsația unei reflectate și egală cu pulsația unei incidente: $\omega_2 = \omega_1 = \omega$
- unghiul de incidență (unghiul sub care cade incidenta față de normala la suprafață) este egal cu unghiul de reflexie
- fenomenul de refracție este caracterizat de legea Snell-Descartes $n_1 \sin i = n_2 \sin r$ care se mai poate exprima și cu ajutorul lungimilor de undă din cele două medii și respectiv cu ajutorul vitezelor de propagare prin cele două medii:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad (1.6.1)$$

unde n_{21} reprezintă **indicele de refracție relativ** al mediului **2** față de

mediul 1.

Pentru a calcula **coeficienții Fresnel** vom pleca de la **definiția** acestora:

$$\begin{aligned}
 r_{\parallel} &= \frac{E_{1\parallel}}{E_{\parallel}} & r_{\perp} &= \frac{E_{1\perp}}{E_{\perp}} \\
 t_{\parallel} &= \frac{E_{2\parallel}}{E_{\parallel}} & t_{\perp} &= \frac{E_{2\perp}}{E_{\perp}}
 \end{aligned}
 \tag{1.6.2}$$

unde E_{\parallel} , $E_{1\parallel}$ și $E_{2\parallel}$ reprezintă componentele amplitudinilor intensităților câmpului electric paralele cu planul de incidență pentru unda incidentă, reflectată și respectiv refractată; E_{\perp} , $E_{1\perp}$ și $E_{2\perp}$ reprezintă componentele amplitudinilor intensităților câmpului electric perpendiculare pe planul de incidență pentru unda incidentă, reflectată și refractată.

Fie o undă electromagnetică plană progresivă caracterizată prin amplitudinile câmpului electric și magnetic (\vec{E} , \vec{H}) ce cade sub un unghi de incidență i pe suprafața de separare dintre două medii dielectrice transparente, omogene și izotrope (fig.6).

Direcția de propagare a unei incidente este caracterizată de versorul \vec{s} . Unda reflectată se caracterizează prin amplitudinile vectoriale (\vec{E}_1 și \vec{H}_1) și se propagă pe direcția dată de versorul \vec{s}_1 ce face unghiul i' cu normala. Unda refractată se caracterizează prin amplitudinile vectoriale (\vec{E}_2 și \vec{H}_2) și se propagă pe direcția dată de versorul \vec{s}_2 ce face unghiul r cu normala la suprafață.

Forma vectorului electric pentru cele trei unde va fi:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{incident} &= \vec{E} e^{i\omega(t - \frac{\vec{s}\vec{r}}{v_1})} \\
 \vec{E}_{reflectat} &= \vec{E}_1 e^{i\omega(t - \frac{\vec{s}_1\vec{r}}{v_1})} \\
 \vec{E}_{refractat} &= \vec{E}_2 e^{i\omega(t - \frac{\vec{s}_2\vec{r}}{v_2})}
 \end{aligned}
 \tag{1.6.3}$$

Direcțiile de propagare ale celor trei unde sunt caracterizate de versorii:

$$\vec{s} : (\sin i, 0, \cos i) \qquad \vec{s}_1 : (\sin i, 0, -\cos i) \qquad \vec{s}_2 : (\sin r, 0, \cos r)$$

Vom considera în continuare două cazuri, și anume:

Fig.6

a. Unda incidentă are amplitudinea cuprinsă în planul de incidență, adică $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel}$ ($\vec{E} \subset$ în planul xOz)

b. Unda incidentă are amplitudinea perpendiculară pe planul de incidență, adică $\vec{E} = \vec{E}_{\perp}$ ($\vec{E} \subset$ în planul xOy)

Componentele amplitudinilor electrice, pe direcțiile x , y , și z , pentru cele două cazuri vor fi:

$$\vec{E}_{\parallel} : (E_x = E_{\parallel} \cos i \quad E_y = 0 \quad E_z = -E_{\parallel} \sin i)$$

$$\vec{E}_{1\parallel} : (E_{1x} = -E_{1\parallel} \cos i \quad E_{1y} = 0 \quad E_{1z} = -E_{1\parallel} \sin i)$$

$$\vec{E}_{2\parallel} : (E_{2x} = E_{2\parallel} \cos r \quad E_{2y} = 0 \quad E_{2z} = -E_{2\parallel} \sin r)$$

și respectiv:

$$\vec{E}_{\perp} : (E_x = 0 \quad E_y = E_{\perp} \quad E_z = 0)$$

$$\vec{E}_{1\perp} : (E_{1x} = 0 \quad E_{1y} = E_{1\perp} \quad E_{1z} = 0)$$

$$\vec{E}_{2\perp} : (E_{2x} = 0 \quad E_{2y} = E_{2\perp} \quad E_{2z} = 0)$$

Cu ajutorul formulei (1.4.4) se pot exprima și componentele amplitudinilor câmpului magnetic pentru cele trei unde în funcție de componentele perpendiculare și paralele ale câmpului electric:

$$\begin{aligned} H_x &= -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp} \cos i & H_y &= -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\parallel} & H_z &= \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp} \sin i \\ H_{1x} &= -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{1\perp} \cos i & H_{1y} &= -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{1\parallel} & H_{1z} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{1\perp} \sin i \\ H_{2x} &= -\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_{2\perp} \cos i & H_{2y} &= -\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_{2\parallel} & H_{2z} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_{2\perp} \sin i \end{aligned}$$

Dar, la suprafața de separare dintre două medii dielectrice componentele tangențiale ale vectorilor \vec{E} și \vec{H} nu se modifică, decât cele normale (**condiția de continuitate a câmpului electric și magnetic**). Deci vom putea scrie, cu ajutorul componentelor electrice și magnetice, și ținând cont de condiția de continuitate, următorul sistem de ecuații:

$$\begin{aligned} E_x + E_{1x} &= E_{2x} & E_y + E_{1y} &= E_{2y} \\ H_x + H_{1x} &= H_{2x} & H_y + H_{1y} &= H_{2y} \end{aligned}$$

de unde rezultă un sistem de patru ecuații din care se pot exprima amplitudinile electrice ale undelor reflectate și refractate în funcție de amplitudinea unei incidente, separat pentru componentele perpendiculare și respectiv paralele, relații ce reprezintă **formulele Fresnel**:

$$\begin{aligned} E_{1\parallel} &= E_{\parallel} \frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)} & E_{1\perp} &= -E_{\perp} \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} \\ E_{2\parallel} &= E_{\parallel} \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r) \cos(i-r)} & E_{2\perp} &= E_{\perp} \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r)} \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

Cu ajutorul acestor formule Fresnel se pot calcula acum **coeficienții Fresnel** definiți prin relațiile (1.6.2):

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &= \frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)} & r_{\perp} &= -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} \\ t_{\parallel} &= \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r) \cos(i-r)} & t_{\perp} &= \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r)} \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

Pentru incidență normală $0^\circ < i < 5^\circ$, $0^\circ < r < 5^\circ$, coeficienții Fresnel devin:

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &= \frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1} & t_{\parallel} &= \frac{2}{n_{21} + 1} \\ r_{\perp} &= -\frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1} & t_{\perp} &= \frac{2}{n_{21} + 1} \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

Pentru calcularea acestor ultime relații s-a ținut cont că legea Snell-Descartes (1.6.1), pentru incidență normală devine $\frac{\sin i}{\sin r} \approx \frac{i}{r} = n_{21}$, iar funcțiile trigonometrice ale unghiurilor de incidență respectiv de refracție se pot aproxima astfel: $\sin i \approx i$, $\sin r \approx r$, $\cos i \approx 1$, $\cos r \approx 1$, $tg i \approx i$, $tg r \approx r$.

Observații:

- Unda refractată este întotdeauna în fază cu unda incidentă
- Dacă $n_2 < n_1$, unda reflectată este în fază cu unda incidentă
- Dacă $n_2 > n_1$, faza undei reflectate se schimbă cu $\Delta\phi = \pi$ echivalentă cu o diferență de lungime de drum $\Delta l = \frac{\lambda}{2}$

Factorii Fresnel de reflexie R și respectiv de transmisie T se definesc astfel:

$$R = \frac{I_{reflectat}}{I_{incident}} \quad T = \frac{I_{refractat}}{I_{incident}} \quad (1.6.7)$$

unde $I_{incident}$, $I_{reflectat}$ și $I_{refractat}$ reprezintă intensitatea undei incidente, reflectate și respectiv refractate ce cad *normal* pe suprafața de separare dintre cele două medii. Dacă vom lua în considerare definiția intensității unei unde electromagnetice sub forma (1.4.10) precum și expresia vectorului intensitate electrică pentru cele trei unde (1.6.3), atunci factorii Fresnel se pot scrie sub forma:

$$R = \frac{E_1^2}{E^2} \quad T = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \frac{\cos r}{\cos i} \frac{E_2^2}{E^2} = \frac{n_2 \cos r}{n_1 \cos i} \frac{E_2^2}{E^2} \quad (1.6.8)$$

Se poate arăta simplu că:

$$R + T = 1 \quad (1.6.9)$$

ceea ce exprimă **legea conservării energiei** în procesul de reflexie și refracție:

$$I = I_1 + I_2 \quad (1.6.10)$$

adică, intensitatea unei incidente ce cade pe suprafața de separare dintre două medii dielectrice este egală cu suma intensităților undelor reflectate și refractate.

Dacă unda incidentă este liniar polarizată (vezi paragraful următor), astfel încât vectorul \vec{E} vibrează într-un plan orientat sub unghiul α față de planul de incidență, atunci avem:

$$E_{\parallel} = E \cos \alpha \quad E_{\perp} = E \sin \alpha \quad E^2 = E_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2 \quad (1.6.11)$$

iar intensitatea unei incidente se poate scrie astfel:

$$I = I_{\parallel} + I_{\perp} \quad (1.6.12)$$

unde

$$I_{\parallel} = I \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{\parallel}^2 \cos i \quad I_{\perp} = I \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{\perp}^2 \cos i \quad (1.6.13)$$

Analog se obțin expresiile pentru intensitatea I_1 a unei reflectate și respectiv I_2 a unei refractate:

$$I_{1\parallel} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{1\parallel}^2 \cos i \quad I_{1\perp} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{1\perp}^2 \cos i \quad (1.6.14)$$

$$I_{2\parallel} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_{2\parallel}^2 \cos i \quad I_{2\perp} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_{2\perp}^2 \cos i \quad (1.6.15)$$

Astfel, se ajunge la următoarele expresii pentru factorii Fresnel R și T :

$$R_{\parallel} = \frac{I_{1\parallel}}{I_{\parallel}} = \frac{tg^2(i-r)}{tg^2(i+r)} \quad R_{\perp} = \frac{I_{1\perp}}{I_{\perp}} = \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} \quad (1.6.16)$$

$$T_{2\parallel} = \frac{I_{2\parallel}}{I_{\parallel}} = \frac{\sin 2r \sin 2i}{\sin^2(i+r) \cos^2(i-r)} \quad T_{2\perp} = \frac{I_{2\perp}}{I_{\perp}} = \frac{\sin 2r \sin 2i}{\sin^2(i+r)} \quad (1.6.17)$$

Din aceste relații rezultă simplu:

$$R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1 \quad R_{\perp} + T_{\perp} = 1 \quad (1.6.18)$$

ceea ce înseamnă că, pe lângă egalitatea (1.6.10) mai avem îndeplinite următoarele două egalități:

$$I_{\parallel} = I_{1\parallel} + I_{2\parallel} \quad I_{\perp} = I_{1\perp} + I_{2\perp} \quad (1.6.19)$$

În cazul unei incidențe normale factorii Fresnel devin:

$$R_{\parallel} = R_{\perp} = \left(\frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1} \right)^2 \quad T_{\parallel} = T_{\perp} = \frac{4n_{21}}{(n_{21} + 1)^2} \quad (1.6.20)$$

1.6.2 Reflexia totală

În paragraful anterior s-a arătat că, la suprafața de separare dintre două medii dielectrice este satisfăcută legea refracției Snell-Descartes:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1.6.1)$$

Se observă că, pentru $n_1 > n_2$ (lumina trece dintr-un mediu mai dens optic într-altul mai puțin dens) unghiul de refracție r devine mai mare decât unghiul de incidență i . Pentru o valoare $i = i_{lim}$ numit **unghi de incidență limită**, unghiul de refracție devine $r = 90^\circ$ (fig.7) și, în acest caz este satisfăcută relația:

$$\frac{\sin i_{lim}}{\sin 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \sin i_{lim} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad (1.6.2)$$

Fig.7

Pentru unghiuri de incidență mai mari decât unghiul limită i_{lim} se produce fenomenul de **reflexie totală**, adică unda refractată nu mai trece în cel de-al doilea mediu și se întoarce în mediul din care a venit.

Reflexia totală are *aplicații* într-o serie de dispozitive simple, utilizate pentru schimbarea direcției fasciculelor de lumină cum ar fi *prisma cu reflexie totală* (fig.8) sau *fibrele optice* (fig.9).

Fig.8

Fibrele optice (ghiduri de undă în domeniul vizibil) sunt formate dintr-un miez de sticlă cu indicele de refracție n_1 înconjurat de o cămașă cu indicele de refracție $n_2 < n_1$. În ultimul timp au fost realizate fibre optice în care pierderile de energie nu depășesc amortizarea impulsurilor electrice care se propagă în conductori metalici.

1.7 Polarizarea undelor electromagnetice

1.7.1 Definiție și caracteristici

Undele electromagnetice sunt unde transversale, adică vectorii \vec{E} și \vec{H} vibrează pe direcții perpendiculare între ele și perpendiculare pe direcția de propagare a undei (fig.2).

Starea de polarizare a undelor electromagnetice este dată de modul de orientare a vectorului \vec{E} în spațiu și timp.

Planul în care oscilează vectorul electric \vec{E} se numește **plan de vibrație**, iar planul în care oscilează vectorul magnetic \vec{H} se numește **plan de polarizare**. O undă electromagnetică este **total polarizată** dacă vectorul electric \vec{E} are aceeași direcție în orice punct din spațiu și la orice moment de timp. Lumina alcătuită din unde electromagnetice în care vectorii \vec{E} și \vec{H} oscilează uniform în toate direcțiile posibile din spațiu, se numește **lumină nepolarizată** sau **lumină naturală**. Sursele de lumină obișnuite emit unde electromagnetice care în general sunt **parțial polarizate**.

Pentru a deduce traiectoria descrisă de vârful vectorului \vec{E} și implicit pentru a face o clasificare a modului de polarizare al undelor electromagnetice, vom considera în continuare o undă electromagnetică plană ce se propagă pe direcția axei Oz (fig. 10)

Fig.9

Din caracterul transversal al unei electromagnetice rezultă că numai componentele pe axele Ox și Oy ale vectorilor \vec{E} și \vec{H} sunt diferite de zero. Componentele electrice vor fi de forma:

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y = E_{ox} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x + E_{oy} e^{i(\omega t - kz + \varphi)} \vec{e}_y \quad (1.7.1)$$

$$E_x = E_{ox} \cos(\omega t - kz) \quad E_y = E_{oy} \cos(\omega t - kz + \varphi) \quad E_z = 0 \quad (1.7.2)$$

Prin eliminarea timpului t din ecuațiile (1.7.2) rezultă **ecuația traiectoriei** descrisă de vectorul electric \vec{E} proiectată în planul (xOy):

$$\frac{E_x^2}{E_{ox}^2} + \frac{E_y^2}{E_{oy}^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_{ox} E_{oy}} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (1.7.3)$$

adică **ecuația unei elipse**.

Observație:

Vârful vectorului electric \vec{E} descrie o **elice** în spațiu iar proiecția acesteia într-un plan perpendicular (xOy) pe direcția de propagare a unei este o elipsă (fig.11).

În funcție de diferența de fază φ dintre componentele E_x și E_y elipsa are diferite forme (fig.12), iar în funcție de sensul ei de parcurgere (sens dat de orientarea vectorului \vec{E}) elipsa poate fi **elipsă polarizată dreapta** [$\varphi \in$

Fig.10

$(\pi, 2\pi]$ și respectiv **elipsă polarizată stânga** [$\varphi \in (0, \pi]$].

Discuție

- Dacă $\varphi = \frac{\pi}{2}$ unda electromagnetică este polarizată **circular stânga**
- Dacă $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ unda este polarizată **circular dreapta**

- Dacă $\varphi = 2m\pi, m = 0, 1, 2, \dots \rightarrow \cos \varphi = +1$ atunci unda este **polarizată liniar dreapta** și are ecuația $E_x = \frac{E_{ox}}{E_{oy}} E_y$
- Dacă $\varphi = (m + 1)\pi, m = 0, 1, 2, \dots \rightarrow \cos \varphi = -1$ atunci unda este **polarizată liniar stânga** și are ecuația $E_x = -\frac{E_{ox}}{E_{oy}} E_y$

Pentru o undă electromagnetică polarizată există, într-un plan perpendicular pe direcția ei de propagare (plan de vibrație), două direcții privilegiate perpendiculare între ele după care vectorul electric \vec{E} ia valoare maximă și respectiv minimă. Corespunzător și intensitatea undei va fi maximă, I_{max} , și respectiv minimă, I_{min} . Se definește **gradul P de polarizare** al undei electromagnetice:

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (1.7.4)$$

Fig.11

Fig.12

Discuție

- Dacă $P = 0$ lumina nu este polarizată (lumina naturală)
- Dacă $0 < P < 1$ lumina este parțial polarizată
- Dacă $P = 1$ lumina este total polarizată

1.7.2 Procedee de polarizare

a. Polarizarea undelor electromagnetice prin reflexie și refracție

Din relațiile (1.6.16) rezultă că pentru $i + r = \pi/2$ avem:

$$R_{\parallel} = 0 \rightarrow E_{1\parallel} = 0 \quad (1.7.5)$$

$$R_{\perp} \neq 0 \rightarrow E_{1\perp} \neq 0 \quad (1.7.6)$$

Deci, există un unghi de incidență numit **unghi Brewster** notat i_B , pentru care undele electromagnetice reflectate sunt total polarizate (conțin numai componenta $E_{1\perp}$ cealaltă fiind nulă):

$$i_B + r = \frac{\pi}{2} \rightarrow \operatorname{tg} i_B = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad (1.7.7)$$

De exemplu, pentru incidența din aer pe sticlă avem $n_{21} = 1.54$ iar $i_B = 57^\circ$, atunci:

$$E_{\parallel} = E_{\perp} \rightarrow I_{\parallel} = I_{\perp} = I/2 \rightarrow P = 0 \quad (1.7.8)$$

și *se reflectă* numai acele unde pentru care vectorul electric \vec{E} oscilează perpendicular pe planul de incidență, adică unde total polarizate (fig.13). În acest caz se poate verifica simplu că:

$$R_{\parallel} = 0 \quad T_{\parallel} = 0 \quad (1.7.9)$$

Prin *refracția* undelor incidente sub unghiul Brewster se obțin unde electromagnetice parțial polarizate. Din relațiile (1.6.17) rezultă:

$$\frac{I_{2\perp}}{I_{2\parallel}} = \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} = \cos^2(i - r) \neq 0 \quad (1.7.10)$$

Dacă $i \rightarrow 0$, acest raport este egal cu 1 și scade pe măsură ce crește unghiul de incidență i . Aceasta înseamnă că în lumina refractată predomină vibrațiile vectorului electric paralele cu planul de incidență, $E_{2\parallel}$ (fig.13).

Fie o placă cu fețe plan paralele (fig.14) pe care cade un fascicul de lumină naturală SO. Radiația emergentă O'R este, conform celor arătate mai sus, parțial polarizată având raportul intensităților:

$$\frac{I_{2\perp}}{I_{2\parallel}} = \cos^4(i - r) \quad (1.7.11)$$

Fig.13

Dacă unghiul de incidență pe placă este egal cu unghiul Brewster, atunci:

$$\frac{I_{2\perp}}{I_{2\parallel}} = \left(\frac{2n_{21}}{1 + n_{21}^2} \right)^4 \quad (1.7.12)$$

Dacă se vor utiliza un număr m de plăci se va obține următorul raport:

$$\frac{I_{2\perp}^{(m)}}{I_{2\parallel}^{(m)}} = \left(\frac{2n_{21}}{1 + n_{21}^2} \right)^{4m} \quad (1.7.13)$$

În calcularea gradului de polarizare al luminii refractate va trebui să se țină cont și de scăderea intensității luminii datorită fenomenului de reflexie pe fiecare față a lamei.

b. *Fenomrenul de birefrință. Propagarea undelor electromagnetice în medii anizotrope*

Fenomenul de **birefrință** sau dublă refracție a fost descoperit în 1669 de către profesorul danez Erasmus Bartholin pentru spatul de Islanda ($CaCO_3$) și constă în producerea a două raze refractate pentru o singură rază incidentă. Fenomenul este caracteristic cristalelor anizotrope și a fost studiat ulterior de către fizicianul danez Christian Huygens.

Dacă pe un cristal de spat de Islanda cade un fascicul îngust de lumină (fig.15) în cristal apar două fascicule care se numesc **rază ordinară (o)** și

Fig.14

respectiv **rază extraordinară (e)**. Pentru raza extraordinară indicele de refracție este n_e și depinde de direcția de propagare a razei în cristal. Pentru raza ordinară indicele de refracție este n_o și nu depinde de unghiul de incidență.

Cristalele pentru care $n_e \leq n_o$ se numesc **cristale negative**, iar cele pentru care $n_e \geq n_o$ (cuarțul) se numesc **cristale pozitive**. Toate cristalele posedă cel puțin o direcție pentru care $n_e = n_o$ pentru care nu se observă fenomenul de birefrință dacă lumina cade pe cristal paralel cu această direcție. O astfel de direcție reprezintă **axa optică** a cristalului, iar un plan oarecare ce conține axa optică se numește **secțiune principală**. Există cristale care posedă o singură axă optică (spat de Islanda, cuarțul, etc) și acestea se numesc **cristale uniaxe**, și există cristale ce posedă două axe optice și se numesc **cristale biaxe**.

S-a constatat că razele ordinară și extraordinară sunt polarizate liniar în plane perpendiculare între ele. Planul de vibrației al razei extraordinare coincide cu planul secțiunii principale, iar planul de vibrației al razei ordinare este perpendicular pe planul secțiunii principale (plan format de raza incidentă S și direcția axei optice OO').

Metodele de obținere a luminii liniar polarizate prin birefrință urmăresc fie să mărească divergența celor două raze polarizate, fie să suprimă una din aceste două raze. Dispozitivele cele mai răspândite sunt prismele din spat de Islanda cunoscute sub numele de **nicoli**. Dacă pe fața AB a unui nicol cade un fascicul de lumină naturală (fig.16), acesta se despică într-o rază ordinară

Fig.15

și una extraordinară. Raza ordinară este total reflectată de stratul de balsam de Canada (BD) cu ajutorul căruia s-au lipit cele două jumătăți ale prisme.

Fig.16

c. Polarizarea eliptică prin birefrință

Dacă lumina se propagă perpendicular pe axa optică a cristalului uniax, diferența indicilor de refracție ($n_o - n_e$) are valoarea maximă. Undele electromagnetice polarizate în plane perpendiculare se vor propaga pe aceeași

direcție cu vitezele $v_o = c/n_o$ și respectiv $v_e = c/n_e$ și vor ieși din cristalul de grosime d , cu diferența de fază:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d \quad (1.7.14)$$

Pentru obținerea undelor electromagnetice polarizate eliptic se realizează dispozitivul indicat în (fig. 17). Lumina naturală trece prin prisma nicol N și devine liniar polarizată. Placa P este astfel orientată, încât fasciculul de lumină liniar polarizată cade perpendicular pe axa optică OO_1 . Vom considera că vectorul electric \vec{E} al undei ce iese din nicol, face unghiul α cu axa optică a plăcii. Forma elipsei rezultate depinde de unghiul α precum și de diferența de fază φ .

Fig.17

Discuție:

- Dacă $\varphi = \frac{\pi}{2}$ va rezulta că $(n_o - n_e)d = \frac{\lambda}{4}$, adică diferența de drum optic între raza ordinară și extraordinară este egală cu un sfert de lungime de undă (**lamă sfert de undă**) și se va obține o elipsă cu axele principale OO_1 și AA_1 .
- Dacă $\varphi = \pi$ rezultă că $(n_o - n_e)d = \frac{\lambda}{2}$. În acest caz avem o **lamă jumătate de undă**
- Dacă $\varphi = 2\pi$ rezultă $(n_o - n_e)d = \lambda$ și în acest caz avem **placa undă** care

admite trecerea luminii liniar polarizate fără a schimba direcția de vibrație

d. *Birefrința provocată. Efectul electrooptic pătratic (Kerr) și efectul magneto optic pătratic*

Pentru cristalele care posedă un centru de simetrie s-a stabilit efectul electrooptic pătratic, adică anizotropia optică este dată de relația:

$$n_e - n_o = bE^2 \quad (1.7.15)$$

unde b este o constantă de proporționalitate. Dacă proba se află între plăcile unui condensator, atunci între raza ordinară și raza extraordinară se realizează o diferență de fază:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d = \frac{2\pi}{\lambda}bdE^2 = 2\pi BdE^2 \quad (1.7.16)$$

unde $B = b/\lambda$ se numește coeficientul Kerr, iar d reprezintă grosimea probei. Cotton și Mouton au descoperit că, un câmp magnetic transversal provoacă birefrința unui mediu izotrop. Sub acțiunea câmpului magnetic extern substanța capătă proprietățile unui cristal uniax, cu axa optică pe direcția liniilor de câmp magnetic iar:

$$n_e - n_o = C\lambda H^2 \quad (1.7.17)$$

unde C este o constantă dependentă de proprietățile mediului, iar H este intensitatea câmpului magnetic extern.

e. *Polarizarea rotatorie*

Fenomenul de **polarizare rotatorie** constă în rotirea planului de polarizare a luminii de către anumite substanțe numite **medii optic active**. Acest fenomen a fost descoperit de către fizicianul francez Dominique Arago în anul 1811 care a observat rotirea planului de polarizare a luminii de către o placă de cuarț.

Există medii optic active care rotesc planul de polarizare spre dreapta observatorului și acestea se numesc **dextrogire**, și există substanțe optic active ce rotesc planul de polarizare spre stânga și se numesc **levogire**.

Unghiul de rotație al planului de polarizare este proporțional cu grosimea d a probei:

$$\alpha = [\alpha]d \quad (1.7.18)$$

unde $[\alpha]$ reprezintă **puterea rotatorie specifică** și depinde de lungimea de undă a undelor electromagnetice monocromatice (**dispersie rotatorie**) precum și de natura mediului.

Pentru soluțiile unor substanțe optice active (zahărul) ce prezintă activitate optică moleculară, relația (1.7.18) capătă forma:

$$\alpha = [\alpha]Cd \quad (1.7.19)$$

unde C este concentrația soluției, adică masa de substanță optic activă din unitatea de volum. Pe baza relației (1.7.19) se poate determina concentrația unei soluții, iar această metodă polarimetrică are avantajul legat de rapiditatea și precizia cu care se pot face măsurătorile.

În 1846 Faraday descoperă că un mediu izotrop devine optic activ dacă este plasat într-un câmp magnetic intens, cu liniile câmp paralele cu direcția de propagare a luminii (fig. 18):

Fig.18

Acest fenomen este cunoscut sub numele de **efectul Faraday** și a fost prima dovadă experimentală a legăturii între lumină și câmpul electromagnetic. Unghiul de rotație al planului de polarizare este dat de relația:

$$\alpha = VdH \quad (1.7.20)$$

unde H este intensitatea câmpului magnetic, d este grosimea stratului străbătut de lumină iar V este o constantă ce depinde de natura substanței (constantă Verdet).

1.8 Interferența undelor electromagnetice

1.8.1 Definiție și caracteristici

Fenomenul de interferență se obține atunci când se compun unde care se suprapun într-un domeniu din spațiu producând maxime și minime de in-

tensitate. Undele care prin compunerea lor produc fenomenul de interferență se numesc **coerente**.

Fie două surse de lumină monocromatică S_1 și S_2 , și fie punctul P un punct de interferență (fig.19). Cele două unde monocromatice sunt caracterizate de vectorii intensitate electrică \vec{E}_1 și respectiv \vec{E}_2 și au expresia:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{o1} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1 \right) \quad (1.8.1)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{o2} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2 - \varphi \right)$$

Intensitatea câmpului electric rezultat în punctul P va fi:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (1.8.2)$$

Fig.19

Orice receptor percepe numai intensitatea medie a unei pe un interval de timp τ , specific receptorului respectiv. Dacă ridică la pătrat relația (1.8.2) și o mediem pe intervalul τ , vom obține o relație între intensitățile undelor electromagnetice ce interferă:

$$\vec{E}^2 = \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1\vec{E}_2$$

$$\langle \vec{E}^2 \rangle = \langle \vec{E}_1^2 \rangle + \langle \vec{E}_2^2 \rangle + 2 \langle \vec{E}_1\vec{E}_2 \rangle \quad (1.8.3)$$

Ținând cont de definiția intensității undelor electromagnetice (1.4.8) precum și de medierea temporală a funcției \cos^2 relația (1.8.3) devine:

$$\vec{E}_o^2 = \vec{E}_{o1}^2 + \vec{E}_{o2}^2 + 2\vec{E}_{o1}\vec{E}_{o2} \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) + \varphi \right]$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) + \varphi \right] \rangle \quad (1.8.4)$$

Observații:

- Dacă defazajul φ dintre cele două unde monocromatice este o funcție aleatoare de timp, atunci media temporală din relația (1.8.4) va fi nulă:

$$\langle \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) + \varphi \right] \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) + \varphi \right] dt = 0 \quad (1.8.5)$$

În acest caz termenul al treilea din relația (1.8.4) devine zero iar intensitatea totală în punctul P va fi $I = I_1 + I_2$, adică undele sunt necoerente și prin suprapunerea lor nu se produce interferența.

- Dacă diferența de fază φ este constantă în timp, cele două surse emit unde coerente (sunt corelate în fază), iar prin suprapunerea lor se produce fenomenul de interferență:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) + \varphi \right] \quad (1.8.6)$$

Vom considera în continuare că diferența de fază este nulă $\varphi = 0$ ceea ce nu afectează tabloul franjelor de interferență, ci numai deplasarea lor globală.

Discuție:

- Dacă

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = 1 \rightarrow r_2 - r_1 = m\lambda = 2m\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.8.7)$$

intensitatea undelor în punctul P este maximă:

$$I = I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 \quad (1.8.8)$$

- Dacă

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = -1 \rightarrow r_2 - r_1 = (2m - 1)\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.8.9)$$

intensitatea unei rezultante este minimă:

$$I = I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2 \quad (1.8.10)$$

În condițiile în care undele electromagnetice se propagă într-un mediu cu indicele de refracție $n > 1$, diferența de drum $r_2 - r_1$ trebuie înlocuită cu diferența de drum optic:

$$\Delta l = n(r_2 - r_1) \quad \Delta l = \int_{r_1}^{r_2} n \, dr \quad (1.8.11)$$

Locul geometric al punctelor din spațiu în care intensitatea unei rezultante este maximă sau minimă, reprezintă **franje de interferență** care sunt luminoase respectiv întunecoase. În general, locul geometric al franjelor de interferență este dat de relația:

$$r_2 - r_1 = \text{const.} \quad (1.8.12)$$

ceea ce reprezintă ecuația unor hiperboloizi cu două pânze și cu focarele în sursele de unde punctiforme S_1 și S_2 .

Pentru cazul în care $I_1 = I_2 = I_o$ vom obține $I_{max} = 4I_o$ și $I_{min} = 0$ (fig.20).

Fig.20

În general însă, $I_1 \neq I_2$ iar figura de interferență este ceva mai complicată (fig.21).

- Să ne oprim asupra **condițiilor de coerență** a celor două surse. Emisia luminii este realizată de către atomii care trec din stările excitate în starea

Fig.21

fundamentală. Durata emisiei unei unde este de aproximativ $\Delta t = 10^{-9}$ s și este mult mai mică decât intervalul dintre două procese elementare de emisie. Deci, emisia radiațiilor luminoase va avea loc sub forma unor trenuri de undă, iar fiecare fascicul reprezintă o succesiune de asemenea trenuri de undă. Deoarece procesul de emisie a trenurilor de undă este un proces aleatoriu, interferența poate avea loc numai prin suprapunerea totală sau parțială a undelor ce se formează din același pachet de unde. Asta înseamnă că sursele S_1 și S_2 trebuie să provină de la o singură sursă S (fig. 22).

Fig.22

Deci, se poate obține fenomenul de interferență numai dacă diferența de drum

optic este mai mică decât lungimea unui tren de undă, adică:

$$\Delta l = L_c = c \Delta t = \frac{c}{\Delta \nu} = 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-9} = 0.3 \text{ m} \quad (1.8.13)$$

unde L_c este lungimea de interferență sau **lungimea de coerență**.

O altă condiție importantă pentru obținerea fenomenului de interferență este legată de dimensiunea sursei S (fig.23). Se demonstrează că sursa S poate fi considerată "punctiformă" dacă este satisfăcută **condiția de coerență spațială**:

$$\Delta l = BC = d \sin \alpha \leq \frac{\lambda}{4} \quad (1.8.14)$$

Fig.23

1.8.2 Dispozitive de interferență

1. Dispozitivul Young se bazează pe divizarea frontului de undă ce provine de la o sursă coerentă de lumină S (fig.24):

Potrivit principiului Huygens, cele două fante practicate în paravanul P devin sursele secundare de lumină S_1 și respectiv S_2 . Aceste surse se obțin prin divizarea frontului de undă care pleacă din sursa S , deci și ele vor fi coerente. Dacă $d \ll D$, diferența de drum dintre razele S_2P și S_1P este:

$$\Delta l = S_2A = d \sin \alpha \quad (1.8.15)$$

Fig.24

Pentru unghiuri α foarte mici, putem considera aproximația:

$$\sin \alpha = tg \alpha = OP/D = x/D \quad (1.8.16)$$

de unde

$$\Delta l = \frac{xd}{D} \rightarrow x = \frac{D}{d} \Delta l \quad (1.8.17)$$

Conform celor discutate în paragraful anterior rezultă că vom obține franje de intensitate maximă (franje luminoase) pentru

$$x_m = \frac{D}{d} m \lambda = m \frac{D \lambda}{d}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.8.18)$$

unde m reprezintă ordinul maximului de interferență. Dacă:

$$x_m = (2m + 1) \frac{D \lambda}{d} \quad (1.8.19)$$

atunci se obțin franjele de intensitate minimă (franjele întunecoase).

Distanța dintre două maxime sau minime consecutive se numește **interfranjă** și se notează cu i :

$$i = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda D}{d} \quad (1.8.20)$$

Franjele de interferență sunt, în principiu, hiperbole, dar pentru $D \gg d$ tabloul de interferență este format aproximativ din linii paralele și echidistante.

2a. Lama cu fețe plan paralele este un dispozitiv de interferență de forma unei lame de grosime d (fig.25) cu indice de refracție n_2 și cu suprafețele plan paralele. Figura de interferență se poate obține fie prin fenomenul de reflexie fie prin refracție.

Fig.25

Vom considera un fascicul de lumină ce provine de la sursa S și care cade pe suprafața unei lame cu fețe plan paralele, paralel cu planul de incidență. Deoarece razele de lumină AE și CF sunt paralele, franjele de interferență se formează la infinit, dar pot fi observate și în planul focal al unei lentile convergente L . Pentru $n_2 > n_1$ (mediul "2" este mai dens optic decât mediul "1") diferența de drum optic dintre cele două raze care interferă prin reflexie este:

$$\Delta l = n_2(AB + BC) - (n_1 \cdot AD + \frac{\lambda}{2}) \quad (1.8.21)$$

unde:

$$AB = BC = \frac{d}{\cos r}, \quad AD = AC \sin i = 2d \tan r \sin i, \quad n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

$$\Delta l = n_2 \frac{2d}{\cos r} - \frac{2n_1 d \sin i \sin r}{\cos r} - \frac{\lambda}{2} = 2n_2 d \cos r - \lambda/2 \quad (1.8.22)$$

În planul focal al lentilei L se vor obține franje luminoase dacă:

$$2n_2 \cos r - \lambda/2 = 2m\lambda/2, \quad m = 0, 1, 2, 3... \quad (1.8.23)$$

și respectiv franje întunecoase dacă:

$$2n_2 \cos r - \lambda/2 = (2m + 1)\lambda/2, \quad m = 0, 1, 2, 3... \quad (1.8.24)$$

Tabloul de interferență este o familie de cercuri (maxime și minime succesive) numite **inelele lui Haidinger**.

Interferența cu ajutorul lamelor cu fețe plan paralele se poate observa și în lumina transmisă (fig.26):

Fig.26

Diferența de drum optic se poate exprima, în acest caz, prin relația:

$$\Delta l = n_2(BC + CD) - n_1BE = 2n_2d \cos r \quad (1.8.25)$$

Pentru obținerea franjelor de maximă intensitate se impune condiția:

$$2n_2d \cos r = 2m\lambda/2 \quad (1.8.26)$$

iar pentru obținerea franjelor de minimă intensitate este satisfăcută condiția:

$$2n_2d \cos r = (2m + 1)\lambda/2 \quad (1.8.27)$$

2b. Pana optică este formată din două plane transparente ce formează un unghi α între ele (fig.27):

Planul de focalizare a franjelor se află în interiorul penei, practic pe suprafața acesteia, deci franjele sunt localizate pe lamă. Pentru unghiuri α suficient de

Fig.27

mici, putem considera $\cos r = 1$, iar condițiile de realizare a două maxime succesive sunt:

$$2n_2d_m - \lambda/2 = 2m\lambda/2, \quad 2n_2d_{m+1} - \lambda/2 = 2(m+1)\lambda/2 \quad (1.8.28)$$

de unde rezultă:

$$d_{m+1} - d_m = \frac{\lambda}{2n_2} = i \sin \alpha \approx i\alpha \quad (1.8.29)$$

Astfel, expresia interfranței pentru pana optică este:

$$i = \frac{\lambda}{2\alpha n_2} \quad (1.8.30)$$

2c. Lama de grosime variabilă este formată din stratul de aer dintre suprafața convexă a unei lentile plan-convexe și suprafața plană a unei lame plan paralele de sticlă (fig.28). Simetria sferică a lamei de aer conduce la un tablou de interferență format dintr-o familie de cercuri concentrice numite **inelele lui Newton**. Prin reflexie, inelele lui Newton au în centru un minim de interferență.

Dacă $n_2 > n_1$, diferența de drum optic între raza reflectată în punctul B și cea reflectată în punctul D este:

$$\Delta l = 2n_1d_m + \lambda/2 \quad (1.8.31)$$

Fig.28

Din triunghiul ABC se obține:

$$R^2 = (R - d_m)^2 + r_m^2 \rightarrow d_m(2R - d_m) = r_m^2 \quad (1.8.32)$$

Deoarece $d_m \ll R$, putem scrie:

$$d_m = \frac{r_m^2}{2R} \quad (1.8.33)$$

iar diferența de drum optic devine:

$$\Delta l = 2n_1 \frac{r_m^2}{2R} + \frac{\lambda}{2} \quad (1.8.34)$$

Condițiile de maxim și minim ale intensității luminii reflectate se pot scrie printr-o singură formulă:

$$n_1 \frac{r_m^2}{R} + \frac{\lambda}{2} = m \frac{\lambda}{2} \quad (1.8.35)$$

Pentru valori pare ale lui m avem franje de maximă intensitate, iar pentru valori impare ale lui m avem minime de intensitate. Din ultima formulă rezultă raza inelelor Newton:

$$r_m = \sqrt{\frac{R\lambda}{2n_1}(m - 1)} \quad (1.8.36)$$

3. Interferometrul Michelson a fost construit de către fizicianul american Albert Abraham Michelson cu scopul de a pune în evidență mișcarea absolută a Pamântului în raport cu eterul universal, prin măsurarea vitezei luminii în raport cu un corp. Aranjamentul experimental este prezentat în fig.29. Fascicolul de lumină provenit de la sursa S este divizat în două cu ajutorul plăcii semitransparente P_1 , argintată pe fața superioară. Pentru a compensa drumul optic suplimentar parcurs de raza 1, prin placa P_1 , în drumul razei 2 s-a introdus o placă transparentă P_2 , identică cu P_1 , exceptând argintarea. După reflexiile pe oglinzile O_1 și O_2 , cele două raze de lumină ajung la lentila L , prin care se poate observa tabloul franjelor de interferență.

Fig.29

Pentru a calcula intervalele de timp t_1 și respectiv t_2 în care razele de lumină parcurg distanțele P_1O_1 și respectiv P_2O_2 , dus-întors, vom face un calcul analog cu cel al bărcilor 1 și 2 care ar pleca simultan din punctul A (fig.30). Dacă bărcile au viteza c în raport cu apa râului, iar viteza apei față de mal este v , atunci timpul t_1 în care barca 1 parcurge drumul AC și CA este:

$$t_1 = \frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v} = \frac{2l}{c^2-v^2} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1-v^2/c^2} \cong \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (1.8.37)$$

iar pentru timpul t_2 , în care barca 2 se deplasează din A în B și înapoi în A , este:

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cong \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (1.8.38)$$

Deci, dacă bărcile pleacă simultan din A , ele vor ajunge înapoi, din nou în punctul A , cu o întârziere:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{l}{c} \beta^2 \quad (1.8.39)$$

unde $\beta = v/c$.

Fig.30

Experiența Michelson-Morley a fost concepută pe baza următoarelor raționamente: să presupunem că brațul P_1O_1 al interferometrului coincide cu direcția de deplasare a Pământului în raport cu eterul universal. Deci, timpul în care raza 1 parcurge distanța P_1O_1 dus-întors este dat de formula (1.8.39) în care c este viteza luminii față de eter, iar v este viteza Pământului față de eter.

Deoarece nu se știa care este viteza de mișcare a Pământului față de eter, Michelson și Morley au montat interferometrul pe o placă de marmură care plutea în mercur, astfel încât putea fi rotită în jurul axei sale. Deci, prin rotirea plăcii cu 90° ar trebui să se constate o diferență de timp:

$$\Delta\tau = 2\Delta t = \frac{2l}{c\beta^2} \quad (1.8.40)$$

corespunzătoare unei deplasări a tabloului de interferență cu un număr ΔN de franje, unde

$$\Delta N = \frac{c\Delta t}{\lambda_o} = 2\frac{l}{\lambda_o}\beta^2 \quad (1.8.41)$$

Michelson și Morley au utilizat un ansamblu de oglinzi care conduceau la o distanță efectivă $l = 11$ m, iar lumina monocromatică avea o lungime de undă $\lambda_o = 0.59 \cdot 10^{-6}$ m, ceea ce însemna:

$$\Delta N = 0.37 \cong 0.4 \text{ interfranje} \quad (1.8.42)$$

S-a considerat că viteza Pământului în raport cu eterul este $v = 30 \text{ km/s}$. Instalația experimentală realizată de Michelson și Morley permitea detectarea unei deplasări a tabloului de interferență chiar pentru $\Delta N = 0.01$ interfranje. Deși experiența s-a efectuat în diferite momente din zi și noapte, pentru diferite poziții ale Pământului în decursul anului, nu s-a observat nici o deplasare a franjelor de interferență. **Rezultatul negativ** al experienței Michelson-Morley a condus la concluzia inexistenței eterului universal și la fundamentarea postulatelor teoriei relativității.

Menționăm că interferometrul Michelson a fost utilizat pentru etalonarea metrului, cu ajutorul radiației portocalii a izotopului Krypton-86.

4. Interferometrul Fabry-Pérot este un interferometru cu fascicule multiple și este constituit din două plăci de sticlă sau cuarț P_1 și P_2 (fig.31) cu fețele paralele și slab argintate. Distanța d dintre plăci poate fi variată în mod controlat.

Diferența de drum optic între două fascicule consecutive este:

$$\Delta l = 2d \cos r \quad (1.8.43)$$

iar condiția de maxime principale este dată de relația:

$$2d \cos r = m\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.8.44)$$

Dacă unghiul r este constant, în planul focal al lentilei L , pe ecranul E , se formează o curbă de interferență (un cerc). În cazul unei surse largi de lumină, curbele de interferență vor fi cercuri concentrice (inele).

Prin derivarea relației (1.8.44) se obține:

$$-2d \sin r \Delta r = m\Delta\lambda \rightarrow \frac{\Delta r}{\Delta\lambda} = -\frac{m}{2d \sin r} \quad (1.8.45)$$

Fig.31

mărime ce reprezintă **dispersia unghiulară** a interferometrului. Lărgimea unghiulară Δr corespunzătoare la două maxime succesive de interferență rezultă din relația (1.8.44):

$$-2d \sin r \Delta r = \lambda \Delta m, \quad \Delta m = 1 \quad \Delta r = \frac{\lambda}{2d \cos r} \quad (1.8.46)$$

Utilizând relațiile (1.8.45) și (1.8.46) rezultă:

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda^2}{2d \cos r} \quad (1.8.47)$$

care, pentru o incidență normală ($i = 0, r = 0$) devine:

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda^2}{2d} \quad (1.8.48)$$

Această ultimă expresie reprezintă **constanta interferometrului** ce dă domeniul de dispersie al acestuia. Pentru $d = 0.5 \text{ cm}$ și $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$, rezultă $\Delta \lambda = 0.25 \text{ \AA}$. Deoarece domeniul de dispersie al interferometrului Fabry-Perot este de ordinul de mărime al lungimii liniilor spectrale acesta poate fi utilizat ca analizor al formei liniilor spectrale.

1.8.3 Aplicații ale fenomenului de interferență

1. Refractometrie interferențială

Cu ajutorul interferometrelor cu două fascicule se pot determina variații foarte mici ale indicelui de refracție pentru corpurile transparente (gaze, lichide, solide) în funcție de diferiți factori externi ca temperatura, presiunea etc. Dacă avem de determinat indicele de refracție n pentru o soluție de exemplu, se vor folosi două cuve identice, de aceeași lungime d . Una va conține soluția necunoscută de indice n iar cealaltă va conține o soluție de referință cu indice de refracție cunoscut, n_o . Cele două cuve se interpun în drumul a două fascicule ce urmează să interfere. Prezența cuvelor va introduce o diferență de drum optic:

$$\Delta l = (n - n_o)d \quad (1.8.49)$$

căreia îi corespunde o deplasare a franjelor cu:

$$x = \frac{\Delta l}{\lambda} = (n - n_o)\frac{d}{\lambda} \rightarrow n = n_o + x\frac{\lambda}{d} \quad (1.8.50)$$

2. Măsurarea unghiurilor mici dintre suprafețele a două corpuri transparente

Conform rezultatelor obținute la pana optică unghiul α dintre două suprafețe poate fi exprimat prin relația:

$$\alpha = \frac{\lambda}{2ni} \quad (1.8.51)$$

Dacă $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$, $n = 1.5$ și $i = 2.5 \text{ mm}$ va rezulta un unghi $\alpha \cong 14''$. Deci, prin metoda interferențială se pot determina unghiuri foarte mici dintre suprafețele corpurilor transparente.

3. Determinarea razei de curbură a unei suprafețe sferice cu ajutorul inelelor Newton

Dacă în formula (1.8.36) se consideră indicele de refracție al aerului $n_1 = 1$, atunci:

$$r_m^2 = \frac{R\lambda}{2}(m - 1) \quad (1.8.52)$$

Experimental se pot determina mărimile r_m^2 pe care, dacă le reprezentăm grafic în funcție de m , vom obține o dreaptă (fig.32). Coeficientul unghiular al dreptei este:

$$tg\alpha = \frac{R\lambda}{2} \rightarrow R = \frac{2tg\alpha}{\lambda} \quad (1.8.53)$$

Fig.32

4. Verificarea interferențială a calității suprafețelor

Pentru verificarea planeității unei suprafețe, prin fenomenul de interferență, se poate folosi instalația din fig.33:

O placă etalon AB cu fețe pan paralele se așează deasupra plăcii CD a cărei planeitate vrem să o studiem. Lumina de la sursa S cade pe o suprafață semitransparentă P și, după reflexie, trece prin lentila L ; apoi cade pe placa AB și respectiv CD traversând stratul de aer dintre cele două plăci. Tabloul de interferență se obține pe ecranul E aflat în planul focal al lentilei L . Dacă suprafața CD este perfect plană, atunci se vor observa franje de egală grosime, sau de egală înclinare, în funcție de modul de așezare al plăcilor AB și CD . Dacă suprafața CD nu este perfect plană și prezintă unele adâncituri sau ridicături, franjele de interferență vor fi curbate (fig.34). Pe baza formei acestor franje se pot calcula abaterile de la planeitate ale suprafeței de studiat.

5. Straturi antireflectante și straturi puternic reflectante

Conform relației (1.6.20), la incidență normală, coeficientul de reflexie R pe suprafața de separare a două medii dielectrice, cu indicii de refracție n_1

și n_2 este:

$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \quad (1.8.54)$$

Fenomenul de reflexie permite reducerea substanțială a coeficientului de reflexie R pe suprafața unor elemente ca lentile, prisme etc. Pentru micșorarea coeficientului de reflexie R , pe suprafața reflectoare se depune o peliculă de grosime d și cu indicele de refracție n mai mic decât al sticlei n_2 (fig.35):

Pentru realizarea unui minim de interferență a razelor 1 și 2, cu intensitatea $I = 0$, trebuie satisfăcute condițiile:

- diferența de fază între fascicule să fie $(2m + 1)\pi$
- cele două fascicule să aibe amplitudini egale între ele

Dacă $n_1 < n < n_2$, diferența de drum optic între fasciculele 1 și 2 este:

$$\Delta l = 2nd = \frac{\lambda}{2\pi} \Delta\varphi = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (1.8.55)$$

de unde rezultă, pentru realizarea primei condiții de minim de interferență:

$$d = (2m + 1) \frac{\lambda}{2n} = (2m + 1) \frac{\lambda_o}{2} \quad (1.8.56)$$

unde λ_o este lungimea de undă a radiației în vid.

Pentru satisfacerea celei de-a doua condiție de realizarea minimului de interferență, trebuie ca valoarea coeficientului de reflexie pe cele două suprafețe de separare aer-peliculă și peliculă-sticlă să fie același:

$$\frac{n_2 - n}{n_2 + n} = \frac{n - n_1}{n + n_1} \quad (1.8.57)$$

Considerăm pentru aer $n=1$ și vom obține pentru indicele de refracției al peliculei expresia:

$$n = \sqrt{n_2} \quad (1.8.58)$$

Această relație este satisfăcută de substanțe transparente ca criolitul și clorura de magneziu, pentru care $n \approx 1.3$. Pentru domeniile spectrale cu $\lambda \approx 5500 \text{ \AA}$ coeficientul de reflexie este $R = 0$, iar cel de transmisie este $T = 1$.

În fig.36 se indică modul în care se pot obține coeficienți de reflexie foarte mari. Pe sticlă se depun pelicule dielectrice cu indici de refracție n_1 și n_2 , dar de aceeași grosime optică:

$$n_1 d_1 = n_2 d_2 = \frac{\lambda}{4} \quad (1.8.59)$$

Dacă numărul straturilor alternative, cu indicii de refracție n_1 și n_2 este impar, toate undele reflectate vor fi în fază și se va obține un maxim de interferență. Pentru un număr de 11-13 straturi se poate ajunge la un coeficient de reflexie $R \approx 0.999$.

6. Fotografierea în culori. Experiența lui Wiener

Fie o oglindă metalică plană, cu coeficientul de reflexie $R = 1$ pe care cade un fascicul de lumină sub incidență normală (fig.37):

Intensitățile câmpului electric pentru unda incidentă și cea reflectată vor avea expresia:

$$E_i = E_o \cos(\omega t - kz) \quad E_r = E_o \cos(\omega t + kz + \pi) \quad (1.8.60)$$

Prin suprapunerea unei incidente cu unda reflectată se obține câmpul rezultat:

$$E = E_i + E_r = 2E_o \cos\left(kz + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.8.61)$$

Deci, prin interferența celor două unde se obține o **undă staționară**. Pozițiile nodurilor unei staționare, adică punctele unde $E = 0$ sunt date de relația:

$$z_m^n = m\lambda/2 \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.8.62)$$

iar pozițiile ventrelor, în care $E = 2E_o$:

$$z_m^v = \frac{\lambda}{2} \left(m - \frac{1}{2}\right) \quad (1.8.63)$$

Conform acestor ultime două relații, primul nod al intensității câmpului electric este pe oglindă, iar primul ventru se află la o distanță $\lambda/4$ de oglindă.

Pe baza teoriei reflexiei undelor electromagnetice pe suprafețe metalice se poate arăta că, pentru intensitatea câmpului magnetic H , primul ventru este pe suprafața oglinzii, iar primul nod se află la distanța $\lambda/4$ de suprafața oglinzii (fig.38):

Pe baza acestor rezultate se poate stabili care dintre cei doi vectori \vec{E} sau \vec{H} exercită acțiune asupra ochiului, plăcii fotografice sau asupra ecranului fluorescent.

O astfel de experiență a fost efectuată de Wiener (1890). Pe o lamă de sticlă L a aplicat o peliculă de emulsie fotografică transparentă și a așezat lama sub un unghi α foarte mic față de planul oglinzii. Astfel, distanța l dintre două plane ventrale sau nodale este:

$$l = \frac{\lambda}{2} \sin \alpha \quad (1.8.64)$$

Prin experiența Wiener s-a demonstrat că înnegrirea filmului fotografic apare în locurile în care intensitate câmpului electric E prezintă ventre. Prin aceasta s-a demonstrat definitiv că acțiunea fotochimică a undelor electromagnetice se datorește vectorului electric \vec{E} , care a primit denumirea de **vector luminos**.

În 1891 Lippmann a emis ideea utilizării undelor electromagnetice staționare pentru realizarea fotografierii în culori (fig.39). În planele ventrale ale câmpului electric E are loc o descompunere intensă a bromurii de argint, astfel încât apar straturi echidistante, plane Lippmann, semitransparente de argint la distanțe egale cu $\lambda/2$. Dacă pe această emulsie groasă cade lumina provenită de la un obiect, vor exista plane ventrale pentru fiecare lungime de undă λ_i incidentă. După dezvoltare, placa fotografică este iluminată cu lumină albă și se vor reflecta numai undele electromagnetice cu lungimile λ_i , conținute în lumina provenită de la obiect. Astfel, are loc o reflexie selectivă și se formează imaginea în culori a obiectului fotografiat.

1.9 Difrakția undelor electromagnetice

1.9.1 Definiție și caracteristici

Difrakția reprezintă un ansamblu de procese optice care apar la propagarea undelor prin medii ce conțin neomogenități (obstacole, fante, etc) cu dimensiuni liniare de același ordin de mărime cu lungimea de undă. Evaluarea repartiției intensității luminoase în aria de difracție se face luând în considerare caracteristicile geometrice și optice ale neomogenităților. La baza explicării fenomenului de difracție precum și al reflexiei și refracției stă **principiul Huygens-Fresnel**.

Conform acestui principiu, fiecare punct al unui front de undă poate fi considerat ca un centru de perturbație secundar care produce unde sferice secundare coerente; frontul de undă în fiecare moment ulterior poate fi privit ca înfășurătoarea fronturilor de unde secundare (fig.40).

Există două clase de difracție optică:

- difracția Fresnel care se produce în cazul undelor sferice; sursa de lumină și observatorul se află la distanță finită față de obstacolul de difracție.
- difracția Fraunhofer care se produce în cazul undelor plane; sursa de lumină și observatorul se află la distanțe infinite (mari) față de obstacolul de difracție.

Observație:

Principala diferență între difracție și interferență constă în numărul de unde implicate în superpoziție. În difracție există un număr infinit de unde optice, în timp ce în interferență numai un număr finit de unde pot să se suprapună.

1.9.2 Metoda zonelor Fresnel

Fie o sursă punctiformă de lumină Q și fie S poziția instantanee a unei suprafețe de undă sferice (fig.41):

În punctul M amplitudinea undei sferice este:

$$E = E_o (R/R_o) e^{ikR} \quad (1.9.1)$$

unde E_o este amplitudinea undei la o distanță $R = R_o$ de sursa Q . Conform principiului Huygens-Fresnel, fiecare element de arie ds a suprafeței S este un centru de unde secundare, care se propagă sub formă de unde sferice. Contribuția acestui element de arie la amplitudinea din punctul B este dată de relația:

$$dE_B = f(\alpha) E_o \frac{R}{R_o} e^{ikR} \frac{e^{ikr}}{r} ds \quad (1.9.2)$$

unde $f(\alpha)$ este factorul de înclinare, care are expresia:

$$f(\alpha) = 1 \quad \text{pentru } \alpha = 0 \quad (1.9.3)$$

$$f(\alpha) = 0 \quad \text{pentru } \alpha = \pi/2$$

Astfel, amplitudinea undei în punctul B este:

$$E_B = E_o \frac{R}{R_o} e^{ikR} \int_S \int \frac{e^{ikr}}{r} f(\alpha) ds \quad (1.9.4)$$

Pentru calculul mai simplu al acestei integrale se utilizează **metoda zonelor Fresnel**. Conform acestei metode se vor trasa niște sfere cu centrele în B , de raze $r_m = r_o + m\lambda/2$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) (fig.42):

Din intersecțiile acestor sfere cu suprafața de undă sferică S , rezultă zonele Fresnel. Factorul de înclinare $f(\alpha)$ se consideră constant în cadrul unei zone Fresnel. Astfel, integrala (1.9.4) se reduce la o sumă de forma:

$$E_B = 2i\lambda E_o \frac{R_o e^{ik(R+r_o)}}{R + r_o} \sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} f_m \quad (1.9.5)$$

unde m este numărul zonei Fresnel, $m = 1, 2, 3, 4, \dots, N$, cu N numărul total de zone Fresnel. Fresnel a postulat o scădere liniară a factorului de înclinare

în funcție de numărul m (fig.43), astfel încât, în final, amplitudinea în punctul B se poate scrie:

$$E_B = i\lambda (f_1 \pm f_N) E_o \frac{R_o e^{ik(R+r_o)}}{R+r_o} \quad (1.9.6)$$

unde semnul "plus" corespunde unui număr N impar de zone, iar semnul "minus" unui număr N par de zone.

1.9.3 Difrakția Fresnel printr-o fantă circulară

Fie o deschidere circulară de rază ρ (fig.44). Numărul total de zone Fresnel depinde de mărimile R , ρ și r_o . Dacă numărul N de zone Fresnel este par, intensitatea luminii în punctul B este minimă, iar pentru N impar se obține un maxim de difracție. Din fig.44, rezultă:

$$\rho_m^2 = r_m^2 - (r_o + h_m)^2 = r_m^2 - r_o^2 - 2r_o h_m - h_m^2 \quad (1.9.7)$$

de unde, pentru $h_m \ll r_o$ se obține:

$$r_m^2 = r_o^2 - 2r_o h_m \quad (1.9.8)$$

Ținând cont de expresia pentru $r_m = r_o + m\lambda/2$ și neglijând termenii în λ^2 vom obține expresia razei zonelor Fresnel:

$$\rho_m^2 = m \frac{Rr_o}{R+r_o} \lambda \quad (1.9.9)$$

1.9.4 Difrakția Fraunhofer printr-o fantă dreptunghiulară

Vom considera difrakția unei unde plane monocromatice pe o fantă dreptunghiulară foarte îngustă de lărgime b și de lungime $l \gg b$ (fig.45). Intensitatea câmpului electric ce provine de la fiecare fâșie de grosime dx , din planul fantei este:

$$dE = C dx \cos \omega t \quad (1.9.10)$$

Din fig.45 rezultă că diferența de drum dintre două raze difractate sub același unghi α este:

$$\Delta l = x \sin \alpha \quad \Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta l = kx \sin \alpha \quad (1.9.11)$$

Deci, intensitatea câmpului electric a unei care ajunge în punctul B_α de la o fâșie de lărgime dx este:

$$dE_\alpha = \frac{E_o}{b} dx \cos(\omega t - kx \sin \alpha) \quad (1.9.12)$$

Prin integrarea ultimei relații se obține intensitatea totală a câmpului electric în punctul B_α :

$$E_\alpha = \frac{E_o}{b} \int_0^b \cos(\omega t - kx \sin \alpha) dx = E_o \frac{\sin\left(\frac{kb}{2} \sin \alpha\right)}{\frac{kb}{2} \sin \alpha} \cos\left(\omega t - \frac{kb}{2} \sin \alpha\right) \quad (1.9.13)$$

iar amplitudinea câmpului electric pentru unda care ajunge în B_α este:

$$E_{o\alpha} = E_o \frac{\sin\left(\frac{kb}{2} \sin \alpha\right)}{\frac{kb}{2} \sin \alpha} = E_o \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{2} \sin \alpha\right)}{\frac{\pi b}{2} \sin \alpha} \quad (1.9.14)$$

Deoarece intensitatea luminii este proporțională cu pătratul amplitudinii intensității câmpului electric, rezultă:

$$I_\alpha = I_o \left(\sin^2 \left(\frac{\pi b}{2} \sin \alpha \right) / \left(\frac{\pi b}{2} \sin \alpha \right)^2 \right) \quad (1.9.15)$$

unde I_o este intensitatea undei electromagnetice incidente pe fantă. Pentru a afla care este distribuția intensității pe ecran (poziția maximelor și a minimele) vor deriva expresia (1.9.15) la unghiul α și vom determina extremele derivatei:

$$b \sin \alpha = m\pi \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1.9.16)$$

reprezintă condiția de obținere a minimelor de difracție.

$$a \sin \alpha = 0 \quad (m = 0) \quad (1.9.17)$$

reprezintă condiția de obținere a maximului central de difracție.

$$\frac{\pi b}{\lambda} \cos \frac{\pi b}{\lambda} - \sin \frac{\pi b}{\lambda} = 0 \quad (1.9.18)$$

reprezintă condiția de obținere a maximelor secundare. Prin rezolvarea acestei ecuații transcendente (1.9.18) vom obține pozițiile maximelor secundare în funcție de $\sin \alpha$:

$$b \sin \alpha = (2m + 1)\lambda/2 \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1.9.19)$$

Imaginea de difracție este reprezentată în fig.46.

1.9.5 Rețele de difracție plane

Rețelele de difracție plane, prin transmisie, se obțin prin trasarea unor trăsături (zgârieturi) fine, drepte, paralele și echidistante pe suprafața unei plăci confecționată dintr-un material dielectric transparent (fig.47).

$$d = c + b \quad (1.9.20)$$

reprezintă **constanta rețelei plane**, iar $N = L/d$ reprezintă numărul fantelor.

Procesul de difracție pe o rețea constă din două fenomene:

- difracția luminii pe fiecare fantă dreptunghiulară de lărgime a
- interferența fasciculelor multiple difractate de fiecare fantă

Diferența de drum între două fascicule vecine provenind de la aceeași fantă este dată de expresia:

$$\Delta l = b \sin \alpha \quad (1.9.21)$$

Deoarece diferența de fază φ dintre unde se poate determina cu ajutorul relației:

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta l}{\lambda} \quad (1.9.22)$$

atunci se poate exprima defazajul prin $\sin \alpha$:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} b \sin \alpha \quad (1.9.23)$$

Diferența de drum ΔL între două fascicule provenind de la fante alăturate este dată de expresia:

$$\Delta L = d \sin \alpha \quad (1.9.24)$$

Diferența de fază Φ se poate exprima prin $\sin \alpha$:

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \alpha \quad (1.9.25)$$

Dacă vom lua în considerare numai difracția pe fiecare fantă, atunci intensitatea luminii I_{difr} va fi, conform relației (1.9.15):

$$I_{difr} = I_o \sin^2 \left(\frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda} \right) / \left(\frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda} \right)^2 \quad (1.9.26)$$

Dacă vom lua în considerare interferența celor N fascicule difractate de cele N fante, intensitatea luminii I_{interf} va avea expresia:

$$I_{interf} \approx \left(\frac{\sin(N\pi d \sin \alpha / \lambda)}{\sin(\pi d \sin \alpha / \lambda)} \right)^2 \quad (1.9.27)$$

Intensitatea luminoasă totală în punctul B_α , ca urmare a suprapunerii celor două fenomene va fi:

$$I_\alpha = I_o \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha\right)^2} \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha\right)} \quad (1.9.28)$$

Tabloul distribuției intensității în funcție de unghiul α este format din maxime principale și secundare de interferență, minime de interferență, maxime și minime de difracție.

Discuție:

a. pentru fenomenul de interferență

Pozițiilor extremelor intensității luminoase se pot obține din extremele funcției I_α prin derivare la $\Phi = \frac{\pi d \sin \alpha}{\lambda}$. Prin derivare ajungem la următoarele două ecuații:

$$\sin\left(N \frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha\right) = 0 \quad (1.9.29)$$

$$N \operatorname{tg}\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha\right) = \operatorname{tg}\left(N \frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha\right) \quad (1.9.30)$$

Pentru ca ecuația (1.9.29) să fie satisfăcută trebuie ca:

$$\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha = \frac{m}{N} \pi \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.9.31)$$

Dacă m/N este un număr întreg, adică $m/N = n, n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ($m = 0, N, 2N, 3N, \dots$), atunci se obține condiția de maxime principale de interferență:

$$\sin \alpha_n = n \frac{\lambda}{d} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.9.32)$$

$$\begin{aligned} n = 0 &\rightarrow \sin \alpha_0 = 0 && \text{maxim central} \\ n = 1 &\rightarrow \sin \alpha_1 = \frac{\lambda}{d} && \text{maxim de ordin 1} \\ n = 2 &\rightarrow \sin \alpha_2 = 2 \frac{\lambda}{d} && \text{maxim de ordin 2} \\ n = 3 &\rightarrow \sin \alpha_3 = 3 \frac{\lambda}{d} && \text{maxim de ordin 3 etc} \end{aligned}$$

Dacă m/N nu este un număr întreg, atunci intensitatea luminoasă va avea un minim. Deci, între două maxime consecutive ($n = 0$ și $n = 1$ de exemplu) se găsesc $N - 1$ minime de interferență ($n = 1/N, 2/N, 3/N, \dots, (N - 1)/N$). Ecuația (1.9.30) reprezintă condiția de obținere a maximelor secundare de interferență de intensitate mult mai mică decât a maximelor principale. Între două maxime principale se găsesc $N - 2$ maxime secundare.

b. pentru fenomenul de difracție

Pozițiile maximelor și minimelor de difracție se pot obține prin derivarea intensității I_α la $\varphi = \frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda}$. Se vor obține următoarele două soluții:

$$\sin \alpha_k = k \frac{\lambda}{b} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.9.33)$$

$$\sin \alpha_k = (2k + 1) \frac{\lambda}{2b} \quad (1.9.34)$$

Soluția (1.9.33) definește pozițiile minimelor de difracție, iar soluția (1.9.36) definește pozițiile maximelor de difracție.

Observație:

În timp ce funcția $\sin^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha \right) / \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha \right)^2$ variază lent cu $\sin \alpha$, funcția $\sin^2 \left(\frac{N\pi d}{\lambda} \sin \alpha \right) / \sin^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha \right)$ variază rapid cu $\sin \alpha$, astfel încât funcția $\sin^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha \right) / \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha \right)^2$ modelează intensitatea rezultantă (fig. 48).

1.9.6 Difracția radiației X

Fizicianul german Max Theodor Felix von Laue a demonstrat, în 1912 posibilitatea utilizării cristalelor naturale, cu constanta rețelei de ordinul 10^{-10} m ca rețele de difracție tridimensionale pentru razele X.

Fie două plane cristaline P_1 și P_2 (fig.49) pe care cade un fascicul monocromatic de radiații X (raze Röntgen). Diferența de drum dintre cele două raze este:

$$\Delta L = AB + BC = 2d \sin \theta \quad (1.9.35)$$

iar direcțiile după care se obțin maximele de interferență sunt date de condiția:

$$2d \sin \theta = m\lambda \quad (1.9.36)$$

Această relație este cunoscută sub denumirea de **legea Wulf-Bragg** pentru difracția pe cristale și are aplicații atât în analiza structurală cu raze X cât și în analiza spectrală a radiațiilor X.

CAPITOLUL 2.

2 Originile fizicii cuantice

2.1 Radiația termică

Experimental s-a constatat că toate corpurile încălzite la o anumită temperatură T emit radiații, numite **radiații termice** (ele efectuează un transport de energie sub formă de cădură). Structura spectrală acestor radiații depinde de temperatura corpurilor emițătoare. Indiferent însă de temperatura corpurilor, radiațiile termice **sunt unde electromagnetice** care se află în echilibru cu corpurile radiante.

2.1.1 Mărimi fizice caracteristice

1. Fluxul energetic Φ se definește prin raportul dintre energia radiată dE și timpul corespunzător dt .

$$\Phi = \frac{dE}{dt} \quad (2.1.1)$$

Unitatea de măsură în sistemul internațional (SI) de unități este Wattul, deci are dimensiuni de putere: $[\Phi]_{SI} = W$.

Deoarece fluxul energetic cuprinde radiații cu diferite lungimi de undă și depinde și de temperatură, se definește **fluxul spectral** $\varphi(\lambda, T)$:

$$\Phi(T) = \int_0^{\infty} \varphi(\lambda, T) d\lambda \quad (2.1.2)$$

2. Radianța energetică R este definită prin raportul dintre fluxul energetic emis de o suprafață elementară:

$$R = \frac{d\Phi}{dS} \quad [R]_{SI} = \frac{W}{m^2} \quad (2.1.3)$$

Se poate introduce **puterea spectrală de emisie** $r(\lambda, T)$ care este funcția de repartiție a energiei radiate de o suprafață aflată la temperatura T , în funcție de λ :

$$R(\lambda) = \int_0^{\infty} r(\lambda, T) d\lambda \quad (2.1.4)$$

3. Puterea de absorbție a unui corp se definește ca raportul dintre fluxul radianței absorbite și fluxul radiației incidente:

$$A = \frac{\Phi_{abs}}{\Phi_{inc}} \quad (2.1.5)$$

iar **puterea spectrală de absorbție**:

$$a(\lambda, T) = \frac{\varphi_{abs}(\lambda, T)}{\varphi_{inc}(\lambda, T)} \quad (2.1.6)$$

4. Densitatea volumică a energiei radiației $w(T)$ este definită ca fiind energia câmpului electromagnetic dW ce străbate elementul de volum dV :

$$w = \frac{dW}{dV} \quad [w]_{SI} = J/m^3 \quad (2.1.7)$$

Se poate introduce **densitatea volumică spectrală a energiei** $\rho(\lambda, T)$ prin relația:

$$w(T) = \int_0^\infty \rho(\lambda, T) d\lambda \quad (2.1.8)$$

5. Intensitatea radiației termice I ce se propagă în interiorul unghiului solid $d\Omega$ dintr-o incintă se definește prin relația:

$$dI = \frac{w c}{4\pi} d\Omega \quad (2.1.9)$$

unde c este viteza luminii în vid. Fluxul energetic emis de elementul de arie ΔS aflat pe suprafața incintei, sub unghiul θ și în interiorul unghiului solid $d\Omega$ este:

$$d\Phi = dI \Delta S \cos \theta = \frac{w c}{4\pi} \Delta S \cos \theta d\Omega = \frac{w c}{4\pi} \Delta S \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \quad (2.1.10)$$

Fluxul total emis de elementul de arie ΔS , în toate direcțiile va fi:

$$\Phi = \frac{w c}{4\pi} \Delta S \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{w c}{4} \Delta S \quad (2.1.11)$$

Dacă se ține cont de definiția radianței energetice (2.1.3) vom obține:

$$R(T) = \frac{c}{4} w(T) \rightarrow r(\lambda, T) = \frac{c}{4} \rho(\lambda, T) \quad (2.1.12)$$

2.1.2 Legile clasice ale radiației termice

1. Legea lui Kirchhoff arată că, raportul dintre puterea spectrală de emisie $r(\lambda, T)$ și puterea spectrală de absorbție $a(\lambda, T)$ este o funcție numai de lungimea de undă λ și de temperatură, și este independentă de natura corpului emițător:

$$\frac{r(\lambda, T)}{a(\lambda, T)} = f(\lambda, T) \quad (2.1.13)$$

Se definește **corpul negru** ca fiind corpul ce absoarbe toate radiațiile incidente, independent de λ și de T , deci:

$$a(\lambda, T) = 1 \quad (2.1.14)$$

O cavitate prevăzută cu o mică deschidere (fig.51) poate fi considerată corp negru pentru că toate radiațiile incidente sunt total absorbite. Dacă pereții incintei sunt aduși la temperatura T , radiația emisă prin deschiderea O va fi radiația termică a corpului absolut negru.

Experimental s-a constatat că $\rho(\lambda, T)$ este o funcție continuă de lungimea de undă λ , și depinde puternic de temperatura T . Pe măsură ce temperatura crește, maximum funcției $\rho(\lambda, T)$ se deplasează spre lungimi de undă mai mici (fig.52). Densitatea volumică spectrală de energie poate fi exprimată și în funcție de frecvență respectiv de pulsație:

$$\rho(\lambda, T)d\lambda = \rho(\nu, T)d\nu = \rho(\omega, T)d\omega \quad (2.1.15)$$

2. Legea Stefan-Boltzmann stabilește o relație între radianța energetică R și temperatura T , relație valabilă însă numai pentru corpul negru:

$$R(T) = \sigma T^4 \quad (2.1.16)$$

Această formulă fost dedusă în cadrul termodinamicii, iar constanta σ are valoarea $\sigma = 5.672 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^{-4}$ și a fost dedusă în cadrul fizicii cuantice.

3. Legile lui Wien se referă la expresia densității volumice spectrale de energie în funcție de frecvența radiației. Wien a demonstrat, în 1893 că densitatea volumică spectrală de energie este dată de relația:

$$\rho(\lambda, T) = \nu^3 F(\nu/T) \quad (2.1.17)$$

unde $F(\nu/T)$ este o funcție de argumentul indicat, dar forma explicită a acestei funcții nu poate fi dedusă în cadrul fizicii clasice.

Dacă se derivează această ultimă relație la λ și, ținând cont de (2.1.15) vom obține:

$$\frac{\partial \rho(\lambda, T)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_m} = 0 \rightarrow \lambda_m T = b \quad (2.1.18)$$

ceea ce reprezintă **legea de deplasare Wien** (fig.52). Constanta b poate fi determinată numai din datele experimentale; s-a obținut $b = 0.28978 \cdot 10^{-2} \text{ mK}$. Mărimea λ_m reprezintă lungimea de undă pentru care $\rho(\lambda, T)$ este maximă. În 1896 Wien a propus următoarea formulă empirică pentru densitatea volumică spectrală de energie a radiației termice a corpului negru:

$$\rho(\nu, T) = c_1 \nu^3 e^{-c_2 \nu / T} \quad (2.1.19)$$

unde c_1 și c_2 sunt constante care se determină pe baza comparației cu datele experimentale. Această lege descrie densitatea volumică spectrală dar, s-a constatat că este **valabilă numai la frecvențe mari ale radiației termice**.

4. Formula Rayleigh-Jeans - inițial Rayleigh a fost cel care a dedus expresia densității volumice spectrale de energie a radiației termice în cadrul electrodinamicii. El a considerat o incintă sub formă cubică de dimensiune L cu pereți perfect reflectători și alfați la temperatura T . Radiația termică află în echilibru cu pereții incintei trebuie să formeze unde staționare. Pentru apariția undelor staționare se impun condițiile de formare a nodurilor pe pereții incintei:

$$n_x = \frac{2\lambda}{L} = 1, 2, 3, \dots \quad n_y = \frac{2\lambda}{L} = 1, 2, 3, \dots \quad n_z = \frac{2\lambda}{L} = 1, 2, 3, \dots \quad (2.1.20)$$

Dacă se calculează numărul undelor staționare din unitatea de volum cu lungimea de undă cuprinsă între λ și $\lambda + d\lambda$ se obține:

$$n(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu \quad (2.1.21)$$

Dacă vom ține cont de faptul că undele staționare sunt în echilibru cu pereții incintei, rezultă că fiecare undă are o energie medie egală cu energia medie a oscilatorului care l-o emis. Deci, Rayleigh obține următoarea expresie pentru densitatea volumică spectrală a radiației termice:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \langle E \rangle \quad (2.1.22)$$

unde $\langle E \rangle$ este energia medie a oscilatorilor din pereții incintei, aflați la temperatura T . Această formulă fost completată de către Jeans care a

considerat că energia medie a oscilatorilor este $\langle E \rangle = kT$, astfel încât se poate scrie acum formula Rayleigh-Jeans:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT \quad (2.1.23)$$

formulă valabilă la frecvențe relativ mici ale radiației termice.

Deci, în cadrul fizicii clasice nu se poate obține o formulă unitară pentru densitatea volumică spectrală de energie a radiației termice în concordanță cu datele experimentale.

2.1.3 Ipoteza lui Planck. Formula lui Planck

În 1900 fizicianul german Planck face **ipoteza epocală**, ipoteză ce reprezintă începutul fizicii cuantice, și anume: energia undelor staționare din interiorul incintei aflate la temperatura T este **cuantificată**, adică poate lua numai anumite valori discrete:

$$E_n = n\varepsilon \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.1.24)$$

iar ε este cuanta de energie. Apoi Planck consideră că numărul oscilatorilor care au energia E_n este dat de legea de distribuție Boltzmann:

$$N_n = N_o e^{-E_n/kT} = N_o e^{-n\varepsilon/kT} \quad (2.1.25)$$

Dacă se mediază (statistic) această energie vom obține:

$$\langle E \rangle = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1} \quad (2.1.26)$$

iar formula Rayleigh devine:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1} \quad (2.1.27)$$

Această expresie este în concordanță cu legea Wien (2.1.17) numai dacă $\varepsilon \approx \nu$, adică:

$$\varepsilon = h\nu \quad (2.1.28)$$

unde h este o constantă de proporționalitate, cunoscută sub denumirea de **constantă lui Planck**, $h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$. Astfel s-a ajuns la formula lui Planck pentru radiația termică a corpului negru care se poate exprima sub formele:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (2.1.29)$$

$$\rho(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (2.1.30)$$

$$\rho(\omega, T) = \frac{h\omega^3}{2\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{h\omega/2\pi kT} - 1} \quad (2.1.31)$$

Observații:

- Formula Rayleigh-Jeans și legea Wien sunt cazuri particulare ale formulei Planck (2.1.29 – 2.1.31)

Pentru $h\nu \ll kT \rightarrow e^{h\nu/kT} \approx 1 + h\nu/kT \rightarrow \rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT$ (Rayleigh-Jeans).

Pentru $h\nu \gg kT \rightarrow e^{h\nu/kT} \gg 1 \rightarrow \rho(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}e^{-h\nu/kT}$ (Wien).

- Formula Planck este în totală concordanță cu datele experimentale.

- Pe baza legilor radiației corpului negru se poate măsura temperatura corpurilor incandescente (în cadrul pirometriei optice) atunci când temperatura $T > 2000\text{ K}$ și când metodele clasice nu mai sunt sigure.

- în unele relații se utilizează constanta Planck redusă $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

2.2 Efectul fotoelectric

În 1905 Einstein, plecând de la ipoteza lui Planck de cuantificare a energiei radiației termice, extinde această ipoteză și asupra undelor luminoase (electromagnetice): undele electromagnetice au un caracter corpuscular, adică reprezintă un flux de microparticule numite **fotoni** de energie $\varepsilon = h\nu$. Această ipoteză a fost introdusă pentru a putea explica efectul fotoelectric extern, fenomen descoperit experimental în 1887 de către Hertz.

Efectul fotoelectric extern constă în emisia de electroni de către suprafața metalelor sub acțiunea undelor electromagnetice. Studiul experimental al efectului fotoelectric extern se face cu ajutorul unei celule fotoelectrice (fig.53):

Tubul de sticlă T vidat, este prevăzut cu o fereastră F de cuarț, pentru a nu fi absorbite radiațiile din ultraviolet. Fotocatodul C emite electroni sub acțiunea undelor electromagnetice. Electronii ajung la anodul A , iar intensitatea curentului electric i prin circuit se măsoară cu galvanometrul G . Tensiunea U dintre anod și catod se reglează cu ajutorul potențiometrului P și se măsoară cu voltmetrul V .

Se observă că, la o tensiune suficient de mare toți electronii emiși din catodul iradiat cu lumină monocromatică ajung la anod, astfel încât se obține intensitatea i_s a curentului fotoelectric de saturație (fig.54). Pentru o anumită valoare a diferenței de potențial, numită **tensiune de stopare** (U_s) curentul fotoelectric se anulează.

Legile experimentale ale efectului fotoelectric extern

- Intensitatea curentului de saturație i_s este proporțională cu intensitatea I a radiației monocromatice incidente.
- Pentru un fotocathod dat, efectul fotoelectric are loc numai dacă frecvența radiației incidente ν este mai mare decât o anumită valoare ν_o numită **frecvență de prag**.
- Repartiția fotoelectronilor după valorile vitezei nu depinde de intensitatea I a radiației incidente.
- Pentru $\nu > \nu_o$ energia cinetică maximă a fotoelectronilor este proporțională cu frecvența radiației incidente:

$$mv_{max}^2/2 = A + B\nu \quad (2.2.1)$$

unde A și B sunt constante pentru un fotocathod dat.

- Efectul fotoelectric nu prezintă nici o inerție. Din datele experimentale s-a constatat că, între momentul începerii iradierii fotocathodului și momentul începerii emisiei fotoelectronilor, intervalul de timp este $\Delta t < 10^{-10}$ s

Aceste legi experimentale ale efectului fotoelectric extern nu pot fi explicate în cadrul teoriilor clasice referitoare la interacția radiațiilor electromagnetice cu substanța.

Einstein a considerat că efectul fotoelectric constă în absorbția unui foton de către electronii din metal. Pe baza acestei ipoteze se obține legea conservării energiei:

$$mv^2/2 = h\nu - E_{extr} - \Delta E \quad (2.2.2)$$

unde ΔE este energia pierdută de electroni prin ciocniri până ajung la suprafața metalului, iar E_{extr} reprezintă energia de extracție, energia minimă pentru ca electronii să fie scoși din metal. Pentru electronii care nu pierd energie prin ciocniri ($\Delta E = 0$) se obține cunoscuta formulă a lui Einstein pentru efectul fotoelectric extern:

$$mv_{max}^2/2 = h\nu - E_{extr} \quad (2.2.3)$$

Din fig.54 se observă că pentru $U = U_o$ avem:

$$mv_{max}^2/2 = eU_o = h\nu - E_{extr} \rightarrow U_s = \frac{h}{e}\nu - \frac{E_{extr}}{e} = \frac{h}{e}\nu - \varphi_{extr} \quad (2.2.4)$$

unde $\varphi = \frac{E_{extr}}{e}$ reprezintă potențialul de extracție pentru fotocatodul considerat.

În 1915, Millikan a măsurat tensiunea de stopare U_s în funcție de frecvența ν a radiației incidente, confirmând teoria lui Einstein pentru efectului fotoelectric. Pe baza datelor experimentale obținute (fig.55), Millikan a stabilit valoarea constantei Planck.

O deosebită importanță o are și **efectul fotoelectric intern** care se observă în cazul dielectricilor și semiconductorilor. Dacă energia fotonilor $h\nu$ este mai mare decât lărgimea benzii interzise ΔW , prin absorbția acestora, electronii din banda de valență (BV) trec în banda de conducție (BC) (fig.56). Ca urmare apar electroni în banda de conducție și goluri în banda de valență, ceea ce duce la creșterea conductivității electrice. Pe baza acestui efect funcționează așa numitele **fotorezistențe**.

2.3 Efectul Compton

Conform teoriei lui Einstein, fotonii sunt caracterizați de energia:

$$\varepsilon = h\nu \quad (2.3.1)$$

și de impulsul \vec{p} care se poate obține din relația relativistă:

$$\varepsilon = c\sqrt{p^2 + m_o^2c^2} \quad (2.3.2)$$

Pentru fotoni masa de repaus este zero ($m_o = 0$), ca urmare impulsul fotonilor se poate scrie:

$$p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi}k \quad (2.3.3)$$

sau sub formă vectorială:

$$\vec{p} = \frac{h}{2\pi}\vec{k} \quad (2.3.4)$$

Deci lumina, din punct de vedere corpuscular se caracterizează prin energia ε și prin impulsul \vec{p} , iar din punct de vedere ondulatoriu prin vectorul de undă \vec{k} și respectiv prin frecvența ν . Aceste mărimi sunt corelate prin relațiile (2.3.1) și (2.3.4), relații care sunt fundamentale în aplicarea legilor de conservare pentru energie și impuls, în cazul interacției dintre foton și o microparticulă.

În 1922 Compton descoperă efectul care-i poartă numele. Radiațiile X caracteristice cu frecvența ν_o și lungimea de undă λ_o sunt difuzate de electronii slab legați, cum sunt cei ai grafitului; radiațiile difuzate conțin atât radiații ce nu și-au modificat frecvența cât și radiații cu de frecvență mai mică decât

ν_o ($\nu < \nu_o$).

Procesul de împrăștiere a radiațiilor X este analizat de Compton ca un proces de interacție între radiațiile X și electronii corpului, în urma căruia fotonul (radiația X) este difuzat sub un unghi θ iar electronul (de recul) este împrăștiat sub un unghi φ cu viteza \vec{v} (fig.57). S-a considerat că electronul se afla în repaus înainte de ciocnire fiind caracterizat de masa de repaus m_o . Legile de conservare (2.3.1) și (2.3.4) aplicate acestui proces (relativist) conduc la următoarele relații:

$$h\nu_o + m_o c^2 = h\nu + mc^2 \quad (2.3.5)$$

$$\frac{h\nu_o}{c} = \frac{h\nu}{c} \cos \theta + mv \cos \varphi \quad (2.3.6)$$

$$0 = \frac{h\nu}{c} \sin \theta - mv \sin \varphi \quad (2.3.7)$$

Relația (2.3.5) reprezintă conservarea energiei pentru procesul de interacție foton-electron, iar relațiile (2.3.6) și (2.3.7) reprezintă legile de conservare pentru impuls pe direcțiile Ox respectiv Oy .

Rezolvarea acestui sistem de ecuații conduce la expresia variației lungimii de undă $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o$:

$$\Delta\lambda = 2 \frac{h}{m_o c} \sin^2 \theta / 2 \quad (2.3.8)$$

Dacă se notează

$$\lambda_C = \frac{h}{m_o c} = 0.0242 \text{ \AA} \quad (2.3.9)$$

cunoscută sub denumirea de **lungime de undă Compton** pentru $\theta = \pi/2$, atunci variația $\Delta\lambda$ se poate scrie:

$$\Delta\lambda = 2\lambda_C \sin^2 \theta / 2 \quad (2.3.10)$$

Observații:

- Conform relației (2.3.10) variația lungimii de undă $\Delta\lambda$ nu depinde de lungimea de undă incidentă λ_o .
- În fig.58 sunt indicate intensitățile aproximative ale radiațiilor difuzate sub un unghi θ , în cazul materialelor ușoare ca Li, B, Be (b), al unor materiale mai grele ca Al, Si (c), respectiv pentru materiale grele ca Fe, Ni, Co (d).

Cu ajutorul sistemului de ecuații (2.3.5-2.3.7) se poate calcula de asemenea și energia electronului de recul E_e :

$$E_e = mc^2 - m_0c^2 = h\nu_0 - h\nu = h\Delta\nu = h\nu_0 \frac{\Delta\nu}{\nu_0} \quad (2.3.11)$$

$$\frac{E_e}{h\nu_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0 + \Delta\lambda} = \frac{2\lambda_C \sin^2 \theta/2}{\lambda_0 + 2\lambda_C \sin^2 \theta/2} \quad (2.3.12)$$

Din relația (2.3.12) se observă că energia primită de electronii de recul este destul de mică în comparație cu energia fotonului incident, ceea ce conduce la posibilitatea separării electronilor Compton de fotoelectroni (fig.59).

- Datele experimentale legate de efectul fotoelectric și Compton au contribuit la fundamentarea teoriei corpusculare a luminii.
- Din punct de vedere macroscopic lumina este o undă prin care se explică fenomenele de interferență, difracție și polarizare, iar din punct de vedere microscopic lumina este formată din microparticule numite fotoni. Cu cât frecvența ν este mai mare (lungimea de undă mai mică) cu atât se manifestă mai puternic caracterul corpuscular al radiației.

2.4 Spectre atomice. Structura atomilor

2.4.1 Seriile spectrale ale atomului de hidrogen

Ansamblul lungimilor de undă ale radiațiilor monocromatice corespunzătoare unei unde electromagnetice formează **spectrul** unei considerate. Spectrele pot fi clasificate în **spectre de emisie** și respectiv **spectre de absorbție**, dacă unda electromagnetică este emisă sau absorbită. Spectrele de emisie și absorbție pot fi:

- **continue**, dacă conțin radiații electromagnetice cu toate lungimile de undă cuprinse într-un anumit interval, cum ar fi de exemplu radiația corpului negru.
- **discrete (de linii)**, care conțin unde electromagnetice "monocromatice" de anumite lungimi de undă λ_i

Studiul spectrelor de emisie și absorbție a prezentat un interes deosebit prin faptul că spectrele respective caracterizează în mod univoc elementul chimic, permițând efectuarea analizei spectrale în mod superior față de analizele chimice obișnuite.

În 1885, fizicianul elvețian Balmer a stabilit, empiric, că lungimile de undă ale liniilor spectrale emise, în domeniul vizibil, de către atomii de hidrogen pot fi calculate cu formula:

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad m = 3, 4, 5... \quad (2.4.1)$$

unde $\tilde{\nu}$ reprezintă numărul de undă, adică numărul lungimilor de undă cuprinse într-o anumită unitate de lungime. Mărima R este **constanta Rydberg** și are valoarea experimentală:

$$R_{exp,H} = 1.0967776 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (2.4.2)$$

Ansablul liniilor spectrale ale căror lungimi de undă se pot calcula cu ajutorul unei formule formează o **serie spectrală**. Astfel, pentru atomul de hidrogen se pot calcula seriile spectrale ale acestuia cu formula:

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (2.4.3)$$

Seriile spectrale ale atomului de hidrogen sunt:

- **Seria Lyman**, $n = 1, m > 1$ - domeniul ultraviolet
- **Seria Balmer**, $n = 2, m > 2$ - domeniul vizibil
- **Seria Pashen**, $n = 3, m > 3$ - domeniul infraroșu
- **Seria Brackett**, $n = 4, m > 4$ - domeniul infraroșu îndepărtat
- **Seria Pfund**, $n = 5, m > 5$ - domeniul infraroșu mai îndepărtat

Conform formulei lui Balmer (2.4.1) numărul de undă $\tilde{\nu}$ se poate scrie ca o diferență de doi **termeni spectrali**:

$$\tilde{\nu}_{mn} = T_n - T_m = \frac{R}{n^2} - \frac{R}{m^2} \quad (2.4.4)$$

Pornind de la această relație, Ritz a enunțat **principiul de combinație** care afirmă că: diferența a două numere de undă aparținând aceleași serii spectrale reprezintă, de asemenea, un număr de undă a unei linii spectrale care poate fi emisă de atom, dar care aparține altei serii spectrale.

2.4.2 Modelul nuclear al atomului

Fizicianul englez Rutherford a efectuat, în 1911, experiențe de împrăștiere a particulelor α pe foițe metalice de aur (Au) în scopul obținerii de informații referitoare la structura atomului. Particulele α reprezintă atomi de heliu (He) dublu ionizați ce posedă sarcina electrică $q = +2e$.

S-a constatat că:

- majoritatea particulelor α sunt slab deviate de la direcția inițială
- o mică parte dintre particulele α incidente sunt deviate la unghiuri foarte mari, sau chiar la 180° .

Rutherford ajunge la următoarele concluzii:

- atomul (Au) este format dintr-un nucleu cu sarcină pozitivă în care este concentrată aproape toată masa atomului.
- electronii se află într-o mișcare de rotație în jurul nucleului analog cu mișcarea planetelor în jurul Soarelui.

Aceste concluzii reprezintă de fapt **modelul planetar** sau **modelul nuclear** al atomului propus de către Rutherford.

Se poate demonstra, prin calcule, că dacă N este numărul de particule α incidente pe unitatea de arie a suprafeței difuzante, iar dN_θ este numărul de particule α deviate sub un unghi cuprins între θ și $\theta + d\theta$ și în unghiul solid $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, atunci este valabilă următoarea relație:

$$\frac{dN_\theta}{N} = d\sigma = \frac{1}{64} \left(\frac{Ze^2}{\pi\epsilon_0 E} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \theta/2} \quad (2.4.5)$$

unde E este energia particulei α incidente; Z este numărul de ordine al atomului difuzant; e - sarcina electrică a electronului; Ze - sarcina electrică a nucleului; $d\sigma$ reprezintă **secțiunea eficace diferențială de împrăștiere**, are dimensiunea unei arii și reprezintă aria unei suprafețe din jurul nucleului pe care particulele α trebuie să cadă pentru a fi împrăștiate în unghiul solid $d\Omega$.

Relația (2.4.5) reprezintă **formula lui Rutherford** pentru difuzia particulelor α . Valabilitatea acestei formule a fost verificată de către Geiger în anul 1913. Datele experimentale ulterioare au arătat că raza nucleului este

conectată de numărul atomic de masă A prin relația:

$$r_{nucleu} = r_o A^{1/3} \quad r_o = (1.4 - 1.5) 10^{-15} m \quad (2.4.6)$$

2.4.3 Teoria lui Bohr pentru atomii hidrogenoizi

Potrivit modelului planetar al lui Rutherford atomul este format dintr-un nucleu cu sarcină pozitivă Ze în jurul căruia se rotesc cei Z electroni. Din punct de vedere al electrodinamicii clasice astfel de atomi nu pot fi stabili pentru că, datorită mișcării accelerate pe orbite a electronilor, aceștia devin surse de unde electromagnetice, iar pierderea de energie prin radiație conduce la concluzia că electronii ar trebui să cadă pe nucleu după un timp $\Delta t < 10^{-10} s$ ceea ce nu se întâmplă în realitate.

O primă interpretare a acestor fenomene atomice a fost dată de către fizicianul danez Bohr. Urmărind să explice spectrele de linii ale atomului de hidrogen observate experimental, Bohr introduce două postulate:

Postulatul 1: Pot exista în atom numai acele orbite electronice pentru care momentul cinetic orbital al electronului, în mișcarea sa în jurul nucleului, este un număr întreg de \hbar :

$$|\vec{L}_n| = m_o v_n r_n = n\hbar \quad n = 1, 2, 3, 4, .. \quad (2.4.7)$$

unde n este un număr natural, denumit **număr cuantic principal**.

Orbitele pe care se mișcă electronii și care satisfac condiția (2.4.7) se numesc **orbite staționare**. Pe aceste orbite electronii se pot deplasa accelerat fără să emită radiații conform electrodinamicii clasice.

Ne vom ocupa în continuare de determinarea vitezei v_n a electronilor pe orbitele circulare, a razelor orbitelor circulare r_n precum și a energiei atomilor hidrogenoizi E_n aflați pe nivelele energetice n din atom. Atomii hidrogenoizi sunt acei atomi ce conțin un singur electron ce se rotește în jurul nucleului. Astfel de atomi sunt: atomii de hidrogen H ($Z = 1$), ionii de heliu He^+ ($Z = 2$), ionii de litiu Li^{++} ($Z = 3$) etc.

Pentru ca electronul să se poată deplasa pe orbitele circulare r_n trebuie ca forța centrifugă să fie egală cu forța coulombiană de atracție din partea nucleului:

$$\frac{m_o v_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Ze^2}{r_n^2} \quad (2.4.8)$$

Dacă se prelucrează această relație și se ține cont și de ipoteza Bohr (2.4.7) se va obține expresia vitezei electronilor v_n pe orbitele circulare:

$$v_n = \frac{Ze^2}{2h\epsilon n} \quad (2.4.9)$$

unde ε este permitivitatea electrică a mediului.

Observații

- Pentru $n = 1$ se va obține viteza electronului aflat în starea fundamentală v_1 , care este cea mai mare în comparație cu vitezele de pe alte orbite staționare ($n > 1$).

- Pentru atomul de hidrogen, raportul dintre viteza v_1 și viteza luminii în vid c este:

$$\frac{v_1}{c} = \alpha = \frac{e^2}{2hc\varepsilon_o} = \frac{1}{137} \quad (2.4.10)$$

unde α este cunoscută sub denumirea de **constanta structurii fine**; α reprezintă de asemenea constanta de cuplaj pentru interacțiile electromagnetice, interacții ce guvernează lumea atomică.

Utilizând în continuare condiția de cuantificare Bohr precum și expresia vitezei (2.4.9) se poate determina expresia razei orbitelor circulare din atomul de hidrogen:

$$r_n = \frac{\varepsilon_o h^2}{\pi m_o e^2} \frac{1}{Z} n^2 \quad (2.4.11)$$

Dacă $n = 1$ se obține, pentru raza atomului de hidrogen aflat în starea fundamentală valoarea $r_{1H} = \frac{\varepsilon_o h^2}{\pi m_o e^2} = 0.529 \text{ \AA}$.

Energia atomilor hidrogenoizi se calculează prin sumarea energiei cinetice a electronului cu energia potențială de interacție cu nucleul:

$$E_n = E_{ncin} + E_{npot} = \frac{m_o v_n^2}{2} - \frac{Z e^2}{4\pi\varepsilon_o r_n} = -\frac{Z e^2}{8\pi\varepsilon_o r_n} \quad (2.4.12)$$

Dacă se ține cont de relația (2.4.11), energia totală a atomilor hidrogenoizi se poate scrie în funcție de numărul cuantic principal n :

$$E_n = -Z^2 \frac{m_o e^4}{8\varepsilon_o^2 h^2} \frac{1}{n^2} \quad (2.4.13)$$

deci există un număr infinit de nivele energetice.

Observații:

- $n = 1$ reprezintă starea fundamentală a atomului corespunzătoare energiei minime E_1 . Bohr a considerat că numai această stare energetică este stabilă.

• semnul ”-” ne spune că electronul se află în atom în **stare legată**. Pentru a scoate electronul din atomul de hidrogen aflat în starea fundamentală este necesară o energie minimă:

$$E_1 = -\frac{m_o e^4}{8\varepsilon_o^2 h^2} = -13.53 \text{ eV} \quad (2.4.14)$$

și care se numește **energie de ionizare**.

• stările energetice cu $n > 1$ se numesc **stări excitate** ale atomului; aceste stări au un **timp de viață** $\tau \approx 10^{-8} \text{ s}$ după care atomul trece în starea fundamentală.

Postulatul 2: În procesul de emisie sau de absorbție a luminii de către atomi sub formă de cuante de energie $h\nu_{mn}$, atomul trece dintr-o stare staționară cu energia E_m în altă stare staționară de energie E_n :

$$h\nu_{mn} = h\frac{c}{\lambda_{mn}} = E_m - E_n = \frac{m_o Z^2 e^4}{8\varepsilon_o^2 h^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (2.4.15)$$

sau:

$$\tilde{\nu}_{mn} = \frac{1}{\lambda_{mn}} = \frac{m_o Z^2 e^4}{8\varepsilon_o^2 h^3 c} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (2.4.16)$$

Astfel s-a ajuns la formula Balmer pentru atomii hidrogenoizi; valoarea teoretică a constantei Rydberg pentru atomul de hidrogen este:

$$R_{teor,H} = \frac{m_o e^4}{8\varepsilon_o^2 h^3 c} = 1.097373 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (2.4.17)$$

Observație:

Valoarea teoretică $R_{teor,H}$ a constantei Rydberg este ceva mai mare decât valoarea experimentală (2.4.2). Bohr a explicat această discordanță prin aceea că, în calculele efectuate s-a omis faptul că nucleul se află în mișcare și deci, masa de repaus a electronului trebuie înlocuită cu masa redusă:

$$m_r = \frac{m_o M_o}{m_o + M_o} = \frac{m_o}{1 + m_o/M_o} \cong m_o(1 - m_o/M_o) \quad (2.4.18)$$

unde M_o este masa protonului ($M_o \approx 1840 m_o$). Valoarea obținută pentru constanta Rydberg în acest caz este în concordanță cu datele experimentale.

Deși prin teoria lui Bohr s-a făcut un pas important spre cunoașterea microscopică a materiei, există unele neajunsuri fundamentale:

- teoria lui Bohr are un caracter semiclassical - impune cuantificarea momentului cinetic orbital al electronului dar, legile de mișcare ale acestuia sunt cele din mecanica clasică.
- teoria lui Bohr nu furnizează informații referitoare la intensitățile liniilor spectrale.
- teoria lui Bohr nu este adecvată pentru atomii cu mai mulți electroni (numai pentru cei hidrogenoizi).

Deci, teoria lui Bohr este privită ca o etapă de tranziție de la fizica clasică la mecanica cuantică.

2.4.4 Experiența Franck-Hertz

Această experiență confirmă existența stărilor energetice discrete ale atomilor. În fig.60 este indicată schema instalației experimentale: tubul T este umplut cu vapori de mercur la presiunea $p = 1 \text{ mm col.Hg}$ și conține catodul C , grila G și anodul A . Electronii termici emiși de catod sunt accelerați la tensiunea U aplicată între catod și grilă. Această tensiune se poate regla cu ajutorul potențiometrului P . Între grilă și anod se aplică o tensiune de frînare, $U_{GA} \approx 0.5 \text{ V}$.

S-a constatat că dacă tensiunea U crește continuu, intensitatea curentului electric prin circuit depinde de tensiunea U ca în fig.61. Această dependență se poate explica în cadrul teoriei Bohr astfel:

- dacă energia electronilor termici este $E_e = eU < 4.9 \text{ eV}$, aceasta nu este suficientă pentru a aduce atomii de mercur în stare excitată, iar ciocnirile dintre electroni și atomii de mercur sunt de tip elastic.
- dacă energia electronilor $eU > 4.9 \text{ eV}$ electronii pot ceda atomilor de mercur energia $\Delta E = 4.9 \text{ eV}$ și astfel intensitatea curentului scade brusc, deci ciocnirile sunt de tip inelastic.
- dacă $eU = 9.8 \text{ eV}$ atunci un electron poate ciocni inelastic doi atomi de mercur s.a.m.d.

Atomii de mercur aflați în stare excitată cu energia $E_2 = E_1 + 4.9 \text{ eV}$ emit

ulterior, prin dezexcitare, o radiație cu lungimea de undă:

$$\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{6.625 \times 10^{-34} \text{ Js } 3 \times 10^8 \text{ m/s}}{4.9 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}} = 2537 \cdot 10^{-10} \text{ m} \quad (2.4.19)$$

Această linie spectrală din domeniul ultraviolet a fost observată cu ajutorul unui tub din cuarț. Deci, experiențele efectuate de către Franck și Hertz au dovedit existența nivelelor energetice discrete ale atomilor (4.9, 9.8, 14.7, ...)

2.5 Elemente de electronică cuantică

2.5.1 Emisia și absorbția stimulată. Coeficienții lui Einstein

Sistemele atomice, conform postulatelor lui Bohr, nu pot exista decât în stări staționare, fiecărei stări corespunzându-i o anumită energie. Între aceste stări energetice staționare pot avea loc tranziții:

- sistemul trece dintr-o stare energetică inferioară în alta superioară prin așa numitul **fenomen de absorbție**
- sistemul trece dintr-o stare energetică superioară în alta inferioară printr-un **fenomen de emisie** de energie sub formă de radiație

Fie două stări staționare m și n ale unui sistem atomic, caracterizate prin energiile E_m și respectiv E_n . Orice tranziție radiativă ce are loc între aceste nivele energetice respectă relația lui Bohr:

$$h\nu = E_n - E_m \quad (2.5.1)$$

unde ν este frecvența radiației emise sau absorbite.

Einstein abordează pentru prima dată (1917) problema emisiei și absorbției luminii din punct de vedere cuantic.

Fie un sistem cuantic (microparticule) în care microparticulele se pot afla pe nivelele energetice E_m (fundamentală) și E_n (fig.62).

Radiația absorbită de sistem în tranziția $m \rightarrow n$ trebuie să se supună legii radiației lui Planck (sistemul cuantic considerat se află în echilibru termic cu mediul înconjurător) referitoare la densitatea volumică spectrală de energie:

$$\rho(\nu_{nm}, T) = \frac{8\pi\nu_{nm}^2}{c^3} \frac{h\nu_{nm}}{e^{\frac{h\nu_{nm}}{kT}} - 1} \quad (2.5.2)$$

Probabilitatea efectuării unei astfel de tranziții este definită prin relația:

$$P_{mn} = \rho(\nu_{nm}, T) C_{mn} \quad (2.5.3)$$

unde C_{mn} este o constantă ce caracterizează sistemul cuantic și reprezintă probabilitatea de absorbție în unitatea de timp și pentru unitatea de densitate spectrală.

Fie N_m numărul de electroni, din unitatea de volum, (considerăm sistemul cuantic format din electroni) de pe nivelul energetic E_m . Atunci, în timpul dt se vor realiza:

$$\rho(\nu_{nm}, T) C_{mn} N_m dt \quad (2.5.4)$$

tranziții, determinate de absorbția de fotoni de frecvență ν_{nm} .

Observație:

O condiție necesară pentru amplificarea radiației o reprezintă **inversia de populație** ($N_n > N_m$). Această condiție se poate realiza fizic numai prin utilizarea sistemelor atomice cu nivele metastabile (timp lung de viață). În mod normal (absența nivelelor metastabile), datorită emisiei spontane a sistemului care trece la starea de echilibru, nu se poate obține inversia de populație necesară pentru amplificarea radiației chiar comunicând sistemului o energie infinită.

Să considerăm acum tranziția $n \rightarrow m$ care poate avea loc în două moduri:

- în mod **spontan**, deci apare fără o cauză exterioară, datorită tendinței spre echilibru a sistemului atomic (timpul mediu în care poate sta un sistem excitat se numește timp de viață al nivelului)
- în mod **stimulat**, datorită interacției sistemului atomic cu un foton având energia egală cu ecartul dintre nivele; prin ciocnirea fotonului cu atomul excitat acesta se dezexcită cu emisie de doi fotoni în fază (coerenți)

Se consideră **tranziția spontană** $n \rightarrow m$ care are loc prin emisia unei radiații de frecvență ν_{nm} :

$$\nu_{nm} = \frac{E_n - E_m}{h} \quad (2.5.5)$$

Să notăm prin A_{nm} **coeficientul de emisie spontană** ce reprezintă probabilitatea fenomenului de emisie spontană, în unitatea de timp.

Fie N_n numărul de electroni de pe nivelul energetic E_n . Numărul tranzițiilor spontane în intervalul de timpul dt este:

$$A_{nm} N_n dt \quad (2.5.6)$$

Observație:

În cazul unui ansamblu de atomi cu două nivele, radiația spontană emisă de fiecare atom este independentă de emisia celorlalți, în sensul că fiecare atom emite întâmplător și la momente de timp diferite. Prin urmare radiația emisă spontan este incoerentă.

Tranziția stimulată se obține atunci când sistemul atomic se găsește în prezența unei radiații de frecvență ν_{nm} (fig.63). Probabilitatea efectuării unei tranziții stimulate P_{nm} depinde de densitatea volumică spectrală de energie $\rho(\nu_{nm}, T)$ și va fi dată de expresia:

$$P_{nm} = B_{nm}\rho(\nu_{nm}, T) \quad (2.5.7)$$

unde B_{nm} este **coeficientul de emisie stimulată** și reprezintă probabilitatea de emisie stimulată în unitatea de timp dt pentru unitatea de densitate spectrală.

Numărul de tranziții stimulate $n \rightarrow m$ în timpul dt va fi:

$$B_{nm}\rho(\nu_{nm}, T) N_n dt \quad (2.5.8)$$

Deci, numărul total de tranziții, spontane și stimulate, de pe nivelul $n \rightarrow m$ va fi:

$$(A_{nm} + B_{nm}\rho(\nu_{nm}, T)) N_n dt \quad (2.5.9)$$

La echilibru termodinamic, pentru tranzițiile de absorție $m \rightarrow n$ și cele de emisie $n \rightarrow m$ se este valabilă relația:

$$(A_{nm} + B_{nm}\rho(\nu_{nm}, T)) N_n dt = C_{mn}\rho(\nu_{nm}, T) N_m dt \quad (2.5.10)$$

de unde se obține, pentru raportul populațiilor, expresia:

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{C_{mn}\rho(\nu_{nm}, T)}{A_{nm} + B_{nm}\rho(\nu_{nm}, T)} \quad (2.5.11)$$

Pe de altă parte, în condiții de echilibru termodinamic, raportul sistemelor atomice ce populează nivelele energetice E_n și E_m se supune **legii statistice Boltzmann**:

$$\frac{N_n}{N_m} = e^{-\frac{E_n - E_m}{kT}} = e^{-\frac{h\nu}{kT}} \quad (2.5.12)$$

Dacă se ține cont de relația (2.5.11), atunci raportul (2.5.12) se poate scrie:

$$\frac{N_m}{N_n} = e^{\frac{h\nu}{kT}} = \frac{A_{nm} + B_{nm}\rho}{C_{mn}\rho} = \frac{A_{nm}}{C_{mn}\rho} + \frac{B_{nm}}{C_{mn}} \quad (2.5.13)$$

Această relație este adevărată la orice temperatură T , deci și pentru $T \rightarrow \infty$ ($\rho \rightarrow \infty$). În această situație $e^{\frac{h\nu}{kT}} \rightarrow 1$, $\frac{A_{nm}}{C_{mn}\rho} \rightarrow 0$ și atunci $\frac{B_{nm}}{C_{mn}} \rightarrow 1$, deci:

$$B_{nm} = C_{mn} \quad (2.5.14)$$

adică, coeficienții Einstein de emisie stimulată și absorbție sunt egali. Din ecuația (2.5.13) se poate exprima densitatea spectrală volumică de energie:

$$\rho(\nu_{nm}, T) = \frac{A_{nm}}{B_{mn}} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (2.5.15)$$

Conform relației lui Planck însă, densitatea spectrală de energie satisface legea (2.1.29), iar din compararea cu relația (2.5.15) rezultă:

$$A_{nm} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B_{mn} \quad (2.5.16)$$

Relația (2.5.16) împreună cu relația (2.5.14) reprezintă **relațiile lui Einstein** pentru emisia și absorbția luminii de către un sistem atomic (nedegenerat) aflat la temperatura T , **în condițiile unui echilibru termodinamic**.

Observații

- Pentru ca în sistemul atomic să aibe loc procese de emisie și de absorbție de radiație, nu este suficient ca frecvența ν rezultată la tranziție să fie egală cu frecvența câmpului electromagnetic cu care sistemul se află la echilibru, ci trebuie să se țină cont că nu toate tranzițiile sunt permise.

Teoria lui Einstein asupra emisie și absorbției a fost preluată de Dirac în cadrul mecanicii cuantice; Dirac reușește să evalueze coeficienții de emisie indusă și spontană într-o formă care să explice însuși procesul emisie induse și spontane:

$$A_{nm} = \frac{64\pi^2\nu^3\mu^2}{3hc^3} \quad \text{pentru emisia spontană} \quad (2.5.17)$$

$$B_{nm} = \frac{8\pi^3}{3h^2}\mu^2 \quad \text{pentru emisie stimulată} \quad (2.5.18)$$

unde $\mu^2 = \frac{1}{2}\mu_B$, iar $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$ este magnetonul Bohr-Procopiu - momentul magnetic elementar al electronului datorat mișcării sale orbitale în atom.

- Coeficientul A_{nm} de emisie spontană variază cu ν^3 , rezultat deosebit de important pentru funcționarea **amplificatoarelor cuantice**. Pentru domeniul microundelor coeficientul A_{nm} este neglijabil și se va considera numai emisia stimulată (B_{nm}).

2.5.2 Inversia de populație. Amplificarea radiației

Fie un ansamblu de sisteme atomice caracterizate prin nivelele E_n și E_m ; N_n și N_m reprezintă populația de pe fiecare nivel energetic considerat. Ansamblul de sisteme atomice este la echilibru termodinamic cu radiația electromagnetică caracterizată prin densitatea volumică spectrală $\rho(\nu_{nm}, T)$.

În intervalul de timp dt , datorită procesului de absorbție, un număr de sisteme egal cu:

$$-dN_m = N_m C_{mn} \rho(\nu_{nm}, T) dt \quad (2.5.19)$$

va trece de pe $m \rightarrow n$, iar prin emisie stimulată va efectua tranziția inversă un număr de sisteme atomice egal cu:

$$-dN_n = N_n B_{nm} \rho(\nu_{nm}, T) dt \quad (2.5.20)$$

Energia absorbită de ansamblul de sisteme la trecerea $m \rightarrow n$ va fi:

$$dE_{abs} = N_m C_{mn} \rho(\nu_{nm}, T) h\nu_{nm} dt \quad (2.5.21)$$

iar energia emisă de ansamblul de sisteme atomice la trecerea din $n \rightarrow m$ va fi:

$$dE_{emis} = N_n B_{nm} \rho(\nu_{nm}, T) h\nu_{nm} dt \quad (2.5.22)$$

Condiția ca ansamblul de sisteme atomice să funcționeze ca **amplificator de radiație** este ca:

$$E_{emis} > E_{abs} \quad (2.5.23)$$

Dacă scădem cele două relații (2.5.21) și (2.5.22) și ținem cont de asemenea că, pentru sistemele atomice nedegenerate este valabilă relația (2.5.14), vom obține:

$$dE = dE_{emis} - dE_{abs} = (N_n - N_m) B_{nm} \rho(\nu_{nm}, T) h\nu_{nm} dt \quad (2.5.24)$$

Pentru ca ansamblul de sisteme să funcționeze ca amplificator de radiație trebuie ca $dE > 0$ ceea ce implică, conform relației (2.5.24):

$$N_n - N_m > 0 \rightarrow N_n > N_m \quad (2.5.25)$$

ceea ce reprezintă condiția de amplificare a radiației.

Observație:

Condiția de amplificare a radiației (2.5.25) impune realizarea **inversiei de populație** în ansamblul sistemelor atomice. Dar, prin efectuarea acestei inversii de populație ansamblul nu se mai află în echilibru termodinamic.

Pentru un sistem aflat la echilibru termodinamic este valabilă legea de distribuție Boltzmann:

$$N_n = N_m e^{-\frac{E_n - E_m}{kT}} \longrightarrow T = -\frac{E_n - E_m}{k \ln \frac{N_n}{N_m}} \quad (2.5.26)$$

De asemenea, tot pentru astfel de sisteme este valabilă inegalitatea $\frac{N_n}{N_m} < 1$, ceea ce implică $\ln \frac{N_n}{N_m} < 0 \longrightarrow T > 0$.

Pentru sistemele în care s-a realizat inversia de populație, $N_n > N_m$, ceea ce implică $T < 0$, deci condiția de echilibru termodinamic nu mai este satisfăcută. Deci, sistemele atomice care admit **temperatură negativă** sunt acele sisteme pentru care s-a realizat inversia de populație, sunt utilizate ca **generatoare și amplificatoare cuantice de radiație** și poartă numele de **mediu activ**.

2.5.3 Laserii

Fie două nivele energetice m și n pentru care s-a realizat inversia de populație (fig.63). Vom acționa cu fotoni incidenti asupra unui ansamblu de sisteme atomice. Deoarece $N_n > N_m$, fotonii de energie $\varepsilon = h\nu_{nm}$ vor suferi mai multe interacții cu sistemele N_n și vor provoca dezexcitarea indusă, astfel încât radiația emisă va conține doi fotoni de energie $h\nu_{nm}$, corespunzător unui act de dezexcitare.

Deci, la baza procesului de amplificare stau două fenomene: 1: inversia de populație și 2: emisia stimulată.

Observație:

Cu cât N_n este mai mare decât N_m cu atât amplificarea este mai mare (mai multe acte de dezexcitare).

Acest fenomen de amplificare a radiației electromagnetice bazat pe emisia stimulată a primit denumirea de **LASER** (*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*).

Un LASER se compune din:

- mediul activ - ce conține substanța în care se poate realiza inversia de populație ($Al_2O_3 + at.Cr, He, Ne$)
- sistemul de pompaj - care este format dintr-o sursă intensă de lumină și

oglinzi pentru focalizarea luminii pe mediul activ, și respectiv dintr-o sursă de tensiune aplicată unor electrozi dintr-un tub de descărcare

- rezonatorul optic - format din două oglinzi (fig.64) care asigură reacția pozitivă a sistemului oscilator prin reflexia repetată a fotonilor, între oglinzi, pentru o mări eficiența fenomenelor de emisie stimulată, astfel încât să fie îndeplinită condiția de autooscilație. Declanșarea procesului de amplificare se face de la un foton inițial produs dintr-o dezexcitare spontană. Acesta va produce emisia stimulată a altor doi fotoni, apoi aceștia produc emisia stimulată la alți patru fotoni s.a.m.d. Amplificarea va fi cu atât mai mare cu cât drumul parcurs de lumină prin mediul activ este mai mare (utilizarea oglinzilor).

Radiația LASER se caracterizează prin următoarele proprietăți:

- intensitate mare în comparație cu sistemele obișnuite de lumină
- monocromaticitate - $\Delta\nu$ este foarte îngust
- coerență - radiația LASER este coerentă ca urmare a fenomenelor de emisie stimulată
- direcționalitate - se obține un fasciculul paralel de lumină datorită reflexiilor repetate între oglinzi

LASERUL și-a găsit foarte multe aplicații mai ales în industrie, chirurgie, telecomunicații, radarul optic etc.

2.6 Natura ondulatorie a particulelor

2.6.1 Ipoteza lui de Broglie

Conform ipotezei lui Planck radiațiile termice au un caracter dual undă-corpusul. Conform ipotezei lui Einstein undele luminoase au un caracter dual, corpusul de lumină fiind fotonul.

Fizicianul francez de Broglie extinde această idee de caracter dual asupra particulelor materiale în general: mișcarea oricărei particule (electron, proton, moleculă, etc) este caracterizată de o undă asociată, cu lungimea de undă:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (2.6.1)$$

și cu vectorul de undă

$$\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar} \quad (2.6.2)$$

Conform acestei ipoteze, primul postulat al lui Bohr rezultă din faptul că pot exista numai acele orbite staționare pentru care unda asociată electronului este o undă staționară, adică:

$$2\pi r = n\lambda = n\frac{h}{p} = n\frac{h}{mv} \rightarrow mvr = n\hbar \quad (2.6.3)$$

Deci, regula de cuantificare postulată de către Bohr apare ca o consecință a proprietăților ondulatorii ale electronului.

În teoria relativității restrânse, impulsul și vectorul de undă sunt cuadrivectori cu componentele:

$$P_\mu : \left(\vec{p}, \frac{iE}{c} \right) \quad K_\mu : \left(\vec{k}, \frac{i\omega}{c} \right) \quad \mu = 1, 2, 3, 4 \quad (2.6.4)$$

Conform ipotezei lui de Broglie, relația:

$$P_\mu = \hbar K_\mu \quad (2.6.5)$$

este o lege universală a naturii și se numește **legea Einstein-de Broglie**. Această lege exprimă sintetic caracterul dual al microparticulelor sub forma:

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \quad (2.6.6)$$

$$E = \hbar\omega \quad (2.6.7)$$

2.6.2 Experiența Davisson-Germer

Confirmarea experimentală a proprietăților ondulatorii ale particulelor a fost făcută de către Davisson și Germer (1927) prin experiențe de difracție a electronilor pe un monocristal de nichel (Ni).

Intensitatea fasciculului de electroni reflectați de cristal se măsoară cu ajutorul unui detector care poate fi de exemplu o cameră de ionizare. Măsurătorile efectuate au arătat că intensitatea fasciculului de electroni reflectați prezintă maxime și minime cu pozițiile unghiulare dependente de tensiunea de accelerare U a electronilor ($E_{cin} = \frac{mv^2}{2} = eU$). Astfel s-a obținut un maxim de intensitate pentru $\varphi = 54^\circ$. Rezultatele nu au putut fi explicate decât pe baza ideii de interferență a undelor de Broglie difractate pe suprafațele monocristalului de Ni. Distanța dintre două plane cristaline ale rețelei de Ni este:

$$d = D \sin \theta \quad (2.6.8)$$

unde D este constanta rețelei cristaline. Pentru Ni, experiențele de difracție au condus la valoarea $D = 2.15 \text{ \AA}$. Maximul de difracție se obține dacă este satisfăcută condiția Wulf-Bragg (1.9.38) care, ținându-se cont de relația (2.6.8) se va scrie:

$$2D \sin \theta \cos \theta = D \sin 2\theta = D \sin \varphi = m\lambda \quad (2.6.9)$$

Pentru $m = 1$, $\sin 50^\circ = 0.76604$ și $D = 2.15 \text{ \AA}$ se obține:

$$\lambda = 1.65 \text{ \AA} \quad (2.6.10)$$

Pe de altă parte, dacă tensiunea de accelerare este $U = 54 \text{ V}$, lungimea de undă de Broglie pentru unda asociată electronilor accelerați este:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0eU}} = \frac{12.25}{\sqrt{U}} = 1.667 \text{ \AA} \quad (2.6.11)$$

Din calcule mai precise, în care s-a ținut cont și de indicele de refracție pentru Ni s-a ajuns la o concordanță perfectă între cele două valori (2.6.10) și (2.6.11).

2.6.3 Caracterul probabilistic al undelor de Broglie

Pentru a determina semnificația fizică a undelor de Broglie s-a considerat un proces de difracție al unui fascicul de electroni care apoi cad pe un ecran fluorescent (fig.65).

Conform concepției clasice, dacă se utilizează un fascicul luminos (concepția clasică a caracterului ondulatoriu al luminii) pe ecranul 1, datorită difracției pe fantele A și B și apoi a interferenței, se va obține o figură de interferență caracterizată prin maxime și minime după cum $\Delta x = r_2 - r_1 = 2m\frac{\lambda}{2}$ (maxime) sau $\Delta x = r_2 - r_1 = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}$ (minime).

Utilizându-se fascicule cu electroni (se admite caracterul dual) situația este alta: imaginea depinde de timpul cât durează acțiunea fasciculului de electroni.

Pentru timpi de expunere mici se obține imaginea din fig. 65a, iar pentru durate mai îndelungate se obține fig.65b caracterizată prin apariția unor franje de interferență evidente, dar, **aceste franje au o structură granulară**. Structura granulară a franjelor ne spune că punctele respective reprezintă urmele unor procese discrete. Pentru situația din fig 65a (timp scurt) reparațiua acestor puncte pare haotică, dar pentru situația b (timp îndelungat) se constată că punctele se adună în anumite regiuni, după legi bine cunoscute.

Observații:

- Figura de interferență obținută rezultă din acțiunea unui **număr mare de electroni**, deci, legătura dintre caracterul corpuscular și cel ondulatoriu al particulelor nu poate fi făcută decât pe baza unui **studiu statistic**.

- Pentru cazul unei franje luminoase din figura de interferență, conform caracterului corpuscular, în regiunea respectivă există un număr maxim de electroni, în timp ce, din punct de vedere ondulatoriu, dacă intensitatea luminoasă este maximă înseamnă că pătratul amplitudinii undei (asociată electronului) este maxim.

CAPITOLUL 3.

3 Noțiuni de mecanică cuantică nerelativistă

3.1 Starea sistemelor cuantice. Semnificația funcției de undă Ψ

Mecanica cuantică, ca teorie coerentă a comportării microparticulelor a apărut în două forme diferite:

- mecanica matricială a lui Heisenberg (1925)
- mecanica ondulatorie a lui Schrödinger (1926)

Mecanica ondulatorie a lui Schrödinger pleacă de la ideea lui de Broglie. Funcția de undă asociată unei microparticule de masă m aflată într-un câmp de forțe caracterizat prin energia potențială $U(\vec{r}, t)$ trebuie să îndeplinească ecuația cu derivate parțiale propusă de către Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) + U(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) \quad (3.1.1)$$

numită **ecuația temporală** - un postulat fundamental al mecanicii cuantice.

Observație:

Dacă $U = U(\vec{r})$, deci energia potențială nu depinde explicit de timp (câmp de forțe staționar) atunci se poate face o separare de variabile iar funcția de undă se poate scrie ca un produs de două funcții:

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E t} u(\vec{r}) \quad (3.1.2)$$

unde funcția $u(\vec{r})$ satisface **ecuația Schrödinger atemporală** (independentă de timp):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u(\vec{r}) + U(\vec{r}) u(\vec{r}) = E u(\vec{r}) \quad (3.1.3)$$

iar E reprezintă energia totală a microparticulei.

Observații

- ecuația (3.1.3) este ecuația de bază a mecanicii cuantice nerelativiste, fiind

determinată pentru cazul când $v \ll c$

- este o ecuație diferențială de gradul doi, liniară și omogenă
- soluția ecuației (3.1.3) este funcția $u(\vec{r})$ care se numește **funcție de undă proprie**
- prin rezolvarea ecuației (3.1.3) se poate determina energia E a microparticulei corespunzătoare stărilor staționare precum și funcțiile de undă corespunzătoare acestor stări.

Referitor la semnificația fizică (statistică) a funcției de undă Ψ , Max Born sugerează (1926) că, din cunoașterea lui Ψ se pot extrage legi statistice referitoare la comportamentul microparticulelor, adică:

$$\Psi\Psi^*dV = |\Psi|^2dV = dP \quad (3.1.4)$$

determină probabilitatea ca microparticula, căreia i s-a asociat funcția de undă $\Psi(x, y, z, t)$ să se găsească, la momentul t în regiunea din spațiu $dV = dxdydz$, din jurul punctului (x, y, z) .

$$|\Psi|^2 = \frac{dP}{dV} \quad (3.1.5)$$

reprezintă densitatea de probabilitate de localizare a microparticulei în spațiu-timp.

Observații:

- Faptul că particula se află cu certitudine într-un punct din spațiu conduce la **condiția de normare**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dP = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2dV = 1 \quad (3.1.6)$$

- Conform statisticii, prin cunoașterea funcției de undă Ψ se pot determina valorile medii pentru orice funcție $f(x, y, z)$ (mărime fizică dinamică):

$$\bar{f}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(\vec{r})f(x, y, z)\Psi(\vec{r})dxdydz \quad (3.1.7)$$

- Pentru orice sistem cuantic există o serie de mărimi fizice care pot fi măsurate fiecare în parte: impulsul, momentul cinetic, energia, momentul magnetic, etc. Aceste mărimi se numesc, în mecanica cuantică, **observabile**.

Starea unui sistem cuantic se manifestă în rezultatele care se obțin la măsurarea observabilelor.

- Pentru unele observabile se poate găsi orice răspuns experimental, ca și în cazul clasic (poziție, impuls) - **observabile continue**, iar pentru altele (energie, moment cinetic, moment magnetic) se vor găsi numai anumite valori - acestea sunt **observabile cuantificate**.

- Din cunoașterea funcției Ψ rezultă statisticile tuturor observabilelor:

- există **stări pure**, stări pentru care statisticile observabilelor se obțin dintr-o singură funcție de undă

- există **stări mixte**, stări pentru care statisticile observabilelor nu se obțin dintr-o singură funcție de undă.

- Condițiile pe care trebuie să le satisfacă funcția de undă sunt:

1. continuitatea funcției și a derivatelor sale
2. mărginire
3. integrabilitate în modul pătrat (pe tot spațiul)

Aceste condiții enumerate decurg din cerința ca mărimile de interes fizic (**statisticile observabilelor**), care se extrag din funcția de undă, să aibe sens.

3.2 Cuantificarea observabilelor

Fie o microparticulă de masă m , aflată într-un câmp de forțe $U(\vec{r})$ și cu energia totală E . Ecuația Schrödinger atemporală va fi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u(\vec{r}) + U(\vec{r}) u(\vec{r}) = E u(\vec{r}) \quad (3.2.8)$$

Din punct de vedere matematic această ecuație este o **ecuație cu valori proprii** care se poate scrie:

$$\hat{H} u = E u \quad (3.2.9)$$

unde $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U$ este operatorul energiei care se aplică funcției de undă $u(\vec{r})$, iar E reprezintă **valoarea proprie** a operatorului \hat{H} .

Din punct de vedere clasic energia totală a microparticulei se poate scrie ca suma dintre energia cinetică și cea potențială:

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r}) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(\vec{r}) \quad (3.2.10)$$

Operatorul \hat{H} asociat energiei E se poate scrie ca o sumă de operatori respectând relația (3.2.10):

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2 + \hat{P}_z^2) + U(\vec{r}) \quad (3.2.11)$$

unde $\hat{P}_x, \hat{P}_y, \hat{P}_z$ sunt operatorii diferențiali asociați impulsului $\vec{p}(p_x, p_y, p_z)$:

$$\begin{aligned} \hat{P}_x &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \\ \hat{P}_y &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \\ \hat{P}_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Deci, oricărei mărimi fizice (observabile) îi corespunde, în mecanica cuantică, un operator care acționează asupra funcției de undă.

Dacă notăm cu A mărimea fizică (observabila), iar cu \hat{A} operatorul asociat, atunci valorile posibile ale observabilei sunt numai valorile proprii ale operatorului, valori ce rezultă numai prin rezolvarea ecuației cu valori proprii:

$$\hat{A} u = a u \quad (3.2.13)$$

unde operatorul \hat{A} este un **operator hermitic** sau **autoadjunct** $\hat{A} = \hat{A}^+$, iar a este valoarea proprie a operatorului. Pentru operatorii hermitici valorile proprii sunt numere reale, iar valorile observabilelor fizice sunt chiar valorile proprii ale operatorilor asociați observabilelor.

3.3 Conceptul de stare a unei particule

Starea unei particule este determinată, din **punct de vedere clasic**, de poziția și impulsul particulei la momentul respectiv, cu următoarele afirmații:

- din cunoșterea stării (\vec{r}, \vec{p}) rezultă toate proprietățile particulei la momentul respectiv (energia, momentul cinetic, momentul magnetic, etc)

- starea particulei poate fi determinată pe cale experimentală prin măsurarea poziției și impulsului particulei
- starea particulei poate fi cunoscută cu precizie, erorile experimentale fiind neglijabile în comparație cu mărimile măsurate
- starea la un moment dat determină univoc starea la orice moment ulterior dacă se cunosc forțele ce acționează asupra particulei
- mărimile fizice (care sunt funcție de poziție, impuls și timp) variază continuu în timp
- se poate prevedea traiectoria $\vec{r}(t)$ a particulei

Din **punct de vedere cuantic**, asupra conceptului de stare se pot face următoarele afirmații:

- poziția x și impulsul p_x nu mai pot fi determinate cu orice precizie
- noțiunea de traiectorie nu mai are sens
- mărimile fizice pot lua valori continue sau cuantificate
- starea particulei se poate caracteriza cu ajutorul funcției de undă Ψ , deci prin rezolvarea ecuației Schrödinger
- din cunoașterea funcției de undă Ψ se pot deduce statisticile observabilelor fizice - sistemele cuantice ascultă de legi statistice
- dacă se cunoaște funcția de undă la momentul t_o , se poate determina funcția de undă la orice moment $t > t_o$ prin rezolvarea ecuației Schrödinger generale:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{r}, t) \quad (3.3.14)$$

3.4 Aplicații ale ecuației Schrödinger

3.4.1 Studiul cuantic al unei particule libere

Pentru o particulă liberă energia potențială $U(x, y, z) = 0$, iar ecuația Schrödinger staționară (atemporală) devine:

$$\Delta\Psi(x, y, z) + \frac{2m}{\hbar^2}E\Psi = 0 \quad (3.4.15)$$

unde E este energia totală a particulei de masă m . Dacă vom introduce **notația**:

$$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE} = \frac{p}{\hbar} \quad (3.4.16)$$

atunci soluția ecuației diferențiale omogene de grad doi (3.4.15) va fi de forma:

$$\Psi(\vec{r}) = Ae^{\pm i\vec{k}\vec{r}} = Ae^{\pm \frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{r}} \quad (3.4.17)$$

O soluție particulară a ecuației Schrödinger temporale, pentru particula liberă, este unda de Broglie:

$$\Psi_B(\vec{r}, t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(E t \mp \vec{p}\vec{r})} \quad (3.4.18)$$

Observații:

- $\Psi_B(\vec{r}, t)$ coincide cu forma complexă de reprezentare a unei unde plane monocromatice cu pulsația:

$$\omega = E/\hbar \quad (3.4.19)$$

și cu vectorul de undă:

$$\vec{k} = \vec{p}/\hbar \quad (3.4.20)$$

relații ce reprezintă relațiile lui de Broglie (2.5.6) și (2.5.7).

- Conform relației (3.4.16) unei energii fixate E îi corespund o infinitate de unde de Broglie, care diferă una de cealaltă prin orientarea vectorului \vec{p} . Mărimea vectorului \vec{p} este fixată prin relația (3.4.16).

- Identificarea vectorului \vec{p} cu impulsul particulei se face în legătură cu faptul că sunt satisfăcute ecuațiile:

$$\hat{P}\Psi_B(\vec{r}, t) = \vec{p}\Psi_B(\vec{r}, t) \quad (3.4.21)$$

$$\hat{H}\Psi_B(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi_B(\vec{r}, t) = E\Psi_B(\vec{r}, t) \quad (3.4.22)$$

Deci, funcția de undă de Broglie $\Psi_B(\vec{r}, t)$ este nu numai funcție proprie a energiei dar și funcție proprie a operatorilor atașați componentelor impulsului; p_x, p_y, p_z sunt valorile proprii corespunzătoare operatorilor impulsului (componentelor).

- Densitatea de probabilitate de localizare în spațiu a particulei libere va fi:

$$|\Psi_B(\vec{r}, t)|^2 = \Psi_B^*(\vec{r}, t)\Psi_B(\vec{r}, t) = AA^* = A^2 = ct \quad (3.4.23)$$

deci, particula liberă, cu impuls determinat, se află cu aceeași probabilitate în orice punct din spațiu în acord cu relațiile de nedeterminare Heisenberg:

$$\Delta p_x \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow \infty \quad (3.4.24)$$

- Funcția de undă (3.4.18) nu satisface condiția de normare (3.1.6):

$$\int \int \int \Psi_B(\vec{r}, t)\Psi_B^*(\vec{r}, t)dV = \infty \quad (3.4.25)$$

Interpretarea acestui rezultat este aceea că, nu este realizabilă starea în care energia și impulsul particulei libere să fie bine determinate (starea ideală).

3.4.2 Particula în groapă tridimensională de potențial

Fie o groapă de potențial tridimensională de formă cubică, cu latura L pentru care energia potențială satisface condițiile:

$$U(x, y, z) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & 0 < x < L \\ \infty & x > L \end{cases} \quad (3.4.26)$$

Aceste condiții sunt echivalente cu faptul că pereții cubului sunt perfect reflectători, deci funcția de undă $\Psi(x, y, z)$ trebuie să fie egală cu zero în toate punctele de pe pereții interiori ai cubului.

Ecuția Schrödinger atemporală pentru particula aflată în interiorul cubului este:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi = 0 \quad (3.4.27)$$

Soluțiile unor astfel de ecuații cu derivate parțiale se caută de forma:

$$\Psi(x, y, z) = \Psi_x(x)\Psi_y(y)\Psi_z(z) \quad (3.4.28)$$

Dacă introducem această soluție în ecuația (3.4.27) vom obține:

$$\Psi_y \Psi_z \frac{d^2 \Psi_x}{dx^2} + \Psi_x \Psi_z \frac{d^2 \Psi_y}{dy^2} + \Psi_x \Psi_y \frac{d^2 \Psi_z}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi_x \Psi_y \Psi_z = 0 \quad (3.4.29)$$

Această ultimă ecuație se mai poate scrie sub forma:

$$\frac{1}{\Psi_x} \frac{d^2 \Psi_x}{dx^2} + \frac{1}{\Psi_y} \frac{d^2 \Psi_y}{dy^2} + \frac{1}{\Psi_z} \frac{d^2 \Psi_z}{dz^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} E \quad (3.4.30)$$

Ecuația (3.4.30) nu poate fi satisfăcută decât dacă fiecare termen din partea stângă este egal cu câte o constantă:

$$\frac{1}{\Psi_x} \frac{d^2 \Psi_x}{dx^2} = -k_x^2 \quad \frac{1}{\Psi_y} \frac{d^2 \Psi_y}{dy^2} = -k_y^2 \quad \frac{1}{\Psi_z} \frac{d^2 \Psi_z}{dz^2} = -k_z^2 \quad (3.4.31)$$

unde:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E \quad (3.4.32)$$

Fiecare din aceste ecuații (3.4.31) admit soluții de tipul:

$$\Psi_x(x) = A_1 \sin k_x x + A_2 \cos k_x x \quad (3.4.33)$$

$$\Psi_y(y) = A_1 \sin k_y y + A_2 \cos k_y y \quad (3.4.34)$$

$$\Psi_z(z) = A_1 \sin k_z z + A_2 \cos k_z z \quad (3.4.35)$$

cu condițiile:

$$x = 0 \rightarrow \Psi_x(0) = 0 \rightarrow A_2 = 0 \quad (3.4.36)$$

$$x = L \rightarrow \Psi_x(L) = 0 \rightarrow A_1 \sin k_x L = 0$$

$$y = 0 \rightarrow \Psi_y(0) = 0 \rightarrow A_4 = 0 \quad (3.4.37)$$

$$y = L \rightarrow \Psi_y(L) = 0 \rightarrow A_3 \sin k_y L = 0$$

$$z = 0 \rightarrow \Psi_z(0) = 0 \rightarrow A_6 = 0 \quad (3.4.38)$$

$$z = L \rightarrow \Psi_z(L) = 0 \rightarrow A_5 \sin k_z L = 0$$

Din ultimele ecuații (3.4.36-3.4.38) rezultă că nu toate valorile pentru k_x , k_y și k_z sunt posibile, ci numai acelea pentru care:

$$k_x = n_x \frac{\pi}{L} \quad k_y = n_y \frac{\pi}{L} \quad k_z = n_z \frac{\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.4.39)$$

Deci, soluția ecuației Schrödinger pentru o particulă de masă m aflată într-o groapă de potențial este:

$$\Psi(x, y, z) = A \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) \quad (3.4.40)$$

Conform relațiilor (3.4.32) și (3.4.39), energia particulei poate avea numai valori discrete:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (3.4.41)$$

Observații:

- Din relația (3.4.41) se observă că, unui nivel energetic E_n îi corespund mai multe stări cuantice $\Psi_{n_x n_y n_z}$. În acest caz se spune că nivelul energetic considerat este **degenerat**, iar numărul stărilor cuantice corespunzătoare reprezintă **gradul de degenerare**.

- Din condiția de normare a funcției de undă Ψ :

$$A^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) dx \int_0^L \sin^2\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) dy \int_0^L \sin^2\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) dz = 1 \quad (3.4.42)$$

rezultă că:

$$A = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} \quad (3.4.43)$$

iar funcția de undă (3.4.40) va avea forma:

$$\Psi_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) \quad (3.4.44)$$

3.4.3 Bariera de potențial. Efectul tunel

Fie o particulă de masă m ce se deplasează de la stânga spre dreapta și cade pe o barieră de potențial de înălțime E_o și de lățime d (fig.66):

Din punct de vedere al fizicii clasice, particula de energie $E > E_o$ va trece **peste bariera de potențial**; pe porțiunea $0 < x < d$ particula este încetinită, iar pentru $x > d$ particula își recapătă viteza dinainte de barieră. Dacă $E < E_o$, particula nu poate trece de bariera de potențial.

Din punct de vedere al mecanii cuantice, particula are un alt comportament. Chiar dacă $E > E_o$ există o probabilitate diferită de zero ca particula să fie reflectată; de asemenea, pentru $E < E_o$ există o probabilitate diferită

de zero ca particula să treacă **prin bariera de potențial** și să ajungă în regiunea $x > d$. Acest comportament rezultă direct din ecuația Schrödinger și este verificat experimental. Pentru domeniile *I* și *III*, ecuația Schrödinger are forma:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\Psi = 0 \quad (3.4.45)$$

iar pentru domeniul *II* are forma:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - E_o)\Psi = 0 \quad (3.4.46)$$

Soluțiile ecuației Schrödinger pentru cele trei domenii vor fi:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) &= A_1e^{ikx} + B_1e^{-ikx} && \text{domeniul I} \\ \Psi_2(x) &= A_2e^{ik_1x} + B_2e^{-ik_1x} && \text{domeniul II} \\ \Psi_3(x) &= A_3e^{ikx} + B_3e^{-ikx} && \text{domeniul III} \end{aligned} \quad (3.4.47)$$

unde s-au introdus notațiile:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad k_1^2 = \frac{2m(E - E_o)}{\hbar^2} \quad (3.4.48)$$

Soluția de tipul e^{ikx} corespunde **undei progresive** ce se propagă în sensul axei Ox , iar soluția e^{-ikx} reprezintă **unda regresivă** ce se propagă în sens invers axei Ox . În domeniul *III* există doar unda progresivă, deci $B_3 = 0$. Funcția de undă (3.4.47) trebuie să satisfacă condițiile de continuitate:

$$\Psi_1(0) = \Psi_2(0) \quad \Psi_2(d) = \Psi_3(d) \quad (3.4.49)$$

$$\left. \frac{\Psi_1(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{\Psi_2(x)}{dx} \right|_{x=0} \quad \left. \frac{\Psi_2(x)}{dx} \right|_{x=d} = \left. \frac{\Psi_3(x)}{dx} \right|_{x=d}$$

Din aceste condiții rezultă sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 &= A_2 + B_2 \\ A_2e^{k_1d} + B_2e^{-k_1d} &= A_3e^{ikd} \end{aligned} \quad (3.4.50)$$

$$\begin{aligned} ik(A_1 - B_1) &= k_1(A_2 - B_2) \\ k_1(A_2e^{k_1d} - B_2e^{-k_1d}) &= ikA_3e^{ikd} \end{aligned}$$

Prin rezolvarea acestui sistem de ecuații se obține coeficientul de trecere prin bariera de potențial sau **transparența barierei de potențial**:

$$T = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2 \cong e^{-2k_1d} = \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(E_o - E)}d\right] \quad (3.4.51)$$

Trecerea prin bariera de potențial este asimilată cu trecerea printr-un tunel și de aceea fenomenul cuantic studiat este cunoscut sub numele de **efect tunel**. Efectul tunel este o consecință a mecanicii cuantice și cu ajutorul lui se explică o serie de fenomene ca: dezintegrarea α a nucleelor radioactive, cinetica reacțiilor chimice, emisia electronilor din metale, diode tunel semiconductoare etc. Microscopia cu baleiaj prin efect tunel (1986) este utilizată pentru studiul stărilor de suprafață în metale și semiconductori, al unor reacții catalitice, al fenomenului de supraconductibilitate, al morfologiei unor viruși etc.

3.4.4 Studiul cuantic al oscilatorului armonic

Din punct de vedere clasic, oscilatorul armonic are energia totală:

$$E = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega_o^2 A^2}{2} \quad (3.4.52)$$

unde, k este constanta de elasticitate a oscilatorului, iar ω_o este pulsația proprie. Din ecuația (3.4.52) se observă că energia totală variază continuu în funcție de amplitudinea A .

Din punct de vedere al mecanicii cuantice, ecuația Schödinger asociată oscilatorului armonic este:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\Psi = 0 \quad (3.4.53)$$

unde $U = \frac{1}{2}m\omega_o^2 x^2$ reprezintă energia potențială a oscilatorului armonic. Din rezolvarea ecuației diferențiale (3.4.53) se va obține, pentru energia oscilatorului armonic, expresia:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_o \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.4.54)$$

Acest rezultat cuantic se deosebește de ipoteza lui Planck conform căreia energia era:

$$E_n = n\hbar\omega_o \quad (3.4.55)$$

prin existența termenului $E_o = \frac{1}{2}\hbar\omega_o$, numită **energie de zero**. Deci, energia oscilatorului armonic nu poate fi niciodată zero aceasta fiind o consecință a relațiilor de nedeterminare Heisenberg.

Funcțiile de undă ce caracterizează primele trei stări energetice ale oscilatorului sunt:

$$\Psi_o(y) = C_o e^{-\frac{1}{2}y^2} \quad (3.4.56)$$

$$\Psi_1(y) = C_1 2e^{-\frac{1}{2}y^2} \quad (3.4.57)$$

$$\Psi_2(y) = C_2(4y^2 - 2)e^{-\frac{1}{2}y^2} \quad (3.4.58)$$

unde $y = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x$, iar C_0, C_1, C_2 sunt constante.

În fig.67 sunt indicate nivelele energetice staționare ale oscilatorului armonic și densitatea de probabilitate de localizare a acestuia pe axa Ox . Oscilatorul aflat în stările energetice staționare E_n efectuează vibrații dar nu radiază. Trecerea oscilatorului de pe un nivel energetic staționar pe un altul are loc numai cu respectarea **regulii de selecție**:

$$\Delta n = \pm 1 \quad (3.4.59)$$

Printr-o astfel de tranziție, frecvența fotonului emis, sau absorbit este egală cu ν_0 , adică cu frecvența proprie a oscilatorului.

3.4.5 Interpretarea statistică a relațiilor de nedeterminare Heisenberg

După cum am văzut în paragraful (& 2.5.4), relațiile de nedeterminare Heisenberg limitează numărul de variabile dinamice care au valori determinate într-o stare cuantică dată.

Fie două variabile dinamice A și B ce au valori simultan determinate (**variabilele sunt compatibile**) într-o stare caracterizată de funcția de undă Ψ , și fie \hat{A} respectiv \hat{B} operatorii asociați acestor observabile. Deci, funcția de undă trebuie să fie, concomitent, funcție proprie atât pentru operatorul \hat{A} cât și pentru operatorul \hat{B} , adică să fie satisfăcute ecuațiile cu valori proprii:

$$\hat{A}\Psi = a\Psi \quad \hat{B}\Psi = b\Psi \quad (3.4.60)$$

sau, mai putem scrie:

$$\hat{B}\hat{A}\Psi = a\hat{B}\Psi = ab\Psi \quad \hat{A}\hat{B}\Psi = b\hat{A}\Psi = ab\Psi \quad (3.4.61)$$

de unde se obține:

$$(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\Psi = 0 \quad (3.4.62)$$

Deci, pentru ca mărimile fizice A și B să aibe valori simultan determinate, într-o stare cuantică dată (să fie compatibile) se impune ca operatorul:

$$\hat{C} = [\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}] \equiv [\hat{A}, \hat{B}] \quad (3.4.63)$$

să fie egal cu zero. Operatorul \hat{C} se numește **comutator** operatorilor \hat{A} și \hat{B} . Dacă operatorul \hat{C} este diferit de zero, atunci mărimile fizice nu au valori determinate într-o stare cuantică dată (**variabilele sunt incompatibile**). Conținutul fizic al relațiilor de incertitudine se reflectă în comportarea unui colectiv statistic atașat sistemului fizic: ΔA cracterizează statistica obținută

dacă am efectua măsurarea observabilei A , iar ΔB statistica obținută dacă am măsura observabila B . Știm că, pentru a obține valorile lui ΔA și ΔB , cu fiecare exemplar al colectivului statistic putem experimenta doar o dată, fie pentru a măsura observabila A , fie pentru a măsura pe B . Pentru observabilele incompatibile nu putem fi niciodată în situația de a avea certitudinea unor rezultate unice pentru cele două observabile. În cazul observabilelor compatibile această situație se poate realiza.

Un caz particular, special al relațiilor de nedeterminare este cel cunoscut sub numele de **relația de incertitudine energie-timp**, care se scrie sub forma:

$$\tau \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3.4.64)$$

Abaterea standard a energiei ΔE nu depinde de timp, în schimb abaterea ΔA depinde. Mărimea:

$$\tau_A \equiv \frac{\Delta A}{\left| \frac{\Delta A}{dt} \right|} \quad (3.4.65)$$

are dimensiuni de timp și caracterizează statistica observabilei A . Pentru fiecare observabilă a sistemului fizic studiat se definește un astfel de timp τ_A , iar timpul τ este corelat de τ_A prin relația:

$$\tau = (\text{minim } \tau_A) \quad (3.4.66)$$

și ne dă o idee despre evoluția în timp a sistemului.

Se observă că în forma (3.4.64) relația de incertitudine energie-timp are o semnificație diferită (diferite situații experimentale) de a relațiilor de incertitudine pentru două observabile oarecare:

- ΔE - lărgimea unui nivel energetic metastabil al unui sistem cuantic (atom, nucleu) și τ - viața medie a sistemului în starea respectivă
- ΔE - precizia unei măsurători a energiei unui sistem și τ - timpul minim necesar măsurării.

4 Anexă

4.1 Elemente de analiză matematică

Deoarece rezultatele analizei vectoriale permit o scriere mai compactă și mai intuitivă a formulelor fizice, vom prezenta, pe scurt, unele noțiuni și formule fundamentale.

Vectorul elementului de suprafață $d\vec{s}$, reprezintă vectorul orientat perpendicular pe elementul de suprafață considerat și este egal, în modul, cu ds . Vectorul $d\vec{s}$ este orientat în sensul de înaintare a burghiului drept care se rotește în sensul de parcurgere a conturului Γ (fig. 68a). Astfel, se poate scrie:

$$d\vec{s} = \vec{e}_n ds \quad (4.1.1)$$

unde \vec{e}_n este vectorul unitate, perpendicular pe elementul de suprafață.

Fluxul unui vector \vec{A} prin suprafața de arie S (fig.68b) se definește prin relația:

$$\Phi = \int_S \int \vec{A} d\vec{s} \quad (4.1.2)$$

Teorema Gauss-Ostrogradski. Se calculează fluxul vectorului \vec{A} printr-o suprafață închisă și se consideră sensul pozitiv al vectorului $d\vec{s}$ spre exteriorul suprafeței de arie S . Expresia matematică a teoremei Gauss-Ostrogradski sub formă integrală este:

$$\Phi = \int_S \int \vec{A} d\vec{s} = \int \int \int_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV \quad (4.1.3)$$

unde V este volumul limitat de suprafața închisă S .

Divergența unui vector \vec{A} este o mărime scalară definită prin relația:

$$div \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (4.1.4)$$

Ținând cont de expresia matematică a teoremei Gauss-Ostrogradski, $div \vec{A}$ se poate exprima:

$$div \vec{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{A} d\vec{s} \quad (4.1.5)$$

deci, $div \vec{A}$ reprezintă raportul dintre fluxul vectorului \vec{A} printr-o suprafață închisă care înconjoară punctul considerat, când volumul limitat de suprafața închisă tinde spre zero. Astfel, teorema Gauss-Ostrogradski se mai poate scrie sub forma integrală compactă:

$$\Phi = \int_S \int \vec{A} d\vec{s} = \int \int \int_V div \vec{A} dV \quad (4.1.6)$$

Teorema Stokes. Integrala vectorului \vec{A} pe un contur închis Γ , sau **circulația** vectorului \vec{A} pe conturul închis Γ (fig.69) este:

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{l} = \oint_{\Gamma} (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \quad (4.1.7)$$

Semnificația fizică a circulației este ușor de recunoscut. Dacă, de exemplu, vectorul \vec{A} este o forță \vec{F} , atunci circulația pe conturul C este chiar **lucrul mecanic** efectuat pe conturul închis Γ . Teorema Stokes indică faptul că circulația C a unui vector \vec{A} se poate exprima printr-o integrală pe suprafața S limitată de conturul Γ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{l} = \int \int_S \text{rot} \vec{A} d\vec{s} \quad (4.1.8)$$

expresie ce reprezintă formula matematică a teoremei Stokes.

Derivarea în raport cu raza vectorie. Fie vectorul ∇ (operatorul nabla) cu componentele:

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x} \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y} \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.1.9)$$

adică:

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.1.10)$$

Produsul scalar dintre ∇ și un vector \vec{A} este:

$$\nabla \vec{A} = \nabla_x A_x + \nabla_y A_y + \nabla_z A_z = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \text{div} \vec{A} \quad (4.1.11)$$

Produsul vectorial dintre ∇ și un vector \vec{A} este:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} \equiv \text{rot} \vec{A} \quad (4.1.12)$$

Prin aplicarea operatorului ∇ unei funcții scalare $\varphi(x, y, z)$ se obține un vector, denumit **gradientul funcției scalare** φ :

$$\text{grad} \varphi = \nabla \varphi = \vec{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (4.1.13)$$

Aplicarea operatorului ∇ asupra produsului scalar a doi vectori $\vec{A}\vec{B}$ este:

$$\text{grad}(\vec{A}\vec{B}) = \nabla(\vec{A}\vec{B}) = (\vec{B}\nabla)\vec{A} + \vec{B} \times \text{rot} \vec{A} + \vec{A} \times \text{rot} \vec{B} + (\vec{A}\nabla)\vec{B} \quad (4.1.14)$$

Aplicarea operatorului ∇ asupra produsului vectorial a doi vectori $\vec{A} \times \vec{B}$ este:

$$\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \nabla(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \text{rot} \vec{B} \quad (4.1.15)$$

Aplicarea repetată a operatorului ∇ - divergența rotorului unui vector este zero:

$$\text{div} \text{rot} \vec{A} = \nabla(\nabla \times \vec{A}) = 0 \quad (4.1.16)$$

Divergența gradientului unei funcții scalare $\varphi(x, y, z)$ este:

$$\text{div} \text{grad} \varphi = (\nabla \cdot \nabla)\varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (4.1.17)$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] Richard P. Feynman, *Fizica Modernă - Electromagnetismul; Structura Materiei, Vol II* (traducere din engleză), Editura Tehnică, București, 1970
- [2] D. Halliday, R. Resnick, *Fizică, Vol. II* (traducere din engleză), Editura Didactică și Pedagogică, București, 1975
- [3] Edward M. Purcell, *Electricitate și Magnetism- Cursul de Fizică Berkley, Vol.II*, (traducere din engleză), Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982
- [4] Viorica Florescu, *Curs de Mecanică cuantică, Vol.I,II*, Facultatea de Fizică, Universitatea București, litografiat 1981
- [5] I.M. Popescu, *Fizica, Vol. 2*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982
- [6] Eyvind H. Wichmann, *Fizică cuantică - Cursul de Fizică Berkeley, Vol.IV*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983
- [7] Gh. Cristea, I. Ardelean, *Electricitatea, Magnetismul, Vol.2*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1985
- [8] Traian I. Crețu, *Fizică - Curs Universitar*, Editura Tehnică, București, 1996
- [9] Doina E. Gavrilă, *Fizică I, Teorie și probleme*, Departamentul de Fizică, UPB, litografiat 2001

Fig.33

Fig.34

Fig.35

Fig.36

Fig.37

Fig.38

Fig.39

Fig.40

Fig.41

Fig.42

Fig.43

Fig.44

Fig.45

Fig.46

Fig.47

Fig.48

Fig.49

Fig.50