

# Contents

<b>1</b>	<b>Câmpul electromagnetic</b>	<b>2</b>
1.1	Breviar . . . . .	2
1.2	Probleme propuse . . . . .	11
1.3	Soluții . . . . .	33
<b>2</b>	<b>Unde electromagnetice</b>	<b>89</b>
2.1	Breviar . . . . .	89
2.2	Probleme propuse . . . . .	107
2.3	Soluții . . . . .	114
<b>3</b>	<b>Originile mecanicii cuantice</b>	<b>145</b>
3.1	Breviar . . . . .	145
3.2	Probleme propuse . . . . .	154
3.3	Soluții . . . . .	158
<b>4</b>	<b>Mecanică cuantică nerelativistă</b>	<b>172</b>
4.1	Breviar . . . . .	172
4.2	Probleme propuse . . . . .	175
4.3	Soluții . . . . .	178

# 1 Câmpul electromagnetic

## 1.1 Breviar

Forma de existență a materiei din jurul unui corp încărcat electric cu sarcina  $Q$  sau, mai general a unei distribuții volumice de sarcină  $\rho = \frac{dQ}{dV}$ , aflată în repaus sau în mișcare, prin intermediul căreia se transmit interacțiunile electrice se numește **câmp electric**.

Câmpul electric se caracterizează prin următoarele mărimi fizice:

**Intensitatea câmpului electric** notată cu  $\vec{E}$ , mărime vectorială ce satisface legea lui Gauss valabilă atât pentru cazul staționar  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , cât și pentru cazul nestaționar  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (1.1.1)$$

unde  $\varepsilon$  reprezintă permitivitatea electrică a mediului și caracterizează proprietățile electrice ale acestuia.

**Fluxul electric**  $\Phi_e$  este definit pentru o suprafață închisă ca fiind:

$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (1.1.2)$$

unde  $S$  reprezintă suprafața gaussiană ce delimităază volumul  $V$  din spațiul în interiorul căruia este cuprinsă distribuția de sarcină  $\rho$ .

Conform teoremei lui Gauss, fluxul electric se mai poate scrie:

$$\Phi_e = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \rho \, dV \quad (1.1.3)$$

### Observații

- Ecuația (1.1.1) ne arată că sarcinile electrice (sau distribuția volumică  $\rho$ ) reprezintă **sursele câmpului electric**
- Divergența este un operator matematic ce se aplică unei funcții vectoriale și are expresia, în coordonate carteziene:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z = \nabla \cdot \vec{E} \quad (\text{un scalar}) \quad (1.1.4)$$

- Teorema lui Gauss sub forma  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$  reprezintă una din ecuațiile fundamentale ale teoriei câmpului electromagnetic a lui Maxwell.
- Se introduce **vectorul**  $\vec{D}$  care se numește **inducție electrică** și care se exprimă prin relația:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (1.1.5)$$

Această ecuație reprezintă **legea de material pentru câmpul electric**, pentru medii liniare, omogene și izotrope. Teorema Gauss sub formă diferențială (1.1.1) se mai scrie atunci sub forma:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (1.1.6)$$

**Potențialul electric** notat cu  $\varphi(x, y, z)$  este o mărime scalară și este definit, într-un punct din câmpul electric aflat la distanța  $r$  de sursă, prin relația:

$$\varphi(r) = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^\infty E dl \cos\alpha = \int_r^\infty E dr \quad (1.1.7)$$

iar diferența de potențial dintre două puncte aflate la distanțele  $r_1$  și respectiv  $r_2$  de sursă va fi atunci:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr \quad (1.1.8)$$

### Observații

- Pentru cazul staționar câmpul electric este un **câmp conservativ** ( $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ ), deci câmpul poate fi descris prin gradientul unei funcții scalare, potențialul electric  $\varphi$ :

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\nabla \varphi \quad (1.1.9)$$

- Gradientul este un operator matematic ce se aplică unei funcții scalare și are expresia, în coordonate carteziene:

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} = \nabla \varphi \quad (1.1.10)$$

- Dacă se ține cont de relațiile (1.1.1.) și (1.1.9) se va obține **ecuația Poisson** satisfăcută de potențialul electric  $\varphi$ :

$$\operatorname{div}(-\operatorname{grad}\varphi) = \frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (\text{ecuația Poisson}) \quad (1.1.11)$$

S-a ținut cont de faptul că divergența aplicată unui gradient reprezintă laplaceanul  $\Delta$ :

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}) = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.1.12)$$

Ecuația Poisson permite calcularea potențialului electric într-un punct  $\vec{r}$  oarecare al câmpului electric creat de o distribuție de sarcină  $\rho$ . După calcularea potențialului, se poate determina apoi și intensitatea câmpului electric, în punctul respectiv, conform relației (1.1.9).

**Circulația vectorului  $\vec{E}$**  pe o curbă închisă  $\Gamma$  este definită ca fiind:

$$C_E = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.1.13)$$

Pentru câmpurile conservative însă  $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ , deci circulația lui  $\vec{E}$  este zero, sau, scrisă cu ajutorul rotorului:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (1.1.14)$$

## Observații

- Rotorul este un operator matematic ce se aplică unei funcții vectoriale și are expresia:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} = \nabla \times \vec{E} \quad (\text{un vector}) \quad (1.1.15)$$

- Din punct de vedere fizic,  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$  reprezintă condiția suficientă pentru ca un câmp vectorial să fie conservativ, adică să poată fi descris de gradientul unei funcții potențiale.
- Ecuația  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$  reprezintă una din ecuațiile fundamentale din teoria Maxwell a câmpului electromagnetic pentru cazul staționar.

**Ecuăția de continuitate** a curentului electric reprezintă legea de conservare a sarcinii electrice și are forma:

$$\nabla \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.1.16)$$

unde  $\vec{j}$  reprezintă densitatea de curent. Conform legii de conservare a sarcinii, fluxul densității de curent printr-o suprafață închisă este egal cu viteza de scădere în timp a sarcinii din interiorul suprafetei,  $-\frac{\partial \rho}{\partial t}$ .

### Observații

- Pentru cazul staționar (câmpurilor statice)  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , deci  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ .
- Pe baza teoriei electronice a conductibilității electrice, densitatea de curent  $\vec{j}$  se poate exprima cu ajutorul unei constante ce caracterizează proprietățile intrinseci ale unui conductor și care se numește **conductibilitate electrică**  $\sigma$ :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (1.1.17)$$

Ecuăția (1.1.17) reprezintă **legea lui Ohm sub formă locală**, este o lege de material și este una din relațiile fundamentale Maxwell.

Forma de existență a materiei din jurul unui magnet sau al unui conductor prin care trece curent electric și prin intermediul căreia se transmit interacțiunile magnetice se numește **câmp magnetic**.

Câmpul magnetic se caracterizează prin următoarele mărimi fizice:

**Intensitatea câmpului magnetic**  $d\vec{H}$  generat de un element  $d\vec{l}$  al unui conductor prin care circulă un curent electric de intensitate  $I$ , la distanța  $\vec{r}$  de conductor este dată de **legea Biot-Savart-Laplace**:

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (1.1.18)$$

**Inducția magnetică**  $\vec{B}$  este o mărime vectorială ce caracterizează capacitatea câmpului magnetic de a acționa asupra unei sarcini de probă  $q_o$  aflată în mișcare cu viteza  $\vec{v}$  în câmpul magnetic. Se constată că asupra sarcinii  $q_o$  apare o forță laterală  $\vec{F}$  iar inducția magnetică este definită prin *relația lui Lorentz*:

$$\vec{F} = q_o \vec{v} \times \vec{B} \quad (1.1.19)$$

unde  $\vec{F}$ ,  $\vec{v}$  și  $q_o$  sunt mărimi măsurabile.

**Observație:** Între intensitatea magnetică  $\vec{H}$  și inducția magnetică  $\vec{B}$ , pentru medii liniare, omogene și izotrope există relația:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_o \mu_r \vec{H} \quad (1.1.20)$$

unde  $\mu$  reprezintă permeabilitatea magnetică a mediului și caracterizează proprietățile magnetice ale mediului, iar  $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$  este permeabilitatea magnetică a vidului.

**Fluxul magnetic**  $\Phi_m$  printr-un element de suprafață  $d\vec{S}$  din spațiu este definit conform relației:

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (1.1.21)$$

Teorema lui Gauss pentru câmpul magnetic spune că fluxul magnetic prin orice suprafață închisă este nul, adică:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.1.22)$$

### Observații

- Ecuația (1.1.22), valabilă atât pentru câmpuri staționare cât și pentru câmpuri nestaționare ne arată că nu există sarcini magnetice (monopoli magnetici) care să creeze câmpul magnetic.
- Ecuația  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  ne arată că liniile de câmp magnetic sunt închise și nu diverg niciodată.
- Ecuația  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  ne conduce la concluzia că putem exprima câmpul magnetic ca rotorul unei funcții vectoriale, adică  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ , unde  $\vec{A}$  se numește **potențial vector**.

**Circulația vectorului**  $\vec{H}$  pe un contur închis  $\Gamma$  ce mărginește o suprafață  $S$  din spațiu, străbătută de curenții  $I_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  este :

$$C_H = \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N I_i \quad (1.1.23)$$

Dacă se ține cont de faptul că:

$$\sum_{i=1}^N I_i = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (1.1.24)$$

atunci relația (1.1.23) devine:

$$\int_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{H} = \vec{j} \quad \text{sau} \quad \text{rot } \vec{B} = \mu \vec{j} \quad (1.1.25)$$

### Observații

- Ecuția (1.1.25) ne arată că densitatea de curent  $\vec{j}$  reprezintă sursa câmpului magnetic.
- Ecuția (1.1.25) reprezintă, de asemenea, o altă formulă fundamentală a teoriei electromagnetismului a lui Maxwell pentru **regim staționar** ( $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ).
- Dacă se utilizează în continuare definiția potențialului vector  $\vec{A}$  ( $A_x, A_y, A_z$ ) ( $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ ), precum și relația (1.1.25) vom obține un sistem de trei ecuații cu derivate parțiale ce permit calcularea potențialului vector:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} &= -\mu j_x \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} &= -\mu j_y \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} &= -\mu j_z \end{aligned} \quad (1.1.26)$$

cu **condiția de etalonare** îndeplinită:

$$\text{div } \vec{A} = 0 \quad (1.1.27)$$

- Toate ecuațiile din sistemul (1.1.26) sunt analoage cu ecuația Poisson  $\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$ :

$$\begin{aligned} \Delta A_x &= -\mu j_x \\ \Delta A_y &= -\mu j_y \\ \Delta A_z &= -\mu j_z \end{aligned} \quad (1.1.28)$$

Dacă se cunoaște densitatea de curent  $\vec{j}$  din spațiu, se poate determina potențialul vector  $\vec{A}$  și apoi inducția magnetică  $\vec{B}$ , respectiv intensitatea câmpului magnetic  $\vec{H}$ .

**Inducția electromagnetică** este un fenomen fizic descoperit de Faraday și constă în apariția unui *curent electric inducție* într-un circuit închis, respectiv a unei tensiuni electromotoare induse (tem)  $e_i$  atunci când are loc o variație a fluxului magnetic  $\Phi_m$  printr-o suprafață limitată a circuitului închis:

$$e_i = - \left( \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \right) \quad (1.1.29)$$

Dacă se ține cont de definiția (1.1.21) a fluxului magnetic, precum și de teoria lui Maxwell conform căreia existența tensiunii electromotoare induse  $e_i$  implică existența în circuit a unui câmp electric de intensitate  $\vec{E}$

$$e_i = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.1.30)$$

atunci se obține **legea lui Faraday**:

$$\begin{aligned} \int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \Rightarrow \text{rot } \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.1.31)$$

### Observații

- Legea lui Faraday sub forma (1.1.31) ne spune că liniile de câmp electric inducție sunt linii închise, spre deosebire de cazul câmpului electrostatic ( $\text{rot } \vec{E} = 0$ ), iar câmpul inducție se numește *câmp electrodinamic*.
- Ecuația (1.1.31) ne arată că variația în timp a câmpului magnetic  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  (**câmp magnetic nestaționar**) reprezintă cauza apariției câmpului electrodinamic  $\vec{E}$
- Pentru cazul în care avem variații în timp ale câmpului electric  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  (**câmp electric nestaționar**) Maxwell introduce un termen suplimentar în ecuația (1.1.25) corespunzător acestui numitorul **fenomen de inducție magnetostatică**, astfel încât să fie satisfăcută ecuația de continuitate (1.1.16). Legea obținută este **legea Ampère-Maxwell**:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu \vec{j} + \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.1.32)$$

unde  $\vec{j}$  este **curentul de conductie** iar  $\vec{j}_d = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  este curentul de deplasare caracteristic pentru materialele polarizabile.

Acum putem concluziona sistemul de ecuații Maxwell care exprimă **legile câmpului electromagnetic pentru medii liniare, omogene și izotrope sub formă diferențială**:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \text{ legea lui Gauss pentru câmpul electric} \quad (1.1.33)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \text{ legea lui Gauss pentru câmpul magnetic} \quad (1.1.34)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ legea lui Faraday} \quad (1.1.35)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \vec{j} + \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ legea Ampère-Maxwell} \quad (1.1.36)$$

la care se adaugă **legile de material pentru medii liniare, omogene și izotrope**:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} ; \quad \vec{B} = \mu \vec{H} ; \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (1.1.37)$$

precum și ecuația de continuitate:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (1.1.38)$$

Ecuatiile Maxwell sub **formă integrală** sunt:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_i q_i = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \rho dV \quad (1.1.39)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.1.40)$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (1.1.41)$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (1.1.42)$$

## Observații

- Ecuatiile Maxwell în vid au forma:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \text{ legea lui Gauss pentru câmpul electric} \quad (1.1.43)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \text{ legea lui Gauss pentru câmpul magnetic} \quad (1.1.44)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ legea lui Faraday} \quad (1.1.45)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_o \vec{j} + \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ legea Ampere-Maxwell} \quad (1.1.46)$$

- În cazul prezenței substanței în câmpul electromagnetic se definesc vectorii de **polarizare**  $\vec{P}$  și respectiv de **magnetizare**  $\vec{M}$  prin relațiile:

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} \quad (1.1.47)$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}$$

astfel încât ecuațiile Maxwell (1.1.33-1.1.36) devin:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} (\rho - \operatorname{div} \vec{P}) \text{ legea lui Gauss pentru câmpul electric} \quad (1.1.48)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \text{ legea lui Gauss pentru câmpul magnetic} \quad (1.1.49)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ legea lui Faraday} \quad (1.1.50)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{M} \right) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ legea Ampère} \quad (1.1.51)$$

- Dacă avem două medii omogene și izotrope caracterizate prin mărimele  $(\vec{E}_1, \vec{D}_1, \vec{B}_1, \vec{H}_1, \mu_1, \varepsilon_1)$  și respectiv  $(\vec{E}_2, \vec{D}_2, \vec{B}_2, \vec{H}_2, \mu_2, \varepsilon_2)$  atunci, la suprafața de separare dintre cele două medii, **condițiile la limită** care descriu comportarea vectorilor câmpului electromagnetic sunt:

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{u}_n = 0 \quad (1.1.52)$$

$$\vec{u}_n \times \left( \vec{B}_2 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \vec{B}_1 \right) = \mu_2 \vec{j}_S \quad (1.1.53)$$

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{u}_n = \rho_S \quad (1.1.54)$$

$$\vec{u}_n \times \left( \vec{D}_2 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \vec{D}_1 \right) = 0 \quad (1.1.55)$$

$$\vec{u}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (1.1.56)$$

$$\vec{u}_n \cdot \left( \vec{E}_2 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \vec{E}_1 \right) = \frac{1}{\varepsilon_2} \rho_S \quad (1.1.57)$$

$$\vec{u}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_S \quad (1.1.58)$$

$$\vec{u}_n \cdot \left( \vec{H}_2 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \vec{H}_1 \right) = 0 \quad (1.1.59)$$

$$\vec{u}_n \cdot (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = -\frac{\partial \rho_S}{\partial t} \quad (1.1.60)$$

unde  $\rho_S$  este densitatea de sarcină electrică de suprafață,  $\vec{j}_S$  este densitatea superficială de curent electric, iar  $\vec{u}_n$  este vesorul normalei la suprafața de separare dintre cele două medii.

Pentru un domeniu arbitrar din spațiu, de volum  $V$ , limitat de suprafață  $S$ , în care există o densitate de sarcini electrice  $\rho$  și curenți electrici  $\vec{j}$  care generează un câmp electric  $\vec{E}$  respectiv un câmp magnetic  $\vec{H}$ , **densitatea volumică a energiei câmpului electromagnetic** este:

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) = \frac{1}{2}(\varepsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2) \quad (1.1.61)$$

iar **energia  $W$  a câmpului electromagnetic** din volumul  $V$  va fi:

$$W = \int_V w dV = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2) dV \quad (1.1.62)$$

Pentru a ajunge la teorema de conservare a energiei câmpului electromagnetic, vom defini **vectorul Poynting  $\vec{S}$** :

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (1.1.63)$$

Teorema de conservare a energiei câmpului electromagnetic sau **teorema lui Poynting** ne spune că, scăderea energiei câmpului electromagnetic în unitatea de timp se poate exprima prin puterea disipată prin efect Joule  $S_j$  și puterea transportată  $S_S$ :

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = S_j + S_S \quad (1.1.64)$$

unde:

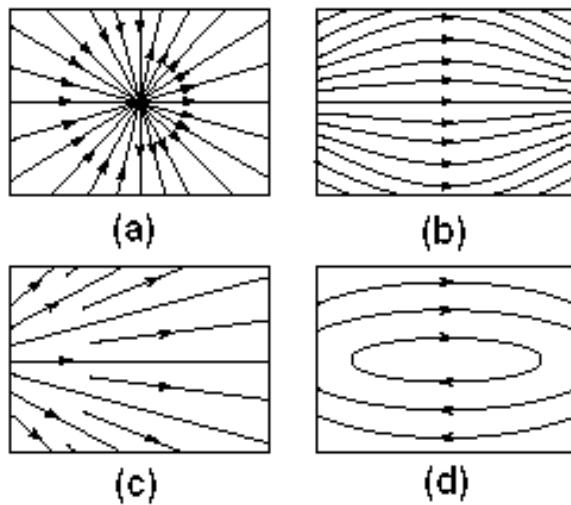
$$\begin{aligned} S_j &= \int_V \rho \vec{j}^2 dV \\ S_S &= \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{A} \end{aligned} \quad (1.1.65)$$

## 1.2 Probleme propuse

**1.1** Se consideră trei cuarci în interiorul unui proton. Doi cuarci "up" au sarcină electrică  $q_+ = 2e/3$  iar cuarcul "down"  $q_- = -e/3$ . Presupunând că distanța dintre cei trei cuarci este  $r = 1,5 \times 10^{-15} m$ , găsiți mărimea forțelor rezultante ce acționează asupra fiecărui cuarc din partea celorlalți:

- a). 39,4N; 45,51N; 22,76N
- b). 39,4N; 45,51N; 45,51N
- c). 39,4N; 39,4N; 22,76N
- d). 39,4N; 39,4N; 39,4N
- e). 45,51N; 45,51N; 45,51N

**1.2** Se consideră următoarele patru configurații de linii de câmp din Fig.1.2.



**Fig.1.2**

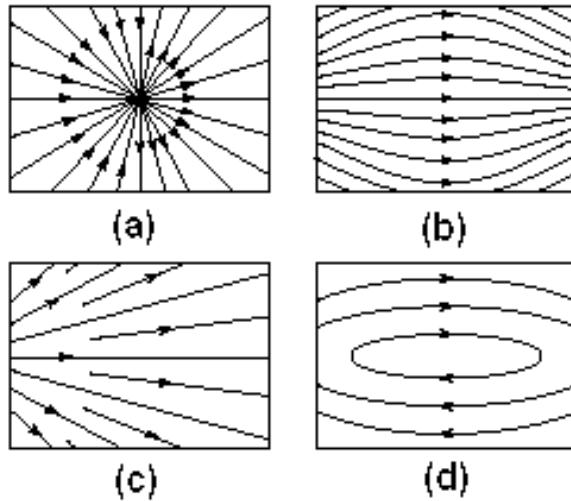
Presupunând că nu există nici o sarcină în regiunile desenate, să se indice care dintre configurații descrie un posibil câmp electrostatic:

- a). a; b); c); d)

**1.3** Se consideră configurațiile de câmpuri electrice date în figura Fig.1.3. Considerând că un câmp este solenoidal dacă  $\text{div } \vec{E} = 0$  și irotational dacă  $\text{rot } \vec{E} = 0$ , alegeti care din următoarele afirmații sunt adevărate:

- a). câmpurile a) și c) sunt solenoidale iar b) este irotational
- b). câmpul b) este solenoidal iar a) și c) sunt irotacionale
- c). câmpurile a) și b) sunt solenoidale iar c) este irotational
- d). câmpurile b) și c) sunt solenoidale iar a) este irotational

e). câmpul a) este solenoidal iar b) și c) sunt irotaționale



**Fig.1.3**

**1.4** Intensitatea câmpului electric în jurul unei sarcini electrice  $q$ , situată în plasma unei descărcări luminiscente este:

$$\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \exp(-\frac{r}{\lambda}) \hat{r}$$

unde  $\lambda$  – constantă. Densitatea de sarcină din jurul sarcinii considerate este:

- a).  $\rho(r) = -\frac{q}{4\pi\lambda r^2} \exp(-\frac{r}{\lambda})$
- b). 0
- c).  $-\frac{q}{4\pi\epsilon_0\lambda r^2} \exp(-\frac{r}{\lambda})$
- d). nu se poate determina exact
- e).  $\rho(r) = -\frac{q}{4\pi\lambda r} \exp(-\frac{r}{\lambda})$

Se știe că, în coordonate sferice, operatorul "nabla" are expresia:

$$\nabla \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot a_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} a_\varphi$$

**1.5** Intensitatea câmpului electric într-un punct determinat de vectorul de poziție  $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$  are expresia:

$$\vec{E} = \operatorname{div}(\vec{A} \cdot \vec{r}) + \vec{r}$$

unde  $\vec{A}(a, b, c)$  – vector constant. Care din următoarele afirmații sunt false?

- a). câmpul este irotațional;
- b). potențialul câmpului este  $V = -\vec{A} \cdot \vec{r} - \frac{1}{2}r^2$ ;
- c). densitatea de sarcină în vecinătatea punctului considerat este  $\rho = 3\varepsilon_0$ ;
- d). toate afirmațiile sunt corecte

**1.6** În punctele  $A$  și  $B$  din figura Fig.1.6 sunt plasate sarcinile electrice  $-q$  și respectiv  $3q$  unde  $q = 10^{-6}C$ . Știind că distanța  $a = 0,5m$  și că  $1/4\pi\varepsilon = 9 \times 10^9 Nm^2/C^2$ , alegeți afirmațiile corecte:

- a). potențialul creat în punctul  $O$  este  $36 \times 10^3 V$ ;
- b). forța cu care sarcina  $3q$  acționează asupra celei din punctul  $A$  este  $-27 \times 10^{-3} N$ ;
- c). intensitatea câmpului electrostatic creat în punctul  $J$  de sarcina din  $A$  este  $-18 \times 10^3 N/C$ ; R: a). b; b). c; c). a; d). toate; e). nici una.

**1.7** Două sarcini electrice punctiforme  $q_1$  și  $q_2$  sunt plasate la distanța  $d$  una de alta. O a treia sarcină punctiformă,  $Q$ , se așează la distanța  $3d/4$  de sarcina  $q_1$  pe linia ce unește sarcinile  $q_1$  și  $q_2$ . Forța rezultantă ce acționează asupra sarcinii  $Q$  este nulă dacă sarcina  $q_1$  este mai mare decât  $q_2$  de: a).  $3/4$  ori; b).  $4/3$  ori; c).  $9$  ori; d).  $1/9$  ori; e).  $3$  ori

**1.8** Două corpuri punctiforme cu sarcinile  $+2q$  și  $-q$  sunt plasate de-a lungul axei  $Ox$  una în punctele  $x_1 = 1,5m$ , respectiv  $x_2 = 3m$ . În ce punct potențialul creat de ele este nul?

- a).  $2,5m$ ; b).  $2m$ ; c).  $-2m$ ; d).  $0,3m$ ; e).  $-3,5m$ .

**1.9** Un electron și un proton se află inițial în repaus la distanța  $d$  unul de altul. Dacă sunt lăsate libere, cele două sarcini se vor întâlni:

- a). la mijlocul distanței dintre sarcini;
- b). mai aproape de electron;

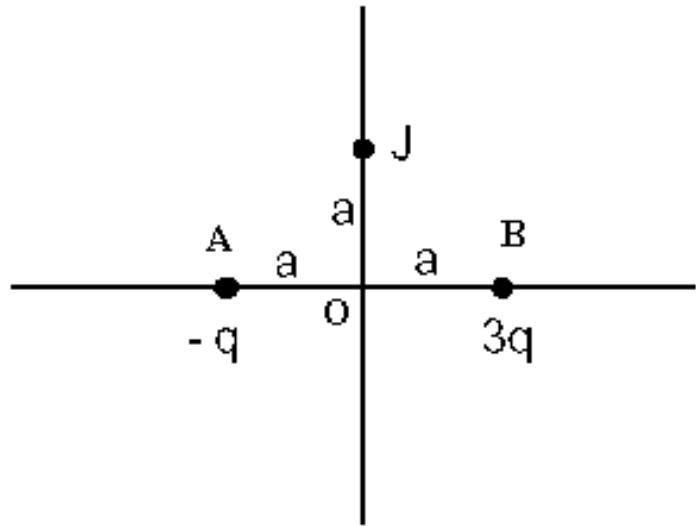


Fig.1.6

- c). mai aproape de proton;
  - d). nu se întâlnesc niciodată;
- R: a) d; b). a; c). b, d). c; e).

**1.10** O sarcină electrică având valoarea  $-q$  este plasată sau în punctul  $A$  sau în punctul  $B$  conform figurii Fig.1.10. În punctul  $A$  forța rezultantă este:

- a). zero; b). mai mică; c). egală; d). mai mare decât forța care acționează asupra sarcinii plasate în punctul  $B$ .

R: a). c; b). a; c). b; d). d; e).

**1.11** Se dă o distribuție liniară de sarcină a cărei densitate este  $\lambda$  ( $dq = \lambda dl$ ). Să se găsească expresia intensității câmpului electric la distanța  $r$  de distribuția de sarcină dacă acesta se află în vid ( $\varepsilon_0, \mu_0$ ).

**1.12** Un fir de lungime  $L$  încărcat uniform cu densitatea liniară de sarcină  $\lambda$  este așezat de-a lungul axei  $Ox$  având capătul din stânga plasat la distanța  $d$  față de originea axei. Intensitatea câmpului electric creat în origine este:

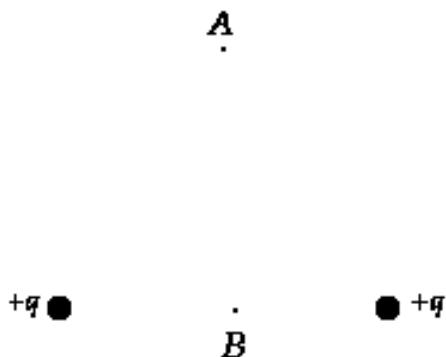


Fig.1.10

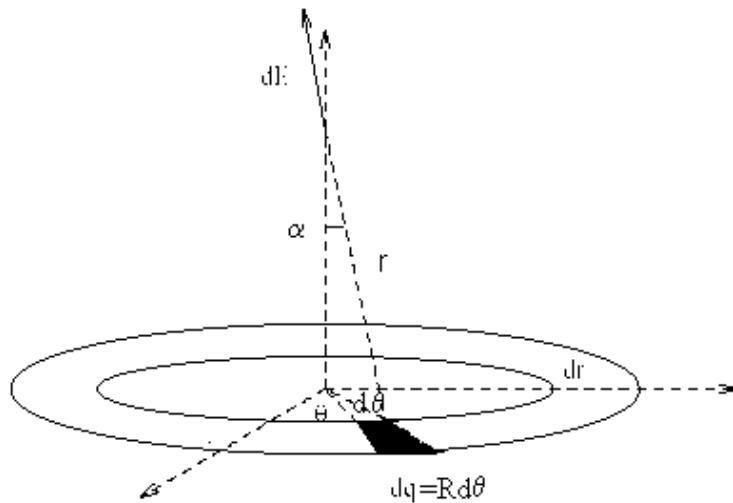
- a).  $\frac{\lambda d}{4\pi\varepsilon_0 d(L+d)}$
- b).  $\frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 d(L+d)}$
- c).  $\frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 d};$
- d).  $\frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 d(L-d)}$
- e).  $\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d(L+d)}$

**1.13** Intensitatea câmpului electric creat de un inel de rază  $R$ , încărcat cu sarcina electrică  $q$  într-un punct situat la distanța  $z$  de centrul acesteia, pe direcția axei de simetrie, este:

- a).  $\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{1/2}}$
- b).  $\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)}$
- c).  $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}$
- d).  $\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}$
- e).  $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{1/2}}$

**1.14** Să se calculeze intensitatea câmpului electric creat de un plan infinit încărcat uniform cu o sarcină cu densitatea superficială  $\sigma$ .

**1.15** Intensitatea câmpului electric creat de un disc de rază  $R$ , încărcat cu sarcina electrică  $q$  într-un punct situat la distanța  $z$  de centrul acesteia, pe



**Fig.1.13**

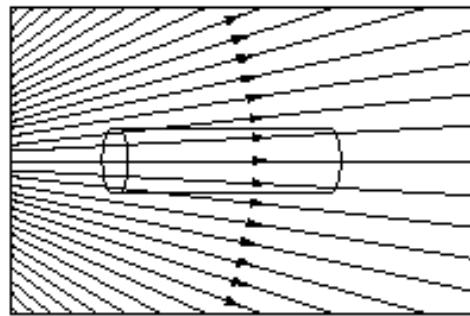
direcția axei de simetrie din plan perpendicular pe disc, este:

- a).  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{z^2+L^2}}$
- b).  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{L}{\sqrt{z^2+L^2}}$
- c).  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+L^2}}\right)$
- d).  $\frac{4\sigma}{16\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+L^2}}\right)$
- e). 0

**1.16** O bucătă de material izolator de formă cilindrică este plasată într-un câmp exterior cu liinile de câmp de forma dată în figură. Fluxul electric net prin suprafața cilindrică este:

- a). pozitiv; b). negativ; c). zero; d). imposibil de determinat; e). infinit

**1.17** Un balon sferic conține în centrul său un mic obiect încărcat electric cu sarcină pozitivă. Dacă se mărește volumul balonului, corpul încărcat rămânând în aceeași poziție, fluxul electric prin suprafața balonului crește, descrește sau rămâne constant? Ce se poate spune despre intensitatea căm-



**Fig.1.16**

pului electric?

- a). fluxul și intensitatea descresc
- b). fluxul rămâne constant iar intensitatea descrește
- c). fluxul descrește iar intensitatea rămâne constantă
- d). fluxul și intensitatea rămân constante
- e). fluxul și intensitate cresc

**1.18** Intensitatea câmpului electric în interiorul unui conductor (în absența altor sarcini electrice interioare independente) este zero când:

- a). nu există sarcini exterioare conductorului
- b). nu există sarcini pe suprafața conductorului
- c). niciodată
- d). întotdeauna
- e). uneori

**1.19** O sarcină pozitivă  $q$  este distribuită uniform pe suprafața unei sfere dielectrice omogene cu permisivitatea electrică  $\epsilon$ . Să se calculeze câmpul electric în interiorul sferei și în afara ei.

**1.20** Fie un conductor sferic care conține un exces de sarcină electrică  $+Q$ . Sfera este înconjurată de un înveliș sferic concentric conductor care are un

exces de sarcină negativă  $-5Q$ . Cum se redistribuie sarcina pe suprafața interioară și exterioară a învelișului sferic?

- a).  $-5Q$  în interior, 0 în exterior
- b).  $-2.5Q$  în interior,  $-2.5Q$  în exterior
- c).  $-Q$  în interior,  $-4Q$  în exterior
- d).  $+Q$  în interior,  $-6Q$  în exterior
- e). 0 în interior,  $-5Q$  în exterior

**1.21** Potențialul unui câmp electrostatic este  $V(x, y, z) = \alpha(xy - z^2)$  unde  $\alpha - \text{const.}$  Cât este proiecția vectorului  $\vec{E}$  pe direcția descrisă de vectorul  $\vec{r} = \hat{x} + 2\hat{z}$ , în punctul  $M(7, 1, 2)$ ?

- a).  $\sqrt{5}$
- b).  $7\alpha/\sqrt{5}$
- c).  $2\alpha$
- d). 1;
- e). 0

**1.22** Potențialul creat de un disc de rază  $R$  și sarcină electrică  $q$  într-un punct situat la periferia discului este:

- a).  $\frac{q}{\pi^2 R \varepsilon_0}$
- b).  $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R}$
- c). 0;
- d).  $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4q}{R^2}$
- e).  $\frac{4qR}{4\pi\varepsilon_0}$

**1.23** Să se determine potențialul creat de un dipol (ale căruia sarcini  $q$  și  $-q$  se află la distanță  $2a$ ) cu momentul dipolar  $\vec{p}$ .

**1.24** Potențialul câmpului electrostatic creat de un dipol de moment dipolar  $\vec{p}$  aflat în vid, la distanța  $\vec{r}$  de dipol, este:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}$$

Să se calculeze intensitatea câmpului electric la distanța  $\vec{r}$  de dipol.

**1.25** Capacitatea electrică a unui sistem format din doi conductori sferici de raze  $R_1, R_2 (R_1 < R_2)$  încărcați cu sarcina electrică  $Q$ , este:

- a).  $4\pi\epsilon_0 R_1 R_2$
- b).  $4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 + R_2}{R_2 R_1}$
- c).  $4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$
- d).  $4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}$
- e).  $4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 - R_2}{R_2 R_1}$

**1.26** Capacitatea electrică a unui conductor sferic de rază  $R_1$ , înconjurat de un strat omogen dielectric de rază  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) și permisivitate electrică relativă  $\epsilon_r$ , încărcat cu sarcina electrică  $Q$ , este:

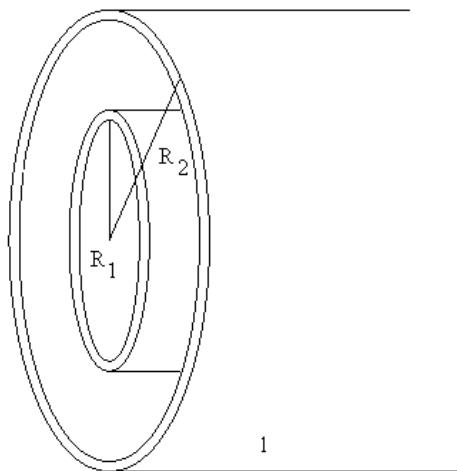
- a).  $\frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_1 R_2}{R_2 - R_1 (\epsilon_r - 1)}$ ;
- b).  $\frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_1 R_2}{R_1 + R_2 \epsilon_r}$ ;
- c).  $\frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_1 R_2}{R_2 + R_1 \epsilon_r}$ ;
- d).  $\frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_1 R_2}{R_1 + R_2 (\epsilon_r - 1)}$ ;
- e).  $\frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_1 R_2}{R_2 + R_1 (\epsilon_r - 1)}$

**1.27** Capacitatea electrică a unui sistem alcătuit din doi conductori cilindrii de raze  $R_1, R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) și lungime  $l$  ca figura Fig.1.27, încărcăți cu sarcina electrică  $Q$ , este:

- a).  $2\pi\epsilon_0/l \ln(\frac{R_2}{R_1})$
- b).  $2\pi l\epsilon_0 / \ln(\frac{R_2}{R_1})$
- c).  $4\pi l\epsilon_0 / \ln(\frac{R_2}{R_1})$
- d).  $2\pi l / \left( \epsilon_0 \ln(\frac{R_2}{R_1}) \right)$
- e).  $8\pi l\epsilon_0 / \ln(\frac{R_2}{R_1})$

**1.28** Capacitatea electrică a unui sistem alcătuit din doi conductori sferici de raze  $R_1, R_2$  ( $R_1 < R_2$ ), încărcăți cu sarcina electrică  $Q$  și umpluți cu un material dielectric cu permisivitatea dependentă de rază conform relației  $\epsilon_r(r) = \alpha/r$ ,  $\alpha = const.$ :

- a).  $\frac{4\pi\epsilon_0}{a \ln(\frac{R_2}{R_1})}$
- b).  $\frac{4\pi\alpha}{\epsilon_0 \ln(\frac{R_2}{R_1})}$
- c).  $\frac{8\pi\alpha\epsilon_0}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$
- d).  $\frac{8\pi\alpha\epsilon_0}{a \ln(\frac{R_2}{R_1})}$



**Fig.1.27**

e).  $\frac{4\pi\alpha\epsilon_0}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$

**1.29** Energia de interacțiune pentru o configurație de patru sarcini electrice  $q$ , plasate în vârfurile unui tetraedru cu latura  $a$  este:

- a).  $\frac{3q^2}{2\pi\epsilon_0 a}$
- b).  $\frac{q^2}{\pi\epsilon_0 a}$
- c).  $\frac{4q^2}{2\pi\epsilon_0 a}$
- d).  $\frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$
- e).  $\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 a}$

**1.30** Energia de interacțiune pentru o configurație de sarcini electrice  $q$ , plasate în vârfurile unui cub cu latura  $a$  este:

- a).  $\frac{8q^2}{\pi\epsilon_0 a}$
- b).  $\frac{3q^2}{\pi\epsilon_0 a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- c).  $\frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$
- d).  $\frac{3q^2}{\pi\epsilon_0 a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$

e).  $\frac{3q^2}{\pi\varepsilon_0 a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

**1.31** Energia proprie electrostatică a unei sfere încărcate uniform cu densitatea de sarcină  $\rho$  este:

- a).  $\frac{\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0}$
- b).  $\frac{\rho^2 R^5}{4\pi\varepsilon_0}$
- c).  $\frac{4\rho^2 R^5}{5\pi\varepsilon_0}$
- d).  $\frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0}$
- e).  $\frac{4\pi\rho^2 R^5}{5\varepsilon_0}$

**1.32** Se consideră forța  $\vec{F} = -y\hat{x} + x\hat{y} + 3\hat{z}$ . Energia potențială electrostatică este:

- a).  $3z$
- b).  $-\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 + 3z$
- c).  $-(y^2 + z^2)$
- d). nu se poate defini;
- e). 0

**1.33** Să se determine câmpul magnetic  $\vec{B}$  produs de un curent  $I$  care parcurge un conductor rectiliniu infinit, într-un punct  $P$ , la distanța  $R$  de acesta.

**1.34** Inducția câmpului magnetic creat de curenții din figura Fig.1.34 în punctul O este:

- a).  $B = \frac{1}{2\pi} \left(I_1 - \frac{I_2\theta}{2a}\right)$
- b).  $B = \frac{1}{2\pi a} \left(I_1 - \frac{I_2\theta}{2}\right)$
- c).  $B = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{I_1}{a} - \frac{I_2a\theta}{2}\right)$
- d).  $B = \frac{1}{2\pi a} \left(2I_1 - \frac{I_2\theta}{2}\right)$
- e).  $B = \frac{1}{2\pi a} \left(I_1 - \frac{I_2\theta}{4}\right)$

**1.35** Folosind teorema lui Ampère demonstrați care din următoarele afirmații sunt adevărate pentru inducția câmpului magnetic  $B$ :

- a).  $B = \frac{1}{2}\mu_0 j$  - plan infinit;  $B = \mu_0 nI$  - solenoid;  $B = \frac{1}{2\pi r}\mu_0 NI$  - tor
- b).  $B = \frac{1}{2r}\mu_0 j$  - plan infinit;  $B = \frac{1}{2}\mu_0 nI$  - solenoid;  $B = \frac{1}{2\pi r}\mu_0 NI$  - tor

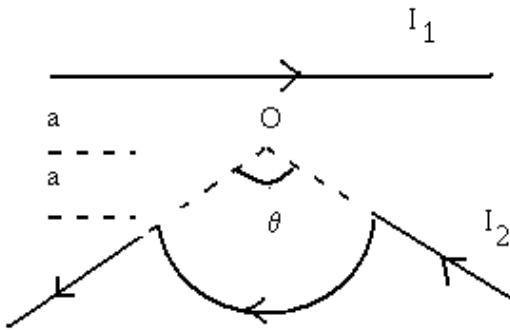


Fig.34

- c).  $B = \frac{1}{2}\mu_0 r j$  - plan infinit;  $B = \frac{1}{2}\mu_0 nI$  - solenoid;  $B = \frac{1}{2r}\mu_0 NI$  - tor
- d).  $B = \frac{1}{2}\mu_0 j$  - plan infinit;  $B = \frac{1}{2\pi}\mu_0 nI$  - solenoid;  $B = \frac{1}{2\pi r}\mu_0 NI$  - tor
- e).  $B = \frac{1}{2}\mu_0 j$  - plan infinit;  $B = \frac{1}{2\pi}\mu_0 nI$  - solenoid;  $B = \frac{1}{2\pi}\mu_0 r NI$  - tor

unde  $j$  – densitatea liniară de curent,  $n$  – număr de spire pe unitatea de lungime,  $N$  – număr total de spire și  $r$  – raza torului.

**1.36** Câmpul magnetic creat de un conductor de formă celui din Fig.1.36 de raze  $a$  și  $b$ , străbătut de un curent de intensitate  $I$  într-un punct situat în centrul figurii este:

- a).  $B = \frac{\mu_0 I}{4} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$
- b).  $B = 0$
- c).  $B = \frac{\mu_0 I}{4} \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)$
- d).  $B = \frac{\mu_0 I}{4} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$
- e).  $B = \frac{\mu_0 I}{4} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$

**1.37** Forța de interacțiune dintre un curent liniar  $I_1$  și un curent  $I_2$  care circulă printr-un cadru dreptunghiular  $(b, L)$  aflat la distanța  $a$ , conform figurii Fig.1.37 este:

- a).  $B = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi L(a+b)}$
- b).  $B = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L(a+b)}{2\pi ab}$
- c).  $B = \frac{\mu_0 I_1 I_2 Lb}{4\pi a(a+b)}$

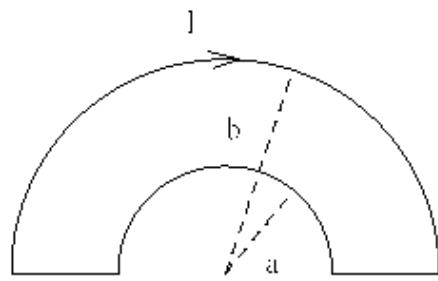


Fig.1.36

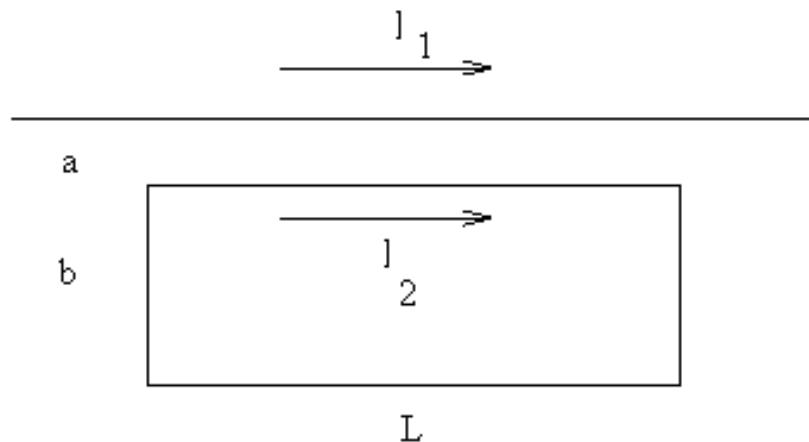


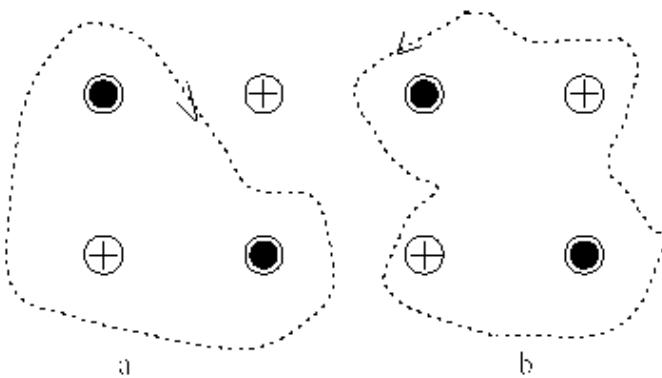
Fig.1.37

d).  $B = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L(a-b)}{2\pi ab}$   
e).  $B = \frac{\mu_0 I_1 I_2 Lb}{2\pi a(a+b)}$

**1.38** Fiecare conductor liniar din Fig.1.38 are valoarea  $I$ , direcția perpendiculară pe planul foii și sensul indicat. Calculați circulația vectorului inducție magnetică pentru fiecare din contururile  $a$  și  $b$  :

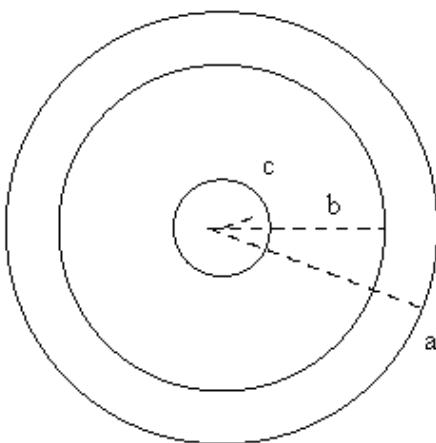
- a).  $\Gamma_a = \mu_0 I, \Gamma_b = 0$
- b).  $\Gamma_a = 3\mu_0 I, \Gamma_b = 4\mu_0 I$
- c).  $\Gamma_a = 4\mu_0 I, \Gamma_b = 4\mu_0 I$
- d).  $\Gamma_a = -\mu_0 I, \Gamma_b = 0$

e).  $\Gamma_a = 0, \Gamma_b = 0$



**Fig.1.38**

**1.39** Un cablu coaxial de forma unui cilindru plin de rază  $a$  înconjurat de un conductor cilindric extern, de raze cuprinse între  $b$  și  $c$  ca în Fig.1.39, este parcurs de un curent  $I$  care circulă prin conductorul exterior și se întoarce apoi prin conductorul interior. Să se găsească valorile inducției magnetice în punctele situate la distanțele  $a, b, c$  de centrul cablului:



**Fig.1.39**

- a).  $B_a = 0, B_b = 0, B_c = \frac{\mu_0 I}{2\pi c}$
- b).  $B_a = \frac{\mu_0 I}{2\pi c}, B_b = 0, B_c = \frac{\mu_0 I}{2\pi c}$
- c).  $B_a = 0, B_b = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}, B_c = \frac{\mu_0 I}{2\pi c}$

- d).  $B_a = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}, B_b = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}, B_c = \frac{\mu_0 I}{2\pi c}$   
e).  $B_a = \frac{\mu_0 I}{\pi a}, B_b = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}, B_c = \frac{\mu_0 I}{2\pi c}$

**1.40** Fie un cablu de lungime  $l$  format dintr-un miez cilindric de rază  $r_1$  și un înveliș cilindric coaxial cu raze cuprinse între  $r_2$  și  $r_3$  ( $r_1 < r_2 < r_3$ ) străbătut de un curent  $I$  care intră prin miez și ieșe prin înveliș. Permeabilitatea magnetică a conductorului este  $\mu$  iar între miez și înveliș este un mediu dielectric cu permeabilitate magnetică  $\mu_0$ . Energia magnetică înmagazinată în cablu este:

- a).  $W_m = \frac{I^2}{2\pi} \mu \ln \frac{r_3}{r_1}$   
b). nu se poate calcula  
c).  $W_m = \frac{I^2}{2\pi} \left[ \mu_0 \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\mu r_3^4}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \ln \frac{r_3}{r_2} - \frac{\mu r_3^2}{2(r_3^2 - r_2^2)} \right]$   
d).  $W_m = \frac{I^2}{2\pi} \left[ \mu_0 \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\mu r_3}{(r_3^2 - r_2^2)} \ln \frac{r_3}{r_2} - \frac{\mu r_3^2}{2(r_3^2 - r_2^2)} \right]$   
e).  $W_m = \frac{I^2}{2\pi} \left[ \mu_0 \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\mu r_3^2}{2(r_3^2 - r_2^2)} \right]$

**1.41** Să se calculeze câmpul magnetic în punctele situate pe axa de simetrie a unei spire circulare de rază  $R$ , prin care trece un curent de intensitate  $I$ .

**1.42** Tensiunea electromotoare induată în bucla dreptunghiulară din Fig.1.42 de dimensiuni  $b$  și  $L$  care se deplasează cu viteza  $v$  în câmpul magnetic creat de curentul  $I$ , în momentul în care bucla a ajuns la distanța  $a$  de fir este:

- a).  $e = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \frac{av}{a(a+b)}$   
b).  $e = \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \frac{b^2 v}{a(a+b)}$   
c).  $e = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \frac{bv}{a(a+b)}$   
c).  $e = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \frac{av}{b(a+b)}$   
d).  $e = \frac{\mu_0 I L}{4} \frac{bv}{a(a+b)}$

**1.43** Un fir conductor de forma unei parabole  $y = kx^2$  este plasat în câmpul magnetic constant  $\vec{B}$ , orientat ca în Fig.1.43. Un alt conductor,  $AB$ , se deplasează cu accelerarea constantă  $a$ , fără viteza inițială, deasupra parabolei. Tensiunea electromagnetică induată în circuitul conductor este:

- a).  $e = -By\sqrt{8a/k}$   
b).  $e = -B\sqrt{ay/k}$

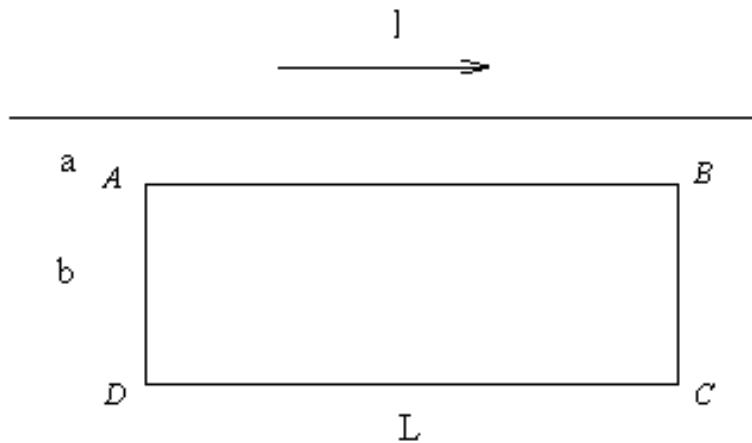


Fig.1.42

- c).  $e = -By^2\sqrt{8a/k}$
- d).  $e = -Ba\sqrt{8y/k}$
- e).  $e = -By\sqrt{2a/k}$

**1.44** O bobină plată, construită dintr-un număr mare de înfăşurări,  $N$ , cu raza exterioară  $a$ , este așezată perpendicular pe inducția unui câmp magnetic care variază în timp după legea:  $B = B_0 \sin \omega t$ ,  $B_0$  – constant iar  $\omega$  – frecvența unghiulară (Fig.1.44). Tensiunea electromagnetică maximă indusă în bobină este:

- a).  $e_{\max} = \frac{1}{2}\pi a^2 N B_0 \omega$
- b).  $e_{\max} = \frac{1}{4}\pi a^2 N B_0 \omega$
- c).  $e_{\max} = \pi a^2 N B_0 \omega$
- d).  $e_{\max} = \pi a^2 N^2 B_0 \omega$
- e).  $e_{\max} = \frac{1}{3}\pi a^2 N B_0 \omega$

**1.45** O bobină cu  $N$  spire și secțiune  $S$  este plasată în interiorul unui solenoid care crează câmpul magnetic variabil  $B = B_0 \sin \omega t$ ,  $B_0$  – constant. Bobina se rotește cu frecvența unghiulară  $\omega$  în jurul axei sale. Tensiunea electromagnetică indusă în bobină este:

- a).  $e = -NSB_0 \tan \omega t$

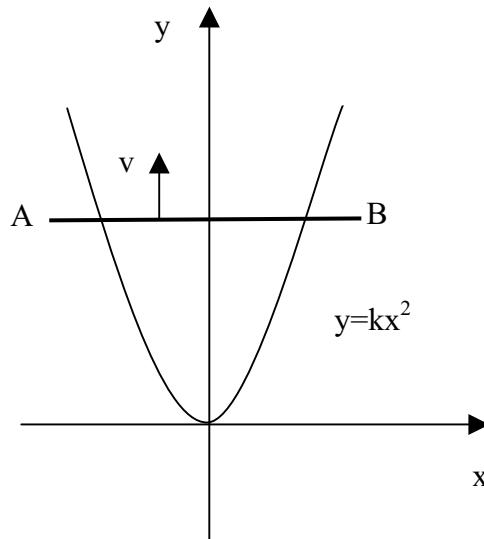


Fig.1.43

- b).  $e = -\frac{1}{2}NSB_0 \sin 2\omega t$
- c).  $e = -NSB_0 \cos \omega t$
- d).  $e = -\frac{1}{2}NSB_0 \cos 2\omega t$
- e).  $e = -\frac{1}{2}NSB_0 \sin \omega t$

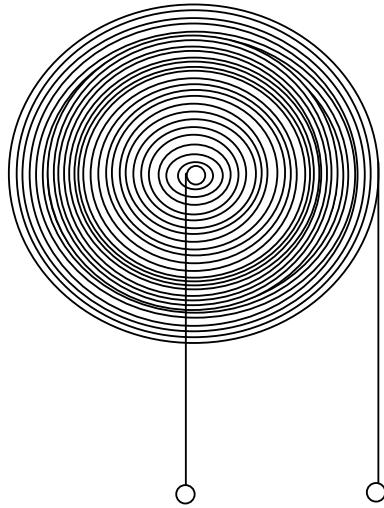
**1.46** Poate fi considerat vectorul  $\vec{A} = A_0(x^2 + y^2)\hat{z}$  potențial vector al vectorului inducție  $\vec{B}$  creat de un cablu cilindric de rază  $r_0$  parcurs de curentul de intensitate  $I$  într-un punct din interiorul conductorului? Cât este valoarea constantei  $A_0$  în caz afirmativ?

- a). nu poate fi
- b). da ;  $A_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}$
- c). da;  $A_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$
- d). da;  $A_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0^2}$

**1.47** Dacă intensitatea câmpului electric în vid variază după legea:

$$\vec{E} = E_0 \cos [\omega(t - \alpha z)] \cdot \hat{y}$$

unde  $E_0, \alpha$  – constante, atunci intensitatea câmpului magnetic generat, variază după legea:



**Fig.1.44**

- a).  $\vec{H} = -\frac{\alpha E_0}{\mu_0} \cos[\omega(t - \alpha z)] \cdot \hat{x} + (\overrightarrow{\text{const.}})_x$
- b).  $\vec{H} = -\frac{\alpha E_0}{\mu_0} \cos[\omega(t - \alpha z)] \cdot \hat{y}$
- c).  $\vec{H} = -\frac{\omega E_0}{\alpha \mu_0} \cos[\omega(t - \alpha z)] \cdot \hat{x} + (\overrightarrow{\text{const.}})_x$
- d).  $\vec{H} = -\frac{\omega E_0}{\alpha \mu_0} \cos[\omega(t - \alpha z)] \cdot \hat{y}$
- e).  $\vec{H} = \frac{\alpha E_0}{\mu_0} \cos[\omega(t - \alpha z)] \cdot \hat{z}$

**1.48** Dacă inducția câmpului magnetic în vid și  $\vec{J} = 0, \rho = 0$  variază după legea:

$$\vec{B} = B_0 \sin(\omega t - kx) \cdot \hat{x} + B_0 k y \cos(\omega t - kx) \cdot \hat{y}$$

unde  $B_0, k$  – constante, atunci intensitatea câmpului electric generat este de forma:

- a).  $\vec{E} = -\frac{k B_0 y}{\varepsilon_0 \mu_0} \cos(\omega t - kx) \cdot \hat{z}$
- b).  $\vec{E} = -\frac{k^2 B_0 y}{\omega \varepsilon_0 \mu_0} \cos(\omega t - kx) \cdot \hat{z}$
- c).  $\vec{E} = \frac{k^2 B_0 y}{\omega \varepsilon_0 \mu_0} \sin(\omega t - kx) \cdot \hat{x}$
- d).  $\vec{E} = -\frac{B_0}{\varepsilon_0 \mu_0} \cos(\omega t - kx) \cdot \hat{y}$

e).  $\vec{E} = -\frac{B_0}{\epsilon_0 \mu_0} \sin(\omega t - kx) \cdot \hat{z}$

**1.49** Printr-un solenoid cu raza secțiunii  $R$  circulă un curent electric care determină un câmp magnetic ce variază în timp după legea  $B = at^3$ ,  $a - const$ . Curentul de deplasare variază în funcție de distanța  $r$  de la axa solenoidului după legea:

- a).  $|j_d| = 3\alpha\epsilon_0 rt^2$  ( $r < R$ ) ;  $|j_d| = 3\alpha\epsilon_0 R^2 t^2$  ( $r > R$ )
- b).  $|j_d| = \frac{3}{4}\alpha\epsilon_0 rt^2$  ( $r < R$ ) ;  $|j_d| = 0$  ( $r > R$ )
- c).  $|j_d| \rightarrow \infty$  ( $r < R$ ) ;  $|j_d| \rightarrow \frac{3}{4}\alpha\epsilon_0 \frac{R^2}{r} t^2$  ( $r > R$ )
- d).  $|j_d| = 3\alpha\epsilon_0 rt^2$  ( $r < R$ ) ;  $|j_d| = \frac{3}{4}\alpha\epsilon_0 \frac{R}{r} t^2$  ( $r > R$ )
- e).  $|j_d| = \frac{3}{4}\alpha\epsilon_0 rt^2$  ( $r < R$ ) ;  $|j_d| = \frac{3}{4}\alpha\epsilon_0 \frac{R^2}{r} t^2$  ( $r > R$ )

**1.50** Un condensator plan în vid, cu armăturile de forma unui disc de rază  $R$  este încărcat cu o sarcină electrică care crează un câmp electric ce variază în timp după legea  $E = \beta t^2$ ,  $\beta - const$ . Câmpul magnetic ce apare are inducția magnetică dependă de distanța  $r$  de centrul condensatorului măsurată în plan paralel cu armăturile dată de legea:

- a).  $B = \epsilon_0 \mu_0 \beta r t^2$  ( $r < R$ ) ;  $B = \epsilon_0 \mu_0 \beta \frac{R^2}{r} t^2$  ( $r > R$ )
- b).  $B = \epsilon_0 \mu_0 \beta r t$  ( $r < R$ ) ;  $B = 0$  ( $r > R$ )
- c).  $B \rightarrow \infty$  ( $r < R$ ) ;  $B = \frac{3}{4}\beta \epsilon_0 \mu_0 \frac{R^2}{r} t^2$  ( $r > R$ )
- d).  $B = \epsilon_0 \mu_0 \beta r t$  ( $r < R$ ) ;  $B = \epsilon_0 \mu_0 \beta \frac{R^2}{r} t$  ( $r > R$ )
- e).  $B = \epsilon_0 \mu_0 \beta r^2 t$  ( $r < R$ ) ;  $B = \epsilon_0 \mu_0 \beta \frac{R^4}{r^2} t$  ( $r > R$ )

**1.51** Mărimea vectorului Poynting creat la distanța  $r$  de axa unui fascicul rectiliniu de protoni, cu densitatea liniră de sarcină  $\lambda$ , în deplasare cu viteza  $v$  este:

- a).  $S = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 v \epsilon_0 r^2}$
- b).  $S = \frac{\lambda v}{4\pi \epsilon_0 r}$
- c).  $S = \frac{\lambda^2 v^2}{4\pi \epsilon_0 r^2}$
- d).  $S = \frac{\lambda^2 v}{4\pi^2 \epsilon_0 r^2}$
- e).  $S = \frac{\lambda v^2}{4\pi^2 \epsilon_0 r^2}$

**1.52** Să se demonstreze că un câmp magnetic staționar admite un potențial vector de forma:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} (\vec{B} \times \vec{r})$$

**1.53** Știind că potențialul vector determinat de un moment magnetic dipolar  $\vec{m}$  este:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

să se calculeze câmpul magnetic corespunzător. Se va considera că momentul magnetic  $\vec{m}$  este orientat pe direcția  $Oz$ .

**1.54** Să se determine câmpul magnetic în interiorul și în exteriorul unui cilindru de rază  $R$  prin care circulă un curent de densitate  $j$ , știind că liniile de câmp sunt cercuri concentrice în plane perpendiculare pe axa cilindrului.

**1.55** Într-o regiune din spațiu există un câmp magnetic paralel cu axa  $Oz$  și variabil în timp după legea sinusoidală:

$$B = B_o \sin(\omega t)$$

Să se determine câmpul electric  $\vec{E}$  la distanța  $r$  de axa  $Oz$ .

**1.56** Fie un condensator plan-paralel cu plăcile circulare de rază  $R$ . Condensatorul este conectat la un generator de curent alternativ astfel încât sarcina de pe plăcile condensatorului variază în timp după legea:

$$q = q_o \sin(\omega t)$$

Să se calculeze câmpul magnetic în punctele aflate la distanța  $r$  de axa condensatorului când:

- a).  $r \leq R$
- b).  $r > R$

**1.57** Fie un condensator plan format din două discuri de rază  $a$ , aflate la distanța  $d$  una față de cealaltă, conectat la o diferență de potențial alternativă  $U$ . La frecvență mică, intensitatea câmpului electric la fiecare moment este uniformă și are expresia  $\vec{E}_1 = \vec{E}_o \exp(i\omega t)$ . Să se calculeze:

- a). inducția  $\vec{B}_1$  a câmpului magnetic asociat câmpului electric  $\vec{E}_1$
- b). să se arate că intensitatea  $\vec{E}_2$  a câmpului electric induș prin variația câmpului magnetic  $\vec{B}_1$ , depinde de  $r$  și să se calculeze valoarea ei pentru  $r = 0$

- c). circulația vectorului  $\vec{E}_2$  de-a lungul conturului  $\Gamma_2$  (Fig.1.57) și să se deducă expresia lui  $\vec{E}_2$   
d). valoarea lui  $r$  pentru care  $\vec{E} = 0$ .

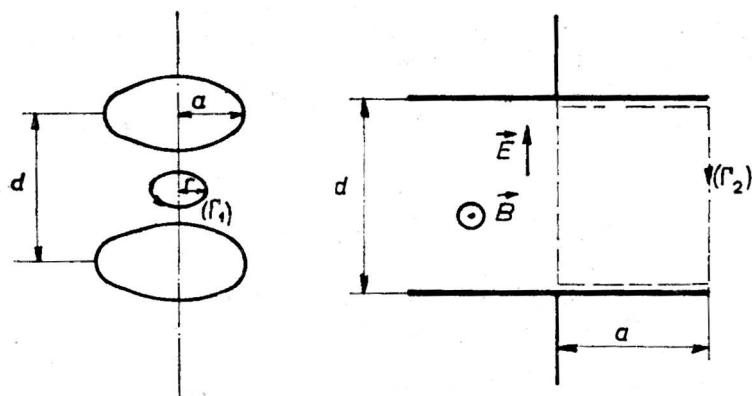


Fig.1.57

**1.58** Fie o sferă de rază  $r$  acoperită cu o substanță radioactivă care emite radial, izotrop, particule cu sarcina  $q$ , obținându-se un curent electric radial de aceeași intensitate în toate direcțiile. Dacă notăm cu  $q(r)$  sarcina electrică din interiorul sferei, cu  $\vec{j}(r)$  densitatea de curent electric radial și cu  $\vec{E}(r)$  intensitatea câmpului electric, se cere:

- să se exprime  $\vec{j}(r)$  în funcție de  $q(r)$
- să se exprime  $\vec{E}(r)$  în funcție de  $q(r)$
- să se calculeze inducția câmpului magnetic produs de curenți, utilizând ecuațiile lui Maxwell

**1.59** Să se calculeze modul în care variază în timp densitatea de sarcină într-un punct oarecare al unui mediu având conductivitatea  $\sigma$  și permisivitatea relativă  $\epsilon_r$ .

**1.60** Să se arate că dacă un câmp electromagnetic, definit prin vectorii  $\vec{E}_1 = \vec{E}_1(\vec{r}, t)$  și  $\vec{H}_1 = \vec{H}_1(\vec{r}, t)$  verifică ecuațiile lui Maxwell într-un mediu lipsit de curenți electrici și de sarcini electrice libere, aceste ecuații sunt verificate și de un câmp definit prin vectorii  $\vec{E}_2(\vec{r}, t) = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\vec{H}_1(\vec{r}, t)$  și respectiv  $\vec{H}_2(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\vec{E}_1(\vec{r}, t)$ .

**1.61** Să se arate că prezența substanței, caracterizată prin polarizarea  $\vec{P}$  și magnetizarea  $\vec{M}$ , este echivalentă cu existența unei distribuții suplimentare de sarcini electrice și de curenți electrici.

**1.62** Fie o suprafață de separare dintre ( $z = 0$ ) două medii. Toate câmpurile sunt uniforme spațial în ambele medii și independente de timp. Mediile sunt caracterizate prin mărimele  $\sigma_1$ ,  $\epsilon_1$  și  $\mu_1 = \mu_o$ , respectiv  $\sigma_2$ ,  $\epsilon_2$  și  $\mu_2 = \mu_o$ . În mediul (1) densitatea de curent este:

$$\vec{j}_1 = j_x \vec{u}_x + j_y \vec{u}_y + j_z \vec{u}_z$$

unde  $j_x, j_y, j_z$  sunt constante. Să se calculeze:

- a). intensitatea câmpului electric  $\vec{E}_2$  din mediul (2)
- b). densitatea superficială de sarcină  $\rho_s$  în planul  $z = 0$

**1.63 a)** Să se scrie ecuațiile Maxwell pentru câmpul electromagnetic într-un mediu cu permitivitatea electrică  $\epsilon$ , permeabilitate magnetică  $\mu$  și conductivitate electrică  $\sigma$ . Să se exprime puterea  $dP$  disipată prin efect Joule în elementul de volum  $dV$  în funcție de intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$  și de conductivitatea  $\sigma$ .

**b)** Să se arate că în regim sinusoidal intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$ , inducția magnetică  $\vec{B}$ , densitatea de sarcină  $\rho$  și densitatea de curent electric  $\vec{j}$  sunt nule în volumul unui conductor perfect.

### 1.3 Solutii

**1.1** Forța de interacțiune dintre cei doi cuarci pozitivi este

$$F_{++} = 9 \times 10^9 \frac{q_+^2}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{4e^2}{9r^2} = 45,51N$$

iar forța de interacțiune dintre un cuarc pozitiv și unul negativ este:

$$F_{+-} = 9 \times 10^9 \frac{q_+ q_-}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{2e^2}{9r^2} = 22,76N$$

Forțele de interacțiune au direcția dreptei ce unește sarcinile electrice (plasate în vârfurile unui triunghi echilateral), și sensul convențional de la sarcina pozitivă spre cea negativă. Pentru a găsi forța totală ce acționează asupra fiecărui cuarc din partea celorlalți, aplicăm principiul superpoziției. Asupra cuarcilor pozitivi acționează două forțe între care este un unghi de  $120^\circ$ .

$$\begin{aligned} F_+ &= \sqrt{F_{++}^2 + F_{+-}^2 + 2F_{+-}F_{++}\cos 120^\circ} \\ &= \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times (1,6 \times 10^{-19})^2}{9 \times (1,5 \times 10^{-15})^2} \sqrt{4 + 1 - 2\frac{1}{2}} \\ &= 39,4N \end{aligned}$$

Forța totală ce acționează asupra cuarcului negativ corespunde rezultantei dintre vectorii forțelor datorate cuarcilor pozitivi, forțe ce fac între ele un unghi de  $60^\circ$ .

$$\begin{aligned} F_- &= \sqrt{F_{+-}^2 + F_{--}^2 + 2F_{+-}F_{--}\cos 60^\circ} \\ &= \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times (1,6 \times 10^{-19})^2}{9 \times (1,5 \times 10^{-15})^2} \sqrt{1 + 1 + 2\frac{1}{2}} \\ &= 39,4N \end{aligned}$$

Sistemul format din cei trei cuarci formează un sistem stabil, rezultanta forțelor ce acționează asupra sistemului fiind zero.

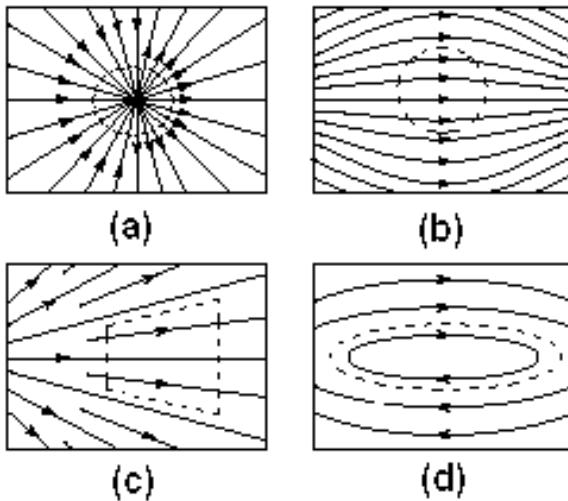
Răspunsul corect este d)

**1.2** Aplicăm teorema circulației câmpului electrostatic de-a lungul unui contur închis:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$$

Dacă alegem contururi închise de forme convenabile (marcate punctat în cele patru configurații de câmp conform Fig.1.2.r.), constatăm următoarele:

- în cazul a), liniile de câmp sunt orientate radial, deci perpendicular pe conturul circular ales. Totuși nu este posibilă schimbarea sensului câmpului în centrul figurii mai ales că în acel punct nu există nici o distribuție de sarcini care ar putea determina acest lucru
- în cazul b), liniile de câmp sunt orientate simetric față de conturul închis; circulația totală a vectorului intensitate de-a lungul conturului este zero datorită simetriei



**Fig.1.2.r**

- în cazul c), liniile de câmp sunt mai dese în partea stângă, ca urmare, conform convenției acceptate în descrierea geometrică a câmpului, valoarea intensității este mai mare în această parte față de partea dreaptă; rezultă o circulație totală nenulă
- în cazul d), liniile de câmp sunt orientate de-a lungul unui contur închis și dau astfel o valoare totală diferită de zero a circulației  
Răspunsul corect este b)

**1.3** Un câmp solenoidal este definit de condiția diferențială:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

sau de condiția integrală:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

ceea ce înseamnă că nu există un flux net prin nici o suprafață închisă aleasă în interiorul câmpului. Simetriile din cele trei reprezentări ne sugerează să alegem suprafetele închise de forma celor date în figura Fig.1.3.r.:

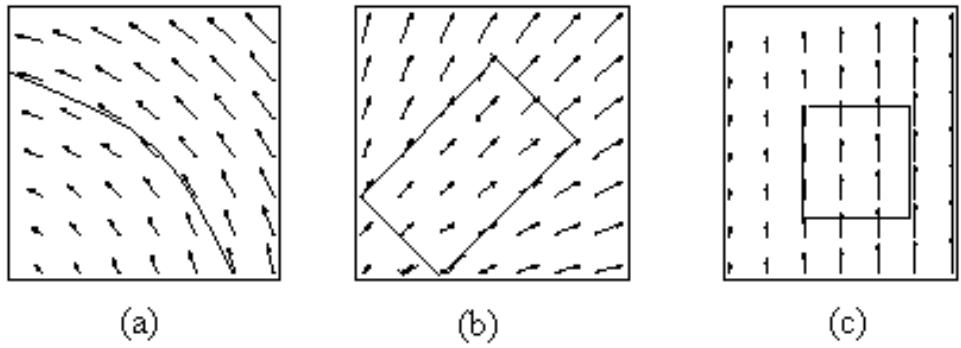


Fig.1.3.r

- unei sfere concentrice cu liniile de câmp - pentru cazul (a)
  - paralelipiped cu secțiunea de forma dată în cazul (b)
  - paralelipiped cu secțiunea dată în cazul (c)

Se observă că liniile de câmp sunt concentrice cu suprafața sferei (cazul (a)), adică  $\vec{E} \parallel d\vec{s}$  și ca urmare:

$$\Phi_a = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \vec{E} \cdot \vec{S} = 0$$

Pentru cazul b):

$$\Phi_b = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \neq 0$$

deoarece fluxul liniilor care intră și care ies prin baze nu sunt egale (valoarea lui  $\vec{E}$  crește cu distanța!).

în cazul c), fiecare linie care intră prin baza inferioarăiese prin cea superioară și ca urmare fluxul total este nul.

$$\Phi_c = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Ca urmare câmpurile descrise de configurațiile a) și c) sunt solenoidale. Un câmp irrotational este definit de condiția diferențială:

$$rot \vec{E} = 0$$

sau de condiția integrală:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

ceea ce înseamnă că circulația vectorului de-a lungul oricărui contur închis ales în interiorul câmpului este nul.

Considerând contururi închise de forma celor date în Fig.1.3.r., se constată:

$$\begin{aligned}\Gamma_a &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = E \cdot 2\pi r \neq 0 \\ \Gamma_b &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \\ \Gamma_c &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} \neq 0\end{aligned}$$

Ca urmare, câmpurile descrise de configurațiile a) și c) sunt rotaționale iar b) este irotațional.

Răspunsul corect este a)

**1.4** Simetria radială a câmpului ne permite calculul divergenței în coordonate sferice:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E) = \\ &= \frac{1}{r^2} 2rE + \frac{\partial E}{\partial r} \\ &= - \left( \frac{2}{r^3} + \frac{2}{r^3} + \frac{1}{\lambda r} \right) \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \exp(-\frac{r}{\lambda}) \\ &= - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \lambda r^2} \exp(-\frac{r}{\lambda})\end{aligned}$$

Aplicăm teorema lui Gauss sub formă diferențială:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

de unde rezultă imediat că:

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \vec{E}$$

Folosind rezultatul găsit pentru divergență la punctul a), se obține:

$$\rho(r) = - \frac{q}{4\pi\lambda r^2} \exp(-\frac{r}{\lambda})$$

ceea ce însemnă că, în jurul sarcinii electrice, se formează un nor de sarcini de semn contrar a cărui densitate scade exponential pe măsură ce crește depărtarea față de sarcină.

Răspunsul corect este a)

**1.5** Câmpul electric descris de vectorul  $\vec{E}$  este electrostatic dacă:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

Deoarece

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{A} \cdot \vec{r}) &= \frac{\partial}{\partial x}(ax)\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}(by)\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}(cz)\hat{z} \\ &= a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z} = \vec{A} \end{aligned}$$

atunci:

$$\operatorname{div}(\vec{A} \cdot \vec{r}) + \vec{r} = (a+x)\hat{x} + (b+y)\hat{y} + (c+z)\hat{z}$$

Ca urmare:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a+x & b+y & c+z \end{vmatrix} = 0$$

Câmpul este irotational, deci afirmația a) este corectă.

Deoarece câmpul este conservativ se poate defini o mărime fizică scalară astfel încât:

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 (\operatorname{div}(\vec{A} \cdot \vec{r}) + \vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ &= - \int_1^2 (\vec{A} + \vec{r}) \cdot d\vec{r} = \left( -\vec{A} \cdot \vec{r} - \frac{1}{2}r^2 \right)_1^2 \end{aligned}$$

noindent Dacă considerăm drept referință punctul  $\vec{r}_1 = 0$ , pentru care  $V_1 = 0$ , se poate defini potențialul într-un punct ca:

$$V = -\vec{A} \cdot \vec{r} - \frac{1}{2}r^2$$

Afirmația b) este adevărată. Folosim în continuare teorema lui Gauss:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} \\ \rho &= \epsilon_0 \operatorname{div} (\operatorname{div}(\vec{A} \cdot \vec{r}) + \vec{r}) \\ \rho &= \epsilon_0 \operatorname{div} [(a+x)\hat{x} + (b+y)\hat{y} + (c+z)\hat{z}] \\ \rho &= \epsilon_0 \left[ \frac{\partial}{\partial x}(a+x)\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}(b+y)\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}(c+z)\hat{z} \right] \\ \rho &= \epsilon_0 (1+1+1) \\ \rho &= 3\epsilon_0 \end{aligned}$$

Afirmația c) este corectă.

Răspunsul corect este d)

**1.6** Potențialul creat în  $O$  este dat de suma potențialelor create de sarcinile din  $A$  respectiv din  $B$ .

$$\begin{aligned} V(O) &= V_A(O) + V_B(O) \Rightarrow \\ V(O) &= \frac{-q}{4\pi\varepsilon a} + \frac{3q}{4\pi\varepsilon a} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon a} \Rightarrow \\ V(O) &= 9 \times 10^9 Nm^2C^{-2} \frac{2 \times 10^{-6} C}{0,5 m} = 36 \times 10^3 V \end{aligned}$$

Ca urmare afirmația a) este corectă.

Forța cu care sarcina plasată în  $B$  acționează asupra sarcinii din punctul  $A$  este:

$$\begin{aligned} F_A &= \frac{(-q)(3q)}{4\pi\varepsilon(2a)^2} \Rightarrow \\ F_A &= -9 \times 10^9 Nm^2C^{-2} \frac{3 \times (10^{-6})^2 C^2}{4 \times (0,5)^2 m^2} = -27 \times 10^{-3} N \end{aligned}$$

Intensitatea câmpului electrostatic creat de sarcina  $-q$  în punctul  $J$  este:

$$\begin{aligned} E &= \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0(a^2 + a^2)} \Rightarrow \\ E &= -9 \times 10^9 Nm^2C^{-2} \frac{10^{-6} C}{2 \times (0,5)^2 m^2} = -18 \times 10^3 N/C \end{aligned}$$

Ca urmare toate variantele sunt adevărate, deci răspunsul corect este e)

**1.7** Egalând forțele care acționează asupra sarcinii  $Q$  se obține:

$$\frac{q_1 Q}{4\pi\varepsilon \left(\frac{3d}{4}\right)^2} = \frac{q_2 Q}{4\pi\varepsilon \left(\frac{d}{4}\right)^2}$$

Rezultă raportul celor două sarcini:

$$\frac{q_1}{q_2} = 9$$

Răspunsul corect este c)

**1.8** Potențialul într-un punct oarecare,  $x$ , situat pe axa  $Ox$  așezată pe

dreapta ce unește cele două corpuri, este determinat de suma potențialelor create de fiecare sarcină:

$$\begin{aligned}
 V &= V_1 + V_2 \Rightarrow \\
 V &= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0(x - x_1)} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0(x_2 - x)} = 0 \Rightarrow \\
 2(x_2 - x) &= (x - x_1) \Rightarrow \\
 x &= \frac{2x_2 + x_1}{3} = \frac{2 \times 3m + 1,5m}{3} = 2,5m
 \end{aligned}$$

Răspunsul corect este a)

**1.9** Conform principiului acțiunii și reacțiunii, forța cu care electronul atrage protonul este egală și de sens opus cu forța cu care protonul atrage electronul. Ar părea astfel că ciocnirea celor două particule se va produce la mijlocul distanței dintre ele. Această observație este însă falsă deoarece masa protonului fiind de 2000 ori mai mare decât cea a electronului, accelerarea lui este de 2000 ori mai mică. Ca urmare ciocnirea se va produce în imediata vecinătate a protonului.

$$\begin{aligned}
 \frac{F_e}{F_p} &= \frac{m_e a_e}{m_p a_p} = 1 \Rightarrow \\
 a_p &= \frac{m_e}{m_p} a_e
 \end{aligned}$$

Varianta corectă este c)

**1.10** Conform Fig.1.10.r., forța rezultantă care acționează asupra sarcinii plasate în punctul A este diferită de zero și orientată pe direcția AB. Dacă sarcina este plasată în punctul B forța rezultantă este zero.

Răspunsul final este d)

**1.11** Fie o dreptă normală la fir, în orice punct O al acestuia (fig.1.11.1.r). Oricărui element de fir  $dl$  situat la sânga punctului O îi corespunde un element de fir  $dl'$ , egal, situat simetric față de O, la dreapta. Dacă densitatea liniară de sarcină a firului este  $\lambda$ , atunci sarcinile elementare  $dq = \lambda dl$  și  $dq' = \lambda dl'$  vor genera, în punctul P situat pe normală, câmpurile  $d\vec{E}$  și  $d\vec{E}'$  ale căror compoziții paralele cu firul se anulează. Componentele normale la fir se compun scalar și dau câmpul electric generat de fir în orice punct din spațiu. Deci, câmpul electric generat de firul infinit, încărcat uniform cu sarcină electrică, este normal la fir și radial în jurul oricărui punct O al firului (Fig.1.11.2.r). Pentru a calcula valoarea câmpului elec-

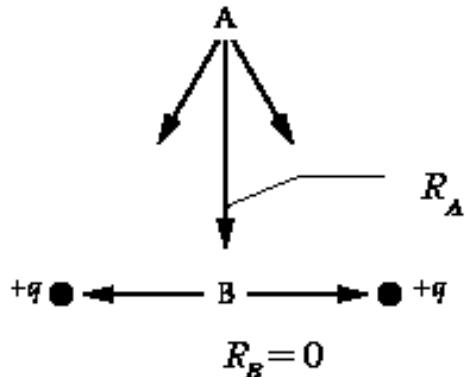


Fig.1.10.r

tric, vom închide, imaginar, o porțiune a firului cu o suprafață cilindrică gaussiană, coaxială cu firul (Fig.1.11.3.r). La distanța  $r$  de axa cilindrului, pe suprafața lui laterală,  $\vec{E}$  are aceeași valoare și este orientat perpendicular pe fir. Pe suprafetele bazelor cilindrului gaussian,  $\vec{E}$  este perpendicular pe normală, iar fluxul electric prin aceste suprafete este nul, deoarece  $\Phi_E(\text{base}) = E(S_b + S_b) \cos 90^\circ = 0$ . Fluxul prin suprafața laterală este  $\Phi_E(\text{lateral}) = E \cdot S_l = E \cdot 2\pi r L$  și reprezintă fluxul total prin suprafața cilindrului. Conform legii lui Gauss pentru câmpul electric vom avea:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E(2\pi r L) = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

Pe de altă parte dacă vom considera firul de lungime  $L$ , atunci sarcina  $q$  conținută în suprafață gaussiană este  $q = \lambda \cdot L$  care, înlocuită în relația de mai sus va conduce la determinarea câmpului electric:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

**1.12** Se împarte sarcina totală a firului în sarcini electrice elementare, de forma unor segmente de lungime  $dx$ . Folosind reprezentarea din Fig.1.12.r, se poate scrie:

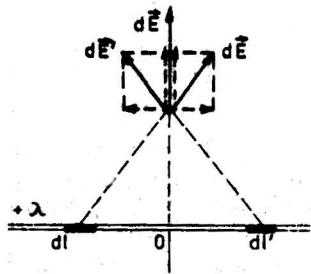


Fig.1.11.1.r

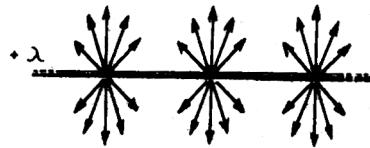


Fig.1.11.2.r

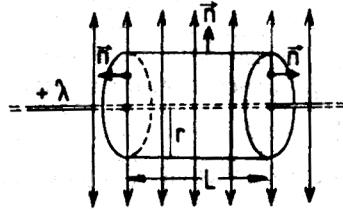
$$dq = \lambda dx$$

Intensitatea câmpului electric creat în punctul  $O$  de această sarcină elementară este pe direcția axei  $Ox$  și are sensul înspre axa negativă dacă distribuția de sarcină este pozitivă. Mărimea intensității câmpului elementar este:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0(d+x)^2} = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(d+x)^2}$$

iar a câmpului total creat în punctul  $O$  de către întreaga distribuție este:

$$E = \int_0^L \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(d+x)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^L \frac{dx}{(d+x)^2}$$



**Fig.1.11.3.r**

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left( -\frac{1}{d+L} + \frac{1}{d} \right) = \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 d(L+d)}$$

Răspunsul corect este b)

**1.13** Calculăm intensitatea câmpului electric elementar creat de sarcina infinitesimală:

$$dq = \lambda dl$$

în punctul situat la distanța  $z$  de centrul inelului:

$$d\vec{E} = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Vectorul intensitate este orientat pe dreapta suport ce unește sarcina elementară de punctul de interes.

Dacă se consideră sarcina elementară diametral opusă și se sumează vectorial se observă anularea componentelor perpendiculare pe axa Oz.

Rezultanta celor doi vectori elementari este determinată doar de suma componentelor orientate de-a lungul axei verticale Oz. Această observație ne permite ca, prin extrapolare, să adunăm doar componentele vectorilor elementari orientate de-a lungul axei verticale:

$$dE_z = dE \cos \theta = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cos \theta$$

Folosind relațiile geometrice:

$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

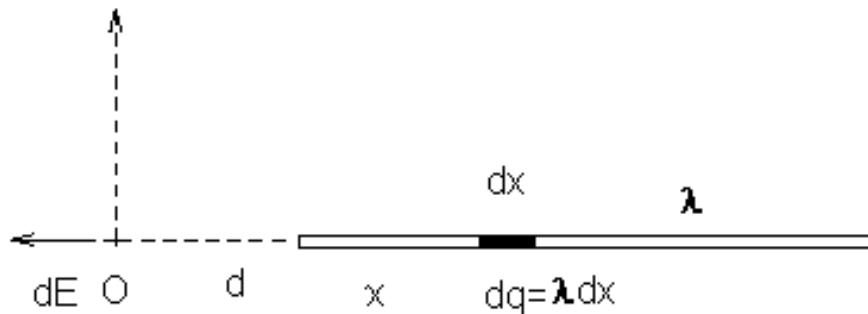


Fig.1.12.r

vom exprima totul în funcție de distanța  $z$  și de raza  $R$  pentru a integra în final după  $dl$ . Se obține:

$$dE_z = \frac{\lambda z dl}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Ca urmare:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{2\pi R} dE_z = \frac{\lambda z}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} dl \\ &= \frac{\lambda z 2\pi R}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Răspunsul corect este d)

**1.14** Pe baza unui raționament asemănător problemei precedente se ajunge la concluzia că în orice punct câmpul electric este orientat normal la plan. Pentru a calcula acest câmp vom alege ca suprafață gaussiană un cilindru pe care planul îl secționează normal, în două jumătăți (fig.1.14.r). Lungimea cilindrului se alege astfel încât bazele sale să treacă prin punctele în care vrem să calculăm câmpul. Fie  $+\sigma$  densitatea superficială de sarcină a planului și  $S$  aria bazelor cilindrului. Fluxul câmpului electric prin aria laterală este nul ( $\vec{E}$  este paralel cu suprafața laterală). Fluxul prin bazele cilindrului va fi  $\Phi_E(\text{base}) = E \cdot (S_b + S_b)$ . Pe de altă parte, sarcina din interiorul cilindrului gaussian este  $q = +\sigma S$ . Utilizând în continuare legea lui Gauss vom obține:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

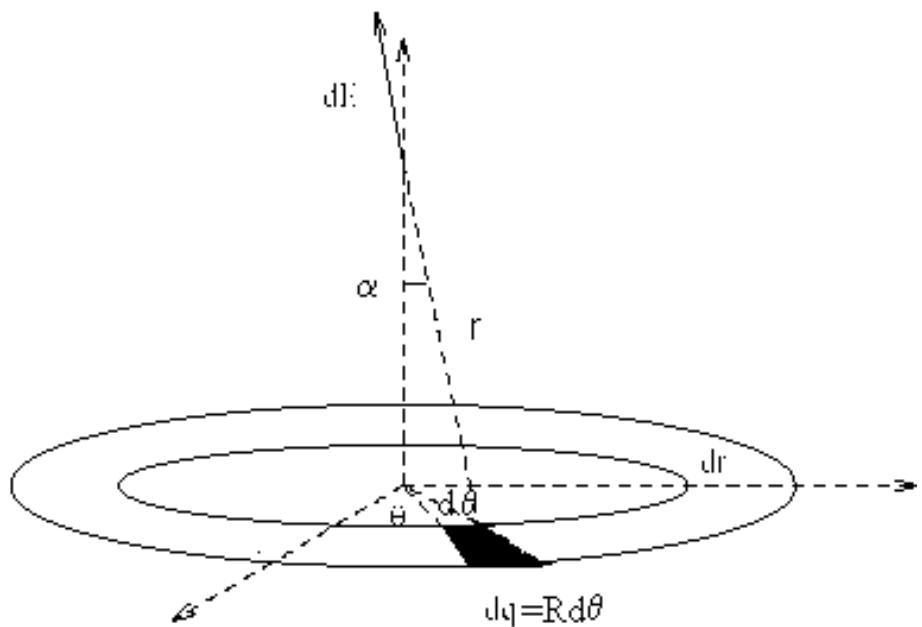


Fig.1.13.r

**1.15** Vom rezolva această problemă folosind rezultatul problemei anterioare împreună cu toate considerațiile făcute. Discul poate fi construit prin adăugarea de inele elementare. Așadar, vom determina intensitatea câmpului electric într-un punct de pe axa verticală, sumând algebric componentele intensităților elementare de-a lungul axei verticale, create de fiecare inel care construiește discul.

Intensitatea câmpului electrostatic elementar produs de un inel de rază  $r$  și grosime  $dr$  este:

$$dE = \frac{dqz}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma 2\pi z r dr}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}}$$

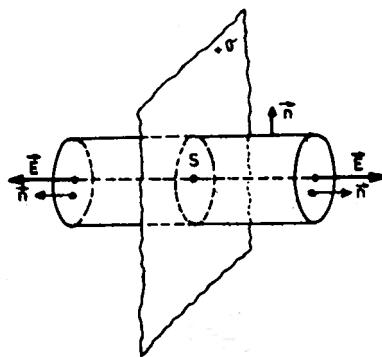


Fig.1.14.r

Integrând de la  $r = 0$  la  $r = R$  se obține valoarea finală:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^L dE = \frac{\sigma 2\pi z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + L^2}} \right) = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + L^2}} \right) \end{aligned}$$

După cum se constată, dacă  $z \rightarrow \infty$ ,  $E \rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ . Cu alte cuvinte, în puncte foarte îndepărtate de suprafața discului efectul distribuției de sarcini nu depinde de forma acesteia.

Răspunsul corect este c)

**1.16** Teorema lui Gauss nu poate fi aplicată decât în cazuri ce prezintă simetrii, adică atunci când configurația liniilor de câmp și în consecință vectorul intensitate câmp electric, au o orientare cunoscută. Ea afirmă faptul că fluxul liniilor de câmp printr-o suprafață închisă este determinat de sarcina închisă în acea suprafață.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon}$$

Deoarece suprafața cilindrică nu închide nici o sarcină sau distribuție de sarcini, fluxul net prin ea este zero.

Răspunsul corect este c)

**1.17** Răspunsul corect al acestei probleme se găsește cu ajutorul teoremei lui Gauss.

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon}$$

unde:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

și al observației că, în puncte din exteriorul unei distribuții sferice, câmpul electric este creat este același cu al unei sarcini punctiforme, plasată în centrul distribuției:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon R^2} \hat{r}$$

Așadar, pe măsură ce raza balonului crește, valoarea intensității scade cu inversul pătratului razei. Deoarece valoarea fluxului printr-o suprafață închisă nu depinde decât de valoarea sarcinii închisă în acea suprafață, iar sarcina electrică rămâne aceeași, valoarea fluxulu nu se modifică. Produsul dintre suprafață (care crește cu pătratul razei) și intensitatea câmpului (scade cu inversul pătratului razei) se menține constant.

Răspunsul corect este b)

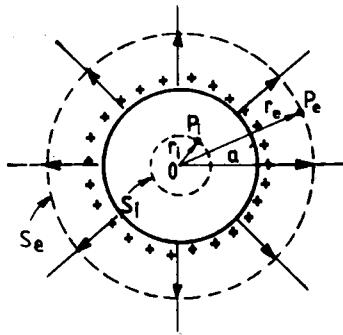
**1.18** În interiorul unui material conductor la echilibru electrostatic,  $\vec{E} = 0$  indiferent de sarcina electrică de pe suprafață sau exteriorul conductorului. Acest lucru înseamnă că regiunea din interiorul unui conductor este neutră din punct de vedere electric adică lipsesc sarcinile electrice necompensate:

$$\rho = 0$$

Absența câmpului electric în interiorul unui conductor conduce la observația că această regiune este echipotențială. Aceste fenomene stau la baza ecranării electrostatice, care permite izolarea din punct de vedere electric a oricărui corp de influență câmpurilor electrice exterioare. În practică un înveliș conductor este realizat de o plasă (rețea) metalică suficient de densă.

Răspunsul corect este d)

**1.19** Fie un strat sferic de sarcină pozitivă cu densitatea superficială  $+\sigma$ . Fie  $a$  raza stratului sferic (Fig.1.19.1.r). Pentru a calcula câmpul electric într-un punct din exteriorul stratului de sarcină  $P_e$  vom imagina o suprafață



**Fig.1.19.1.r**

gaussiană sferică  $S_e$  de rază  $r_e$  concentrică cu stratul sferic. Câmpul electric are aceeași valoare pe suprafața  $S_e$  și este normal la suprafață. Fluxul câmpului prin suprafața  $S_e$  este, conform definiției lui:

$$\Phi_E = E_e \cdot 4\pi r_e^2$$

iar sarcina electrică din interiorul suprafeței  $S_e$  este  $Q = \sigma \cdot 4\pi a^2$ . Aplicăm în continuare legea lui Gauss și vom obține expresia câmpului electric în exteriorul stratului de sarcină:

$$E_e = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_e^2}$$

Deci, câmpul electric generat de o sarcină  $Q$  distribuită uniform într-un strat sferic de rază  $a$  este același cu câmpul electric generat de sarcina  $Q$  dacă ea ar fi o sarcină punctiformă situată în centrul stratului sferic.

Pentru a calcula câmpul într-un punct  $P_i$  din interiorul stratului de sarcină, vom imagina o suprafață gaussiană sferică  $S_i$  de rază  $r_i$  și concentrică cu stratul sferic. Cum se vede din figură, în interiorul suprafeței  $S_i$  nu există sarcini electrice, deci  $Q = 0$ , astfel încât  $E_i(4\pi r_i^2) = 0$ . Deoarece raza  $r_i \neq 0$  rezultă că  $E_i = 0$ . În Fig.1.19.2.r. este arătată dependența de  $r$  a câmpului electric generat de stratul sferic.

**1.20** Regiunea din interiorul învelișului conductor aflat la echilibru electrostatic este caracterizată de un câmp electrostatic nul indiferent de sarcina de

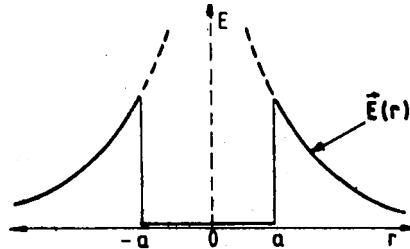


Fig.1.19.2.r

pe suprafața sau exteriorul acestuia. Alegem aşadar o suprafață gaussiană de formă sferică în interiorul învelișului sferic (Atenție!  $\vec{E} \neq 0$  în spațiul dintre cei doi conductori!) și aplicăm teorema lui Gauss. Rezultă

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 = Q + q_{int}$$

Adică:

$$q_{int} = -Q$$

Pe suprafața interioară se distribuie sarcina electrică  $-Q$ . Folosind principiul conservării sarcinii electrice găsim sarcina care rămâne pe suprafața exterioară a învelișului sferic conductor:

$$\begin{aligned} q_{int} + q_{ext} &= -5Q \\ q_{ext} &= -4Q \end{aligned}$$

Răspunsul corect este c)

**1.21** Vom determina mai întâi vectorul intensitate câmp electric:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -gradV \\ &= -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} \\ &= -\alpha(y\hat{x} + x\hat{y} - 2z\hat{z}) \end{aligned}$$

Proiecția vectorului intensitate pe direcția vectorului  $\vec{r}(1, 0, 2)$  se calculează cu ajutorul produsului scalar:

$$\begin{aligned} \text{Pr } \vec{E}_{\vec{r}} &= \frac{\vec{E} \cdot \vec{r}}{r} = \\ &= -\alpha(y - 4z) \end{aligned}$$

Valoarea acestei proiecții în  $M(7, 1, 2)$  este:

$$\text{Pr } \vec{E}_r = -\alpha(1 - 8) = 7\alpha$$

Răspunsul corect este b)

**1.22** Vom alege conform figurii Fig.1.22.r. elemente de sarcină cuprinse între două arce delimitate în planul discului de cercuri cu centrul în punctul A de raze puțin diferite ( $r, r + dr$ ). Dacă definim densitatea superficială de sarcină electrică:

$$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$$

sarcina electrică a elementului de suprafață considerat este:

$$\begin{aligned} dq &= \sigma \cdot ds \\ &= \sigma \cdot MN \cdot dr \\ &= \sigma \cdot (2r\theta) \cdot dr \end{aligned}$$

Potențialul creat de un astfel de element de sarcină în punctul A este:

$$\begin{aligned} dV &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot (2r\theta) \cdot dr}{r} \\ &= \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} (\theta \cdot dr) \end{aligned}$$

Vom găsi contribuția totală a elementelor care construiesc discul prin integrarea după unghiul  $\theta$  de la  $\pi/2$  la 0, de aceea folosim unele considerente geometrice pentru a-l elimină pe  $dr$ . Din  $\Delta AMS$  dreptunghic în  $M$  (deoarece subîntinde un arc de lungime egală cu jumătate de cerc) se observă că:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{r}{2R} \Rightarrow r = 2R \cos \theta \\ dr &= -2R \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

Potențialul total creat de tot discul în-tr-un punct situat la periferie este:

$$\begin{aligned} V &= - \int_{\pi/2}^0 dV = - \frac{R\sigma}{\pi\epsilon_0} \int_{\pi/2}^0 \theta \sin \theta d\theta \\ &= - \frac{R\sigma}{\pi\epsilon_0} [-\theta \cos \theta - \sin \theta]_{\pi/2}^0 \\ &= \frac{R\sigma}{\pi\epsilon_0} = \frac{q}{\pi^2 R \epsilon_0} \end{aligned}$$

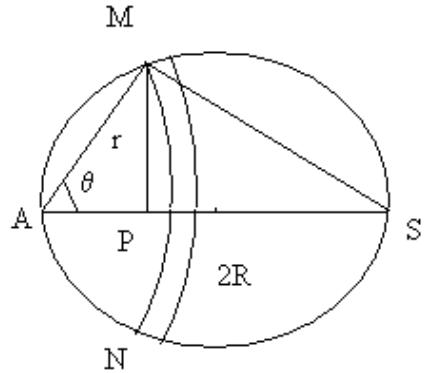


Fig.1.22.r

Răspunsul corect este a)

**1.23** Conform principiului superpoziției, potențialul creat de cele două sarcini ale dipolului electric în punctul  $P$  (Fig.1.23.r.) este egal cu suma potențialelor celor două sarcini:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Dacă punctul în care calculăm potențialul este departe de centrul dipolului ( $r \gg 2a$ ) atunci:

$$r_1 r_2 \simeq r^2$$

Deoarece:

$$r_2 - r_1 \simeq 2a \cos \theta$$

expresia potențialului  $V$  devine:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \frac{2a \cos \theta}{r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

**1.24** Pentru a determina câmpul electric creat de un dipol electric aflat

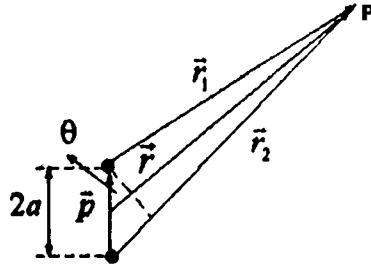


Fig.1.23.r

În vid, vom utiliza proprietatea de conservativitate a câmpului electrostatic, adică  $\vec{E} = -\nabla V$ . Dacă ținem cont de expresia potențialului electric  $V$  creat de dipol cu momentul dipolar  $\vec{p}$ , vom obține pentru câmp:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\left(\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}\right)$$

Pentru a calcula  $\nabla\left(\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}\right)$  vom nota cu  $A = \vec{p}\vec{r}$  și cu  $B = \frac{1}{r^3}$ . Se poate demonstra că:

$$\nabla(AB) = A\nabla B + B\nabla A$$

Deci, pentru cazul nostru vom obține:

$$\nabla\left(\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}\right) = (\vec{p}\vec{r})\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) + \frac{1}{r^3}\nabla(\vec{p}\vec{r})$$

Vom calcula în continuare  $\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)$ :

$$\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right)\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^3}\right)\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\right)\vec{e}_z$$

Deoarece:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right) &= -\frac{3}{r^4}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = -\frac{3x}{r^5} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^3}\right) &= -\frac{3y}{r^5} \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\right) &= -\frac{3z}{r^5}\end{aligned}$$

va rezulta:

$$\nabla \left( \frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3x\vec{e}_x + 3y\vec{e}_y + 3z\vec{e}_z}{r^5} = -\frac{3\vec{r}}{r^5}$$

în continuare vom calcula  $\nabla(\vec{pr})$ :

$$\nabla(\vec{pr}) = \nabla(xp_x + yp_y + zp_z) = p_x\vec{e}_x + p_y\vec{e}_y + p_z\vec{e}_z = \vec{p}$$

Astfel, câmpul electric creat de un dipol va avea expresia:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{3(\vec{pr})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right]$$

**1.25** Capacitatea electrică a unui sistem de doi conductori încărcați cu sarcina electrică  $Q$  este:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

unde  $V_1 - V_2$  este diferența de potențial dintre aceștia.

$$V_1 - V_2 = \int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Folosim observațiile conform cărora câmpul electric în exteriorul unei distribuții sferice este același ca și cel al unei distribuții punctiforme cu sarcină egală, plasată în centrul sferei, adică:

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

iar câmpul electric în interiorul unui conductor este zero, adică

$$\vec{E}_2 = 0$$

Se obține:

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Qdr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Capacitatea electrică a condensatorului sferic este:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Răspunsul corect este c)

**1.26** Capacitatea electrică este mărimea ce caracterizează un conductor din punct de vedere al proprietății de a acumula sarcina electrică și are definiția:

$$C = \frac{Q}{V}$$

unde  $V$  este potențialul acestuia. Deoarece nu este definită decât diferența de potențial dintre două puncte, pentru a găsi potențialul într-un punct trebuie să considerăm o referință căreia să-i atribuim potențialului, prin convenție, valoarea zero. De obicei acest punct de referință se alege la infinit, acolo unde valoarea forței de interacțiune (și implicit a intensității câmpului) tinde spre zero.

$$V = - \int_{\infty}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Separăm această integrală în două cantități, corespunzătoare intervalelor  $(-\infty, R_2)$  și  $(R_2, R_1)$  pentru care valorile lui  $\vec{E}$  sunt date de expresii diferite:

$$V = - \int_{\infty}^{R_2} \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} - \int_{R_2}^{R_1} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r}$$

Câmpul electric în exteriorul unei distribuții sferice este același ca și al unei distribuții punctiforme cu aceeași sarcină plasată în centrul sferei, adică:

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

în regiunea umplută cu dielectric, intensitatea câmpului electric se schimbă datorită faptului că avem un alt mediu, cu permisivitatea electrică  $\varepsilon$ . Dacă aplicăm teorema lui Gauss pentru dielectriți rezultă:

$$D \cdot 4\pi r^2 = Q$$

Folosind relația de legătură dintre inducția câmpului electric și intensitate, rezultă:

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_1$$

adică:

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

Rezultă:

$$\begin{aligned}
 V &= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{R_2} \frac{dr}{r^2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{r^2} \\
 &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\varepsilon_r R_1} - \frac{1}{\varepsilon_r R_2} \right) \\
 &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \left( \frac{\varepsilon_r - 1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right)
 \end{aligned}$$

Capacitatea electrică a conductorului este:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 R_2}{R_2 + R_1(\varepsilon_r - 1)}$$

Răspunsul corect este e)

**1.27** Între cei doi cilindri crează câmp doar cilindrul interior, pentru cilindrul exterior câmpul electric în acest spațiu fiind zero. Deoarece liniile de câmp pentru acest sistem au simetrie cilindrică, alegem o suprafață închisă de forma unui cilindru de rază  $r$  și generatoare  $l$  care să închidă cilindrul interior. Aplicarea teoremei lui Gauss conduce la:

$$E_1 \cdot 2\pi r l = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

adică:

$$E_1 = \frac{Q}{2\pi r l \varepsilon_0}$$

Diferența de potențial dintre conductori este conform definiției:

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi l \varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi l \varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Capacitatea electrică a unui condensator cilindric este:

$$C = \frac{2\pi l \varepsilon_0}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$$

Răspunsul corect este b)

**1.28** Aplicarea teoremei lui Gauss pentru cazul unei distribuții sferice umplute cu material dielectric conduce la:

$$D \cdot 4\pi r^2 = Q$$

adică:

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Deoarece:

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \Rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

Ca urmare:

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q}{4\pi r \alpha \varepsilon_0}$$

Diferența de potențial dintre conductori este conform definiției:

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{4\pi \alpha \varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{4\pi \alpha \varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Capacitatea electrică a sistemului devine:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{4\pi \alpha \varepsilon_0}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$$

Răspunsul corect este e)

**1.29** Energia electrostatică a unei configurații de sarcini electrice se calculează cu ajutorul formulei:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i$$

unde  $q_i$  – sarcinile electrice iar  $V_i$  – potențialele create de toate sarcinile electrice  $q_{j,j \neq i}$  în punctul în care este plasată sarcina  $q_i$ , adică:

$$V_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n V_{ij}$$

În cazul configurației din problemă, toate sarcinile electrice sunt egale și datorită simetriei și potențialele create de sarcini în colțurile tetraedrului vor fi egale.

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_4$$

iar

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{12} + V_{13} + V_{14} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \right) \\ &= \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 a} \end{aligned}$$

Energia electrostatică a configurației devine:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \cdot 4qV = \frac{1}{2} \cdot 4q \cdot \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 a} \\ &= \frac{3q^2}{2\pi\varepsilon_0 a} \end{aligned}$$

Răspunsul corect este a)

**1.30** Energia electrostatică pentru configurația de sarcini electrice se calculează cu ajutorul formulei:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 q_i V_i$$

unde  $q_i$  – sarcinile electrice iar  $V_i$  – potențialele create de toate sarcinile electrice  $q_j, j \neq i$  în punctul în care este plasată sarcina  $q_i$  adică:

$$V_i = \sum_{j=1, j \neq i}^8 V_{ij}$$

în cazul configurației din problemă, toate sarcinile electrice sunt egale ca urmare:

$$W = \frac{q}{2} \sum_{i=1}^8 V_i$$

Simetria problemei conduce la observația că potențialele în toate colțurile cubului sunt egale. Ca urmare vom calcula potențialul creat de toate sarcinile în unul din vârfurile cubului:

$$V_1 = 3V_{1v} + 3V_{1d} + V_D$$

unde  $V_{1v}$  – potențialul creat de sarcinile plasate la distanța  $a$ ,  $V_{1d}$  – potențialul creat de sarcinile plasate diagonal opus pe fețele laterale, adică la distanța

$a\sqrt{2}$  iar  $V_D$  – potențialul creat de sarcina diagonal opusă cubului, adică la distanța  $\sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$ . Se obține:

$$V_1 = 3 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + 3 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{3}}$$

Energia electrostatică a configurației devine:

$$W = \frac{q}{2} \cdot 8V_1 = \frac{3q^2}{\pi\epsilon_0 a} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \right)$$

Răspunsul corect este d)

**1.31** Energia proprie electrostatică a unei sfere încărcate uniform cu sarcină electrică se poate calcula ca lucrul mecanic necesar pentru a aduce de la infinit sarcini electrice și a construi distribuția dată. Să presupunem că am construit deja un miez sferic de rază  $r$  și aducem lângă acesta, sarcinile de pe o pătură sferică de grosime  $dr$ . Potențialul electric creat de miezul sferic de rază  $r$  în punctele în care sunt aduse sarcinile din pătura sferică este:

$$V_{miez} = \frac{q_{miez}}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho \cdot \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}$$

Energia electrostatică pentru acoperirea sferei cu primul înveliș este:

$$\begin{aligned} dW &= dq_{patura} \cdot V_{miez} = (\rho \cdot 4\pi r^2 dr) \cdot \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0} \\ &= \frac{\rho^2 4\pi r^4 dr}{3\epsilon_0} \end{aligned}$$

Energia electrostatică totală pentru construcția întregii sfere se găsește ”sumând” în mod continuu toate aceste contribuții, adică:

$$W = \int_0^R dW = \frac{\rho^2 4\pi}{3\epsilon_0} \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0}$$

Răspunsul corect este d)

**1.32** Energia potențială se poate defini doar pentru câmpuri conservative, pentru care lucrul mecanic al forței nu depinde de drumul urmat ci doar de poziția inițială și finală a mișcării, astfel că, pe un contur închis:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

ceea ce înseamnă că:

$$\nabla \times \vec{F} = 0$$

în coordonate carteziene, operatul diferențial "rot=  $\nabla \times$ " are expresia:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{F} &= \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 3 \end{vmatrix} = \hat{z}(-1 - 1) = -2\hat{z} \neq 0 \end{aligned}$$

Deoarece condiția nu este îndeplinită nu se poate defini energia potențială.  
Răspunsul corect este d)

**1.33** Câmpul magnetic creat de elementul de conductor  $dx$ , prin care trece curentul  $I$ , la distanța  $r$  de conductor (Fig.1.33.r) este tangent la linia de câmp care este circulară și perpendiculară pe conductor. Expresia câmpului magnetic este dată de legea Biot-Savart-Laplace:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \sin \theta}{r^2}$$

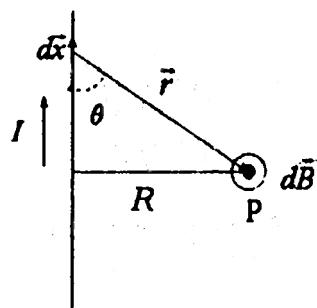


Fig.1.33.r

Inducția magnetică  $\vec{B}$  este aceeași pentru toate elementele de curent, la

aceeași distanță de conductor și are aceeași orientare. Deci, câmpul magnetic creat de întreg conductorul va fi:

$$B = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx \sin \theta}{r^2}$$

Dacă ținem cont că:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + R^2} \\ \sin \theta &= \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} \\ \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} &= \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

atunci se poate calcula câmpul magnetic total:

$$B = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_o I}{2\pi R}$$

**1.34** Valoarea inducției create de cei doi curenți în punctul O este dată de superpoziția câmpurilor magnetice create de fiecare curent luat separat.

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

Câmpul magnetic creat de curentul  $I_1$  înțeapă planul foii în punctul O

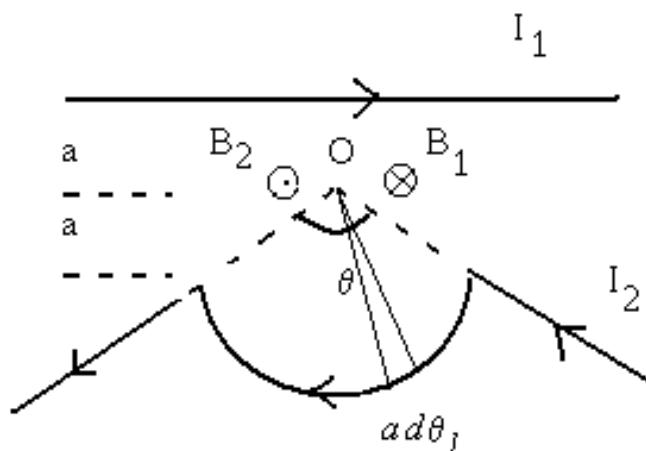


Fig.1.34.r

(Fig.1.34.r). Simetria acestui curent ne permite să calculăm valoarea lui  $B_1$  cu ajutorul teoremei lui Ampère.

$$B_1 \cdot 2\pi a = \mu_0 I_1$$

De aici rezultă că:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$$

Curentul  $I_2$  are însă o formă care nu ne permite să aplicăm teorema circulației vectorului  $B$ , de aceea vom determina pe  $B_2$  pe calea clasică, adică cu ajutorul teoremei lui Biot-Savart.

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Deoarece  $d\vec{l} \times \vec{r} = 0$  în puncte colineare cu conductor parcurs de curent, componentele lui  $I_2$  orientate pe direcție radială, nu contribuie la valoarea câmpului magnetic, deoarece câmpul produs de ele este nul. Ca urmare, valoarea lui  $B_2$  este determinată doar de regiunea de forma arcului de cers cu deschidere  $\theta$ .

Aplicând regula burghiului găsim că sensul acestui vector  $\vec{B}_2$  este opus lui  $\vec{B}_1$ , astfel că valoarea rezultantă a inducției magnetice devine:

$$B = B_1 - B_2$$

unde:

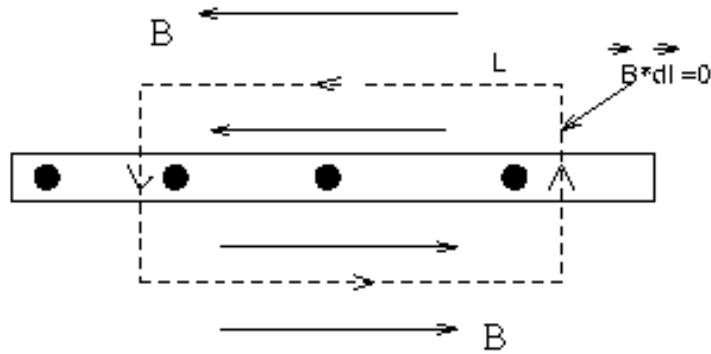
$$B_2 = \int_0^\theta dB = \frac{I_2 \mu_0}{4\pi a^2} \int_0^\theta a d\theta = \frac{I_2 \mu_0 \theta}{4\pi a}$$

Se obține:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi a} \left( I_1 - \frac{I_2 \theta}{2} \right)$$

Răspunsul corect este b)

**1.35** Se poate considera că un plan infinit se poate construi din conductori liniari infiniti ca în figura Fig.1.35.r și considerăm că sensul curenților iese din planul hârtiei.



**Fig.1.35.1.r**

Să alegem un contur de forma unui dreprunghi ca cel din Fig.1.35.r, care înconjură o porțiune de lungime  $L$  din plan. Conform teoremei lui Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (jL)$$

Având în vedere orientarea vectorului inducție (dată de regula burghiu lui drept) și indicată în figură, termenii din circulație care corespund laturilor perpendiculare pe plan sunt nule, astfel că integrala pe conturul închis se reduce la:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL + 0 + BL + 0 = \mu_0 (jL)$$

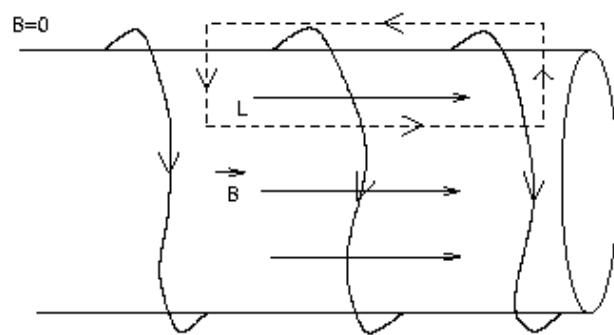
Câmpul magnetic creat de un plan infinit este:

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 j$$

După cum se observă această valoare este constantă pentru orice depărtare față de plan.

Să considerăm în continuare cazul unui solenoid cu  $n$  spire pe unitatea de lungime. Alegem suprafața închisă (numită contur Ampèrian) de forma celei punctate în Fig.1.35.2.r, adică două segmente paralele cu inducția închisă de două segmente perpendiculare. În interiorul solenoidului câmpul magnetic este orientat, pentru sensul indicat al curentilor, spre dreapta. În exterior, valoarea inducției este zero.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL + 0 + 0 + 0 = \mu_0 (nL) I$$

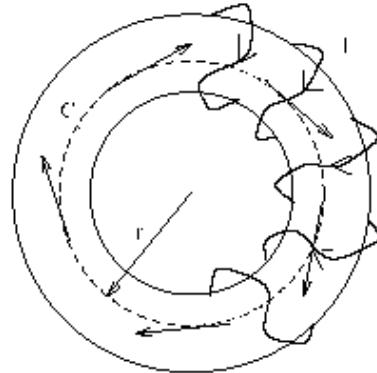


**Fig.1.35.2.r**

Câmpul magnetic creat de un solenoid este:

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 n I$$

Pentru cazul unei bobine cu  $N$  spire (tor), conturul Ampèrian este de forma unui cerc, ca în Fig.1.35.3.r.



**Fig.1.35.3.r**

Un tor este de fapt o bobină care are capetele lipite. Direcția inducției câmpului magnetic se găsește cu regula mâinii drepte. Circulația acestui vector de-a lungul conturului ales, care coincide cu linii de câmp magnetic este:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 (NI)$$

Câmpul magnetic creat de un tor este:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

Răspunsul corect este a)

**1.36** Contribuția la valoarea inductiei în centrul figurii este dată doar de segmentele din conductor de forma semicerculilor de rază  $a$  și  $b$ . Segmentele de-a lungul razelor nu crează amp magnetic, deoarece, pentru ele:

$$d\vec{l} \times \vec{r} = 0$$

Deoarece sensul curentului este contrar pe cele două semicercuri, valorile inducțiilor create sunt opuse ca sens. Câmpul resultant devine:

$$B = B_a - B_b = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \int_0^a \frac{dl}{a^2} - \int_0^b \frac{dl}{b^2} \right) = \frac{\mu_0 I}{4} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Răspunsul corect este b)

**1.37** Forța de interacțiune cu care conductorul  $I_1$  acționează asupra unui element  $d\vec{l}_2$  din conductorul parcurs de curentul  $I_2$  este:

$$d\vec{F} = I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$$

unde  $\vec{B}_1$  – este inducția câmpului magnetic creat de curentul  $I_1$  în locul în care este situat elementul de lungime  $d\vec{l}_2$  din conductorul 2. Se observă că pentru conductori paraleli cu vectorul inducție, forța de interacțiune este zero. În cazul de față, pentru laturile perpendiculare pe fir (CD, DA), forța de interacțiune este nulă.

$$\vec{F}_{CD} = \vec{F}_{DA} = 0$$

Forța totală devine:

$$\vec{F} = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{CD}$$

Inducția magnetică creată de un conductor liniar se determină foarte simplu cu ajutorul teoremei lui Ampère, alegând un contur închis de forma unui cerc perpendicular pe fir (conturul coincide cu linia de câmp!):

$$\begin{aligned} B_1 \cdot 2\pi r &= \mu_0 I_1 \\ B_1 &= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \end{aligned}$$

Se obține:

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{CD} = \int I_2 dl_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} - \int I_2 dl_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a+b)} \\
 &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \int_0^L dl - \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(a+b)} \int_0^L dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} \right) \\
 &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 L b}{2\pi a(a+b)}
 \end{aligned}$$

Răspunsul corect este e)

**1.38** Circulația câmpului magnetic pentru cele două contururi trebuie determinată cu ajutorul teoremei lui Ampère scrisă pentru cazul general:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k$$

$I_k$  sunt curentii închisi de conturul ales. Aceștia trebuie sumati algebric (ținând cont de sensul acestora).

Să acceptă drept convenție de notație pentru curentii care ies din planul figurii cercuri colorate și pentru curentii ce intră în planul foii, cercuri marcate cu  $\times$ .

Pentru cazul conturului  $a$ , având în vedere sensul de parcursere indicat în Fig.1.38, se obține:

$$\begin{aligned}
 \oint_a \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0(I - I - I) \\
 \oint_a \vec{B} \cdot d\vec{l} &= -\mu_0 I
 \end{aligned}$$

Pentru cazul conturului  $b$ , având în vedere sensul de parcursere indicat în Fig.1.38, se obține:

$$\begin{aligned}
 \oint_b \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0(I - I + -I) \\
 \oint_b \vec{B} \cdot d\vec{l} &= 0
 \end{aligned}$$

Răspunsul corect este d)

**1.39** Simetria cilindrică a problemei ne permite aplicarea teoremei lui Ampère, alegând contururi închise de forma unor cercuri cu centrul pe axa cablului, de

aceeași formă cu a liniilor de câmp. Circulația vectorului  $\vec{B}$  este determinată de curentul (sau curenții) închis (închiși) în contur,  $I_c$ .

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_c$$

$$B \oint dl = \mu_0 I_c$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_c$$

- în zona  $r = c$ :

$$B_c \cdot 2\pi c = \mu_0 I$$

$$B_c = \frac{\mu_0 I}{2\pi c}$$

- în zona  $r = b$ :

$$B_b \cdot 2\pi b = \mu_0 I$$

$$B_b = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$

- în zona  $r = a$ :

$$B_a \cdot 2\pi a = \mu_0 (I - I)$$

$$B_a = 0$$

Răspunsul corect este c)

**1.40** Calculăm mai întâi valoarea inducției câmpului magnetic în jurul conductorului, cu ajutorul teoremei lui Ampère. Densitățile de curent prin cei doi conductori vor fi:

$$j_1 = \frac{I}{\pi r_1^2}$$

$$j_2 = \frac{I}{\pi(r_3^2 - r_2^2)}$$

- $r < r_1$ :

$$B \cdot 2\pi r = \mu j_1 \pi r^2 \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu}{2\pi} I \frac{r}{r_1^2}$$

- $r_1 < r < r_2$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{1}{r}$$

- $r_2 < r < r_3$

$$\begin{aligned} B \cdot 2\pi r &= \mu \left[ I - j_2 \pi (r^2 - r_2^2) \right] \Rightarrow \\ B &= \frac{\mu}{2\pi} I \frac{1}{r} \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2} \end{aligned}$$

- $r_3 < r$

$$\begin{aligned} B \cdot 2\pi r &= \mu (I - I) \Rightarrow \\ B &= 0 \end{aligned}$$

Energia magnetică înmagazinată în cablu este:

$$W_m = \int \vec{H} \cdot \vec{B} dV$$

unde

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Alegem elementul de volum de forma unei pături cilindrice de rază  $r$ , pentru care valoarea câmpului magnetic este constantă ca valoare și are expresia determinată mai sus:

$$dV = 2\pi l r dr$$

Se obține:

$$\begin{aligned} W_m &= 2\pi l \int_0^{r_3} H B dr = \frac{2\pi l}{\mu} \int_0^{r_3} B^2 r dr \\ &= \frac{\mu l}{2\pi} I^2 \left[ \frac{1}{r_1^4} \int_0^{r_1} r^3 dr + \frac{\mu_0}{\mu} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr + \frac{1}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \int_{r_2}^{r_3} (r_3^2 - r^2)^2 \frac{1}{r} dr \right] \\ &= \frac{\mu l}{4\pi} I^2 \left[ \frac{\mu_0}{\mu} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_3^4}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \ln \frac{r_3}{r_2} - \frac{r_3^2}{2(r_3^2 - r_2^2)} \right] \end{aligned}$$

Răspunsul corect este c)

**1.41** Fie o spiră de rază  $R$  (Fig.1.41.r) prin care trece un curent de intensitate  $I$ . Fie punctul  $P$  în care vrem să calculăm câmpul magnetic, aflat la distanța  $\vec{r}$  de un element de spiră  $d\vec{l}$  perpendicular pe vectorul  $\vec{r}$  și la distanța  $x$  de centrul spirei. Câmpul magnetic  $d\vec{B}$  este perpendicular pe planul format de vectorii  $d\vec{l}$  și  $\vec{r}$  și se poate descompune în două componente:  $d\vec{B}_1$  normală la spiră (de-a lungul axei de simetrie) și  $d\vec{B}_2$  perpendiculară pe axa

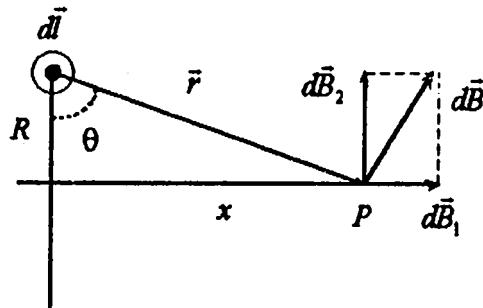


Fig.1.41.r

de simetrie. Componentele  $d\vec{B}_2$  ale tuturor elementelor de spiră  $d\vec{l}$  vor da o rezultantă nulă având sensuri contrarii. Vor rămâne doar contribuțiile de la componentele  $d\vec{B}_1$ , iar câmpul total  $\vec{B}$ , în punctul  $P$  va fi suma tuturor acestor contribuții având direcția axei de simetrie și sensul dat de regula burghiului drept. Pentru a calcula elementul de câmp magnetic vom aplica legea Biot-Savart-Laplace (1.1.18):

$$dB = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{dl \sin\pi/2}{r^2}$$

Vom exprima componenta  $d\vec{B}_1$  prin unghiul  $\theta$  (vezi fig.1.41.r):

$$dB_1 = dB \cos \theta = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{\cos \theta dl}{r^2}$$

Deoarece:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{R^2 + x^2} \\ \cos \theta &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + r^2}} \end{aligned}$$

atunci câmpul magnetic total va fi:

$$B = \oint dB_1 = \oint \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{R dl}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

Dacă  $r \gg R$  atunci:

$$B = \frac{\mu_o I R^2}{2 x^3}$$

De asemenea, dacă vrem să calculăm câmpul magnetic în centrul sferei ( $x = 0$ ) atunci câmpul magnetic va avea valoarea:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

**1.42** Tensiunea electromagnetică ce apare în bucla dreptunghiulară este determinată de variația fluxului magnetic prin suprafața aceastăia.

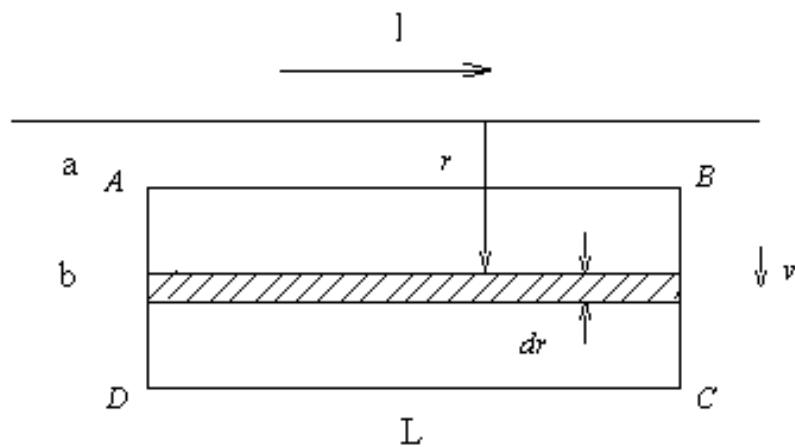


Fig.1.42.r

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Datorită deplasării față de firul parcurs de curent electric, bucla întâlnește un câmp magnetic cu inducție din ce în ce mai mică. La distanța  $r$  de fir, inducția magnetică este:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

și este orientată pe direcție perpendiculară pe planul foii cu sensul înțepând foaia.

Pentru a calcula fluxul total prin cadru, vom alege o suprafață elementară de formă unui dreptunghi cu aria  $dS = Ldr$  situat la distanța  $r$  de firul conductor (Fig.1.42.r). Vom suma, apoi în mod continuu, după toate fluxurile

prin aceste suprafețe elementare, considerând că latura cea mai apropiată se află, la momentul  $t$ , la distanța  $x$ .

$$\begin{aligned}\Phi &= \int B(r)dS = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r} L dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} L \int_x^{x+b} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} L \ln \frac{x+b}{x}\end{aligned}$$

Deoarece cadrul se mișcă cu viteza  $v$ , fluxul variază în timp prin intermediul variabilei  $x = x(t)$ . Considerând viteza constantă, în intervalul de timp  $dt$  cadrul se deplasează pe distanța  $dx$ :

$$dx = vdt$$

Ca urmare, diferențiiind relația fluxului total, se obține variația fluxului total prin cadrul plasat la distanța  $x$  față de fir, ca urmare a deplasării lui pe distanța  $dx$ :

$$\begin{aligned}d\Phi &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} L \frac{x}{x+b} \left[ \frac{xdx - (x+b)dx}{x^2} \right] \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} L \frac{b dx}{x(x+b)}\end{aligned}$$

Împărțind relația la  $dt$  se obține tensiunea indușă în cadru:

$$e = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \frac{bv}{x(x+b)}$$

În poziția corespunzătoare lui  $x = a$  valoarea tensiunii electromotoare indușă în cadru este:

$$e = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \frac{bv}{a(a+b)}$$

Răspunsul corect este c)

**1.43** Fluxul magnetic prin circuitul format din conductori este variabil din cauza suprafeței care crește în timp prin deplasarea conductorului  $AB$ . Fluxul magnetic prin suprafața elementară este, conform Fig.1.43.r:

$$\begin{aligned}d\Phi(t) &= B \cdot dS(t) = 2Bx dy = \\ &= 2B \sqrt{\frac{y}{k}} dy = 2B \sqrt{\frac{y}{k}} dy\end{aligned}$$

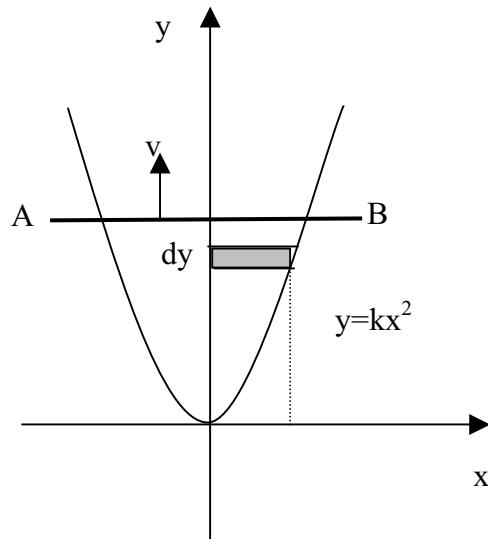


Fig.1.43.r

Tensiunea ce apare în circuit este:

$$\begin{aligned} e &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dy} \frac{dy}{dt} \\ &= -2B \sqrt{\frac{y}{k}} \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

Deoarece accelerarea este constantă și deplasarea se face fară viteză inițială, vom folosi ecuația lui Galilei:

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{2ay}$$

Se obține:

$$\begin{aligned} e &= -2B \sqrt{\frac{y}{k}} \sqrt{2ay} \\ e &= -By \sqrt{\frac{8a}{k}} \end{aligned}$$

Răspunsul corect este a)

**1.44** Să considerăm pentru început cazul unei spire de rază  $r$ . Tensiunea electromagnetică indușă într-o spiră este determinată de fluxul magnetic variabil datorită inductiei magnetice.

$$\begin{aligned}\phi(t) &= B(t)\pi r^2 = \pi r^2 B_0 \sin \omega t \\ d\phi &= \pi r^2 \omega B_0 \cos \omega t dt \\ e(r) &= -\frac{d\phi}{dt} = -\pi r^2 \omega B_0 \cos \omega t\end{aligned}$$

Deoarece spirele care formează bobina sunt în serie, tensiunea electromagnetică totală, indușă în toată bobina este dată de suma acestor inducții individuale. Deoarece sunt foarte multe spire pe unitatea de rază a bobinei, lucrăm în aproximarea continuă, considerând că pe distanța  $dr$  există un număr de spire:

$$dn = \frac{N}{a} dr$$

în care tensiunea indușă este:

$$\delta e = \frac{N}{a} e(r) dr = -\frac{N}{a} \pi r^2 \omega B_0 \cos \omega t dr$$

Sumând în mod continuu toate aceste contribuții date de elemetele care construiesc bobina, găsim:

$$\begin{aligned}e &= \int_0^a \delta e = -\frac{N}{a} \pi \omega B_0 \cos \omega t \int_0^a r^2 dr \\ &= -\frac{N}{3} a^2 \pi \omega B_0 \cos \omega t\end{aligned}$$

maximă a tensiunii totale induse este:

$$e = \frac{N}{3} a^2 \pi \omega B_0$$

Răspunsul corect este e)

**1.45** Fluxul magnetic prin bobină este variabil în timp datorită a două cauze:

- variază unghiul dintre suprafața bobinei și inducția creată de solenoid (bobina se rotește):

$$\Phi = NBS \cos \omega t$$

- variază inducția magnetică creată de solenoid:

$$\begin{aligned}\Phi &= NSB_0 \sin \omega t \cos \omega t \\ \Phi &= \frac{NSB_0}{2} \sin 2\omega t\end{aligned}$$

Tensiunea electromagnetică indusă în bobină este:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2}NSB_0 \cos 2\omega t$$

Răspunsul corect este d)

**1.46** Dacă  $\vec{A}$  este potențial vector pentru vectorul  $\vec{B}$  definit ca:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

atunci:

$$\text{div} \vec{B} = \text{div} (\text{rot} \vec{A}) = 0$$

Exprimăm operatorul "rot" în coordonate carteziene:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \text{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} \\ &= A_0 \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & x^2 + y^2 \end{vmatrix} \\ &= 2A_0(y \cdot \hat{x} - x \cdot \hat{y})\end{aligned}$$

După cum se observă imediat:

$$\begin{aligned}\text{div} \vec{B} &= \frac{\partial}{\partial x} (\text{rot} \vec{A})_x + \frac{\partial}{\partial y} (\text{rot} \vec{A})_y \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (2A_0y)_x + \frac{\partial}{\partial y} (2A_0x)_y = 0\end{aligned}$$

$\vec{A}$  – poate fi un potențial vector.

Dacă folosim teorema lui Ampère și alegem un contur închis de forma unui cerc coaxial cu firul, de rază  $r \leq r_0$ , se obține:

$$\begin{aligned}B \cdot 2\pi r &= \mu_0 j \pi r^2 \\ j &= \frac{I}{\pi r_0^2}\end{aligned}$$

adică:

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_0^2}$$

Deoarece mărimea vectorului  $B$  este:

$$B = 2A_0 \sqrt{y^2 + x^2} = 2A_0 r$$

Ca urmare:

$$\begin{aligned} 2A_0 r &= \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_0^2} \\ A_0 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0^2} \end{aligned}$$

Răspunsul corect este d)

**1.47** Un câmp electric variabil în timp va genera un câmp magnetic. Acesta se determină din ecuația lui Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

unde, pentru vid:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Dacă exprimăm rotorul în coordonate carteziene, se obține:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{\partial E}{\partial z} \cdot \hat{x} + \frac{\partial E}{\partial x} \cdot \hat{z} = -\frac{\partial E}{\partial z} \cdot \hat{x} \\ &= -E_0 \omega \alpha \sin [\omega(t - \alpha z)] \cdot \hat{x} \end{aligned}$$

Ca urmare, direcția vectorului inducție magnetică (ca și a vectorului intensitate a câmpului magnetic) este orientat de-a lungul axei  $Ox$ . Vom determina în continuare mărimea intensității câmpului magnetic.

$$\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} = E_0 \omega \alpha \sin [\omega(t - \alpha z)]$$

Prin integrarea în raport cu timpul se găsește:

$$\begin{aligned} H &= \frac{E_0 \omega \alpha}{\mu_0} \int \sin [\omega(t - \alpha z)] dt \\ &= -\frac{E_0 \alpha}{\mu_0} \cos [\omega(t - \alpha z)] + const. \end{aligned}$$

Vectorul intensitate câmp magnetic are expresia:

$$\vec{H} = -\frac{E_0 \alpha}{\mu_0} \cos [\omega(t - \alpha z)] \cdot \hat{x} + (\overrightarrow{\text{const.}})_x$$

Răspunsul corect este a)

**1.48** Un câmp magnetic variabil în timp generează un câmp electric, conform ecuației lui Maxwell:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

În cazul vidului și a absenței curentilor de conductie și de deplasare:

$$\begin{aligned}\vec{J} &= 0 \\ \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H}\end{aligned}$$

iar ecuația Maxwell devine:

$$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ca urmare, folosind legea de variație a inducției câmpului magnetic dată de problemă, se obține:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \cdot \hat{z} \\ &= k^2 B_0 k y \sin(\omega t - kx) \cdot \hat{z}\end{aligned}$$

Așadar vectorul  $\nabla \times \vec{B}$  are doar componentă nenulă doar de-a lungul axei  $Oz$ , la fel cum va avea și vectorul  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . Revenind în ecuația lui Maxwell, găsim:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{k^2 B_0 y}{\varepsilon_0 \mu_0} \sin(\omega t - kx) \cdot \hat{z}$$

După integrarea în raport cu timpul se obține:

$$\begin{aligned}E &= \frac{k^2 B_0 y}{\varepsilon_0 \mu_0} \int \sin(\omega t - kx) dt \\ &= -\frac{k^2 B_0 y}{\omega \varepsilon_0 \mu_0} \cos(\omega t - kx) + \text{const.}\end{aligned}$$

Ca urmare vectorul intensitate este egal până la o constantă cu:

$$\vec{E} = -\frac{k^2 B_0 y}{\omega \varepsilon_0 \mu_0} \cos(\omega t - kx) \cdot \hat{z}$$

Răspunsul corect este b)

**1.49** Densitatea curentului de deplasare este:

$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

unde, inducția câmpului electric este:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

Vectorul  $\vec{E}$  se determină din ecuația lui Maxwell referitoare la circulația câmpului electric, fiind determinat de variația în timp a câmpului magnetic:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Să alegem un contur de forma unui cerc cu raza  $r$ , cu centrul pe axa solenoidului.

Câmpul electric este rotațional (tangent în fiecare punct la contur) iar câmpul magnetic în interiorul solenoidului are direcția paralelă cu axa (normal pe suprafață închisă de conturul ales). Ca urmare, cele două integrale (cea curbilinie și cea de suprafață) sunt imediate:

- pentru  $r < R$

$$\begin{aligned} E \cdot 2\pi r &= -\frac{3}{2}\alpha t^2 \pi r^2 \Rightarrow \\ E &= -\frac{3}{4}\alpha r t^2 \end{aligned}$$

- pentru  $r > R$

$$\begin{aligned} E \cdot 2\pi r &= -\frac{3}{2}\alpha t^2 \pi R^2 \Rightarrow \\ E &= -\frac{3}{4}\alpha \frac{R^2}{r} t^2 \end{aligned}$$

Revenind în expresia curentului de deplasare:

$$\vec{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

găsim cele două expresii pentru mărimea curentului de deplasare:

$$\begin{aligned} r < R : |\vec{j}_d| &= \frac{3}{4} \alpha \varepsilon_0 r t^2 \\ r > R : |\vec{j}_d| &= \frac{3}{4} \alpha \varepsilon_0 \frac{R^2}{r} t^2 \end{aligned}$$

Răspunsul corect este e)

**1.50** Vectorul  $\vec{B}$  se determină din ecuația lui Maxwell referitoare la circulația câmpului magnetic pe un contur închis, fiind determinat de variația în timp a câmpului electric (teorema lui Ampère):

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Să alegem un contur de forma unui cerc cu raza  $r$ , cu centrul pe axa condensatorului. Câmpul magnetic în interiorul condensatorului este constant de-a lungul conturului și orientat tangent {în orice punct la acesta iar câmpul electric este orientat normal pe suprafață închisă de conturul ales. Se obține:

- pentru  $r < R$

$$\begin{aligned} B \cdot 2\pi r &= \varepsilon_0 \mu_0 2\beta t \pi r^2 \Rightarrow \\ B &= \varepsilon_0 \mu_0 \beta r t \end{aligned}$$

- pentru  $r > R$

$$\begin{aligned} B \cdot 2\pi r &= \varepsilon_0 \mu_0 2\beta t \pi R^2 \Rightarrow \\ B &= \varepsilon_0 \mu_0 \beta \frac{R^2}{r} t \end{aligned}$$

Răspunsul corect este d)

**1.51** Mărimea vectorului Poynting este dată de definiția:

$$S = |\vec{E} \times \vec{H}|$$

Câmpul electric creat de fascicul se determină cu ajutorul teoremei lui Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Dacă se alege o suprafață închisă de formă unui cilindru cu generatoarea  $L$  și cu raza bazei  $r$ , atunci sarcina electrică închisă în această suprafață este:

$$q = \lambda L$$

unde  $\lambda$  – densitatea liniară de sarcină electrică. Deoarece liniile de câmp electric sunt orientate radial, ele vor ieși perpendicular prin suprafața laterală a cilindrului, astfel că teorema lui Gauss devine:

$$E \cdot 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

Rezultă că valoarea intensității câmpului electric creat la distanța  $r$  de axa fasciculului este:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Teorema lui Ampère ne spune că, pentru un contur închis, pe care să îl alegem de forma unui cerc de rază  $r$  există relația:

$$2\pi r H = I$$

Rezultă că valoarea intensității câmpului magnetic creat la distanța  $r$  de axa fasciculului este:

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

unde intensitatea câmpului electric este:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\lambda dl}{dt} = \lambda v$$

Cele două câmpuri sunt orientate perpendicular astfel că vectorul Poynting este perpendicular pe planul format de  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  și are mărimea

$$S = EH = \frac{\lambda^2 v}{4\pi^2 \epsilon_0 r^2}$$

Răspunsul corect este d)

**1.52** Pentru a demonstra că un câmp magnetostatic admite potențialul vector  $\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{r})$ , vom proiecta această relație pe cele trei direcții  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  și vom obține:

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{1}{2}(B_y z - B_z y) \\ A_y &= \frac{1}{2}(B_z x - B_x z) \\ A_z &= \frac{1}{2}(B_x y - B_y x) \end{aligned}$$

Dacă vom exprima  $\text{rot} \vec{A}$  pe componente:

$$\begin{aligned}\left(\nabla \times \vec{A}\right)_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = B_x \\ \left(\nabla \times \vec{A}\right)_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = B_y \\ \left(\nabla \times \vec{A}\right)_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_z\end{aligned}$$

atunci:

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

**1.53** Fie  $\vec{m} = m\vec{e}_z$  momentul de dipol magnetic. Vom calcula în continuare produsul vectorial:

$$\vec{m} \times \vec{r} = -my\vec{e}_z + mx\vec{e}_y$$

Componentele potențialului vector  $\vec{A}$  vor fi atunci:

$$\begin{aligned}A_x &= -\frac{\mu_0 m y}{4\pi r^3} \\ A_y &= \frac{\mu_0 m x}{4\pi r^3} \\ A_z &= 0\end{aligned}$$

Pentru a calcula câmpul magnetic va trebui calculată expresia rotorului aplicat potențialului vector  $\vec{A}$ :

$$\begin{aligned}B_x &= (\nabla \times \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{3xz}{r^5} \\ B_y &= (\nabla \times \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{3yz}{r^5} \\ B_z &= (\nabla \times \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{3z^2 - r^2}{r^5}\end{aligned}$$

Astfel, expresia finală a câmpului magnetic  $\vec{B}$  va fi, în funcție de momentul de dipol magnetic  $\vec{m}$ :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right]$$

**1.54** Pentru a calcula câmpul magnetic în interiorul cilindrului, se va aplica legea lui Ampère pe un contur circular cu centrul pe axa cilindrului și perpendicular pe axă. Fie  $r$  raza conturului circular din interiorul cilindrului, deci  $r < R$ :

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_o \int_S \vec{j} d\vec{S}$$

unde:

$$\oint_C = 2\pi r \quad \int_S d\vec{S} = \pi r^2$$

Deci, conform legii lui Ampère câmpul magnetic în interiorul cilindrului va fi:

$$B = \frac{\mu_o j r}{2}$$

Pentru a calcula câmpul magnetic în exteriorul cilindrului vom aplica legea lui Ampère pe un contur circular cu raza  $r > R$ :

$$2\pi r B = \mu_o j \pi R^2$$

de unde rezultă:

$$B = \frac{\mu_o j R^2}{2r}$$

**1.55** Pentru a calcula câmpul magnetic vom aplica legea lui Faraday, legea inducției electromagnetice pe un contur circular de rază  $r$  perpendicular pe axa  $Oz$ :

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

unde

$$\Phi = BS = \pi r^2 B_o \sin(\omega t) \quad \oint \vec{E} d\vec{l} = 2\pi r E$$

Astfel, conform legii lui Faraday rezultă:

$$2\pi r E = -\pi r^2 B_o \omega \cos(\omega t)$$

iar câmpul electric va avea expresia:

$$E = -\frac{1}{2}rB_o\omega \cos(\omega t)$$

**1.56** Fie un contur circular cu centrul pe axa cilindrului. Vom aplica legea lui Ampère și vom obține:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S}$$

Dacă raza conturului exte  $r < R$  atunci câmpul magnetic va fi:

$$B = \frac{1}{2}\mu_o\varepsilon_o r \frac{dE}{dt}$$

Pentru a calcula  $\frac{dE}{dt}$  vom ține cont că, pentru un condensator plan câmpul electric este:

$$E = \frac{q}{\varepsilon_o A} = \frac{q_o}{\varepsilon_o A} \sin(\omega t)$$

unde  $A = \pi R^2$  este aria armăturilor condensatorului. Câmpul magnetic  $B$ , la distanța  $r$  de condensator va fi:

$$B = \frac{\mu_o q_o \omega r}{2\pi R^2} \cos(\omega t)$$

Dacă  $r > R$ , câmpul magnetic va avea expresia:

$$B = \frac{\mu_o q_o \omega \cos(\omega t)}{2\pi r}$$

**1.57 a)** Din Fig.1.57.r se observă că inducția magnetică  $\vec{B}_1$  este tangentă la curba  $\Gamma_1$ . Conform legii Ampère-Maxwell:

$$\nabla \times \vec{B}_1 = \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$$

Cu ajutorul formulei Stokes vom transforma integrala pe suprafață din  $\text{rot } \vec{B}_1$  într-o integrală pe o curbă închisă  $\Gamma_1$ :

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}_1) d\vec{S} = \oint_{\Gamma_1} \vec{B}_1 d\vec{r}$$

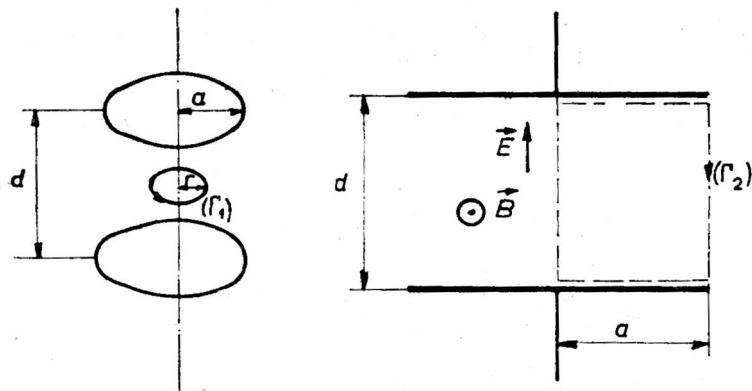


Fig.1.57.r

astfel încât legea lui Ampère-Maxwell va lua forma:

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B}_1 d\vec{r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E}_1 \cdot \vec{u}_n dS$$

După efectuarea integrării vom obține:

$$\frac{1}{c^2} \pi r^2 \frac{\partial E_1}{\partial t} = B_1 2\pi r$$

Dacă se ține cont de datele problemei,  $\vec{E}_1 = \vec{E}_o \exp[i\omega t]$ , câmpul magnetic asociat câmpului electric  $E_1$  va fi:

$$B_1 = \frac{i\omega r}{2c^2} E_o \exp[i\omega t]$$

**b)** Pentru a afla câmpul electric  $\vec{E}_2$  induș vom utiliza legea lui Faraday:

$$\nabla \times \vec{E}_2 = - \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$$

deci,  $\vec{E}_2 = \vec{E}_2(r)$  și nu mai este uniform. Pentru  $r \rightarrow 0$  se observă că  $\vec{B}_1 = 0$ , deci și  $\vec{E}_2 = 0$ .

c) Câmpul electric total dintre armături este format din suma celor două câmpuri: aplicat și induș,  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ . Vom aplica legea Faraday sub formă integrală câmpului total:

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B}_1 d\vec{S} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Astfel:

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{E}_1 d\vec{l} = 0 \quad \oint_{\Gamma_2} \vec{E}_2 d\vec{l} = -E_2(r) \cdot d$$

Fluxul câmpului magnetic  $\vec{B}_1$ , care traversează un strat de grosime  $d$ , aflat la distanța  $r$  de axă, este  $d\Phi = B_1(r) \cdot d \cdot dr$ , deci:

$$\Phi = d \int_0^r B_1(r) \cdot dr = \frac{i\omega d}{2c^2} E_o \exp[i\omega t] \int_0^r r dr = \frac{i\omega d}{2c^2} r^2 E_o \exp[i\omega t]$$

Dacă aplicăm legea lui Faraday, cu termenii explicitați deja, vom obține expresia câmpului electric  $\vec{E}_2(r)$ :

$$\vec{E}_2(r) = -\frac{\omega^2 r^2}{4c^2} \vec{E}_o \exp[i\omega t]$$

d) Pentru a calcula valoarea lui  $r$  pentru care intensitatea câmpului electric total se anulează vom pune condiția  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$ :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{4c^2}\right) \vec{E}_o \exp[i\omega t] = 0 \\ \rightarrow r &= \frac{2c}{\omega} \end{aligned}$$

**1.58 a)** Pentru a calcula densitatea de curent electric radial  $\vec{j}$ , vom aplica legea de conservare a sarcinii electrice de densitate volumică  $\rho$  (ecuația de continuitate), din interiorul sferei:

$$\int_V \left( \nabla \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0$$

Vom explicita pe rând cei doi termeni ai integralei:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \vec{j} dV &= \int_S \vec{j} d\vec{S} = 4\pi r^2 \cdot j(r) \\ \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV &= \frac{dq}{dt} \end{aligned}$$

Deci:

$$j(r) = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{dq(r)}{dt}$$

**b)** Se pleacă de la expresia curentului electric de deplasare  $j_d$ :

$$j_d = \varepsilon_o \frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon_o \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{q(r)}{4\pi r^2} \right) = \frac{\varepsilon_o}{4\pi \varepsilon_o r^2} \frac{dq}{dt} = -j(r)$$

Deci, densitatea curentului total este nulă:

$$j + j_d = j + \varepsilon_o \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

de unde rezultă:

$$E = \frac{q}{4\pi \varepsilon_o r^2}$$

**c)** Pentru a calcula inducția câmpului magnetic  $\vec{B}$  produs de curenți, vom utiliza legea Ampère-Maxwell și vom ține cont de rezultatele anterioare :

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \mu_o \left( \vec{j} + \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \\ \rightarrow \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

**1.59** Pentru a calcula modul în care variază în timp densitatea de sarcină în funcție de  $\sigma$  și  $\varepsilon_r$  vom pleca de la ecuația de continuitate și respectiv legile de material Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} &\quad \nabla \vec{D} = \rho \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \end{aligned}$$

de unde rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} &= -\frac{\sigma}{\varepsilon} dt \\ \rightarrow \rho(t) &= \rho_0 \exp \left[ -\frac{\sigma}{\varepsilon} t \right] \end{aligned}$$

$\rho_0$  fiind densitatea de sarcină la momentu  $t = 0$ .

**1.60** Câmpurile  $\vec{E}_1(\vec{r}, t)$  și  $\vec{B}_1(\vec{r}, t)$  satisfac ecuațiile Maxwell pentru mediul considerat:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E}_1 &= -\mu \frac{\partial \vec{H}_1}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H}_1 &= \varepsilon \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \\ \nabla \vec{E}_1 &= 0 \\ \nabla \vec{H}_1 &= 0\end{aligned}$$

Vom încerca în continuare să vedem dacă și câmpurile  $\vec{E}_2$  și  $\vec{B}_2$  satisfac ecuațiile Maxwell de mai sus:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E}_2 &= -\frac{\partial \vec{B}_2}{\partial t} \\ \rightarrow \nabla \times \vec{H}_2 &= \varepsilon \frac{\partial \vec{E}_2}{\partial t}\end{aligned}$$

ultima relație fiind o relație Maxwell. La fel se poate demonstra și pentru celelalte relații Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H}_2 &= \frac{\partial \vec{D}_2}{\partial t} \\ \rightarrow \nabla \times \vec{E}_2 &= -\mu \frac{\partial H_2}{\partial t} \\ \nabla \vec{B}_2 &= 0 \\ \rightarrow \nabla \vec{E}_2 &= 0\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}\nabla D_2 &= 0 \\ \rightarrow \nabla \vec{H}_2 &= 0\end{aligned}$$

Câmpurile  $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$  și  $(\vec{E}_2, \vec{H}_2)$  se numesc câmpuri duale.

**1.61** Vom scrie ecuațiile Maxwell în vid:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \times \vec{B} - \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_o \vec{j} \\ \nabla \vec{B} &= 0 \\ \nabla \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_o} \rho\end{aligned}$$

Vom scrie acum ecuațiile Maxwell generale, în prezența substanței în câmp electromagnetic:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \vec{j} \\ \nabla \vec{B} &= 0 \\ \nabla \vec{D} &= \rho\end{aligned}$$

în prezența substanței în câmp electromagnetic se definesc vectorii de polarizare  $\vec{P}$  și respectiv de magnatizare  $\vec{M}$  prin relațiile:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \vec{D} - \varepsilon_o \vec{E} \\ \vec{M} &= \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{H}\end{aligned}$$

astfel încât ecuațiile Maxwell generale devin:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \times \vec{B} - \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_o \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M} \right) \\ \nabla \vec{B} &= 0 \\ \nabla \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_o} (\rho - \nabla \cdot \vec{P})\end{aligned}$$

Dacă se compară acest ultim sistem de ecuații cu cele scrise în vid se observă că prezența substanței în câmp electromagnetic este echivalentă cu existența unei densități de sarcină electrică  $-\nabla \cdot \vec{P}$  și a densităților de curent electric  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  și respectiv  $\nabla \times \vec{M}$ .

**1.62 a)** În mediul (1) câmpul electric  $\vec{E}_1$  este, conform legii Maxwell de material:

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{j}_1}{\sigma_1} = \frac{1}{\sigma_1} (j_{1x} \vec{u}_x + j_{1y} \vec{u}_y + j_z \vec{j}_{1z})$$

Dacă se ține cont de condiția la limită:

$$\vec{u}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

se va obține:

$$E_{2x} = E_{1x} = \frac{1}{\sigma_1} j_{1x}$$

$$E_{2y} = E_{2x} = \frac{1}{\sigma_1} j_{1y}$$

Din condiția la limită aplicată densității de curent electric  $\vec{j}$ :

$$\vec{u}_n(\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = -\frac{\partial \rho_S}{\partial t}$$

unde  $\frac{\partial \rho_S}{\partial t} = 0$  deoarece toate câmpurile sunt uniforme spațial și independente de timp. Astfel va rezulta:

$$j_{2z} = j_{1z} = j_z \longrightarrow E_{2z} = \frac{j_{2z}}{\sigma_2} = \frac{1}{\sigma_2} j_{2z}$$

în concluzie se poate scrie intensitatea câmpului electric în regiunea (2):

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{\sigma_1}(j_{1x}\vec{u}_x + j_{1y}\vec{u}_y) + \frac{1}{\sigma_2}j_{1z}\vec{u}_z$$

**b)** Dacă vom utiliza condiția la limită scrisă pentru inducția electrică  $\vec{D}$ :

$$\vec{u}_n(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_S$$

rezultă densitatea superficială de sarcină:

$$\rho_S = D_{2z} - D_{1z} = \varepsilon_2 E_{2z} - \varepsilon_1 E_{1z} = \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} j_{1z} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} j_{1z} = j_{1z} \left( \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} \right)$$

**1.63 a)** Vom scrie ecuațiile Maxwell generale:

$$\begin{aligned} \nabla \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon} \rho \\ \nabla \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu \left( \vec{j} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ \vec{j} &= \sigma \vec{E} \end{aligned}$$

Puterea disipată prin efect Joule la trecerea curentului electric printr-un conductor de lungime  $l$  și secțiune  $A$  se va scrie:

$$S_j = RI^2 = \frac{\rho l}{A}(j^2 A^2)$$

iar pe unitatea de volum va fi:

$$p = \frac{S_j}{V} = \frac{S_j}{Al} == \rho j^2 = \frac{1}{\sigma} j^2 = \sigma E^2$$

**b)** în regim sinusoidal  $\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$  și vom avea:

$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega \vec{B}$$

Cum pentru un conductor perfect câmpul electric este nul în interiorul acestuia, va rezulta, conform legii Gauss că și sarcina electrică este nulă. Conform legii Faraday va rezulta că  $\vec{B} = 0$ . Din legea de material  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = 0$  rezultă că vactorul inducție electrică  $\vec{D} = 0$  în interiorul unui conductor. Pentru a afla densitatea de curent  $\vec{j}$  vom apela la legea Ampère-Maxwell  $\mu \vec{j} = \nabla \times \vec{B} - \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$  din care rezultă că  $\vec{j} = 0$ .

## 2 Unde electromagnetice

### 2.1 Breviar

În cazul **mediilor dielectrice (neconductoare) omogene și izotrope** cum ar fi vidul, aerul, apa, sticla etc. caracterizate prin  $\vec{j} = 0$ ,  $\rho = 0$ ,  $\sigma = 0$ , **ecuațiile Maxwell** devin:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (2.1.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad (2.1.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.1.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.1.4)$$

Aplicând rotorul ecuației (2.1.4), prelucrând ambii membrii ai ecuației și ținând cont de egalitatea matematică:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{H}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{H}) - \Delta \vec{H} \quad (2.1.5)$$

și respectiv de ecuația (2.1.3), se va obține **ecuația undelor electromagnetice** ce se propagă într-un mediu omogen și izotrop caracterizat prin  $\varepsilon$  și  $\mu$ , scrisă cu ajutorul vectorului  $\vec{H}$ :

$$\Delta \vec{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1.6)$$

Ecuația undelor electromagnetice scrisă cu ajutorul vectorului  $\vec{E}$  are forma:

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1.7)$$

Dacă se ține cont acum de ecuația generală de propagare a undelor:

$$\Delta \vec{\Psi}(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\Psi}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1.8)$$

unde  $\vec{\Psi}(\vec{r}, t)$  se numește **funcție de undă** iar  $v$  reprezintă **viteza de propagare** a undelor în mediul respectiv, atunci, comparând ecuația (2.1.7) cu

ecuația (2.1.8) vom obține, pentru viteza de propagare a undelor electro-magnetice, următoare expresie:

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{1}{\varepsilon\mu} \rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o\varepsilon_r\mu_o\mu_r}} \\ v &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

unde  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  este viteza de propagare a undelor electro-magnetice în vid și reprezintă chiar viteza de propagare a luminii în vid determinată experimental de către fizianul francez Fizeau. Concluzia imediată a lui Maxwell a fost că **lumina este de natură electromagnetică**.

Pentru un mediu dielectric (nemagnetic)

$$\mu_r = 1 \rightarrow v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_o}} \quad (2.1.10)$$

Se definește **indicele de refracție**  $n$  al mediului :

$$n = \sqrt{\varepsilon_o} \rightarrow v = \frac{c}{n} \quad (2.1.11)$$

Forma soluțiilor pentru **undele electromagnetice armonice plane** este:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_o e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{H}_o e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

unde  $\omega$  este **pulsăția** sursei, iar  $\vec{k}$  este **vectorul de undă** și are expresia:

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \vec{s} \quad (2.1.13)$$

$\vec{s}$  este vesorul direcției de propagare a undei electromagnetice. Între mărimele  $k$ ,  $\omega$  și  $v$  există relația:

$$k = \frac{\omega}{v} \rightarrow v = \frac{\omega}{k} \quad (2.1.14)$$

unde  $v$  reprezintă aici **viteza de fază** a undelor electromagnetice și este egală cu cea de propagare.

## Proprietățile undelor electromagnetice.

- Unda electromagnetică este o undă transversală, adică vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  sunt perpendiculari pe direcția de propagare:

$$\vec{E} \perp \vec{s} \quad \vec{H} \perp \vec{s} \quad (2.1.15)$$

- Vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  sunt perpendiculari unul pe celălalt:

$$\vec{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(\vec{s} \times \vec{H}) \quad (2.1.16)$$

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(\vec{s} \times \vec{E}) \quad (2.1.17)$$

- Energia transportată de undele electromagnetice în unitatea de timp prin unitatea de suprafață este dată de modulul vectorului Poynting:

$$|\vec{S}| = |\vec{E} \times \vec{H}| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\vec{E} \times (\vec{s} \times \vec{E})| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{E}^2 \vec{s} \quad (2.1.18)$$

și respectiv:

$$|\vec{S}| = |\vec{E} \times \vec{H}| = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} |(\vec{s} \times \vec{H}) \times \vec{H}| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H^2 \vec{s} \quad (2.1.19)$$

- Vibrațiile vectorilor  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  sunt în fază, adică valorile lor maxime și minime se produc în aceleași puncte din spațiu:

$$\sqrt{\varepsilon} |\vec{E}| = \sqrt{\mu} |\vec{H}| \quad (2.1.20)$$

- Intensitatea  $I$  a undelor electromagnetice este definită prin relația:

$$\begin{aligned} I &= \langle |\vec{S}| \rangle = \langle |\vec{E} \times \vec{H}| \rangle = \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_o^2 \langle \sin^2(\omega t - kz) \rangle = \frac{1}{2} E_o^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Dacă undă electromagnetică plană cade sub un unghi de incidentă  $i$  pe o suprafață, atunci intensitatea undei devine:

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_o^2 \cos i \quad (2.1.22)$$

sau, scrisă cu ajutorul câmpului magnetic:

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_o^2 \cos i \quad (2.1.23)$$

Dacă o undă electromagnetică plană progresivă pătrunde într-un material dielectric (în general), pe poziunea  $z$ , atunci vectorul  $\vec{E}(z)$ , la distanța  $z$  de punctul de incidentă va fi:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_o e^{i(\omega t - \tilde{k}z)} = \vec{E}_o e^{-\frac{\omega}{c}\chi z} e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c}n)} \\ \text{unde } \vec{E}_o(z) &= \vec{E}_o|_{z=0} e^{-\frac{\omega}{c}\chi z} \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

unde  $n$  este indicele real de refracție al dielectricului, iar  $\chi$  este coeficientul de absorbție al materialului. Intensitatea  $I$ , datorită fenomenului de **absorție** va avea expresia:

$$I = I_o e^{-\frac{2\omega}{c}\chi z} = I_o e^{-\mu z} \quad (2.1.25)$$

unde

$$\mu = \frac{2\omega}{c} \chi \quad (2.1.26)$$

rezintă **coeficientul liniar de absorbție**.

### Reflexia și refracția

Din punct de vedere cantitativ reflexia și transmisia undelor electromagneticice la suprafața de separare dintre două medii optice se caracterizează prin **coeficienții Fresnel**  $r_{\perp}$  și  $r_{\parallel}$ .

Fie două medii dielectrice omogene **1** și **2**, optic transparente, caracterizate prin indicii de refracție  $\mathbf{n}_1$  și respectiv  $\mathbf{n}_2$ , prin permitivitățile electrice  $\epsilon_1$  și respectiv  $\epsilon_2$  și prin permeabilitățile magnetice  $\mu_1$  și respectiv  $\mu_2$ . Vitezele de propagare ale undelor electromagneticice prin cele două medii vor fi  $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}$  și  $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}$ . De asemenea, dacă ținem cont că mediile sunt dielectrice, indicii de refracție se pot exprima ca fiind  $n_1 = c/v_1$  și respectiv  $n_2 = c/v_2$ .

Pentru a calcula **coeficienții Fresnel** vom pleca de la **definiția** acestora:

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &= \frac{E_{1\parallel}}{E_{\parallel}} & r_{\perp} &= \frac{E_{1\perp}}{E_{\perp}} \\ t_{\parallel} &= \frac{E_{2\parallel}}{E_{\parallel}} & t_{\perp} &= \frac{E_{2\perp}}{E_{\perp}} \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

unde  $E_{\parallel}$ ,  $E_{1\parallel}$  și  $E_{2\parallel}$  reprezintă componentele amplitudinilor intensităților câmpului electric paralele cu planul de incidentă pentru unda incidentă, reflectată și respectiv refractată;  $E_{\perp}$ ,  $E_{1\perp}$  și  $E_{2\perp}$  reprezintă componentele amplitudinilor intensităților câmpului electric perpendicular pe planul de incidentă pentru unda incidentă, reflectată și refractată.

Forma vectorului electric pentru cele trei unde va fi:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{incident} &= \vec{E} e^{i\omega(t - \frac{\vec{s}\vec{r}}{v_1})} \\ \vec{E}_{reflectat} &= \vec{E}_1 e^{i\omega(t - \frac{\vec{s}_1\vec{r}}{v_1})} \\ \vec{E}_{refractat} &= \vec{E}_2 e^{i\omega(t - \frac{\vec{s}_2\vec{r}}{v_2})} \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

Direcțiile de propagare ale celor trei unde sunt caracterizate de versorii:

$$\vec{s} : (\sin i, 0, \cos i) \quad \vec{s}_1 : (\sin i, 0, -\cos i) \quad \vec{s}_2 : (\sin r, 0, \cos r)$$

iar coeficienții Fresnel au expresia:

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &= \frac{\tan(i - r)}{\tan(i + r)} & r_{\perp} &= -\frac{\sin(i - r)}{\sin(i + r)} \\ t_{\parallel} &= \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i + r) \cos(i - r)} & t_{\perp} &= \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i + r)} \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

**Pentru incidentă normală**  $0^\circ < i < 5^\circ$ ,  $0^\circ < r < 5^\circ$ , coeficienții Fresnel devin:

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &= \frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1} & t_{\parallel} &= \frac{2}{n_{21} + 1} \\ r_{\perp} &= -\frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1} & t_{\perp} &= \frac{2}{n_{21} + 1} \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

unde  $n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$  este indicele de refracție relativ al mediului 2 față de mediul 1.

**Factorii Fresnel** de reflexie  $R$  și respectiv de transmisie  $T$  se definesc astfel:

$$R = \frac{I_{reflectat}}{I_{incident}} \quad T = \frac{I_{refractat}}{I_{incident}} \quad (2.1.31)$$

unde  $I_{incident}$ ,  $I_{reflectat}$  și  $I_{refractat}$  reprezintă intensitatea undei incidente, reflectate și respectiv refractate ce cad *normal* pe suprafața de separare dintre cele două medii. Dacă vom lua în considerare definiția intensității unei unde electomagnetice sub forma (2.1.22) precum și expresia vectorului intensitate electrică pentru cele trei unde (2.1.28), atunci factorii Fresnel se pot scrie sub forma:

$$R = \frac{E_1^2}{E^2} \quad T = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \cos r} \frac{E_2^2}{E^2} = \frac{n_2 \cos r}{n_1 \cos i} \frac{E_2^2}{E^2} \quad (2.1.32)$$

Se poate arăta simplu că:

$$R + T = 1 \quad (2.1.33)$$

ceea ce exprimă **legea conservării energiei** în procesul de reflexie și refracție:

$$I = I_1 + I_2 \quad (2.1.34)$$

adică, intensitatea undei incidente ce cade pe suprafața de separare dintre două medii dielectrice este egală cu suma intensităților undelor reflectate și refractate.

Dacă unda incidentă este liniar polarizată (vezi paragraful următor), astfel încât vectorul  $\vec{E}$  vibrează într-un plan orientat sub unghiul  $\alpha$  față de planul de incidentă, atunci avem:

$$E_{||} = E \cos \alpha \quad E_{\perp} = E \sin \alpha \quad E^2 = E_{||}^2 + E_{\perp}^2 \quad (2.1.35)$$

iar intensitatea undei incidente se poate scrie astfel:

$$I = I_{||} + I_{\perp} \quad (2.1.36)$$

unde

$$I_{||} = I \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{||}^2 \cos i \quad I_{\perp} = I \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{\perp}^2 \cos i \quad (2.1.37)$$

Analog se obțin expresiile pentru intensitatea  $I_1$  a undei reflectate și respectiv

$I_2$  a undei refractate:

$$I_{1\parallel} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{1\parallel}^2 \cos i \quad I_{1\perp} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{1\parallel}^2 \cos i \quad (2.1.38)$$

$$I_{2\parallel} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_{2\parallel}^2 \cos r \quad I_{2\perp} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_{2\parallel}^2 \cos r \quad (2.1.39)$$

Astfel, se ajunge la următoarele expresii pentru factorii Fresnel  $R$  și  $T$ :

$$R_{\parallel} = \frac{I_{1\parallel}}{I_{\parallel}} = \frac{\operatorname{tg}^2(i - r)}{\operatorname{tg}^2(i + r)} \quad R_{\perp} = \frac{I_{1\perp}}{I_{\perp}} = \frac{\sin^2(i - r)}{\sin^2(i + r)} \quad (2.1.40)$$

$$T_{2\parallel} = \frac{I_{2\parallel}}{I_{\parallel}} = \frac{\sin 2r \sin 2i}{\sin^2(i + r) \cos^2(i - r)} \quad T_{\perp} = \frac{I_{2\perp}}{I_{\perp}} = \frac{\sin 2r \sin 2i}{\sin^2(i + r)} \quad (2.1.41)$$

Din aceste relații rezultă simplu:

$$R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1 \quad R_{\perp} + T_{\perp} = 1 \quad (2.1.42)$$

ceea ce înseamnă că, pe lângă egalitatea (2.1.36) mai avem îndeplinite următoarele două egalități:

$$I_{\parallel} = I_{1\parallel} + I_{2\parallel} \quad I_{\perp} = I_{1\perp} + I_{2\perp} \quad (2.1.43)$$

În cazul unei incidente normale factorii Fresnel devin:

$$R_{\parallel} = R_{\perp} = \left( \frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1} \right)^2 \quad T_{\parallel} = T_{\perp} = \frac{4n_{21}}{(n_{21} + 1)^2} \quad (2.1.44)$$

### Reflexie totală

Dacă  $n_1 > n_2$ , adică lumina trece dintr-un mediu mai dens optic într-altul mai puțin dens, atunci se poate defini **unghiul de incidentă limită**  $i_{lim}$  pentru care  $r = \pi/2$ :

$$\frac{\sin i_{lim}}{\sin 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \sin i_{lim} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad (2.1.45)$$

Pentru unghiuri de incidentă mai mari decât unghiul limită  $i_{lim}$  se produce fenomenul de **reflexie totală**, adică unda refractată nu mai trece în cel de-al doilea mediu și se întoarce în mediul din care a venit.

## Polarizarea undelor electromagnetice

**Starea de polarizare a undelor electromagnetice este dată de modul de orientare a vectorului  $\vec{E}$  în spațiu și timp.**

Planul în care oscilează vectorul electric  $\vec{E}$  se numește **plan de vibrație**, iar planul în care oscilează vectorul magnetic  $\vec{H}$  se numește **plan de polarizare**. O undă electromagnetică este **total polarizată** dacă vectorul electric  $\vec{E}$  are aceeași direcție în orice punct din spațiu și la orice moment de timp. Lumina alcătuită din unde electromagnetice în care vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  oscilează uniform în toate direcțiile posibile din spațiu, se numește **lumină nepolarizată sau lumină naturală**. Sursele de lumină obișnuite emis unde electromagnetice care în general sunt **partial polarizate**.

Dacă unda electromagnetică se propagă în lungul axei  $Oz$ , atunci componentele câmpului electric vor fi:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{ox} \cos(\omega t - kz) \\ E_y &= E_{oy} \cos(\omega t - kz + \delta) \\ E_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.46)$$

Prin eliminarea timpului în sistemul de ecuații 2.1.46 vom obține ecuația descrisă de vectorul electric, proiectată în planul  $xOy$ , numită și **ecuația traectoriei**:

$$\frac{E_x^2}{E_{ox}^2} + \frac{E_y^2}{E_{oy}^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_{ox} E_{oy}} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (2.1.47)$$

adică **ecuația unei elipse**.

## Discuție

- Dacă  $\delta = \frac{\pi}{2}$  unda electromagnetică este polarizată **circular stânga**
- Dacă  $\delta = \frac{3\pi}{2}$  unda este polarizată **circular dreapta**
- Dacă  $\delta = 2m\pi, m = 0, 1, 2, \dots \rightarrow \cos \delta = +1$  atunci unda este **polarizată liniar stânga** și are ecuația  $E_x = \frac{E_{ox}}{E_{oy}} E_y$
- Dacă  $\delta = (m + 1)\pi, m = 0, 1, 2, \dots \rightarrow \cos \delta = -1$  atunci unda este **polarizată liniar dreapta** și are ecuația  $E_x = -\frac{E_{ox}}{E_{oy}} E_y$

Pentru o undă electromagnetică polarizată există, într-un plan perpendicular pe direcția ei de propagare (plan de vibrație), două direcții privilegiate perpendiculare între ele după care vectorul electric  $\vec{E}$  are valoare maximă și respectiv minimă. Corespunzător și intensitatea undei va fi maximă,  $I_{max}$ , și respectiv minimă,  $I_{min}$ . Se definește **gradul P de polarizare** al unei electromagnetice:

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (2.1.48)$$

### Discuție

- Dacă  $P = 0$  lumina nu este polarizată (lumina naturală)
- Dacă  $0 < P < 1$  lumina este parțial polarizată
- Dacă  $P = 1$  lumina este total polarizată

### Procedee de polarizare

#### a.) prin reflexie și refracție

Există un unghi de incidentă numit **unghi Brewster** notat  $i_B$ , pentru care undele electromagnetice reflectate sunt total polarizate (conțin numai componenta  $E_{1\perp}$  cealaltă fiind nulă):

$$i_B + r = \frac{\pi}{2} \rightarrow \operatorname{tg} i_B = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad (2.1.49)$$

iar undele refractate sunt parțial polarizate.

#### b). polarizare eliptică prin birefringență

Fenomenul de **birefringență** sau dublă refracție a fost descoperit în 1669 de către profesorul danez Erasmus Bartholin pentru spatiul de Islanda ( $CaCO_3$ ) și constă în producerea a două raze refractate, raza ordinară (o) și cea extraordinară (e), pentru o singură rază incidentă. Fenomenul este caracteristic cristalelor anizotrope și a fost studiat ulterior de către fizicianul danez Christian Huygens.

Dacă lumina se propagă perpendicular pe axa optică a unui cristal uniax, diferența indicilor de refracție ( $n_o - n_e$ ) are valoarea maximă. Undele electromagnetice polarizate în plane perpendiculare se vor propaga pe aceeași

direcție cu vitezele  $v_o = c/n_o$  și respectiv  $v_e = c/n_e$  și vor ieși din cristal de grosime  $d$ , cu diferență de fază:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) d \quad (2.1.50)$$

### c.) efectul electrooptic pătratic (Kerr) și efectul magnetooptic pătratic

Pentru cristalele care posedă un centru de simetrie s-a stabilit efectul electrooptic pătratic, adică anizotropia optică este dată de relația:

$$n_e - n_o = bE^2 \quad (2.1.51)$$

unde  $b$  este o constantă de proporționalitate. Dacă proba se află între plăcile unui condensator, atunci între raza ordinată și raza extraordinară se realizează o diferență de fază:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o) d = \frac{2\pi}{\lambda} b d E^2 = 2\pi B d E^2 \quad (2.1.52)$$

unde  $B = b/\lambda$  se numește coeficientul Kerr, iar  $d$  reprezintă grosimea probei. Cotton și Mouton au descoperit că, un câmp magnetic transversal provoacă birefringență unui mediu izotrop. Sub acțiunea câmpului magnetic extern substanța capătă proprietățile unui cristal uniax, cu axa optică pe direcția liniilor de câmp magnetic iar:

$$n_e - n_o = C \lambda H^2 \quad (2.1.53)$$

unde  $C$  este o constantă dependentă de proprietățile mediului, iar  $H$  este intensitatea câmpului magnetic extern.

### d.) polarizarea rotatorie

Fenomenul de **polarizare rotatorie** constă în rotirea planului de polarizare a luminii de către anumite substanțe numite **medii optic active**.

Există medii optic active care rotesc planul de polarizare spre dreapta observatorului și acestea se numesc **dextrogire**, și există substanțe optic active ce rotesc planul de polarizare spre stânga și se numesc **levogire**.

Unghiul de rotație al planului de polarizare este proporțional cu grosimea  $d$  a probei:

$$\alpha = [\alpha] d \quad (2.1.54)$$

unde  $[\alpha]$  reprezintă **puterea rotatorie specifică** și depinde de lungimea de undă a undelor electromagnetice monocromatice (**dispersie rotatorie**) precum și de natura mediului.

Pentru soluțiile unor substanțe optic active (zahărul) ce prezintă activitate optică moleculară, relația (2.1.53) capătă forma:

$$\alpha = [\alpha]Cd \quad (2.1.55)$$

unde  $C$  este concentrația soluției, adică masa de substanță optic activă din unitatea de volum. Pe baza relației (2.1.54) se poate determina concentrația unei soluții, iar această metodă polarimetrică are avantajul legat de rapiditatea și precizia cu care se pot face măsurările.

În 1846 Faraday descoperă că un mediu izotrop devine optic activ dacă este plasat într-un câmp magnetic intens, cu liniile de câmp paralele cu direcția de propagare a luminii.

Acest fenomen este cunoscut sub numele de **efectul Faraday** și a fost prima dovedă experimentală a legăturii între lumină și câmpul electromagnetic. Unghiul de rotație al planului de polarizare este dat de relația:

$$\alpha = VdH \quad (2.1.56)$$

unde  $H$  este intensitatea câmpului magnetic,  $d$  este grosimea stratului străbătut de lumină iar  $V$  este o constantă ce depinde de natura substanței (constanta Verdet).

### Interferența undelor electromagnetice

Fenomenul de interferență se obține atunci când se compun unde care se suprapun într-un domeniu din spațiu producând maxime și minime de intensitate. Undele care prin compunerea lor produc fenomenul de interferență se numesc **coerente**. Fie două surse de lumină monocromatice  $S_1$  și  $S_2$ ; fie  $P$  un punct din spațiu aflat la distanța  $r_1$  și respectiv  $r_2$  de cele două surse, unde se produce interferență. Înăind cont de definiția intensității undelor electromagnetice precum și de medierea temporală a funcției  $\cos^2$  relația devine:

$$\vec{E}_o^2 = \vec{E}_{o1}^2 + \vec{E}_{o2}^2 + 2\vec{E}_{o1}\vec{E}_{o2} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) + \varphi \right]$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) + \varphi \right] \rangle \quad (2.1.57)$$

### Observații:

- Dacă defazajul  $\varphi$  dintre cele două unde monocromatice este o funcție aleatoarea de timp, atunci media temporală din relația 2.1.57 va fi nulă:

$$\langle \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) + \varphi \right] \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) + \varphi \right] dt = 0 \quad (2.1.58)$$

În acest caz termenul al treilea din relația 2.1.56 devine zero iar intensitatea totală în punctul  $P$  va fi  $I = I_1 + I_2$ , adică undele sunt necoerente și prin suprapunerea lor nu se produce interferență.

- Dacă diferența de fază  $\varphi$  este constantă în timp, cele două surse emit unde coerente (sunt corelate în fază), iar prin suprapunerea lor se produce fenomenul de interferență:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) + \varphi \right] \quad (2.1.59)$$

Vom considera în continuare că diferența de fază este nulă  $\varphi = 0$ , ceea ce nu afectează tabloul franjelor de interferență, ci numai deplasarea lor globală.

### Discuție:

- Dacă

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) = 1 \rightarrow r_2 - r_1 = m\lambda = 2m\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.1.60)$$

intensitatea undelor în punctul  $P$  este maximă:

$$I = I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 \quad (2.1.61)$$

- Dacă

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) = -1 \rightarrow r_2 - r_1 = (2m - 1)\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.1.62)$$

intensitatea undei rezultante este minimă:

$$I = I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2 \quad (2.1.63)$$

În condițiile în care undele elecromagnetice se propagă într-un mediu cu indice de refracție  $n > 1$ , diferența de drum  $r_2 - r_1$  trebuie înlocuită cu diferența de drum optic:

$$\Delta l = n(r_2 - r_1) \quad \Delta l = \int_{r_1}^{r_2} n \, dr \quad (2.1.64)$$

Locul geometric al punctelor din spațiu în care intensitatea undei rezultante este maximă sau minimă, reprezintă **franje de interferență** care sunt luminoase respectiv întunecoase. În general, locul geometric al franjelor de interferență este dat de relația:

$$r_2 - r_1 = const. \quad (2.1.65)$$

ceea ce reprezintă ecuația unor hiperbolezi cu două pânze și cu focarele în sursele de unde punctiforme  $S_1$  și  $S_2$ .

### Dispozitive de interferență

**1. Dispozitivul Young** se bazează pe divizarea frontului de undă ce provine de la o sursă coerentă de lumină  $S$ .

Conform celor discutate anterior rezultă că vom obține franje de intensitate maximă (franje luminoase) și respectiv franje de intensitate minimă (franje întunecoase).

Distanța dintre două maxime sau minime consecutive se numește **interfranjă** și se notează cu  $i$ :

$$i = \frac{\lambda D}{d} \quad (2.1.66)$$

unde  $D$  este distanța de la surse la ecranul de interferență, iar  $d$  este distanța dintre surse.

**2a. Lama cu fețe plan paralele** este un dispozitiv de interferență de forma unei lame de grosime  $d$  cu indice de refracție  $n_2$  și cu suprafetele plan paralele. Figura de interferență se poate obține fie prin fenomenul de reflexie fie prin refracție. Unda incidentă provine de la o sursă aflată într-un mediu cu indice de refracție  $n_1$ .

Pentru  $n_2 > n_1$  (mediul "2" este mai dens optic decât mediul "1") diferența de drum optic dintre cele două raze care interferă **prin reflexie** este:

$$\Delta l = 2n_2 d \cos r - \lambda/2 \quad (2.1.67)$$

În planul focal al lentilei  $L$  se vor obține franje luminoase dacă:

$$2n_2 \cos r - \lambda/2 = 2m\lambda/2, \quad m = 0, 1, 2, 3\dots \quad (2.1.68)$$

și respectiv franje întunecoase dacă:

$$2n_2 \cos r - \lambda/2 = (2m + 1)\lambda/2, \quad m = 0, 1, 2, 3\dots \quad (2.1.69)$$

Tabloul de interferență este o familie de cercuri (maxime și minime succesive) numite **inelele lui Haidinger**.

Interferența cu ajutorul lamelor cu fețe plan paralele se poate observa și în **lumina transmisă**.

Diferența de drum optic se poate exprima, în acest caz, prin relația:

$$\Delta l = 2n_2 d \cos r \quad (2.1.70)$$

Pentru obținerea franjelor de maximă intensitate se impune condiția:

$$2n_2 d \cos r = 2m\lambda/2 \quad (2.1.71)$$

iar pentru obținerea franjelor de minimă intensitate este satisfăcută condiția:

$$2n_2 d \cos r = (2m + 1)\lambda/2 \quad (2.1.72)$$

**2b. Pana optică** este formată din două plane transparente ce formează un unghi  $\alpha$  între ele.

Planul de focalizare a franjelor se află în interiorul penei, practic pe suprafața acesteia, deci franjele sunt localizate pe lamă. Pentru unghiuri  $\alpha$  suficient de mici, expresia interfranjei obținută cu pana optică este:

$$i = \frac{\lambda}{2\alpha n_2} \quad (2.1.73)$$

unde  $n_2$  este indicele de refracție al mediului cuprins între cele două plane.

**2c. Lama de grosime variabilă** este formată din stratul de aer (cu indicele de refracție  $n_1$ ) dintre suprafața convexă a unei lentile plan-convexe (cu indicele de refracție  $n_2$  și rază  $R$ ) și suprafața plană a unei lame plan paralele de sticlă (cu indicele  $n_2$ ). Simetria sferică a lamei de aer conduce la un tablou de interferență format dintr-o familie de cercuri concentrice de rază  $r_m$ ,  $m = 0, 1, 2, 3, 4\dots$ , numite **inelele lui Newton**. Prin reflexie, inelele lui Newton au în centru un minim de interferență.

Pentru cazul  $n_2 > n_1$ , raza inelelor Newton este dată de relația:

$$r_m = \sqrt{\frac{R\lambda}{2n_1}(m - 1)} \quad (2.1.74)$$

Pentru valori pare ale lui  $m$  avem franje de maximă intensitate, iar pentru valori impare ale lui  $m$  avem minime de intensitate.

**3. Interferometrul Fabry-Pérot** este un interferometru cu fascicule multiple și este constituit din două plăci de sticlă sau cuarț  $P_1$  și  $P_2$  cu fețele paralele și slab argintate. Distanța  $d$  dintre plăci poate fi variată în mod controlat.

Diferența de drum optic între două fascicule consecutive este:

$$\Delta l = 2d \cos r \quad (2.1.75)$$

unde  $r$  este unghiul de refracție, iar condiția de maxime principale este dată de relația:

$$2d \cos r = m\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.1.76)$$

Dacă unghiul  $r$  este constant, în planul focal al lentilei  $L$ , pe ecranul  $E$ , se formează o curbă de interferență (un cerc). În cazul unei surse largi de lumină, curbele de interferență vor fi cercuri concentrice (inele).

Prin derivarea relației 2.1.75 se obține:

$$-2d \sin r \Delta r = m \Delta \lambda \rightarrow \frac{\Delta r}{\Delta \lambda} = -\frac{m}{2d \sin r} \quad (2.1.77)$$

mărime ce reprezintă **dispersia unghiulară** a interferometrului.

Lărgimea unghiulară  $\Delta r$  corespunzătoare la două maxime succesive de interferență rezultă din relația 2.1.75:

$$-2d \sin r \Delta r = \lambda \Delta m, \quad \Delta m = 1 \quad \Delta r = \frac{\lambda}{2d \cos r} \quad (2.1.78)$$

Utilizând relațiile 2.1.76 și 2.1.77 rezultă:

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda^2}{2d \cos r} \quad (2.1.79)$$

care, pentru o incidentă normală ( $i = 0, r = 0$ ) devine:

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda^2}{2d} \quad (2.1.80)$$

Această ultimă expresie reprezintă **constanta interferometrului** ce dă domeniul de dispersie al acestuia. Pentru  $d = 0.5 \text{ cm}$  și  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$ , rezultă  $\Delta \lambda = 0.25 \text{ Å}$ . Deoarece domeniul de dispersie al interferometrului Fabry-Pérot este de ordinul de mărime al lungimii liniilor spectrale, acesta

poate fi utilizat ca analizor al formei liniilor spectrale.

### Difracția undelor electromagnetice

Difracția reprezintă un ansamblu de procese optice care apar la propagarea undelor prin medii ce conțin neomogenități (obstacole, fante, etc) cu dimensiuni liniare de același ordin de mărime cu lungimea de undă. Evaluarea repartiției intensității luminoase în aria de difracție se face luând în considerare caracteristicile geometrice și optice ale neomogenităților. La baza explicării fenomenului de difracție precum și al reflexiei și refracției stă **principiul Huygens-Fresnel**.

### Difracția Fresnel printr-o fântă circulară

Fie o deschidere circulară de rază  $\rho$  aflată la distanța  $R$  de sursa punctiformă. Dacă notăm cu  $r_o$  distanța de la orificiu la ecranul de observație, atunci, pe baza metodei zonelor Fresnel se poate exprima raza zonelor Frenel care se obțin prin difracție:

$$\rho_m^2 = m \frac{Rr_o}{R + r_o} \lambda \quad (2.1.81)$$

unde  $m$  reprezintă numărul zonei Fresnel,  $m = 1, 2, 3, \dots, N$  ( $N$  numărul total de zone).

### Difracția Fraunhofer printr-o fântă dreptunghiulară

Vom considera difracția unei unde plane monocromatice pe o fântă dreptunghiulară foarte îngustă de lărgime  $b$  și de lungime  $l \gg b$ . Intensitatea luminii difractate sub un unghi  $\alpha$  este dată de expresia:

$$I_\alpha = I_o \left( \sin^2 \left( \frac{\pi b}{2} \sin \alpha \right) / \left( \frac{\pi b}{2} \sin \alpha \right)^2 \right) \quad (2.1.82)$$

unde  $I_o$  este intensitatea undei electomagnetice incidente pe fântă.

Imaginea de difracție este formată dintr-un **maxim central de difracție** obținut din condiția:

$$b \sin \alpha = 0 \quad (m = 0) \quad (2.1.83)$$

**minime de difracție** obținute prin condiția:

$$b \sin \alpha = m\pi \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2.1.84)$$

și respectiv **maxime secundare de difracție** obținute prin condiția:

$$b \sin \alpha = (2m + 1)\lambda/2 \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2.1.85)$$

## Rețele de difracție plane

Rețelele de difracție plane, prin transmisie, se obțin prin trasarea unor trăsături (zgârieturi) fine, drepte, paralele și echidistante pe suprafața unei plăci confecționată dintr-un material dielectric transparent. Rețea de difracție se caracterizează prin **constantă rețelei**  $d = L/N$ , unde  $L$  reprezintă lungimea rețelei, iar  $N$  reprezintă numărul de fante distribuite pe lungimea  $L$ .

Procesul de difracție pe o rețea constă din două fenomene:

- difracția luminii pe fiecare fantă dreptunghiulară de lărgime  $b$
- interferența fasciculelor multiple difractate de fiecare fantă

Intensitatea luminoasă totală într-un punct, ca urmare a suprapunerii celor două fenomene va fi:

$$I_\alpha = I_o \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha \right)}{\left( \frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha \right)^2} \frac{\sin^2 \left( \frac{N\pi d}{\lambda} \sin \alpha \right)}{\sin^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha \right)} \quad (2.1.86)$$

Tabloul distribuției intensității în funcție de unghiul  $\alpha$  este format din maxime principale și secundare de interferență, minime de interferență, maxime și minime de difracție.

### Discuție:

#### a. pentru fenomenul de interferență

Pozиїilor extremelor intensității luminoase se pot obține din extremele funcției  $I_\alpha$  prin derivare la  $\Phi = \frac{\pi d \sin \alpha}{\lambda}$ . Prin derivare ajungen la următoarele două ecuații:

$$\sin \left( N \frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha \right) = 0 \quad (2.1.87)$$

$$N \operatorname{tg} \left( N \frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha \right) = \operatorname{tg} \left( N \frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha \right) \quad (2.1.88)$$

Pentru ca ecuația (1.9.29) să fie satisfăcută trebuie ca:

$$\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha = \frac{m}{N} \pi \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.1.89)$$

Dacă  $m/N$  este un număr întreg, adică  $m/N = n, n = 0, 1, 2, 3, \dots$  ( $m = 0, N, 2N, 3N, \dots$ ), atunci se obține condiția de maxime principale de interferență:

$$\sin \alpha_n = n \frac{\lambda}{d} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.1.90)$$

$$\begin{aligned} n = 0 &\rightarrow \sin \alpha_0 = 0 && \text{maxim central} \\ n = 1 &\rightarrow \sin \alpha_1 = \frac{\lambda}{d} && \text{maxim de ordin 1} \\ n = 2 &\rightarrow \sin \alpha_2 = 2 \frac{\lambda}{d} && \text{maxim de ordin 2} \\ n = 3 &\rightarrow \sin \alpha_3 = 3 \frac{\lambda}{d} && \text{maxim de ordin 3 etc} \end{aligned}$$

Dacă  $m/N$  nu este un număr întreg, atunci intensitatea luminoasă va avea un minim. Deci, între două maxime consecutive ( $n = 0$  și  $n = 1$  de exemplu) se găsesc  $N - 1$  minime de interferență ( $n = 1/N, 2/N, 3/N, \dots, (N - 1)/N$ ). Ecuația 2.1.87 reprezintă condiția de obținere a maximelor secundare de interferență de intensitate mult mai mică decât a maximelor principale. Între două maxime principale se găsesc  $N - 2$  maxime secundare.

### b. pentru fenomenul de difracție

Pozițiile maximelor și minimelor de difracție se pot obține prin derivarea intensității  $I_\alpha$  la  $\varphi = \frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda}$ . Se vor obține următoarele două soluții:

$$\sin \alpha_k = k \frac{\lambda}{b} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.1.91)$$

$$\sin \alpha_k = (2k + 1) \frac{\lambda}{2b} \quad (2.1.92)$$

Soluția 2.1.91 definește pozițiile minimelor de difracție, iar soluția 2.1.92 definește pozițiile maximelor de difracție.

### Difracția radiației X

Fizicianul german Max Theodor Felix von Laue a demonstrat, în 1912, posibilitatea utilizării cristalelor naturale, cu constanta rețelei de ordinul  $10^{-10}$

m ca rețele de difracție tridimensionale pentru razele  $X$ .

Fie două plane cristaline  $P_1$  și  $P_2$  pe care cade un fascicul monocromatic de radiații  $X$  (raze Röntgen). Diferența de drum dintre cele două raze este:

$$\Delta L = 2d \sin \theta \quad (2.1.93)$$

unde  $d$  este distanța dintre cele două plane cristaline, iar  $\theta$  este unghiul facut de unda incidentă cu planul cristalin pe care cade. Direcțiile după care se obțin maximele de interferență sunt date de condiția:

$$2d \sin \theta = m\lambda \quad (2.1.94)$$

Această relație este cunoscută sub denumirea de **legea Wulf-Bragg** pentru difracția pe cristale și are aplicații atât în analiza structurală cu raze  $X$  cât și în analiza spectrală a radiațiilor  $X$ .

## 2.2 Probleme propuse

**2.1** O undă electromagnetică plană monocromatică se propagă în vid după axa  $Oz$ . Componentele vectorului intensitate câmp electric de-a lungul celor trei axe carteziene sunt:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x} \cos(kz - \omega t + \varphi_1) \\ E_y &= E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varphi_2) \\ E_z &= 0 \end{aligned}$$

Vectorul Poynting este:

- a).  $\vec{S} = \frac{2}{\mu_0 c} E_y^2 \cdot \hat{y}$
- b).  $\vec{S} = \frac{2}{\mu_0 c} E_x^2 \cdot \hat{x}$
- c).  $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c} (E_x^2 + E_y^2) \cdot \hat{z}$
- d).  $\vec{S} = \frac{c}{\mu_0} (E_x^2 + E_y^2) \cdot \hat{z}$
- e).  $\vec{S} = \frac{4}{\mu_0 c} (E_x^2 + E_y^2) \cdot \hat{z}$

**2.2** Care este intensitatea unei electomagnetice care se propagă în vid cu vectorul intensitate câmp electric:

$$\vec{E} = E_0 \cos kx \cos \omega t \cdot \hat{y}$$

- a).  $\frac{k}{4\omega\mu_0} E_0^2 \sin 2kx \sin 2\omega t$

- b).  $\frac{k}{4\omega\mu_0} E_0^2 \sin 2kx$   
c). 0  
d).  $\frac{k}{4\omega\mu_0} E_0^2 \sin 2\omega t$   
e).  $\frac{k}{4\omega\mu_0} E_0^2$

**2.3** Care este intensitatea undei electromagnetice care se propagă în vid cu vectorul intensitate câmp electric:

$$\vec{E} = E_{0x} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - kz)} \cdot \hat{x}$$

unde  $E_{0x} = \text{const.}, i^2 = -1$ .

- a).  $\vec{S} = \frac{k-i\alpha}{\mu\omega} E^2 \cdot \hat{y}$   
b).  $\vec{S} = \frac{k-i\alpha}{\mu\omega} E^2 \cdot \hat{z}$   
c). 0  
d).  $\vec{S} = \frac{k+i\alpha}{\mu\omega} E^2 \cdot \hat{z}$   
e).  $\vec{S} = \frac{k+i\alpha}{\mu\omega} E^2 \cdot \hat{y}$

**2.4** O undă electromagnetică plană se propagă în vid astfel încât intensitatea câmpului variază după legea:

$$\vec{E} = (2\hat{x} + E_{0y}\hat{y} - 5\hat{z}) e^{i[\omega t - (y+3z)]}$$

Intensitatea câmpului magnetic corespunzător undei este:

- a).  $(5\hat{x} + \hat{y} - 2\hat{z}) e^{i[\omega t - (y+3z)]}$   
b).  $\sqrt{\frac{\epsilon_0}{10\mu_0}} (50\hat{x} + 6\hat{y} - 2\hat{z}) e^{i[\omega t - (y+3z)]}$   
c).  $\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (5\hat{x} + 6\hat{y} - 2\hat{z}) e^{i[\omega t - (y+3z)]}$   
d).  $\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (50\hat{x} + 6\hat{y}) e^{i[\omega t - (y+3z)]}$   
e).  $\sqrt{\frac{\epsilon_0}{10\mu_0}} (-2\hat{z}) e^{i[\omega t - (y+3z)]}$

**2.5** O undă electromagnetică armonică plană se propagă în vid, astfel încât câmpul electric este de forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_{oy} e^{i(\omega t - kx)}$$

Vectorul de undă are expresia  $\vec{k} = 3\vec{u}_x + 4\vec{u}_z$  ( $m^{-1}$ ), iar  $\vec{E}_{oy} = 2\vec{u}_y$  ( $V/m$ ).

a). să se arate că direcția de propagare e cuprinsă în planul  $xOz$  și să se

calculeze unghiul dintre direcția de propagare și axa  $Oz$ ; care este lungimea de undă și frecvența undei?

- b). să se determine câmpul magnetic  $\vec{H}$  al undei
- c). care este intensitatea undei?

**2.6** O undă electromagnetică plană, liniar polarizată, de forma  $\vec{E}_y = \vec{E}_{oy} \cos(\omega t - kx)$  se propagă în vid de-a lungul axei  $Ox$ . Amplitudinea câmpului electric este  $E_{oy} = 50 \text{ mV/m}$ , iar frecvența undei este  $\nu = 100 \text{ MHz}$ . Se cere:

- a). valoarea eficace a densității curentului de deplasare
- b). intensitatea undei, câmpul magnetic  $\vec{H}$ , vectorul Poynting  $\vec{S}$
- c). tensiunea electromotoare indușă într-un cadru metalic de forma unui pătrat de latură  $l = 50 \text{ cm}$  aflat în planul  $xOy$ .

**2.7** O undă electromagnetică staționară având  $\vec{E} = \vec{E}_o \cos kx \times \cos \omega t$  se află de-a lungul axei  $Ox$ , în vid. Să se determine:

- a). inducția magnetică  $\vec{B}(x, t)$
- b). vectorul Poynting
- c). intensitatea undei

Aplicație numerică:  $E_o = 1.5 \text{ V/m}$ ;  $\omega = 1.2 \cdot 10^8 \text{ Hz}$ .

**2.8** Se consideră o undă staționară de-a lungul axei  $Ox$ , pentru care intensitatea câmpului electric este de forma:

$$\vec{E} = E_o \cos mx \cos ny \cos \omega t \vec{u}_y$$

Să se determine:

- a). intensitatea câmpului magnetic
- b). vectorul Poynting
- c). intensitatea undei

**2.9** O undă electromagnetică ce se propagă de-a lungul axei  $Oz$  este descrisă de:

$$\vec{E} = 2\sqrt{5} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x + 4 \cos(\omega t - kz + \pi/6) \vec{u}_y (\text{V/m})$$

Să se determine:

- a). ecuația traiectoriei descrisă de vârful vectorului  $\vec{E}$
- b). sensul de polarizare al undei

- c). semiaxele  $a$  și  $b$  ale elipsei de polarizare  
d). unghiul dintre semiaxa mare a elipsei și axa  $Ox$

**2.10** Care este starea de polarizare a undei electromagnetice descrise de ecuațiile:

$$\begin{aligned} E_x &= E \cos(\omega t - kz) \\ E_y &= E \cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

- a). nepolarizată  
b). eliptic polarizată  
c). liniar polarizată  
d). circular polarizată  
e). nu se poate da un răspuns

**2.11** Se consideră un set de trei polarizori plasați coaxial. Polarizorul 1 are axa de transmitere verticală iar polarizorul 3 orizontală. Polarizorul 2 este plasat între cei doi și are axa de transmitere orientată sub unghiul de  $45^0$  față de axa verticală. Un fascicul de lumină nepolarizată de intensitate  $I_0$  cade pe acest sistem dinspre polarizorul 1. Lumina transmisă prin sistem are intensitatea: a). zero; b).  $\frac{1}{2}I_0$ ; c).  $\frac{1}{4}I_0$ ; d).  $\frac{1}{8}I_0$ ; e).  $I_0$

**2.12** Un fascicul de lumină nepolarizată trece prin doi polarizori a căror axe de transmitere fac între ele un unghi de  $30^0$ . Ce fracțiune din intensitatea undei incidente este transmisă: a). zero; b).  $\frac{3}{4}$ ; c).  $\frac{1}{8}$ ; d).  $\frac{3}{4}$ ; e).  $\frac{3}{8}$

**2.13** Un fascicul de lumină nepolarizată trece printr-un sistem de patru polarizori cu unghiul dintre două axe consecutive de transmitere de  $30^0$ . Ce fracțiune din intensitatea undei incidente este transmisă: a). zero; b).  $\frac{1}{64}$ ; c).  $\frac{27}{128}$ ; d).  $\frac{27}{64}$ ; e).  $\frac{3}{8}$

**2.14** O undă electromagnetică plană vine din mediul vid  $(\epsilon_0, \mu_0)$  și cade normal pe suprafața de separare a unui mediu caracterizat de constantele  $4\epsilon_0, \mu_0$ . Ce fracțiune din puterea incidentă se reflectă și ce fracțiune se transmite: a). zero; b).  $\frac{1}{9}, \frac{8}{9}$ ; c).  $\frac{2}{8}, \frac{6}{8}$ ; d).  $\frac{1}{6}, \frac{5}{6}$ ; e).  $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}$

**2.15** Să se scrie relațiile Fresnel luând în considerare proprietățile magnetice ale celor două medii. Să se cerceteze posibilitatea polarizării totale prin reflexie.

**2.16** O rază de lumină străbate o lamă de sticlă cu fețe plan-paralele, aflate în aer. Să se determine relațiile dintre coeficienții Fresnel de reflexie și de transmisie la interfața aer-sticlă și sticlă-aer.

**2.17** Un fascicul monocromatic de lumină nepolarizată, cade sub un unghi  $\theta_i$  pe o lamă de sticlă de grosime  $d = 3\text{ cm}$  și de indice de refracție  $n = 1.5$ , aflată în aer. Se cere:

- să se calculeze deviația laterală a fasciculului emergent față de direcția celui incident pentru  $\theta_i = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$
- să se determine gradele de polarizare ale radiațiilor reflectate, transmise în sticlă și emergente din sticlă, pentru  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, \theta_B, 60^\circ, 90^\circ$  ( $\theta_B = \text{unghiul Brewster}$ )

**2.18** Prin așezarea unui ecran compact prevăzut cu două fante înguste în calea undei inițiale, se pot produce două unde coerente când:

- sursa inițială este o undă plană monocromatică
- sursa inițială este lumină albă și în fața ei se asează o fantă foarte îngustă
- întotdeauna
- în cazul a)
- în cazurile a) și b)

**2.19** Într-un experiment de tip Young pentru care distanța dintre planul celor două fante și ecran este  $D = 2\text{ m}$ , se folosește o undă monocromatică cu  $\lambda = 589\text{ nm}$ . Cunoscând că distanța de la franja centrală până la minimul de ordin 10 este  $7,26\text{ mm}$  să se determine distanța dintre fante: a).  $1,09\text{ mm}$ ; b).  $2,07\text{ mm}$ ; c).  $0,73\text{ mm}$ ; d).  $1,54\text{ mm}$ ; e).  $3,76\text{ mm}$ .

**2.20** Într-un experiment de tip Young pentru care distanța dintre cele două fante este  $d = 0,120\text{ cm}$  iar cea dintre planul fanelor și ecran este  $D = 120\text{ cm}$ , se folosește o undă monocromatică cu  $\lambda = 600\text{ nm}$ . Care este distanța față de maximul central pentru care intensitatea luminii scade la un sfert din acesta: a).  $1,19\text{ cm}$ ; b).  $0,02\text{ cm}$ ; c).  $0,73\text{ cm}$ ; d).  $1,24\text{ cm}$ ; e).  $0,76\text{ cm}$

**2.21** Dacă într-un experiment de tip Young cu distanța dintre fante  $2a$  și distanța dintre planul fanelor și ecran  $D$ , se ridică sursa inițială (cu lungimea  $\lambda$ ) pe distanța  $y$  paralel cu planul fanelor, atunci:

- interfranja rămâne aceeași iar franja centrală coboară pe distanța  $\frac{D}{d}\lambda$
- interfranja rămâne aceeași iar franja centrală urcă pe distanța  $\frac{D}{d}\lambda$

- c). interfranja rămâne aceeași iar franja centrală coboară pe distanța  $a$   
d). interfranja rămâne aceeași iar franja centrală urcă pe distanța  $a$   
e). tabloul de interferență rămâne neschimbăt

**2.22** Într-un experiment de tip Young se folosește o sursă de lumină monocromatică cu lungimea  $\lambda$ . Distanța dintre fante este  $2a$  iar distanța dintre planul fantelor și ecran  $D$ . Dacă se rotește ecranul cu unghiul  $\beta$  față de poziția inițială, atunci:

- a). interfranja rămâne aceeași  
b). interfranja se mărește  $i' = \frac{\lambda D}{2a \cos \beta}$   
c). interfranja se micșorează  $i' = \frac{\lambda D}{2a} \cos \beta$   
d). interfranja se mărește  $i' = \frac{\lambda D}{2a} \tan \beta$   
e). interfranja se micșorează  $i' = \frac{\lambda D}{a} \sin \beta$

**2.23** Într-o experiență de interferență realizată cu oglinda Lloyd (Fig.2.23), unda luminoasă directă de la sursa S interferă cu cea reflectată de oglinda O. Franjele de interferență se observă pe ecranul E situat la distanța D de sursa S iar interfranja are valoarea  $i$ . Care este valoarea lungimii de undă a luminii folosite dacă îndepărând sursa de planul oglinzii pe distanța  $h$ , interfranja scade de  $n$  ori.

- a).  $\lambda = \frac{2i}{D} \frac{h}{n-1}$   
b).  $\lambda = \frac{2i}{D} h(n-1)$   
c).  $\lambda = \frac{D}{2i} \frac{h}{n-1}$   
d).  $\lambda = \frac{D}{i} \frac{h}{n-1}$   
e).  $\lambda = \frac{2i}{h} \frac{D}{n-1}$

**2.24** Lumina se propagă din mediul cu indicele de refracție  $n_1 = 1,361$  într-un mediu cu  $n_2 = 1.461$ . Raportul vitezele de propagare în cele două medii ( $v_1/v_2$ ) este: a). 1.99; b). 1.07; c). 0.93; d). 0.51; e). 0.76.

**2.25** O undă monocromatică cu lungimea de undă  $\lambda = 500nm$  cade pe un paravan prevăzut cu două fante dreptunghiulare înguste, cu lărgimea  $a = 0,05nm$  separate la o distanță  $d = 0,20nm$ . Câte maxime de interferență se vor observa pe lungimea ocupată de maximul central de difracție: a). 5; b). 2; c). 4; d). 3; e). 1.

**2.26** Se consideră o pană optică de aer cu una din fețe fixă, iar cealaltă se poate deplasa paralel cu ea însăși, depărtându-se de prima. Pana este ilu-

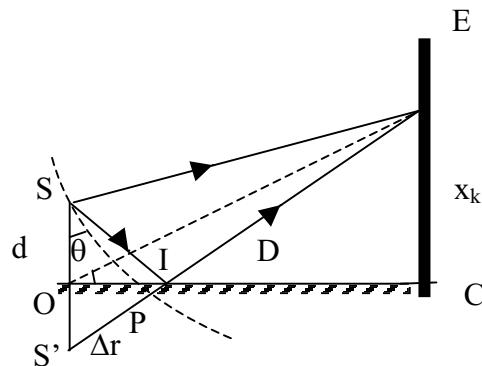


Fig.2.23

minată cu lumină monocromatică având  $\lambda = 500 \text{ nm}$ . Unghiul penei optice este  $\alpha$ .

- a). cum se poate măsura deplasarea feței mobile ?
- b). care este deplasarea minimă a feței mobile ce se poate măsura într-o astfel de experiență știind că deplasarea minimă a franjei ce poate fi apreciată este  $i/4$  ?
- c). ce se întâmplă dacă se variază unghiul penei și care este unghiul minim care poate fi pus în evidență ?
- d). cum se poate măsura cu ajutorul penei optice planeitatea unei suprafețe ?

**2.27** Într-o experiență de tip Wiener, un fascicul de lumină monocromatică, liniar polarizată, cade normal pe o oglindă de argint pe care s-a aplicat un strat de emulsie fotografică. Se produc undele staționare. Lumina acționează asupra bromurii de argint din emulsie și o descompune; apar straturi periodice innegrite, pentru care descompunerea substanței este maximă, deci vectorul luminos are valoare maximă. Primul strat innegrit apare la distanța  $d$  de suprafața oglinzi. Se cere:

- a). să se obțină expresia undei electrice rezultante (obținută prin superpozitia undei incidente cu cea reflectată)
- b). să se obțină expresia undei magnetice rezultante
- c). să se calculeze valoarea medie a vectorului Poynting rezultant
- d). să se stabilească ecuațiile nodurilor și ventrelor; să se determine distanța dintre un nod și un ventru
- e). să se arate că vectorul câmp electric are caracter de vector luminos

f). știind că  $\lambda = 500 \text{ nm}$ , să se calculeze la ce distanță  $d$  de suprafața oglinzii apare primul maxim

g). să se calculeze distanța dintre un nod și un ventru dacă statul de emulsie depus pe placa de sticlă face un unghi  $\varphi = 1'$  cu suprafața oglinzii

**2.28** Se consideră un interferometru Fabbry-Péerot având următoarele caracteristici: distanța dintre lamele de sticlă este  $d = 10^{-2} \text{ cm}$ ; factorul de reflexie al unei lame este  $R = 0.9$ . Se utilizează lumină monocromatică având lungimea de undă  $\lambda = 500 \text{ nm}$ . Se cere:

- a). să se stabilească dependența dispersiei unghiulare de unghiul de incidentă
- b). să se stabilească dependența domeniului dispersiv (constanta aparatului) de unghiul de incidentă
- c). să se calculeze puterea de rezoluție a aparatului
- d). să se determine numărul efectiv de fascicule care interferă

**2.29** O rețea de difracție de lungime  $L = 5 \text{ cm}$ , cu constanta rețelei  $n = 500$  trăsături/mm, este iluminată normal cu un fascicul paralel de lumină de lungime de undă  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ . Să se calculeze:

- a). ordinul maxim de difracție
- b). unghiul de difracție pentru primele două ordine
- c). dispersia unghiulară în primele două ordine
- d). puterea de rezoluție și intervalul spectral liber în ordinul întâi

### 2.3 Soluții

**2.1** Vectorul Poynting este:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Trebuie să calculăm mai întâi vectorul intensitate câmp magnetic. Pentru aceasta vom folosi ecuația lui Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

unde:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

După scrierea rotorului în coordinate carteziene:

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x(z) & E_y(z) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t} (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z})$$

și identificarea componentelor se obține:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial B_x}{\partial t} &= -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\-\frac{\partial B_y}{\partial t} &= -\frac{\partial E_x}{\partial z} \\-\frac{\partial B_z}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

În relațiile de mai sus s-a ținut cont de dependența doar de  $z$  a componentelor  $E_x$  și  $E_y$ . Se observă că pentru componența  $B_z$  nu există variație temporală, ca urmare:

$$B_z(t) = B_z(t = 0) = \text{const.}$$

Efectuând operațiile de derivare în raport cu  $z$  rezultă:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial B_x}{\partial t} &= -kE_{0y} \sin(kz - \omega t + \varphi_2) \\-\frac{\partial B_y}{\partial t} &= -kE_{0x} \sin(kz - \omega t + \varphi_1)\end{aligned}$$

Integratorăm apoi în raport cu timpul și găsim componentele  $B_x$  și  $B_y$ :

$$\begin{aligned}B_x &= \frac{k}{\omega} E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varphi_2) + B_x(t = 0) \\B_y &= \frac{k}{\omega} E_{0x} \cos(kz - \omega t + \varphi_1) + B_y(t = 0)\end{aligned}$$

Dacă considerăm constantele de integrare nule, adică:

$$\begin{aligned}B_x(t = 0) &= 0 \\B_y(t = 0) &= 0 \\B_z(t = 0) &= 0\end{aligned}$$

se obține:

$$\begin{aligned}B_x &= \frac{1}{c} E_y \\B_y &= \frac{1}{c} E_x \\B_z &= 0\end{aligned}$$

Revenim în relația de definiție a vectorului Poynting.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ E_x & E_y & 0 \\ E_y & E_x & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0 c} (E_x^2 + E_y^2) \cdot \hat{z}$$

se observă că acesta este pe direcția axei  $Oz$ .

Răspunsul corect este c)

**2.2** Intensitatea undei este dată de variația în timp a vectorului Poynting:

$$I = \frac{1}{T} \int S(t) dt = \frac{1}{T} \int |\vec{E} \times \vec{H}| dt$$

Să calculăm mai întâi, cu ajutorul primei ecuații a lui Maxwell, vectorul intensitate câmp magnetic.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Tinem cont de faptul că vectorul  $\vec{E}$  este orientat pe direcția axei  $Oy$  iar mărimea lui depinde de coordonata  $x$ .

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t} (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z})$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial B_x}{\partial t} &= 0 \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} &= 0 \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} &= -\frac{\partial E}{\partial x} = kE_0 \sin kx \cos \omega t \end{aligned}$$

Deoarece componente pe axele  $Ox, Oy$  sunt constante în timp, rămâne variabilă în timp doar componenta după axa  $Oz$ , care, după integrarea ultimei ecuații, conduce la:

$$\begin{aligned} B_z &= kE_0 \sin kx \int \cos \omega t dt \\ &= \frac{k}{\omega} E_0 \sin kx \sin \omega t + B_z(t=0) \end{aligned}$$

Considerând, pentru simplitate, toate constantele de integrare zero, s-a obținut următoarea expresie pentru vectorul intensitate câmp magnetic:

$$\vec{H} = \frac{k}{\omega \mu_0} E_0 \sin kx \sin \omega t \cdot \hat{z}$$

Vectorul Poynting este:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

deci direcția este perpendiculară pe planul format de cei doi vectori. Deoarece

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E \cdot \hat{y} \\ \vec{H} &= H \cdot \hat{z}\end{aligned}$$

este evident faptul că vectorul Poynting este orientat pe direcția axei  $Ox$ .

$$\vec{S} = |\vec{E} \times \vec{H}| \cdot \hat{x} = EH \cdot \hat{x}$$

Înlocuind expresiile cele două intensități, se obține:

$$S = \frac{k}{4\omega\mu_0} E_0^2 \sin 2kx \sin 2\omega t$$

După medierea vectorului Poynting pe durata unei perioade se obține intensitatea undei.

$$I = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} S dt = \frac{k}{4T\omega\mu_0} E_0^2 \sin 2kx \int_t^{t+T} \sin 2\omega t dt = 0$$

Răspunsul corect este b)

**2.3** Vectorului Poynting este:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Din prima ecuație a lui Maxwell rezultă:

$$\left| \begin{array}{ccc} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E(z) & 0 & 0 \end{array} \right| = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

adică:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial B_z}{\partial t} &= E_{0x} e^{i\omega t} \frac{\partial}{\partial y} (e^{-\alpha z} e^{-ikz}) \\ &= E_{0x} (\alpha + ik) e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - kz)}\end{aligned}$$

Integrând în raport cu timpul se găsește valoarea lui  $B_z$ .

$$\begin{aligned}B_z &= -E_{0x} (\alpha + ik) e^{-\alpha z} e^{-ikz} \int e^{i\omega t} dt \\ &= -E_{0x} \frac{(\alpha + ik)}{i\omega} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - kz)} + const. \\ &= \frac{k - i\alpha}{\omega} E_{0x} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - kz)} + const.\end{aligned}$$

Pentru simplitatea calculului considerăm toate constantele de integrare nule. Așadar s-a obținut:

$$B_z = \frac{k - i\alpha}{\omega} E$$

Vectorul Poynting este

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} (EB_z) \cdot \hat{y} = \frac{k - i\alpha}{\mu\omega} E^2 \cdot \hat{y}$$

Răspunsul corect este a)

**2.4** Ecuația generală a unei unde plane monocromatice este de forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

unde  $\vec{k}$  – vectorul de undă, definit ca:

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{s}$$

unde  $\hat{k}$  – este vesorul direcției de deplasare a suprafețelor de fază constantă. În coordonate carteziene, amplitudinea intensității este:

$$\vec{E}_0 = E_{0x} \hat{x} + E_{0y} \hat{y} + E_{0z} \hat{z}$$

iar produsul scalar are expresia:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

Prin identificarea formulei generale cu expresia problemei, rezultă:

$$\begin{aligned} E_{0x} &= 2; E_{0z} = 5 \\ k_x &= 0; k_y = 1; k_z = 3 \end{aligned}$$

Deocamdată nu se poate spune nimic despre componenta  $E_{0y}$  a câmpului electric. Putem folosi însă o proprietate deosebit de importantă a undelor plane și anume transversalitatea acestora. Deoarece  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$  formează un triunghi drept,

$$\vec{E} \perp \vec{k} \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{k} = 0$$

și în plus:

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (\hat{k} \times \vec{E})$$

Ultima relație este ușor de demonstrat cu ajutorul ecuației lui Maxwell pentru vid:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Operatorul rotor aplicat undei plane (cu amplitudinea constantă în timp) este echivalent cu operația matematică:

$$\nabla \times \rightarrow -i\vec{k} \times$$

iar derivata în raport cu timpul asociată undei plane corespunde mărimii:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega$$

Așadar:

$$\begin{aligned} -i\vec{k} \times \vec{E} &= -i\omega \vec{B} \\ \vec{B} &= \frac{k}{\omega} (\hat{k} \times \vec{E}) \\ \vec{H} &= \frac{1}{c\mu_0} (\hat{k} \times \vec{E}) \\ \vec{H} &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (\hat{k} \times \vec{E}) \end{aligned}$$

Ca urmare:

$$E_{0x}k_x + E_{0y}k_y + E_{0z}k_z = 0$$

adică:

$$\begin{aligned} 0 + E_{0y} + 15 &= 0 \Rightarrow \\ E_{0y} &= -15 \end{aligned}$$

Direcția versorului  $\hat{k}$  se determină din definiția:

$$\begin{aligned} \hat{k} &= \frac{\vec{k}}{k} = \frac{k_y}{\sqrt{(k_y^2 + k_z^2)}} \hat{y} + \frac{k_z}{\sqrt{(k_y^2 + k_z^2)}} \hat{z} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{y} + \frac{3}{\sqrt{10}} \hat{z} \end{aligned}$$

Valoarea intensității câmpului magnetic este:

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ 2 & -15 & 5 \end{vmatrix} e^{i[\omega t - (y+3z)]} \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left( \frac{50}{\sqrt{10}} \hat{x} + \frac{6}{\sqrt{10}} \hat{y} - \frac{2}{\sqrt{10}} \hat{z} \right) e^{i[\omega t - (y+3z)]} \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{10\mu_0}} (50\hat{x} + 6\hat{y} - 2\hat{z}) e^{i[\omega t - (y+3z)]}\end{aligned}$$

Răspunsul corect este b)

**2.5** Direcția de propagare a undei este dată de vectorul  $\vec{k}$  care, conform expresiei lui se află în planul  $xOz$ . Unghiul  $\theta$  făcut de direcția de propagare cu axa  $Oz$  este:

$$tg\theta = \frac{k_x}{k_z} = \frac{3}{4} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} = \frac{2\pi}{5} m$$

Frecvența va fi:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = 2.39 \cdot 10^8 \text{ Hz}$$

b).

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}} (\vec{s} \times \vec{E}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}} \frac{(\vec{k} \times \vec{E})}{k} = 5.3 \cdot 10^{-4} (-8\vec{u}_x + 6\vec{u}_z) e^{i(\omega t - kx)}$$

de unde se observă că  $\vec{H} \subset xOz$   
c).

$$I = < |\vec{E} \times \vec{H}| > = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}} \vec{E}_{oy}^2 \vec{s} \left( \frac{W}{m^2} \right)$$

**2.6 a).** Fie o undă electromagnetică plană, liniar polarizată de forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_{oy} \cos(\omega t - kx)$$

Densitatea curentului de deplasare este, conform legii Ampère-Maxwell:

$$\vec{j}_d = \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\varepsilon_o \omega \vec{E}_{oy} \sin(\omega t - kx)$$

având amplitudinea  $j_{od} = \varepsilon_o \omega E_{oy}$ . Valoarea eficace este definită ca rădăcina pătrată din valoarea medie a pătratului densității curentului de deplasare în timp de o perioadă:

$$j_{eficace} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T j_d^2 dt} = \sqrt{2\pi\nu\varepsilon_o} E_{oy} = 0.2 \text{ mA/m}^2$$

b). Se pleacă de la definiția vectorului Poynting  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ , precum și de la expresia câmpului magnetic în funcție de câmpul electric:

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}} E_{oy} \cos(\omega t - kx)$$

Deci, vectorul Poynting va avea expresia:

$$\vec{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}} E_{oy}^2 \cos^2(\omega t - kx) \vec{s}$$

Se ține apoi cont că media temporală a funcției  $\cos^2$  este  $\frac{1}{2}$  vom obține, pentru intensitatea undei, expresia:

$$I = < |\vec{S}| > = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}} E_{oy}^2 \frac{W}{m^2}$$

c). Fluxul elementar al inducției magnetice  $\vec{B} = \mu_o \vec{H}$  prin suprafața elementară  $dA = l dx$  (vezi figura) va fi  $d\Phi = \mu_o H l dx$ , iar fluxul total prin cadrul pătratic va avea expresia:

$$\begin{aligned} \Phi &= \mu_o l \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}} E_{oy} \int_0^l \cos(\omega t - kx) dx \\ &= \frac{l E_{oy} \sqrt{\varepsilon_o \mu_o}}{k} [-\sin \omega t + \sin(\omega t - kl)] \end{aligned}$$

Deci, tensiunea electromotoare inducă va fi:

$$e_{indus} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = l E_{oy} [\cos \omega t - \cos(\omega t - \omega l/c)] \text{ (V)}$$

**2.7 a).** Vom alege câmpul electric de-a lungul axei  $Oy$ ,  $\vec{E} = E_y \vec{u}_y$ . Din ecuațiile Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

rezultă  $\vec{B} = B_z \vec{u}_z$  și:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} &= -c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x}\end{aligned}$$

Dacă vom ține cont că  $E_y = E_{oy} \cos kx \cos \omega t$  vom obține:

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_z}{\partial t} &= kE_{oy} \sin kx \cos \omega t \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} &= \frac{\omega E_{oy}}{c^2} \cos kx \sin \omega t\end{aligned}$$

Din ultimele relații rezultă expresia inducției magnetice:

$$B_z = \frac{E_o}{c} \sin kx \sin \omega t = 5 \cdot 10^{-9} \sin 0.4x \sin 1.2 \cdot 10^8 t \text{ (T)}$$

b). Se pleacă de la definiția vectorului Poynting  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  și, dacă ținem cont de direcțiile vectorilor electric și magnetic, rezultă că vectorul Poynting va fi orientat pe direcția  $Ox$ :

$$S_x = E_y H_z = \frac{1}{\mu_o} E_y B_z = \frac{1}{4} \frac{E_o^2}{c \mu_o} \sin 2kx \sin 2\omega t \text{ (W/m}^2)$$

c). Intensitatea undei este, conform definiției  $I = \langle S_x \rangle$  și va fi zero pentru că media sinusului pe o perioadă este nulă.

**2.8 a).** Din legea inducției  $\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$  vom găsi:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

Deoarece  $E_y = E_o \cos mx \cos ny \cos pz \cos \omega t$  vom găsi următoarele componente ale câmpului magnetic:

$$\begin{aligned}H_x &= -\frac{p}{\mu \omega} \cos mx \cos ny \sin pz \sin \omega t \\ H_y &= 0 \\ H_z &= \frac{m}{\mu \omega} E_o \sin mx \cos ny \cos pz \sin \omega t\end{aligned}$$

Dar, din ecuația Maxwell  $\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  rezultă:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial y} &= 0 \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial z} &= \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

ceea ce conduce, ținând cont de expresiile câmpului magnetic, la următorul set de ecuații:

$$\begin{aligned}\frac{mn}{\mu\omega}E_o \sin mx \sin ny \cos pz \sin \omega t &= 0 \\ m^2 + p^2 &= \varepsilon\mu\omega^2 \\ \frac{pn}{\mu\omega}E_o \cos mx \sin ny \sin pz \sin \omega t &= 0\end{aligned}$$

De asemenea, dacă vom ține cont și de celelalte două ecuații Maxwell  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  și  $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ , vor rezulta următoarele două ecuații:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_y}{\partial y} = nE_o \cos mx \sin ny \cos pz \cos \omega t &= 0 \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

Se observă că, pentru a fi verificate toate ecuațiile deduse, trebuie ca  $n = 0$ . Deci, componentele câmpului magnetic vor fi următoarele:

$$\begin{aligned}H_x &= -\frac{p}{\mu\omega} \cos mx \sin pz \sin \omega t \\ H_y &= 0 \\ H_z &= \frac{m}{\mu\omega} E_o \sin mx \cos pz \sin \omega t\end{aligned}$$

b). Vectorul Poynting  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  va avea doar două componente:

$$\begin{aligned}S_x &= E_y H_z = \frac{m}{4\mu\omega} E_o^2 \sin 2mx \cos^2 ny \cos^2 ny \cos^2 pz \sin 2\omega t \\ S_z &= -E_y H_x = \frac{p}{4\mu\omega} E_o^2 \cos^2 mx \cos^2 ny \sin 2pz \sin 2\omega t\end{aligned}$$

c). Deoarece valoarea medie, pe o perioadă, a funcției  $\sin 2\omega t$  este nulă, rezultă că  $\langle S_x \rangle = \langle S_z \rangle = 0$ , deci intensitatea undei este nulă.

**2.9 a).** Deoarece diferența de fază dintre cele două componente ale câmpului electric este  $\delta = \pi/6$ , rezultă că unda este polarizată eliptic stânga având axele proprii orientate după axele  $O\xi$  și respectiv  $O\eta$  ce fac unghiul  $\varphi$  cu axele  $Ox$  și respectiv  $Oy$ .

b). Ecuația elipsei în axele de coordonate  $xOy$  este dată de relația:

$$\frac{E_x^2}{E_{ox}^2} + \frac{E_y^2}{E_{oy}^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_{ox} E_{oy}} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (2.3.95)$$

cu componente:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{ox} \cos(\omega t - kz) \\ E_y &= E_{oy} \cos(\omega t - kz + \delta) \end{aligned}$$

Față de noile coordonate orientate de-a lungul axelor elipsei, componentele câmpului electric scrise cu ajutorul componentelor  $E_x$  și  $E_y$ , vor avea forma:

$$\begin{aligned} E_\xi &= E_x \cos \varphi + E_y \sin \varphi \\ E_\eta &= -E_x \sin \varphi + E_y \cos \varphi \end{aligned}$$

Dacă notăm prin  $a$  și  $b$  semiaxele elipsei, atunci ecuația elipsei în sistemul de coordonate  $\xi O\eta$  va fi:

$$\frac{E_\xi^2}{a^2} + \frac{E_\eta^2}{b^2} = 1$$

ceea ce arată că aceste componente, față de noile axe vor pot fi scrise sub forma:

$$\begin{aligned} E_\xi &= a \cos(\omega t - kz + \delta_o) = a \cos(\omega t - kz) \cos \delta_o - \\ &\quad a \sin(\omega t - kz) \sin \delta_o \\ E_\eta &= b \sin(\omega t - kz + \delta_o) = b \sin(\omega t - kz) \cos \delta_o + \\ &\quad \cos(\omega t - kz) \sin \delta_o \end{aligned}$$

Pentru a determina semiaxele elipsei vom înlocui expresiile pentru  $E_x$  și respectiv  $E_y$  în expresiile componentelor  $E_\xi$  și  $E_\eta$ :

$$\begin{aligned} E_\xi &= E_{ox} \cos(\omega t - kz) \cos \varphi + E_{oy} \cos(\omega t - kz) \cos \delta \sin \varphi - \\ &\quad E_{oy} \sin(\omega t - kz) \sin \delta \sin \varphi \\ E_\eta &= -E_{ox} \cos(\omega t - kz) \sin \varphi + E_{oy} \cos(\omega t - kz) \cos \delta \cos \varphi - \\ &\quad E_{oy} \sin(\omega t - kz) \sin \delta \cos \varphi \end{aligned}$$

Identificând expresiile pentru  $E_\xi$  și  $E_\eta$  din cele două seturi de ecuații vom obține următoarele relații:

$$\begin{aligned} a \cos \delta_o &= E_{ox} \cos \varphi + E_{oy} \cos \delta \sin \varphi \\ a \sin \delta_o &= E_{oy} \sin \delta \sin \varphi \\ b \cos \delta_o &= E_{oy} \sin \delta \cos \varphi \\ b \sin \delta_o &= E_{ox} \sin \varphi - E_{oy} \cos \delta \cos \varphi \end{aligned}$$

În urma efectuării unor calcule asupra acestui set de 4 ecuații vom obține următorul sistem de două ecuații cu două necunoscute,  $a$  și  $b$ :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= E_{ox}^2 + E_{oy}^2 \\ ab &= E_{ox}E_{oy} \sin \delta \end{aligned}$$

din care se pot determina cele două semiaaxe ale elipsei.

c). Dacă se folosește din nou setul de 4 ecuații, se poate obține următoarea relație:

$$\frac{E_{ox} \cos \varphi + E_{oy} \cos \delta \sin \varphi}{E_{oy} \sin \delta \sin \varphi} = \frac{E_{oy} \sin \delta \cos \varphi}{E_{ox} \sin \varphi - E_{oy} \cos \delta \cos \varphi}$$

de unde se poate determina unghiul  $\varphi$ :

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2E_{ox}E_{oy}}{E_{ox}^2 - E_{oy}^2} \cos \delta$$

**2.10** După cum se constată din ecuația undelor, acestea se propagă pe direcția  $Oz$  cu aceeași frecvență dar sunt defazate cu unghiul  $\pi/4$ . Pentru a găsi starea de polarizare a undei rezultante vom elimina timpul din aceste două ecuații. În acest fel vom găsi locul geometric descis de vârful vectorului intensitate  $\vec{E}$ . Folosim relația trigonometrică:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Ca urmare:

$$\cos[(\omega t - kz) + \delta] = \cos(\omega t - kz) \cos \delta - \sin(\omega t - kz) \sin \delta$$

Folosind expresia:

$$\begin{aligned} E_x &= E \cos(\omega t - kz) \Rightarrow \\ \cos(\omega t - kz) &= \frac{E_x}{E} \\ \sin(\omega t - kz) &= \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E}\right)^2} \end{aligned}$$

Din expresia:

$$E_y = E \cos(\omega t - kz + \delta)$$

rezultă:

$$\cos(\omega t - kz + \delta) = \frac{E_y}{E}$$

Deci,

$$\frac{E_y}{E} = \frac{E_x}{E} \cos \delta - \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E}\right)^2} \sin \delta$$

După rearanjarea expresiei (prin ridicare la pătrat și ordonarea termenilor) rezultă expresia generală:

$$\left(\frac{E_x}{E}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E}\right)^2 - 2 \frac{E_x E_y}{E^2} \cos \delta = \sin^2 \delta$$

care este ecuația unei elipse cu axele îclinate față de sistemul de axe  $xOy$ . Pentru cazul problemei,  $\delta = \frac{\pi}{4}$ , se obține:

$$\left(\frac{E_x}{E}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E}\right)^2 - \sqrt{2} \frac{E_x E_y}{E^2} = \frac{1}{2}$$

care este ecuația unei elipse cu axele îclinate cu unghiul  $\delta = \frac{\pi}{4}$  față de sistemul cartezian de coordonate.

Răspunsul corect este b)

**2.11** Atunci când lumina nepolarizată trece printr-un polarizor, intensitatea ei se înjumătățește:

$$I = \frac{1}{2} I_0$$

Această relație are loc indiferent de orientarea axei de transmitere a polarizorului. Dacă lumina polarizată de intensitate  $I_0$  trece printr-un polarizor cu axa de transmitere orientată sub unghiul  $\varphi$  față de axa de polarizare a luminii atunci intensitatea ei devine:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi$$

În cazul problemei propuse, dacă ar fi existat doar polarizorii 1 și 3 lumina transmisă prin sistem ar fi fost zero deoarece aceștia sunt orientați în cruce (direcțiile de transmitere la  $90^\circ$ ). Pentru că există și polarizorul 2, orientarea fasciculului polarizat de filtrul 1 va devia după axa sa de transmitere a filtrului 2. Astfel, în polarizorul 3 va intra un fascicul sub un unghi de  $45^\circ$  față de axa de polarizare orizontală a acestuia și va ieși un fascicul polarizat

orientat după axa orizontală. Ca urmare lumina transmisă nu poate fi zero. Dacă exprimăm totul în funcție de intensitatea  $I_0$  a radiației incidente, avem:

- după trecerea luminii nepolarizate prin polarizerul 1 ea se polarizează pe direcție verticală și are intensitatea:

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0$$

- după trecerea luminii polarizate prin polarizerul 2 ea se polarizează pe direcția unghiului  $\varphi$  și are intensitatea:

$$I_2 = I_1 \cos^2 \varphi = \left(\frac{1}{2} I_0\right) \frac{1}{2}$$

- după trecerea luminii polarizate prin polarizerul 3 ea se polarizează pe direcție orizontală verticală și are intensitatea:

$$I_3 = I_2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \left(\left(\frac{1}{2} I_0\right) \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2}$$

Ca urmare, intensitatea luminii transmise prin sistemul de polarizori este:

$$I_3 = \frac{1}{8} I_0$$

Răspunsul corect este d)

**2.12** După trecerea prin primul polarizor, lumina nepolarizată se polarizează pe direcția axei polarizerului, intensitatea ei devenind:

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0$$

Conform legii lui Malus, intensitatea luminii polarizate care trece prin unul polarizor cu axa de transmitere orientată sub unghiul  $\varphi$  față de direcția de polarizare a fasciculului incident este:

$$I_2 = I_1 \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 30^\circ = \frac{1}{2} I_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} I_0$$

Răspunsul corect este e)

**2.13** După trecerea prin primul polarizor, lumina nepolarizată se polarizează pe direcția axei polarizerului, intensitatea ei devenind:

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0$$

Conform legii lui Malus, intensitatea luminii polarizate care trece prin un polarizor cu axa de transmitere orientată sub unghiul  $\varphi$  față de direcția de polarizare a fasciculului incident este:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi$$

Ca urmare, intensitățile luminii polarizate după trecerea prin fiecare din cei patru polarizori sunt:

$$\begin{aligned} I_2 &= I_1 \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 30^\circ \\ I_3 &= I_2 \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} I_0 \cos^4 30^\circ \\ I_4 &= I_3 \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} I_0 \cos^6 30^\circ \end{aligned}$$

Ca urmare:

$$\frac{I_4}{I_0} = \frac{1}{2} \cos^6 30^\circ = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^6 = \frac{27}{128}$$

Răspunsul corect este c)

**2.14** Din legile reflexiei și refracției rezultă că la incidentă normală:

$$\begin{aligned} \theta_i &= 0 \Rightarrow \theta'_i = 0 \\ n_1 \sin \theta_i &= n_2 \sin \theta_r \Rightarrow \theta_r = 0 \end{aligned}$$

unde  $\theta'_i$  – unghi de reflexie și  $\theta_r$  – unghi de refracție. Indicii de refracție ai celor două medii sunt:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{c}{v_1} = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 1 \\ n_2 &= \frac{c}{v_2} = \frac{\sqrt{4\epsilon_0 \mu_0}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2 \end{aligned}$$

**2.15 a).** Cazul  $\vec{E} = \vec{E}_\perp \subset (xOy)$

Ecuațiile de continuitate la suprafața de separare dintre cele două medii se referă la componente tangențiale la această suprafață ( $xOy$ ), sau perpendiculare pe planul de incidentă ( $xOz$ ):

$$\begin{aligned} E_\perp + E_{1\perp} &= E_{2\perp} \\ H_x + H_{1x} &= H_{2x} \end{aligned}$$

Dacă vom exprima componentele câmpului magnetic cu ajutorul unghiurilor de incidentă și refracție, vom obține sistemul:

$$\begin{aligned} E_{\perp} + E_{1\perp} &= E_{2\perp} \\ (H_{||} - H_{1||}) \cos i &= H_{2||} \cos r \end{aligned}$$

Vom ține cont în continuare de proprietatea undelor electromagnetice prin care câmpurile electric și magnetic (intensitățile lor) sunt perpendiculare reciproc:

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\vec{s} \times \vec{E}) \rightarrow H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E$$

Asfel, sistemul de ecuații devine:

$$\begin{aligned} E_{\perp} + E_{1\perp} &= E_{2\perp} \\ \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{\perp} - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{1\perp} \right) \cos i &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_{2\perp} \cos r \end{aligned}$$

Pentru a exprima coeficientul Fresnel  $r_{\perp} = \frac{E_{1\perp}}{E_{\perp}}$  vom rezolva sistemul anterior, de unde va rezulta următoarea expresie:

$$r_{\perp} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos i - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos r}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos i + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos r}$$

Pentru determinarea lui  $t_{\perp} = \frac{E_{2\perp}}{E_{\perp}}$  vom folosi același sistem, de unde rezultă:

$$t_{\perp} = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos i}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos i + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos r}$$

b). Cazul  $\vec{E} = \vec{E}_{||} \subset (xOz)$

Ecuațiile de continuitate pentru componentele câmpului electromagnetic vor fi:

$$\begin{aligned} E_{||} \cos i - E_{1||} \cos i &= E_{2||} \cos r \\ H_{\perp} + H_{1\perp} &= H_{2\perp} \end{aligned}$$

Dacă vom exprima componentele magnetice în funcție de cele electrice vom obține următorul sistem de ecuații:

$$\begin{aligned} E_{||} \cos i - E_{1||} \cos i &= E_{2||} \cos r \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{||} + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_{1||} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_{2||} \end{aligned}$$

De unde, prin rezolvare vor rezulta cei doi coeficienți Fresnel:

$$r_{||} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos i - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos r}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos i + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos r}$$

$$t_{||} = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos i}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos i + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos r}$$

Pentru a obține polarizare totală prin reflexie trebuie să punem condiția ca  $r_{||} = 0$ , adică:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos i - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos r = 0$$

Unghiul  $i_{B\perp}$  sub care are loc reflexia se determină din legea Snell-Descartes scrisă pentru aceste medii:

$$\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin i = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \sin r$$

și din condiția:

$$i_{B\perp} + r = \frac{\pi}{2}$$

Din rezolvarea acestor ecuații rezultă:

$$\operatorname{tg} i_{B\perp} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2(\varepsilon_2 \mu_1 - \varepsilon_1 \mu_2)}{\varepsilon_1(\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1)}}$$

Dacă este îndeplinită această condiție, lumina reflectată este polarizată total perpendicular pe planul de incidentă. Pentru cazul mediilor dielectrice  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_o$  se obține expresia cunoscută pentru unghiul Brewster:

$$\operatorname{tg} i_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

**2.16** Vom nota prin  $n_1$  indicele de refracție al aerului, și prin  $n_2$  indicele de refracție al sticlei. Fie  $(r_1, t_1)$  coeficienții Fresnel la suprafața de separare aer-stică, și  $(r_2, t_2)$  coeficienții Fresnel la suprafața de separare stică-aer.

Vom considera numai cazul  $\vec{E} = \vec{E}_{||}$ . Deci, expresia coeficienților Fresnel va fi:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{\operatorname{tg}(i - r)}{\operatorname{tg}(i + r)} \\ r_2 &= \frac{\operatorname{tg}(r - i)}{\operatorname{tg}(r + i)} = -r_1 \\ \rightarrow r_1^2 &= r_2^2 = R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i + r) \cos(i - r)} \\ t_2 &= \frac{2 \sin i \cos r}{\sin(i + r) \cos(r - i)} \\ \rightarrow t_1 t_2 &= T \end{aligned}$$

Din legea de conservare a energiei undelor electromagnetice  $R + T = 1$  va rezulta:

$$t_1 t_2 = 1 - r_1^2 = 1 - r_2^2$$

Același rezultat se obține și pentru cazul  $\vec{E} = \vec{E}_{\perp}$ .

**2.17 a).** Pentru a calcula deviația laterală  $l$  a fasciculului emergent din lama cu fețe plan-paralele față de cel incident, vom exprima această deviație în funcție de grosimea  $d$  a lamei precum și unghiurile  $i$  și  $r$ :

$$l = \frac{d}{\cos r} \sin(i - r)$$

Din legea Snell-Descartes  $\sin i = n \sin r$  se poate calcula unghiul  $r$ ; se introduce apoi în relația pentru determinarea lui  $l$ , care va lua diverse valori corespunzătoare unghiurilor de incidentă  $i$ .

b). Pentru a calcula gradul de polarizare al radiațiilor reflectată, refractată și emergentă din sticlă vom pleca de la definiția intensității unei unde și respectiv a gradului de polarizare:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2 \\ P &= \frac{I_{||} - I_{\perp}}{I_{||} + I_{\perp}} \end{aligned}$$

Deoarece undă incidentă este nepolarizată, conform definiției gradului de polarizare  $\rightarrow E_{i||} = E_{i\perp}$ .

Vom nota prin  $r$  și  $t$  coeficienții Fresnel pentru suprafața aer-stică, și prin  $t'$  coeficientul de transmisie la suprafața stică-aer. Pentru unda reflectată la suprafața aer-stică, gradul de polarizare va avea expresia:

$$P_{reflec} = \frac{r_{\parallel}^2 - r_{\perp}^2}{r_{\parallel}^2 + r_{\perp}^2}$$

Pentru unda transmisă în plăca de stică, gradul ei de polarizare are expresia:

$$P_{trans} = \frac{t_{\parallel}^2 - t_{\perp}^2}{t_{\parallel}^2 + t_{\perp}^2}$$

Componentele câmpului electric sunt diferite în stică:  $E_{t\parallel} = t_{\parallel}E_i$ ;  $E_{t\perp} = t_{\perp}E_i$ .

Gradul de polarizare pentru unda emergentă din placă va avea expresia:

$$P_{emerg} = \frac{|t'_{\parallel}E_{t\parallel}|^2 - |t'_{\perp}E_{t\perp}|^2}{|t'_{\parallel}E_{t\parallel}|^2 + |t'_{\perp}E_{t\perp}|^2} = \frac{T'^2_{\parallel} - T'^2_{\perp}}{T'^2_{\parallel} + T'^2_{\perp}}$$

Se va ține cont în continuare de expresiile coeficienților și respectiv factorilor Fresnel în funcție de unghiurile  $i$  și  $r$  și apoi se poate calcula gradul de polarizare pentru fiecare undă în parte.

**2.18** Efectele de interferență sunt caracteristice tuturor tipurilor de unde. Obținerea unei figuri de interferență cu o distribuție staționară specifică a densităților de flux, caracterizată de maxime și minime (franje de interferență) este condiționată de proprietatea de coerență. Două unde sunt coerente dacă au aceeași frecvență și o diferență de fază constantă în timp.

Dacă sursa inițială este monocromatică, așezarea unui paravan opac prevăzut cu două fante înguste în calea undei, transformă undele emergente prin fantă în unde coerente, deoarece provin de la aceeași sursă și au o diferență de fază constantă în orice punct din câmpul de interferență (zona în care se suprapun).

În cazul luminii albe lucrurile sunt mai complicate, în sensul că emisarea luminii este realizată la nivel microscopic (de către dipoli electrici), procesul de emisie este individual și total necorelat. Lumina este emisă în trenuri de unde care durează un timp limitat (circa  $10^{-8}s$ ). Se pot pune însă în evidență franje de interferență și în acest caz dacă se așează în fața sursei un paravan opac suplimentar, prevăzut cu o fantă foarte îngustă. Aceasta va asigura condiția ca trenurile de undă ce ajung la nivelul fantelor următoare să provină de la o aceeași regiune din apropierea sursei și deci să fie coerente spațial și temporal. Schimbarea fazei la nivelul primei fante atrage după sine și schimbarea fazei la nivelul fantelor următoare astfel că tabloul de interferență se

păstrează stacionar.

Dacă deschiderea fantei așezată în calea luminii albe se mărește treptat, maximele de interferență scad ca valoare iar minimele nu mai sunt nule, până când, pentru o anumită deschidere nu mai există nici o diferență între maximele și minimele de interferență adică nu se mai disting franjele, luminarea fiind practic uniformă. Undele care interferă trec de la limita de coerență totală la cea de incoerență totală. Orice situație realizată între aceste limite corespunde coerenței parțiale.

Răspunsul corect este e)

**2.19** Diferența de drum dintre undele care interferă este:

$$\Delta r = \frac{dx_m}{D}$$

unde, s-a notat distanța dintre cele două surse cu  $d$ . Impunem condiția de minim de interferență considerând că minimul al 10-lea corespunde lui  $m = 9$ :

$$\Delta r = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$$

Se obține:

$$\begin{aligned} \frac{dx_{10}}{D} &= (2 \cdot 9 + 1) \frac{\lambda}{2} \\ d &= D \frac{\lambda}{2} \frac{19}{x_{10}} = 2m \frac{589 \times 10^{-9}m}{2} \frac{19}{7,26 \times 10^{-3}m} \\ &= 1,54mm \end{aligned}$$

Răspunsul corect este d)

**2.20** Intensitatea undei rezultante în planul de interferență pentru fante înguste ( $d \ll \lambda$ ) este:

$$I = I_{\max} \cos^2 \frac{k\Delta r}{2} = I_{\max} \cos^2 \left( \frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta \right)$$

Deoarece  $d \ll D$ :

$$\sin \theta \simeq \tan \theta = \frac{y}{D}$$

unde  $y$  – distanța față de centrul ecranului unde este îndeplinită și condiția de maxim de interferență ( $\Delta r = 0$ ) adică se obține maximul central. Se obține:

$$\frac{I}{I_{\max}} = \cos^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda D} y \right)$$

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\lambda D}{\pi d} \arccos \sqrt{\frac{I}{I_{\max}}} \\
 y &= \frac{600 \times 10^{-7} \text{cm} \times 120 \text{cm}}{\pi \times 0,120 \text{cm}} \frac{\pi}{3} \\
 y &= 0,02 \text{cm}
 \end{aligned}$$

Răspunsul corect este b)

**2.21** Dacă se ridică sursa pe distanță  $y$  atunci apare o diferență de drum suplimentară, înaintea planului fantelor, pentru undele care interferă în orice punct  $P$ , de pe ecran.

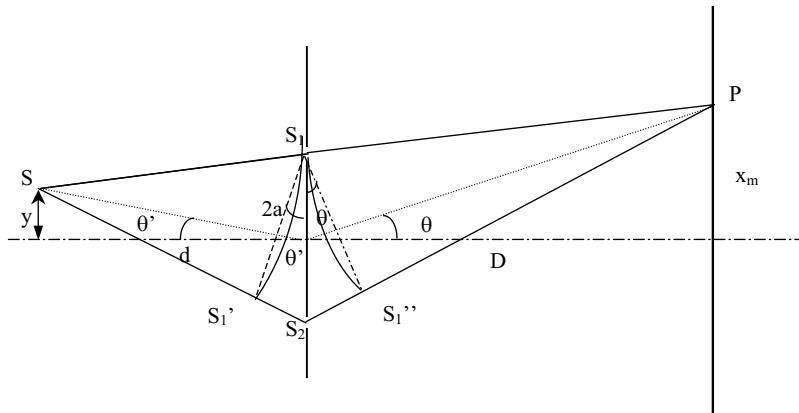


Fig.2.21.r

$$\begin{aligned}
 \Delta r &= (SS_2 + S_2P) - (SS_1 + S_1P) \\
 &= (SS_2 - SS_1) + (S_2P - S_1P)
 \end{aligned}$$

Deoarece se consideră că distanța dintre planul surselor și ecran, respectiv  $S$  este foarte mare, în urma efectuării acestor diferențe prin considerante geometrice (prin așezarea vârfului compasului în punctele  $P$ , respectiv  $S$  și delimitarea punctelor  $S'_1$  și  $S'_2$ ) se obține:

$$\begin{aligned}
 SS_1 &= SS'_1 \\
 SS_2 &= SS'_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta r &= S'_1 S_2 + S_2 S'_2 \\
&\approx 2a \sin \theta' + 2a \sin \theta \\
&\approx 2a \tan \theta' + 2a \tan \theta \\
&\simeq 2a \left( \frac{y}{d} + \frac{x_m}{D} \right)
\end{aligned}$$

Condiția de maxim de interferență conduce la:

$$2a \left( \frac{y}{d} + \frac{x_m}{D} \right) = m\lambda, m = 0, 1, 2, \dots$$

Punctele situate la distanța  $x_m$  sunt puncte de maxim de interferență, adică:

$$x_m = \left( m \frac{\lambda}{2a} - \frac{y}{D} \right) d$$

Interfranja este distanța dintre două maxime (minime) consecutive, ca urmare:

$$\begin{aligned}
i &= x_m - x_{m-1} \\
&= \left( m \frac{\lambda}{2a} - \frac{y}{D} \right) d - \left[ (m-1) \frac{\lambda}{2a} - \frac{y}{D} \right] d \\
&= \frac{\lambda d}{2a}
\end{aligned}$$

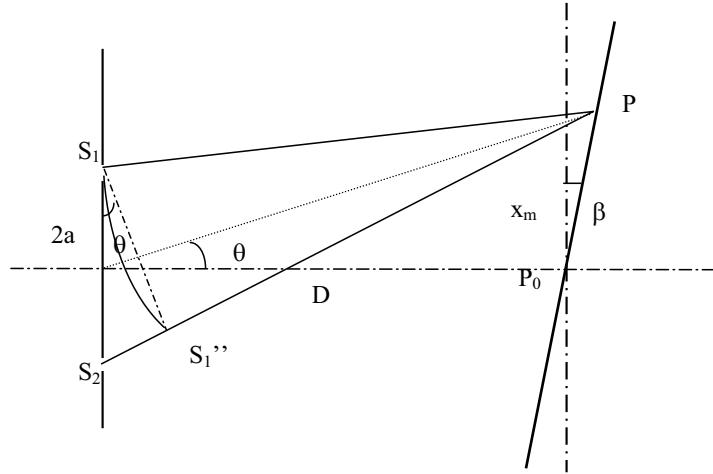
Maximul central se găsește din condiția ca diferența de drum dintre undele care interferă să fie zero ( $m = 0$ ):

$$\begin{aligned}
\Delta r &= 0 \Rightarrow 2a \left( \frac{y}{d} + \frac{x_0}{D} \right) = 0 \\
x_0 &= -\frac{D}{d} y
\end{aligned}$$

Ca urmare, interfranja rămâne neschimbată ca valoare iar franja centrală coboară pe distanța  $\frac{D}{d}y$ .  
Răspunsul corect este a)

**2.22** Dacă considerăm, pentru simplitate franja centrală (luminoasă) în punctul  $P_o$ , și următoarea franjă luminoasă în punctul P, se observă că interfranja se mărește.

$$i' = \frac{i}{\cos \beta}$$



**Fig.2.22.r**

unde  $i$  – interfranja pentru poziția verticală a ecranului, adică:

$$i = \frac{\lambda D}{2a}$$

Răspunsul corect este b)

**2.23** Diferența de drum dintre cele două raze este:

$$\begin{aligned}\Delta r &= (SI + IE) - SE \\ &= (S'I + IE) - SE \\ &= S'E - SE\end{aligned}$$

Din diferența geometrică a celor două drumuri, găsită prin așezarea compasului cu vârful în E și delimitarea segmentului  $EP = ES$  se obține:

$$\Delta r = S'P + EP - ES = S'P$$

Din triunghiul dreptunghic  $SS'P$  se observă că:

$$\Delta r = 2d \sin \theta$$

Pentru unghiuri mici, ținând seama și de dimensiunile corespunzătoare triunghiu lui  $OEC$  rezultă :

$$\sin \theta \simeq \operatorname{tg} \theta = \frac{x_k}{D}$$

Dacă în punctul  $C$  se află un maxim de interferență:

$$\Delta r = 2d \frac{x_k}{D} = k\lambda, k = 0, 1, 2..$$

Adică:

$$x_k = \frac{D}{2d} k \lambda, k = 0, 1, 2..$$

Maximul următor, de ordin  $k + 1$ , se găsește în poziția:

$$x_{k+1} = \frac{D}{2d} (k + 1) \lambda, k = 0, 1, 2..$$

De unde rezultă valoarea interfranjei:

$$i = x_{k+1} - x_k = \frac{D}{2d} \lambda$$

Dacă se ridică sursa pe distanță  $h$  valoarea noii interfranje devine:

$$i' = \frac{D}{2(d + h)} \lambda$$

Raportul interfranjelor devine:

$$\frac{1}{n} = \frac{i'}{i} = \frac{d}{d + h}$$

și ne permite să calculăm distanța de la sursă la oglindă:

$$d = \frac{h}{n - 1}$$

Ca urmare, valoarea lungimii de undă este:

$$\lambda = \frac{2i}{D} \frac{h}{n - 1}$$

Răspunsul corect este a)

**2.24** Viteza de propagare a luminii într-un mediu caracterizat de indicele de refracție  $n$  este:

$$v = \frac{c}{n}$$

Raportul vitezelor de propagare ale luminii în mediile caracterizate de indicii de refracție  $n_1$  și  $n_2$  este:

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{v_2} &= \frac{c/n_2}{c/n_1} = \frac{n_2}{n_1} \\ &= \frac{1,461}{1,361} = 1,07 \end{aligned}$$

Răspunsul corect este b)

**2.25** Primul maxim de difracție se obține din condiția:

$$\begin{aligned} n &= 1 \Rightarrow a \sin \theta = \lambda \\ \sin \theta &= \frac{\lambda}{a} \end{aligned}$$

Pentru ca el să coincidă cu cel de-al  $m - lea$  maxim de interferență, trebuie ca:

$$\begin{aligned} d \sin \theta &= m\lambda \\ \sin \theta &= \frac{m\lambda}{d} \end{aligned}$$

Identificând cele două expresii ale lui  $\sin \theta$ , se obține:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{a} &= \frac{m\lambda}{d} \\ m &= \frac{d}{a} = \frac{0,2nm}{0,05nm} = 4 \end{aligned}$$

Răspunsul corect este c)

**2.26 a).** Fie o pană de sticlă formată din fețele  $OA$  și  $OB$  (Fig.2.26.r). La iluminarea penei în poziția 1 se formează un anumit sistem de franje. În timpul deplasării lamei  $OB$ , franjele se deplasează către vârful penei, astfel încât franja din poziția I corespunzătoare grosimii  $d$  a penei în poziția 1 se va găsi în poziția II corespunzătoare aceleleași grosimi  $d$  a penei, pentru poziția 2.

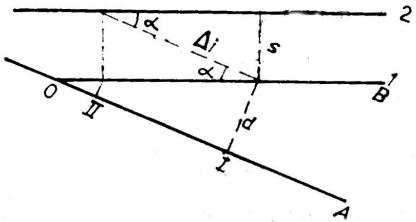


Fig.2.26.r

Deplasarea  $\Delta i$  a franjei se poate măsura. Unghiul  $\alpha$  fiind cunoscut, rezultă că deplasarea lamei  $OB$  este dată de relația:

$$s = \Delta i \sin i \simeq \alpha \Delta i$$

b). Condiția de obținere a două maxime succesive se va scrie:

$$\begin{aligned} 2nd_m - \lambda/2 &= 2m\lambda/2 \\ 2nd_{m+1} - \lambda/2 &= 2(m+1)\lambda/2 \end{aligned}$$

De unde, pentru unghiuri  $\alpha$  mici se poate exprima diferența dintre cele două maxime succesive:

$$\begin{aligned} d_{m+1} - d_m &= \frac{\lambda}{2n} \approx i\alpha \\ \rightarrow i &= \frac{\lambda}{2n\alpha} \end{aligned}$$

Deoarece deplasarea minimă a franjei ce poate fi apreciată este:

$$(\Delta i)_{min} = \frac{i}{4}$$

atunci deplasarea minimă corespunzătoare feței mobile va fi:

$$s_{min} = \alpha(\Delta i)_{min} = \alpha \frac{i}{4} = \frac{\lambda}{8n}$$

c). Din expresia interfranjei  $i = \frac{\lambda}{2n\alpha}$  se observă că pentru cazul când unghiul scade interfranja va crește până când  $\Delta i = l$  (lungimea penei). Rezultă

atunci:

$$\alpha_{min} = \frac{\lambda}{2ni} = \frac{\lambda}{8nl}$$

Această ultimă relație exprimă condiția de paralelism optic dintre cele două suprafete.

d). Se pot evidenția deformațiile unei suprafete dacă se ia ca etalon o altă suprafață și se măsoară interfranja  $i$ ; denivelările mai mici decât  $\lambda/8$  nu pot fi măsurate.

**2.27** Fie planul  $xOz$  planul de incidentă; vectorul câmp electric este perpendicular pe planul de incidentă și propagă pe direcția  $Oz$ . La suprafața de separare dintre aer și oglindă are loc o reflexie totală cu introducerea unui defazaj egal cu  $\pi$ ; în urma interferenței dintre unda incidentă și reflectată se formează o undă staționară. Expresiile undei electrice incidente, reflectate și respectiv rezultante vor fi:

$$\begin{aligned} E_{inc} &= E_o \cos(\omega t - kz) \\ E_{reflec} &= E_o \cos(\omega t + kz + \pi) \\ E_{rez} &= 2E_o \cos(\omega t + \pi/2) \cos(kz - \pi/2) \\ &= 2E_o \cos(\omega t + \pi/2) \sin kz \end{aligned}$$

Se observă că unda rezultantă, undă staționară este formată din noduri ( $E_{rez} = 0$ ) și ventre ( $E_{rez} = 2E_o$ ).

Pozitia nodurilor se obtine din condiția:

$$\sin kz = 0 \rightarrow kz = m\pi \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

de unde rezultă

$$z_m^{noduri} = m \frac{\lambda}{2}$$

Observație: pentru  $m = 0 \rightarrow z = 0$  ceea ce inseamnă că primul nod (minim pentru  $\vec{E}$ ) se obține chiar pe suprafața oglinzii metalice. Pentru  $m = 1 \rightarrow z_1 = \frac{\lambda}{2}$ , deci distanța dintre două noduri consecutive este  $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$ .

Pozitia ventrelor se obtine din condiția:

$$\sin kz = 1 \rightarrow kz = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$$

de unde rezultă

$$z_m^{ventre} = (2m + 1) \frac{\lambda}{4}$$

observație: pentru  $m = 0 \rightarrow z_o = \frac{\lambda}{4}$ , iar pentru  $m = 1 \rightarrow z_1 = \frac{3\lambda}{4}$  deci, distanța dintre două ventre consecutive va fi  $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$ .

b). Pentru a afla câmpul magnetic rezultant vom utiliza relația 2.1.17 astfel încât vo obține:

$$\begin{aligned} H_{rez} &= H_{inc} + H_{refl} = \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}} E_o \cos(\omega t - kz) + \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}} E_o \cos(\omega t + kz) \\ &= 2 \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}} E_o \cos \omega t \cos kz \end{aligned} \quad (2.3.96)$$

Pentru a determina poziția nodurilor câmpului magnetic ( $H = 0$ ) vom pune condiția:

$$\begin{aligned} \cos kz &= 0 \rightarrow kz = (2m + 1)\frac{\pi}{2} \\ \rightarrow z_m^{noduri} &= (2m + 1)\frac{\lambda}{4} \end{aligned}$$

Pentru  $m = 0 \rightarrow z_o^{nod} = \frac{\lambda}{4}$ , deci primul nod se formează la distanța  $\Delta x = \frac{\lambda}{4}$  de oglinda metalică.

Pentru a determina poziția ventrelor ( $H = 2\sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}} E_o$ ) vom pune condiția:

$$\begin{aligned} \cos kz &= 1 \rightarrow kz = m\pi \\ \rightarrow z_m^{ventru} &= m\frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

Se observă că, pentru  $m = 0 \rightarrow z_o = 0$ , deci primul ventru se formează pe suprafața oglinziei metalice. Pentru  $m = 1 \rightarrow z_1 = \frac{\lambda}{2}$ , deci  $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$ .

c). Dacă vom ține cont de definiția vectorului Poynting pe care-l vom media:

$$\begin{aligned} <\vec{S}> &= <\vec{E}_{rez} \times \vec{H}_{rez}> = \\ <2E_o \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \sin kz \cdot 2E_o \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}} \cos \omega t \cos kz> &= \\ E_o^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}} <\sin 2\omega t \sin 2kz> &= 0 \end{aligned}$$

e). Vectorul electric  $\vec{E}$  are nodul pe suprafața oglinziei, deci un minim, iar innegrirea emulsiei are loc atunci când există un ventru al undei staționare, ceea ce corespunde unui ventru al câmpului electric.

f). Primul maxim apare la distanța  $d = \frac{\lambda}{4} = 125 nm$ .

g). Dacă vom nota cu  $d'$  distanța dintre un nod și un ventru de-a lungul suprafeței planului, atunci:

$$\cos \varphi = \frac{d}{d'}$$

**2.28 a).** Dispersia unghiulară este dată de formula:

$$D_\alpha = \frac{d\alpha}{d\lambda}$$

unde  $\alpha$  reprezintă unghiul de incidentă. Deoarece diferența de drum optic dintre două fascicule care interferă și determină apariția maximelor de intensitate, este:

$$\Delta l = 2d \cos \alpha = k\lambda$$

prin diferențierea acestei relații la  $\alpha$  și  $\lambda$  se obține:

$$-2d \sin \alpha d\alpha = kd\lambda \rightarrow D_\alpha = -\frac{k}{2d \sin \alpha} \approx \frac{1}{\lambda \alpha}$$

b). Pentru a determina domeniul dispersiv (constanta aparatului) vom pleca de la exprimarea distanței unghiulare dintre inelele din ordine vecine corespunzătoare aceleiași lungimi de undă, prin derivarea la  $\lambda$  și  $k$  a condiției de maxim:

$$-2d \sin \alpha \Delta \alpha = \lambda \Delta k$$

Deoarece  $\Delta k = 1$  rezultă

$$\Delta \alpha = -\frac{\lambda}{2d \sin \alpha}$$

Pe de altă parte, utilizând condiția de maxim de interferență precum și expresia derivată a ei la  $\alpha$  și  $\lambda$ , se obține:

$$\Delta \alpha = -\frac{\Delta \lambda}{\lambda \operatorname{tg} \alpha}$$

Prin egalarea celor două expresii ale lui  $\Delta \alpha$  se găsește domeniul dispersiv al aparatului:

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda^2}{2d \cos \alpha}$$

c). Se poate alege drept criteriu de rezoluție spectrală, distanța dintre maximele de intensitate egală cu semilărgimea unei franje de interferență a interferometrului.

Intensitatea luminii transmise este dată de relația Airy:

$$I_t = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \varphi/2} I_o$$

unde  $I_o$  este intensitatea incidentă iar  $\varphi$  este diferența de fază introdusă de interferometru, iar  $R$  este factorul de reflexie. Pentru  $\varphi = \varphi_o$  intensitatea  $I = \frac{1}{2} I_o$  (semilățimea franjelor) care, conform formulei Airy devine:

$$\frac{1}{2} I_o = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \varphi_o/2} I_o$$

de unde se obține:

$$\sin \varphi_o/2 = \frac{1-R}{2\sqrt{R}}$$

Diferența de fază dintre două fascicule care interferă este:

$$\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} d \cos \alpha$$

Puterea de rezoluție este definită:

$$Rez \equiv \frac{\varphi}{\delta\varphi} = \left| \frac{\lambda}{\delta\lambda} \right|$$

Tinând cont de formula Airy precum și de ordinul maxim al spectrului  $m = \frac{2d}{\lambda}$  rezultă:

$$Rez = \frac{4\pi\sqrt{R} d}{1-R} \frac{d}{\lambda}$$

d). Puterea de rezoluție poate fi scrisă sub forma:

$$Rez = mN$$

unde  $N$  reprezintă numărul efectiv de fascicule (numărul de fascicule de lumină având o intensitate care asigură aceeași putere de rezoluție ca și succesiunea infinită de fascicule, de intensitate descrescătoare).

$$N = \frac{2\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

**2.29** a). Maximele principale de interferență se obțin din condiția:

$$d \sin \alpha = m\lambda$$

unde  $d = \frac{1}{n}$  este constanta rețelei. Ordinul maxim de difracție se obține pentru pentru  $\sin \varphi = 1$ :

$$m_{max} = \frac{\sin \varphi_{max}}{n} = \frac{1}{n\lambda}$$

b). Din ecuațiile următoare rezultă cele două unghiuri corespunzătoare maximului de ordin 1 și respectiv 2:

$$\begin{aligned}\sin \varphi_1 &= n\lambda \rightarrow \varphi_1 = \arcsin(n\lambda) \\ \sin \varphi_2 &= 2n\lambda \rightarrow \varphi_2 = \arcsin(2n\lambda)\end{aligned}$$

c). Pentru a obține expresia dispersiei unghiulare vom diferenția condiția de maxim:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{nm}{\cos \varphi} = \frac{tg \varphi}{\lambda}$$

Deci,

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_1}{d\lambda} &= 1.7 \text{ min/nm} \\ \frac{d\varphi_2}{d\lambda} &= 4 \text{ min/nm}\end{aligned}$$

d). Puterea de rezoluție în ordinul 1 este:

$$\left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right)_1 = N = nL = 2.5 \cdot 10^4$$

Rețeaua poate rezolva în ordinul 1 două linii separate prin  $\Delta\lambda = 0.02 \text{ nm}$ , iar intervalul spectral liber  $\delta\lambda$  (definit ca diferența dintre două lungimi de undă pentru care pozițiile maximelor de ordine diferite se suprapun) va fi:

$$\delta\lambda = \lambda = 500 \text{ nm}$$

### 3 Originile mecanicii cuantice

#### 3.1 Breviar

**Radiația termică** este radiația emisă de toate corpurile încălzite la o anumită temperatură și care transportă energie sub formă de căldură.

Mărimile fizice caracteristice ale radiației termice:

1. **Fluxul energetic**  $\Phi$  se definește prin raportul dintre energia radiată  $dE$  și timpul corespunzător  $dt$ .

$$\Phi = \frac{dE}{dt} \quad (3.1.1)$$

Unitatea de măsură în sistemul internațional (*SI*) de unități este Wattul, deci are dimensiuni de putere:  $[\Phi]_{SI} = W$ .

Deoarece fluxul energetic cuprinde radiații cu diferite lungimi de undă și depinde și de temperatură, se definește **fluxul spectral**  $\varphi(\lambda, T)$ :

$$\Phi(T) = \int_0^{\infty} \varphi(\lambda, T) d\lambda \quad (3.1.2)$$

2. **Radianța energetică**  $R$  este definită prin raportul dintre fluxul energetic emis de o suprafață elementară:

$$R = \frac{d\Phi}{dS} \quad [R]_{SI} = \frac{W}{m^2} \quad (3.1.3)$$

Se poate introduce **puterea spectrală de emisie**  $r(\lambda, T)$  care este funcția de repartiție a energiei radiante de o suprafață aflată la temperatura  $T$ , în funcție de  $\lambda$ :

$$R(\lambda) = \int_0^{\infty} r(\lambda, T) d\lambda \quad (3.1.4)$$

3. **Puterea de absorbție** a unui corp se definește ca raportul dintre fluxul radiației absorbite și fluxul radiației incidente:

$$A = \frac{\Phi_{abs}}{\Phi_{inc}} \quad (3.1.5)$$

iar **puterea spectrală de absorbție**:

$$a(\lambda, T) = \frac{\varphi_{abs}(\lambda, T)}{\varphi_{inc}(\lambda, T)} \quad (3.1.6)$$

**4. Densitatea volumică a energiei radiației**  $w(T)$  este definită ca fiind energia câmpului electromagnetic  $dW$  ce străbate elementul de volum  $dV$ :

$$w = \frac{dW}{dV} \quad [w]_{SI} = J/m^3 \quad (3.1.7)$$

Se poate introduce **densitatea volumică spectrală a energiei**  $\rho(\lambda, T)$  prin relația:

$$w(T) = \int_0^\infty \rho(\lambda, T) d\lambda \quad (3.1.8)$$

**5. Intensitatea radiației termice**  $I$  (intensitatea energetică) ce se propagă în interiorul unghiului solid  $d\Omega$  dintr-o incintă se definește prin relația:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega} \quad (3.1.9)$$

sau, cu ajutorul densității volumice a energiei radiației:

$$dI = \frac{w c}{4\pi} d\Omega \quad (3.1.10)$$

unde  $c$  este viteza luminii în vid. Fluxul energetic emis de elementul de arie  $\Delta S$  aflat pe suprafața incintei, sub unghiul  $\theta$  și în interiorul unghiului solid  $d\Omega$  este:

$$d\Phi = dI \Delta S \cos \theta = \frac{wc}{4\pi} \Delta S \cos \theta d\Omega = \frac{wc}{4\pi} \Delta S \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.1.11)$$

Fluxul total emis de elementul de arie  $\Delta S$ , în toate direcțiile va fi:

$$\Phi = \frac{wc}{4\pi} \Delta S \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{wc}{4} \Delta S \quad (3.1.12)$$

Dacă se ține cont de definiția radianței energetice (3.1.3) vom obține:

$$R(T) = \frac{c}{4} w(T) \rightarrow r(\lambda, T) = \frac{c}{4} \rho(\lambda, T) \quad (3.1.13)$$

**6. Strălucirea energetică**  $B$  reprezintă raportul dintre intensitatea energetică  $dI$  a unei suprafete  $dS$  din jurul unui punct și aria  $dS \cos \alpha$  a proiecției acestei suprafete pe un plan perpendicular pe direcția de unghi  $\theta$ :

$$B = \frac{dI}{dS \cos \theta} \quad (3.1.14)$$

Legile clasice ale radiației termice sunt următoarele:

- 1. Legea lui Kirchhoff** arată că, raportul dintre puterea spectrală de emisie  $r(\lambda, T)$  și puterea spectrală de absorbție  $a(\lambda, T)$  este o funcție numai de lungimea de undă  $\lambda$  și de temperatură, și este independentă de natura corpului emițător:

$$\frac{r(\lambda, T)}{a(\lambda, T)} = f(\lambda, T) \quad (3.1.15)$$

Se definește **corpul negru** ca fiind corpul ce absoarbe toate radiațiile incidente, independent de  $\lambda$  și de  $T$ , deci:

$$a(\lambda, T) = 1 \quad (3.1.16)$$

Densitatea volumică spectrală de energie poate fi exprimată și în funcție de frecvență respectiv de pulsație:

$$\rho(\lambda, T)d\lambda = \rho(\nu, T)d\nu = \rho(\omega, T)d\omega \quad (3.1.17)$$

- 2. Legea Stefan-Boltzmann** stabilește o relație între radianța energetică  $R$  și temperatura  $T$ , relație valabilă însă numai pentru corpul negru:

$$R(T) = \sigma T^4 \quad (3.1.18)$$

Această formulă a fost dedusă în cadrul termodinamicii, iar constanta  $\sigma$  are valoarea  $\sigma = 5.672 \cdot 10^{-8} W/m^2 K^{-4}$  și a fost dedusă în cadrul fizicii cuantice.

- 3. Legile lui Wien** se referă la expresia densității volumice spectrale de energie în funcție de frecvența radiației. Wien a demonstrat, în 1893 că densitatea volumică spectrală de energie este dată de relația:

$$\rho(\lambda, T) = \nu^3 F(\nu/T) \quad (3.1.19)$$

unde  $F(\nu/T)$  este o funcție de argumentul indicat, dar forma explicită a acestei funcții nu poate fi dedusă în cadrul fizicii clasice.

Dacă se derivează această ultimă relație la  $\lambda$  și, ținând cont de (3.1.15) vom obține:

$$\frac{\partial \rho(\lambda, T)}{\partial \lambda} |_{\lambda=\lambda_m} = 0 \rightarrow \lambda_m T = b \quad (3.1.20)$$

ceea ce reprezintă **legea de deplasare Wien**. Constanta  $b$  poate fi determinată numai din datele experimentale; s-a obținut  $b = 0.28978 \cdot 10^{-2} \text{ mK}$ . Mărimea  $\lambda_m$  reprezintă lungimea de undă pentru care  $\rho(\lambda, T)$  este maximă. În 1896 Wien a propus următoarea formulă empirică pentru densitatea volumică spectrală de energie a radiației termice a corpului negru:

$$\rho(\nu, T) = c_1 \nu^3 e^{-c_2 \nu/T} \quad (3.1.21)$$

unde  $c_1$  și  $c_2$  sunt constante care se determină pe baza comparației cu datele experimentale. Această lege descrie densitatea volumică spectrală dar, s-a constatat că este **valabilă numai la frecvențe mari ale radiației termice**.

**4. Formula Rayleigh-Jeans** pentru densitatea volumică spectrală:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT \quad (3.1.22)$$

**formulă valabilă la frecvențe relativ mici ale radiației termice.**

Deci, în cadrul fizicii clasice nu se poate obține o formulă unitară pentru densitatea volumică spectrală de energie a radiației termice în concordanță cu datele experimentale.

**5. Ipoteza și formula Planck** - în 1900 fizicianul german Planck face **ipoteza epocală**, ipoteză ce reprezintă începutul fizicii cuantice, și anume: energia undelor staționare din interiorul incintei aflate la temperatura  $T$  este **cuantificată**, adică poate lua numai anumite valori discrete:

$$E_n = n\varepsilon \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.1.23)$$

iar  $\varepsilon = h\nu$  este cuanta de energie ( $h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ). Formula lui Planck pentru radiația termică a corpului negru se poate exprima sub formele:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (3.1.24)$$

$$\rho(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (3.1.25)$$

$$\rho(\omega, T) = \frac{h\omega^3}{2\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{h\omega/2\pi kT} - 1} \quad (3.1.26)$$

și sunt în corcondanță cu datele experimentale.

**Efectul fotoelectric extern** constă în absorbția unui foton de către electronii din metal. Pe baza acestei ipoteze se obține legea conservării energiei:

$$mv^2/2 = h\nu - E_{extr} - \Delta E \quad (3.1.27)$$

unde  $\Delta E$  este energia pierdută de electroni prin ciocniri până ajung la suprafața metalului, iar  $E_{extr}$  reprezintă energia de extracție, energia minimă pentru ca electronii să fie scoși din metal. Pentru electronii care nu pierd energie prin ciocniri ( $\Delta E = 0$ ) se obține cunoscuta formulă a lui Einstein pentru efectul fotoelectric extern:

$$mv_{max}^2/2 = h\nu - E_{extr} \quad (3.1.28)$$

Pentru  $U = U_o$  (tensiunea de stopare) avem:

$$mv_{max}^2/2 = eU_o = h\nu - E_{extr} \rightarrow U_s = \frac{h}{e}\nu - \frac{E_{extr}}{e} = \frac{h}{e}\nu - \varphi_{extr} \quad (3.1.29)$$

unde  $\varphi_{extr} = \frac{E_{extr}}{e}$  reprezintă potențialul de extracție pentru fotocatodul considerat.

**Efectul Compton** - Procesul de împrăștiere a radiațiilor  $X$  este analizat de Compton ca un proces de interacție între radiațiile  $X$  și electronii corpului, în urma căruia fotonul (radiația X) este difuzat sub un unghi  $\theta$  iar electronul (de recul) este împrăștiat sub un unghi  $\varphi$  cu viteza  $\vec{v}$  (vezi figura). S-a considerat că electronul se află în repaus înainte de ciocnire fiind caracterizat de masa de repaus  $m_o$ .

Legile de conservare pentru impuls și energie aplicate acestui proces (relativist) conduc la următoarele relații:

$$h\nu_o + m_o c^2 = h\nu + mc^2 \quad (3.1.30)$$

$$\frac{h\nu_o}{c} = \frac{h\nu}{c} \cos \theta + mv \cos \varphi \quad (3.1.31)$$

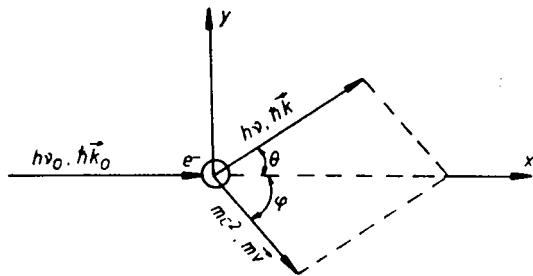
$$0 = \frac{h\nu}{c} \sin \theta - mv \sin \varphi \quad (3.1.32)$$

Rezolvarea acestui sistem de ecuații conduce la expresia variației lungimii de undă  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o$ :

$$\Delta\lambda = 2 \frac{h}{m_o c} \sin^2 \theta / 2 \quad (3.1.33)$$

Dacă se notează

$$\lambda_C = \frac{h}{m_o c} = 0.0242 \text{ A} \quad (3.1.34)$$



**Schema vectorială a procesului de interacție**

cunoscută sub denumirea de **lungime de undă Compton** pentru  $\theta = \pi/2$ , atunci variația  $\Delta\lambda$  se poate scrie:

$$\Delta\lambda = 2\lambda_C \sin^2 \theta / 2 \quad (3.1.35)$$

Cu ajutorul același sistem de ecuații se poate calcula de asemenea și energia electronului de recul  $E_e$ :

$$E_e = mc^2 - m_o c^2 = h\nu_o - h\nu = h\Delta\nu = h\nu_o \frac{\Delta\nu}{\nu_o} \quad (3.1.36)$$

$$\frac{E_e}{h\nu_o} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o + \Delta\lambda} = \frac{2\lambda_C \sin^2 \theta / 2}{\lambda_o + 2\lambda_C \sin^2 \theta / 2} \quad (3.1.37)$$

**Spectre atomice; structura atomilor** - ansamblul lungimilor de undă ale radiațiilor monocromatice corespunzătoare unei unde electromagnetice formează **spectrul** undei considerate.

În 1885, fizicianul elvețian Balmer a stabilit, empiric, că lungimile de undă ale liniilor spectrale emise, în domeniul vizibil, de către **atomii de hidrogen** pot fi calculate cu formula:

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad m = 3, 4, 5, \dots \quad (3.1.38)$$

unde  $\tilde{\nu}$  reprezintă numărul de undă, adică numărul lungimilor de undă cuprinse într-o anumită unitate de lungime. Mărimea  $R$  este **constanta Rydberg** și

are valoarea experimentală:

$$R_{exp,H} = 1.0967776 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (3.1.39)$$

Ansabul liniilor spectrale ale căror lungimi de undă se pot calcula cu ajutorul unei formule formează o **serie spectrală**. Astfel, pentru atomul de hidrogen se pot calcula seriile spectrale ale acestuia cu formula:

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (3.1.40)$$

Seriile spectrale ale atomului de hidrogen sunt:

- **Seria Lyman**,  $n = 1, m > 1$  - domeniul ultraviolet
- **Seria Balmer**,  $n = 2, m > 2$  - domeniul vizibil
- **Seria Paschen**,  $n = 3, m > 3$  - domeniul infraroșu
- **Seria Brackett**,  $n = 4, m > 4$  - domeniul infraroșu îndepărtat
- **Seria Pfund**,  $n = 5, m > 5$  - domeniul infraroșu mai îndepărtat

Conform formulei lui Balmer (3.1.40) numărul de undă  $\tilde{\nu}$  se poate scrie ca o diferență de doi **termeni spectrali**:

$$\tilde{\nu}_{mn} = T_n - T_m = \frac{R}{n^2} - \frac{R}{m^2} \quad (3.1.41)$$

Pornind de la această relație, Ritz a enunțat **principiul de combinație** care afirmă că: diferența a două numere de undă aparținând aceleiași serii spectrale reprezintă, de asemenea, un număr de undă a unei linii spectrale care poate fi emisă de atom, dar care aparține altrei serii spectrale.

**Modelul nuclear al atomului** - fizicianul englez Rutherford a efectuat, în 1911, experiențe de împrăștiere a particulelor  $\alpha$  pe foițe metalice de aur (Au) în scopul obținerii de informații referitoare la structura atomului. Concluziile au condus la **modelul planetar** sau **modelul nuclear** al atomului propus de către Rutherford.

Se poate demonstra, prin calcule, că dacă  $N$  este numărul de particule  $\alpha$  incidente pe unitatea de arie a suprafeței difuzante, iar  $dN_\theta$  este numărul de particule  $\alpha$  deviate sub un unghi cuprins între  $\theta$  și  $\theta + d\theta$  și în unghiul solid

$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ , atunci este valabilă următoarea relație:

$$\frac{dN_\theta}{N} = d\sigma = \frac{1}{64} \left( \frac{Ze^2}{\pi \varepsilon_o E} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \theta/2} \quad (3.1.42)$$

unde  $E$  este energia particulei  $\alpha$  incidente;  $Z$  este numărul de ordine al atomului difuzant;  $e$  - sarcina electrică a electronului;  $Ze$  - sarcina electrică a nucleului;  $d\sigma$  reprezintă **secțiunea eficace diferențială de împrăștiere**, are dimensiunea unei arii și reprezintă aria unei suprafețe din jurul nucleului pe care particulele  $\alpha$  trebuie să cadă pentru a fi împrăștiate în unghiul solid  $d\Omega$ .

Relația (3.1.42) reprezintă **formula lui Rutherford** pentru difuzia particulelor  $\alpha$ . Valabilitatea acestei formule a fost verificată de către Geiger în anul 1913. Datele experimentale ulterioare au arătat că raza nucleului este conectată de numărul atomic de masă  $A$  prin relația:

$$r_{nucleu} = r_o A^{1/3} \quad r_o = (1.4 - 1.5) 10^{-15} \text{ m} \quad (3.1.43)$$

**Teoria lui Bohr pentru atomii hidrogenoizi** - urmărind să explice spectrele de linii ale atomului de hidrogen observate experimental, Bohr introduce două postulate:

**Postulatul 1:** Pot exista în atom numai acele orbite electronice pentru care momentul cinetic orbital al electronului  $\vec{I}_n$ , în mișcarea sa în jurul nucleului, este un număr întreg de  $\hbar$ :

$$|\vec{I}_n| = m_o v_n r_n = n\hbar \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (3.1.44)$$

unde  $n$  este un număr natural, denumit **număr cuantic principal**.

Orbitele pe care se mișcă electronii și care satisfac condiția (3.1.44) se numesc **orbite stătioare**.

**Viteză electronilor** pe orbitele Bohr:

$$v_n = \frac{Ze^2}{2h\varepsilon} \frac{1}{n} \quad (3.1.45)$$

unde  $\varepsilon$  este permitivitatea electrică a mediului.

**Raza  $r_n$  a orbitelor Bohr:**

$$r_n = \frac{\varepsilon_o h^2}{\pi m_o e^2} \frac{1}{Z} n^2 \quad (3.1.46)$$

**Energia totală a atomilor hidrogenoizi** este cuantificată:

$$E_n = -Z^2 \frac{m_o e^4}{8\varepsilon_o^2 h^2} \frac{1}{n^2} \quad (3.1.47)$$

deci există un număr infinit de nivele energetice.

**Energia de ionizare** - energia minimă necesară pentru a scoate electronul din atomul aflat în starea fundamentală ( $n = 1$ ). Pentru atomul de hidrogen:

$$E_1 = -\frac{m_o e^4}{8\varepsilon_o^2 h^2} = -13.53 \text{ eV} \quad (3.1.48)$$

**Postulatul 2:** în procesul de emisie sau de absorbție a luminii de către atomi sub formă de cuante de energie  $h\nu_{mn}$ , atomul trece dintr-o stare staționară cu energia  $E_m$  în altă stare staționară de energie  $E_n$ :

$$h\nu_{mn} = h\frac{c}{\lambda_{mn}} = E_m - E_n = \frac{m_o Z^2 e^4}{8\varepsilon_o^2 h^2} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (3.1.49)$$

sau:

$$\tilde{\nu}_{mn} = \frac{1}{\lambda_{mn}} = \frac{m_o Z^2 e^4}{8\varepsilon_o^2 h^3 c} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (3.1.50)$$

Astfel s-a ajuns la formula Balmer obținută pe baza teoriei Bohr, pentru atomii hidrogenoizi; valoarea teoretică a constantei Rydberg pentru atomul de hidrogen este:

$$R_{teor,H} = \frac{m_o e^4}{8\varepsilon_o^2 h^3 c} = 1.097373 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (3.1.51)$$

**Natura ondulatorie a particulelor** - fizicianul francez de Broglie extinde ipoteza lui Einstein de caracter dual al luminii asupra particulelor materiale în general: mișcarea oricărei particule (electron, proton, moleculă, etc) este caracterizată de o undă asociată numită **undă de Brogile**, cu lungimea de undă:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (3.1.52)$$

și cu vectorul de undă

$$\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar} \quad (3.1.53)$$

Pentru o undă armonică plană, unda de Broglie asociată particulei cuantice libere ( $\vec{F}_x = 0$ ), are expresia:

$$\Psi_B(x, t) = A e^{-i(\omega t - kx)} = A e^{-i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x)} \quad (3.1.54)$$

**Relațiile de nedeterminare Heisenberg** - se referă la imposibilitatea determinării simultane cu o precizie oricât de bună a poziției și impulsului unei microparticule:

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta p_x &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta y \Delta p_y &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta z \Delta p_z &\geq \frac{\hbar}{2} \end{aligned} \quad (3.1.55)$$

Un caz particular al relațiilor de nedeterminare este cel cunoscut sub numele de **relația de incertitudine energie-timp**, care se scrie sub forma:

$$\tau \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3.1.56)$$

## 3.2 Probleme propuse

**3.1** Să se stabilească relația dintre radianța energetică  $R$  și strălucirea energetică  $B$  în cazul corpului negru.

**3.2** Să se exprime puterea spectrală de emisie  $r(\nu, T)$  pentru legile lui Wien și Rayleigh-Jeans în scara lungimilor de undă.

**3.3** Să se demonstreze că din formula lui Planck rezultă următoarele legi termodinamice:

- a). legea de deplasare a lui Wien
- b). legea Stefan-Boltzmann
- c). legea lui Wien
- d). legea lui Rayleigh-Jeans

**3.4** Să se calculeze temperatura  $T$  a Soarelui cunoscând că presiunea  $p$  a păturilor sale interioare este de  $6 \cdot 10^9$  atm ( $p = \frac{w}{3}$ ).

**3.5** Să se calculeze temperatura inițială  $T_o$  a unei cavități pline cu radiație termică, dacă la creșterea temperaturii inițiale de  $n = 2$  ori, presiunea radiației termice de echilibru variază cu  $\Delta p = 3.8 \cdot 10^{-3} N/m^2$ .

**3.6** Să se calculeze energia totală a unei radiații termice care trece în timpul  $t = 1$  min printr-o suprafață  $S = 1 cm^2$ , dacă strălucirea energetică este  $B = 10^2 W/m^2$ .

**3.7** Fie două surse de radiație termică; una are temperatura  $T_1 = 2500 K$ , iar cealaltă temperatura  $T_2$ . Să se determine temperatura  $T_2$  a celei de-a doua surse, dacă lungimea de undă corespunzătoare maximului puterii de emisie a sa este cu  $\Delta\lambda = 0.5 \mu m$  mai mare decât lungimea de undă a primei surse.

**3.8** O bilă de cupru de rază  $r = 0.6 cm$  se află într-un recipient vidat menținut la o temperatură apropiată de zero absolut. Temperatura inițială a bilei este  $T_o = 300 K$ . Considerând suprafața bilei drept un corp negru, să se determine timpul  $\tau$  după care temperatura sa scade de  $n = 2$  ori. Se cunosc: densitatea cuprului  $\rho_{Cu} = 8.9 g/cm^3$  și căldura sa specifică  $c_{Cu} = 0.39 J/gK$ .

**3.9** De câte ori crește strălucirea spectrală  $B_\lambda$  a unei radiații termice cu lungimea de undă  $\lambda = 6000 \text{ \AA}$  din spectrul unui corp negru, atunci când temperatura acestuia crește de la  $T_1 = 2000 K$  până la  $T_2 = 2500 K$ .

**3.10** Radianța energetică a unui corp absolut negru este  $R = 250 kW/m^2$ . Să se calculeze lungimea de undă la care densitatea volumică spectrală  $\rho(\lambda, T)$  a radiației este maximă.

**3.11** Utilizându-se o fotocelulă cu catod de cesiu iluminat cu radiații de diferite lungimi de undă, s-au obținut următoarele rezultate: pentru radiația cu lungimea de undă  $\lambda_1 = 0.4 \mu m$  tensiunea de stopare a fost  $U_1 = 1.19 V$ , iar pentru  $\lambda_2 = 0.5 \mu m$  tensiunea de stopare a fost  $U_2 = 0.57 V$ . Să se calculeze constanta lui Planck  $h$  și lungimea de undă de prag  $\lambda_o$  pentru cesiu.

**3.12** Să se determine viteza maximă a electronilor extrași de la suprafața argintului iradiat cu radiații  $\gamma$  de lungime de undă  $\lambda = 0.001 nm$ . Energia de extractie este  $E_{ext} = 4.7 eV$ .

**3.13** Energia de legătură a unui electron în atomul de plumb este  $E_{ext} = 9 \cdot 10^4 eV$ . La iradierea plumbului cu o anumită radiație electromagnetică sunt emisi electroni care descriu o traекторie circulară cu raza  $R = 0.25 m$

într-un câmp magnetic de inducție  $B = 10^{-2} T$ . Se cere:

- a). impulsul și energia cinetică pentru electronii emiși
  - b). energia fotonilor absorbiți
- Se negligează efectul de recul al ionilor de plumb.

**3.14** Pragul efectului fotoelectric al unui fotocatod de cesiu este situat la  $\lambda_o = 6000 \text{ \AA}$ . Se trimit asupra fotocatodului un fascicul luminos monocromatic cu  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ . Să se calculeze:

- a. energia, impulsul și masa de mișcare (relativistă) a radiației
- b. viteza maximă cu care electronii părăsesc fotocatodul
- c. valoarea potențialului de frânare

**3.15** O cuantă cu  $\lambda = 2300 \text{ \AA}$  eliberează un fotoelectron de pe suprafața unui electrod de platină ( $E_{ext} = 5.29 \text{ eV}$ ). Dacă fotonul incident face un unghi  $\theta_i = 30^\circ$  cu normala la suprafața plăcii de platină, iar fotoelectronul expulzat face un unghi  $\theta_2 = 60^\circ$ , să se calculeze impulsul total primit de placă în acest proces.

**3.16** Un foton cu  $\lambda_o = 0.1 \text{ \AA}$  cade pe un electron cu masa de repaus  $m_o = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ . Să se calculeze:

- a). variația relativă a lungimii de undă a radiației  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_o}$
- b). energia fotonului difuzat
- c). unghiul  $\varphi$  pe care-l face electronul de recul cu direcția fotonului incident.

**3.17** Pentru un fascicul incident de raze  $X$ , cu lungimea de undă  $\lambda_o = 0.1 \text{ \AA}$ , s-a constatat că deplasarea Compton este  $\Delta\lambda = 0.024 \text{ \AA}$ . Să se calculeze:

- a). unghiul  $\theta$  sub care sunt difuzați fotonii
- b). energia transferată electronilor de recul

**3.18** Să se calculeze valoarea deplasării Compton, dacă lungimea de undă a fotonului incident este  $\lambda_o = 0.03 \text{ \AA}$ , iar viteza electronului de recul este  $v = 0.6 \cdot c$ .

**3.19** Se studiază cu ajutorul unui spectrograf cu rețea prin transmisie, spectrul de emisie în vizibil al hidrogenului:

- a). știind că linia  $H_\alpha$  are lungimea de undă  $\lambda_\alpha = 6565 \text{ \AA}$ , să se determine constanta Rydberg  $R_H$
- b). care este lungimea de undă a liniei  $H_\gamma$

- c). cunoscând liniile spectrale  $\lambda_\beta = 4863\text{\AA}$  și  $\lambda_\delta = 4103\text{\AA}$ , să se găsească, aplicând principiul de combinație al termenilor spectrali al lui Ritz, cea de-a doua linie spectrală din seria Brackett
- d). spectrul hidrogenului este studiat cu o rețea având  $n = 10^3$  trăsături/mm; fasciculul de raze cade normal pe rețea. Să se calculeze  $\cos \theta$ , unde  $\theta$  este unghiul format de normala la rețea cu razele difractate în spectrul de ordinul  $m = 1$  pentru linia  $H_\gamma$ .

**3.20** Să se calculeze raza orbitei de ordin  $m$  a atomului de hidrogen, dacă tranzitia electronului de pe orbita  $m$  pe orbita  $n = 2$  este însotită de emisie unei cuante de radiație cu lungimea de undă  $\lambda = 4870\text{\AA}$ .

**3.21** Un atom de hidrogen emite un foton corespunzător primei linii spectrale din seria Lyman. Care este viteza atomului în urma emisiei? Masa atomului de hidrogen este  $m = 1.007 \text{ u.a.m.}$  ( $1\text{u.a.m.} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ )

**3.22** Să se exprime energia totală  $E_t$  a atomului de hidrogen în starea fundamentală în funcție de constanta Rydberg  $R_H$  și să se calculeze potențialul  $V$  de ionizare al atomului.

**3.23** Un atom de hidrogen excitat ajunge în starea fundamentală prin emisia succesivă a două linii spectrale cu lungimile de undă  $\lambda_1 = 128.19 \text{ nm}$  și  $\lambda_2 = 102.57 \text{ nm}$ . Să se determine energia stării excitate și numărul cuantic principal al acestei stări.

**3.24** Să se găsească expresia lungimii de undă de Broglie pentru o particulă cu masa  $m$  care se deplasează cu viteza termică a distribuției Maxwell, la o temperatură  $T$ .

**3.25** Să se calculeze lungimea de undă de Broglie asociată:

- unui electron care are viteza  $v = 100 \text{ m/s}$
- unui electron emis într-o dezintegrare  $\beta$  cu energie cinetică  $E_1 = 3.65 \text{ MeV}$
- unei particule  $\alpha$  emisă de nucleul  $Po^{210}$  cu energie cinetică  $E_2 = 5.305 \text{ MeV}$ .

**3.26** Să se calculeze lungimea de undă de Broglie asociată:

- unei bile cu masa  $m = 2 \text{ g}$ , care se mișcă cu viteza  $v = 500 \text{ m/s}$
- unui foton cu energie  $\varepsilon = 1 \text{ MeV}$
- unui electron cu energie cinetică relativistă  $E_c = 1 \text{ MeV}$ , cu masa de repaus  $m_o = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .

**3.27** Care este variația lungimii de undă de Broglie asociată unui electron ce se deplasează în vid cu viteză  $v_o = 6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$  după ce pătrunde într-un metal al cărui potențial intern este  $U = 15 \text{ V}$ ?

**3.28** Să se obțină relația care leagă lungimea de undă de Broglie asociată unei particule relativiste de tensiunea acceleratoare  $U$  a acestora. Să se particularizeze pentru cazul nerelativist.

**3.29** Un fascicul monoenergetic de electroni ce au energie cinetică  $E_c = 48 \text{ eV}$ , cade pe suprafața unui monocristal de nichel. Primul maxim de intensitate se obține pentru direcția  $\theta = 72^\circ$  față de normală la cristal. Să se calculeze lungimea de undă de Broglie asociată electronilor:

- teoretic, cu ajutorul formulei de Broglie
- experimental, cu ajutorul formulei Bragg, dacă echidistanța rețelei este  $d = 0.91 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ .

**3.30** Cu ajutorul relațiilor de incertitudine Heisenberg să se calculeze energia totală a electronului situat cel mai aproape de nucleu, în cazul unui atom hidrogenoid cu numărul de ordine  $Z$ .

**3.31** Înănd cont de proprietățile ondulatorii ale electronului, să se găsească legătura dintre nedeterminările  $\Delta p_x$  și  $\Delta x$  în impuls și coordonată, dacă  $\Delta x$  este determinată de lățimea  $d$  a fantei prin care trece fascicul de electroni.

**3.32** În experiența Frank-Hertz atomii de hidrogen sunt aduși în prima stare excitată cu ajutorul unui fascicul de electroni. Experimental s-a observat că energiile electronilor care au dat naștere acestor tranzitii nu mai sunt egale, deși fasciculul inițial a fost monoenergetic. Să se explice acest fenomen, știind că viața stărilor excitate este foarte scurtă. Știind că fluctuațiile care apar în energia electronilor sunt de ordinul  $\Delta E \approx 10^{-6} \text{ eV}$  să se evaluateze durata medie de viață a atomilor excitați.

### 3.3 Soluții

**3.1** Se pleacă de la definiția radianței energetice:

$$R = \frac{d\Phi}{dS}$$

care, integrată va conduce la fluxul total emis de suprafața radiantă  $S$  a corpului negru, în toate direcțiile:

$$\Phi = SR$$

Pe de altă parte, plecând de la expresia strălucirii energetice  $B$ :

$$B = \frac{dI}{dS \cos \theta}$$

și ținând cont de definiția intensității luminoase:

$$dI = \frac{d\Phi}{d\Omega}$$

se poate exprima fluxul total emis de suprafața  $S$  a corpului negru, în toate direcțiile:

$$\begin{aligned} d\Phi &= BS \cos \theta d\Omega = BS \cos \theta \sin \theta d\varphi \\ \rightarrow \Phi &= BS \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = BS\pi \end{aligned}$$

Din cele două expresii ale fluxului total rezultă relația cerută:

$$R = \pi \cdot B$$

**3.2** Deoarece energia radiată  $E$  cuprinsă în intervalul de lungimi de undă  $(\lambda, \lambda + d\lambda)$  trebuie să fie egală cu energia radiată cuprinsă în intervalul corespunzător de frecvențe  $(\nu, \nu + d\nu)$ , atunci:

$$r(\lambda, T) d\lambda = r(\nu, T) d\nu$$

Se ține cont în continuare de relația dintre lungimea de undă și frecvență,  $\lambda = \frac{c}{\nu} \rightarrow |d\lambda| = \frac{c}{\nu^2} d\nu$ , astfel încât puterea spectrală de emisie  $r(\nu, T)$  se poate scrie:

$$r(\nu, T) = r(\lambda, T) \frac{d\lambda}{d\nu} = \frac{c}{\nu^2} r(\lambda, T)$$

Vom utiliza relația dintre puterea spectrală de emisie  $r(\lambda, T)$  și densitatea volumică spectrală  $\rho(\lambda, T)$  pentru corpul negru:

$$r(\nu, T) = \frac{c}{4} \rho(\nu, T)$$

Asrel fel legea Wien (3.1.21) exprimată prin puterea spectrală de emisie  $r(\lambda, T)$  va lua forma:

$$r(\lambda, T) = r(\nu, T) \frac{\nu^2}{c} = \frac{c}{4} \rho(\nu, T) \cdot \frac{\nu^2}{c} = c_1 \nu^5 e^{-c_2 \nu/T} = \text{const.} \lambda^{-5} e^{-\text{const.}/\lambda T}$$

Legea Rayleigh-Jeans (3.1.22) devine:

$$r(\lambda, T) = r(\nu, T) \frac{\nu^2}{c} = \frac{c}{4} \rho(\nu, T) \cdot \frac{\nu^2}{c} = \frac{\nu^2}{4} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT = \frac{2\pi\nu^4}{c^3} kT = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT = 2\pi c \lambda^{-4} kT$$

**3.3 a).** Vom utiliza formula Planck sub forma (3.1.25) și vom afla poziția maximului acestei distribuții:

$$\frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \right] = 0$$

Dacă notăm prin  $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ , în urma derivării se obține ecuația transcendentă:

$$\frac{x e^x}{e^x - 1} = 5$$

care admite singura soluție reală  $x = 4.965$ . Astfel se poate calcula produsul:

$$\lambda_m T = \frac{hc}{4.965k} = 0.28986 \cdot 10^{-2} \text{ mK}$$

relație care reprezintă chiar legea de deplasare Wien.

**b).** Vom apela la definiția radianței energetice (3.1.4) și respectiv la legea Planck sub forma (3.1.24). Vom nota prin  $x = \frac{h\nu}{kT}$  și se calculează radianța:

$$\begin{aligned} R &= \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu \\ &\rightarrow R = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \end{aligned}$$

Integrala care trebuie calculată poate fi dezvoltată în serie sub forma:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \int_0^\infty \frac{x^3 e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \int_0^\infty x^3 e^{-x} (1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots) dx$$

Integrala se reduce la o sumă de integrale de tipul:

$$I_n = \int_0^\infty x^3 e^{-nx} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

care, dacă se ține cont de definiția funcției  $\Gamma$  se poate calcula și este egală cu:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{6}{n^4} \\ \rightarrow \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx &= 6(1 + \dots) = \frac{\pi^4}{15} \end{aligned}$$

Astfel se ajunge la expresia radianței:

$$R = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \frac{\pi^4}{15} = \sigma T^4$$

care reprezintă chiar legea Stefan-Boltzmann.

c). Pentru a ajunge la legea lui Wien valabilă la frecvențe mari vom utiliza formula Planck unde vom impune restricția  $h\nu \gg kT$  ceea ce implică:

$$e^{h\nu/kT} \gg 1 \rightarrow \rho(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-h\nu/kT}$$

care reprezintă formula empirică Wien.

d). Pentru a ajunge la formula Rayleigh-Jeans valabilă la frecvențe mici, se pleacă de la formula Planck impunând restricția  $h\nu \ll kT$  ceea ce conduce la:

$$e^{h\nu/kT} 1 + \frac{h\nu}{kT} \rightarrow \rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT$$

care reprezintă legea Rayleigh-Jeans.

**3.4** Deoarece  $w = \frac{4\pi}{c} B$  și  $B = \frac{R}{\pi}$  va rezulta expresia presiunii în funcție de radianță:

$$p = \frac{4}{3c} R$$

Apelăm la legea Stefan-Boltzmann  $R = \sigma T^4$  astfel încât presiunea devine:

$$p = \frac{4}{3c} \sigma T^4 \rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{3pc}{4\sigma}} = 2 \cdot 10^{10} K$$

**3.5** Vom exprima presiunea în funcție de temperatură ca în problema precedentă:

$$p_o = \frac{4}{3c}\sigma T_o^4 \quad p = \frac{4}{3c}\sigma n^4 T_o^4 \rightarrow \Delta p = p - p_o = \frac{4}{3c}\sigma(n^4 - 1)T_o^4$$

De unde rezultă:

$$T_o = \sqrt[4]{\frac{3c\Delta p}{4\sigma(n^4 - 1)}} = 1000 \text{ K}$$

**3.6** Conform definiției fluxului de energie radiată (3.1.1), a radianței energetice (3.1.3) precum și a strălucirii energetice (3.1.14) vom obține:

$$\Phi = \pi B S \rightarrow E = \pi B S t = 1.89 \text{ J}$$

**3.7** Conform legii de deplasare Wien:

$$\lambda_{m1} T_1 = (\lambda_{m1} + \Delta\lambda) T_2 = b \rightarrow T_2 = \frac{b T_1}{b + T_1 \Delta\lambda} = 1750 \text{ K}$$

**3.8** Vom utiliza definiția fluxului energetic (3.1.1), a radianței energetice (3.1.3) precum și legea Stefan-Boltzmann:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{dE}{dt} = \frac{mc dT}{dt} = \frac{4^3}{3} \rho c \frac{dT}{dt} \\ \Phi &= \sigma T^4 S = 4\pi r^2 \sigma T^4 \end{aligned}$$

Egalând cele două expresii ale fluxului energetic rezultă timpul  $\tau$  cerut de problemă:

$$\tau = \frac{1}{3} \frac{r \rho c}{\sigma} \int_{T_o/\eta}^{T_o} T^{-4} dT = \frac{1}{9} \frac{r \rho c}{\sigma} T_o^{-3} (\eta^3 - 1)$$

**3.9** Vom ține cont de relația dintre radianța energetică  $R$  și strălucirea energetică  $B$ ,  $B = R/\pi$  ceea ce conduce la următoarea expresie pentru strălucirea spectrală  $B(\lambda, T)$ :

$$B(\lambda, T) = \frac{dR}{\pi d\lambda} == \frac{\rho(\lambda, T)}{\pi}$$

$$\rightarrow \frac{B(\lambda, T_2)}{B(\lambda, T_1)} = \frac{\rho(\lambda, T_2)}{\rho(\lambda, T_1)} = \frac{e^{\frac{hc}{\lambda c T_1}} - 1}{e^{\frac{hc}{\lambda c T_2}} - 1} \approx 4.87$$

**3.10** Se folosește legea Stefan-Boltzmann precum și legea de deplasare Wien:

$$\lambda_m = b/T = b\sqrt[4]{\sigma}/R = 2 \mu m$$

**3.11** Se utilizează legea Einstein a efectului fotoelectric extern:

$$eU_1 = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_o} \quad eU_2 = \frac{hc}{\lambda_2} - \frac{hc}{\lambda_o}$$

de unde rezultă:

$$e(U_1 - U_2) = hc \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \rightarrow h = \frac{e\lambda_1\lambda_2(U_1 - U_2)}{c(\lambda_1 - \lambda_2)} = 6.61 \cdot 10^{-34} Js$$

$$\rightarrow \lambda_o = \frac{\lambda_1\lambda_2(U_1 - U_2)}{\lambda_1 U_1 - \lambda_2 U_2} = 0.65 \mu m$$

**3.12** Energia fotonilor incidenti este  $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = 1.24 MeV$ , deci electronii emiși vor fi electroni relativiști pentru care  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ . Vom aplica legea de conservare a energiei pentru efectul fotoelectric extern:

$$\varepsilon = E_{extr} + E_o \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right)$$

De asemenea vom exprima energia de repaus  $E_o = m_0 c^2$  și, cunoscând energia de extracție se poate determina viteza maximă electronilor emiși.

**3.13 a).** Pentru a afla impulsul și energia cinetică a electronilor emiși vom

apela la definiția impulsului și respectiv la faptul că forța Lorentz este egală cu forța centripetă:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB \quad p = mv = qBR = 4 \cdot 10^{-22} \text{ kg m/s}$$

$$\rightarrow E_c = \frac{p^2}{2m} = 0.549 \text{ MeV}$$

b). Energia fotonilor absorbiți se determină din legea Einstein pentru efectul fotoelectric extern:

$$h\nu = E_{extr} + E_c = 0.639 \text{ MeV}$$

**3.14 a).** Pentru a afla impulsul, energia și masa relativistă a radiației vom apela la următoarele formule:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 3.97 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\ p &= \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = 1.324 \cdot 10^{-27} \text{ kg m/s} \\ m &= \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h}{c\lambda} = 0.44 \cdot 10^{-35} \text{ kg}\end{aligned}$$

b). Pentru a afla viteza maximă a electronilor vom aplica legea Einstein pentru efectul fotoelectric extern:

$$\begin{aligned}E_{extr} &= hc/\lambda_o; \quad hc/\lambda = hc/\lambda_o + m_e v^2/2 \\ \rightarrow v &= \sqrt{\frac{2hc}{m_e} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_o} \right)} = 3.83 \cdot 10^5 \text{ m/s}\end{aligned}$$

c). Potențialul de frânare e afă din egalarea energiei cinetice maxime cu energia de stopare:

$$\frac{m_e v^2}{2} = eU_o \rightarrow U_o = \frac{m_e v^2}{2e} = 0.41 \text{ V}$$

**3.15** Pentru procesul de interacție foton-electronul din placă vom aplica legea de conservare a impulsului (Fig.3.15.r):

$$\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_e$$

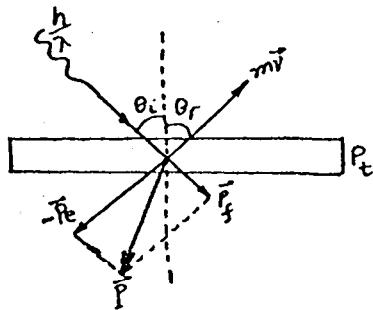


Fig.3.15.r

unde  $p_f = \frac{h}{\lambda}$  iar  $\vec{p}_e = m\vec{v}$ . Din legea de conservare a energiei rezultă:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m\lambda}(hc - E_{extr}\lambda)}$$

astfel, impulsul total primit de placă este:

$$p = \sqrt{p_e^2 + p_f^2} = \left[ \frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{2m}{\lambda}(hc - \lambda E_{extr}) \right]^{1/2} = 2.1 \cdot 10^{-27} \text{ kg m/s}$$

unde  $m = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  iar constanta Planck  $h = 6.62 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ .

**3.16 a).** Din formula efectului Compton:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o = 2\Lambda \sin^2 \theta / 2 \rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o} = 2\Lambda / \lambda_o \sin^2 \theta / 2 = 0.24$$

b). energia fotonului difuzat este:

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_o + \Delta\lambda} = \frac{hc}{\lambda_o + 2\Lambda \sin^2 \theta / 2} = 1.6 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

c). procesul de interacție foton-electron pentru efectul Compton este reprezentat în Fig. 3.16.r.

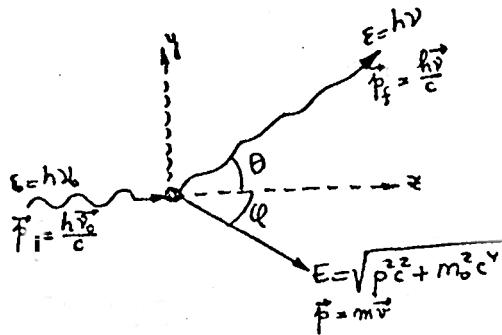


Fig.3.16.r

Se scrie legea de conservare a impulsului proiectată pe cele două direcții  $Ox$  și  $Oy$ :

$$\begin{aligned}\frac{h\nu_o}{c} &= \frac{h\nu}{c} \cos \theta + p \cos \varphi \\ 0 &= \frac{h\nu}{c} \sin \theta - p \sin \varphi\end{aligned}$$

de unde, dacă facem raportul celor două relații va rezulta:

$$\tan \varphi = \frac{\sin \theta}{\frac{\nu_o}{\nu} - \cos \theta}$$

Vom ține cont de expresia lui  $\Delta\lambda$  de la punctul a) astfel încât:

$$\tan \varphi = \frac{2 \sin \theta / 2 \cos \theta / 2}{1 - \cos \theta + 2\Lambda/\lambda_o \sin^2 \theta / 2}$$

**3.17 a).** Se folosește formula efectului Compton:

$$\Delta\lambda = 2\Lambda \sin^2 \theta / 2 \rightarrow \sin \theta / 2 = \sqrt{\frac{\Delta\lambda}{2\Lambda}} \rightarrow \theta = 90^\circ$$

b). Energia electronilor de recul este, conform legii de conservare a energiei:

$$\begin{aligned}E_c = h(\nu_o - \nu) &= hc \left( \frac{1}{\lambda_o} - \frac{1}{\lambda} \right) = hc \frac{\lambda - \lambda_o}{\lambda \lambda_o} = \frac{2hc\Lambda \sin^2 \theta / 2}{\lambda_o(\lambda_o + 2\Lambda \sin^2 \theta / 2)} = \\ &= 3.84 \cdot 10^{-15} J\end{aligned}$$

**3.18** Vom utiliza legea de conservare a energiei pentru efectul Compton relativist:

$$h\nu_o + m_o c^2 = h\nu + mc^2$$

precum și variația masei cu viteza  $m = m_o/\sqrt{1-\beta^2}$ . Va rezulta:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_o}{\frac{h/m_o\lambda_o c}{1/\sqrt{1-\beta^2}} - 1} = 0.0135 \text{ \AA}$$

**3.19 a).** Pentru  $H_\alpha$ ,  $m = 3$  în relația Balmer (3.1.38), de unde:

$$R = \frac{36}{5\lambda} \approx 1.09737 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

b). Pentru  $H_\gamma$ ,  $m = 5$ , iar din relația Balmer rezultă:

$$\lambda_\gamma = 4342 \text{ \AA}$$

c). Conform relației Balmer cele două lungimi de undă ale hidrogenului pot fi exprimate astfel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_\beta} &= R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) \\ \frac{1}{\lambda_\delta} &= R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2} \right) \end{aligned}$$

A doua linie din seria Brackett se găsește cu ajutorul principiului de combinație Ritz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= R_H \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} \right) = \frac{1}{\lambda_\delta} - \frac{1}{\lambda_\beta} \\ \rightarrow \lambda &= \frac{\lambda_\beta \lambda_\delta}{\lambda_\beta - \lambda_\delta} \end{aligned}$$

d). Din relația  $\sin \theta = nk\lambda_\delta$  rezultă:

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \approx 0.901$$

**3.20** Din relația lui Balmer generalizată (3.1.40) rezultă:

$$m^2 = \frac{\lambda n^2 R_H}{\lambda R_H - n^2}$$

Introducem expresia lui  $m$  în expresia razei de ordin  $m$ :

$$r_m = \frac{m^2 h^2}{4\pi^2 m e^2} \rightarrow r_m = \frac{h^2 \lambda n^2 R_H}{4\pi^2 m e^2 (\lambda R_H - n^2)} = 8.4 \text{ \AA}$$

**3.21** Se folosește relația lui Balmer generalizată pentru care  $n = 1$  și  $m = 2$ . Rezultă  $\lambda = \frac{4}{3R_H}$ . Din legea de conservare a impulsului pentru atomul de hidrogen rezultă:

$$\frac{3R_H h}{4} = mv \rightarrow v = \frac{3R_H h}{4m} \approx 3.25 \text{ m/s}$$

**3.22** Energia totală a atomului de hidrogen este dată de relația (3.1.47). Înănd cont de expresia constantei Rydberg (3.1.51), energia totală a atomului de hidrogen în starea fundamentală  $n = 1$  se poate exprima:

$$E_1 = R_H ch = 13.53 \text{ eV}$$

Potențialul de ionizare, potențialul minim la care trebuie accelerat electronul pentru a părăsi atomul va fi:

$$V = \frac{E_1}{e} = 13.53 \text{ V}$$

**3.23** Conform relației 3.1.49, energia stării excitate este:

$$E^* = E_1 - hc \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2}$$

iar nu,ărul cuantic principal corespunzător este  $n = 5$ .

**3.24** Lungimea de undă de Broglie va fi:

$$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv_T} = \frac{h}{\sqrt{3mkT}}$$

**3.25** a). Lungimea de undă de Brolie asociată electronului este:

$$\lambda_B = \frac{h}{mv} = 3.96 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

b). Lungimea de undă asociată electronului (relativist) provenit din dezintegrarea  $\beta$  este:

$$\lambda_B = \frac{hc}{\sqrt{E_1(E_1 + 2m_o c^2)}} = 0.3 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

c). iar lungimea de undă asociată particulei  $\alpha$  este:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_o E_2}} = 7.9 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

**3.26** a). Lungimea de undă de Broglie este:

$$\lambda_B = \frac{h}{mv} = 6.62 \cdot 10^{-34} \text{ m}$$

b). În cazul unui foton masa de repaus este zero iar impulsul va fi  $p = \frac{\varepsilon}{c}$  deci, lungimea de undă de Broglie va avea expresia:

$$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\varepsilon} = 1.242 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

unde  $1MeV = 10^6 eV = 1.6 \cdot 10^{-19} J$ .

c). Pentru o particulă relativistă avem:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_o^2 c^4; \quad E = m_o c^2 + E_c \\ \rightarrow p = \frac{1}{c} \sqrt{E_c(E_c + 2m_o c^2)}$$

**3.27** Lungimea de undă de Broglie asociată electronului în vid este:

$$\lambda_o = \frac{h}{mv_o}$$

În metal mișcarea electronului este accelerată de potențialul pozitiv al nucleelor și al potențialului intern:

$$ma = eE = \frac{eU}{d} \quad v = \sqrt{v_o^2 + 2ad} = \sqrt{v_o^2 + 2eU/m} \\ \rightarrow \lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{m^2 v_o^2 + 2meU}}$$

iar variația cerută va fi:

$$\Delta\lambda = \lambda_o - \lambda = 3.35 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

**2.28** Impulsul relativist este:

$$p = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m_o^2 c^2}$$

unde energia particulei este dată de expresia:

$$E = m_o c^2 + eU$$

Astfel, impulsul relativist se poate exprima prin tensiunea de accelerare  $U$ :

$$p = \sqrt{\frac{(m_o c^2 + eU)^2}{c^2} - m_o^2 c^2} = \sqrt{2m_o eU} \sqrt{1 + \frac{eU}{2m_o c^2}}$$

Lungimea de undă de Broglie va avea atunci expresia:

$$\lambda_B = \frac{h}{\sqrt{2m_o eU}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{eU}{2m_o c^2}}}$$

În cazul nerelativist termenul  $\frac{eU}{2m_o c^2} \rightarrow 0$  poate fi neglijat și vom obține:

$$\lambda_o = \frac{h}{2m_o eU}$$

**3.29 a).** Deoarece:

$$E_c = 48 \text{ eV} \ll m_o c^2 = 0.511 \text{ MeV}$$

rezultă că electronul se mișcă nerelativist, iar viteza lor este:

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} \rightarrow \lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}} = 1.75 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

b). Din formula Wulf-Bragg:

$$2d \sin \theta = n\lambda \rightarrow \lambda = 2d \sin \theta = 1.73 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Observație: Concordanța dintre valoarea teoretică și cea experimentală pentru lungimea de Broglie ne arată că ipoteza lui de Broglie este bine verificată de experiența Davisson și Germer.

**3.30** Pentru atomii hidrogenoizi, electronii sunt nerelativiști, energia totală a electronului în câmpul nucleului este:

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r}$$

Considerând că ceilalți electroni nu ecranează câmpul nuclear, impulsul este:

$$p \approx \frac{\hbar}{r}$$

Astfel, energia totală devine:

$$E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{r}$$

Pentru electronul aflat cel mai aproape de nucleu, energia totală este minimă și deci:

$$\frac{dE}{dr} = 0 \rightarrow r = \frac{\hbar^2}{mZe^2} \rightarrow E_{min} = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2}$$

**3.31** Conform Fig.3.31.r,  $\Delta x$  este de ordinul deschiderii  $d$ , iar  $\Delta p_x$  este de ordinul  $\frac{h}{\lambda \sin \alpha}$ . Pe de altă parte, din relația Wulf-Bragg  $\lambda = 2d \sin \alpha$ , deci:

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{2d} \rightarrow \Delta p_x = \frac{h}{2d} \rightarrow \Delta x \Delta p_x \approx d \frac{h}{2d} = \frac{h}{2}$$

deci este de ordinul constantei Planck.

**3.32** Starea excitată este realizată în timp cu precizia  $\Delta t \approx \tau$ , unde  $\tau$  este durata medie de viață a atomilor de hidrogen. Energia stării excitate este determinată ,conform relației de nedeterminare (3.1.56), cu precizia  $\Delta E$ :

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\tau} \rightarrow \tau \geq \frac{\hbar}{2\Delta E} = 3.1 \cdot 10^{-10} s$$

Deci, în energia atomilor excitați, datorită vieții foarte scurte, apar fluctuații  $\Delta E$  apreciabile care determină lărgimea liniilor spectrale. Aceste fluctuații sunt prezente și în energia electronilor care au dat naștere tranzițiilor.

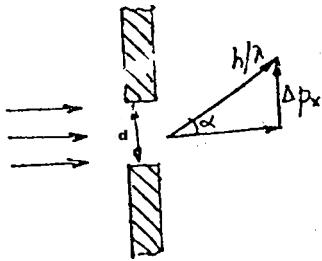


Fig.3.31.r

## 4 Mecanică cuantică nerelativistă

### 4.1 Breviar

Mecanică cuantică, ca teorie coerentă a comportării microparticulelor a apărut în două forme diferite:

- mecanica matricială a lui Heisenberg (1925)
- mecanica ondulatorie a lui Schrödinger (1926)

Ecuația diferențială propusă de către Schrödinger este satisfăcută de funcția de undă  $\Psi(\vec{r}, t)$ , asociată unei microparticule aflate într-un câmp potențial  $U(\vec{r}, t)$ :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) + U(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) \quad (4.1.1)$$

numită **ecuația Schrödinger temporală** - un postulat fundamental al mecanicii cuantice.

Dacă microparticula se găsește într-un câmp potențial staționar ( $U = U(\vec{r})$ ) atunci funcția de undă asociată microparticulei se poate scrie ca un produs de două funcții, una temporală și cealaltă spațială:

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \Psi(\vec{r}) \quad (4.1.2)$$

unde funcția  $\Psi(\vec{r})$  satisface **ecuația Schrödinger atemporală** (independentă de timp):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\vec{r}) + U(\vec{r})\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \quad (4.1.3)$$

Soluția ecuației (4.1.3) este funcția  $\Psi(\vec{r})$  care se numește **funcție de undă proprie**. Prin rezolvarea ecuației (4.1.3) se poate determina energia  $E$  a microparticulei corespunzătoare stărilor staționare precum și funcțiile de undă corespunzătoare acestor stări.

Referitor la **semnificația fizică (statistică) a funcției de undă**  $\Psi$ , Max Born sugerează (1926) că, din cunoașterea lui  $\Psi$  se pot extrage legi statistice referitoare la comportamentul microparticulelor, adică:

$$\Psi\Psi^*dV = |\Psi|^2dV = dP \quad (4.1.4)$$

determină probabilitatea ca microparticula, căreia i s-a asociat funcția de undă  $\Psi(x, y, z, t)$  să se găsească, la momentul  $t$  în regiunea din spațiu  $dV = dx dy dz$ , din jurul punctului  $(x, y, z)$ .

$$|\Psi|^2 = \frac{dP}{dV} \quad (4.1.5)$$

rezintă densitatea de probabilitate de localizare a microparticulei în spațiu-timp.

## Observații

**1.** Pentru ca mărimele de interes fizic, care se extrag din funcția de undă să aibă sens, trebuie ca funcțiile de undă  $\Psi$  să îndeplinească următoarele condiții:

- să fie uniforme
- mărginite
- continue
- cu derivate parțiale continue
- integrabile în modul pătrat

Ele formează o **clasă a funcțiilor de undă** definită pe spațiul Hilbert al

funcțiilor integrabile în modul pătrat.

**2.** Prin cunoașterea funcției de undă  $\Psi$ , conform statisticii, se pot determina valorile medii pentru orice mărime fizică  $f(x, y, z)$  ce caracterizează microparticula:

$$\bar{f}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(\vec{r}) f(x, y, z) \Psi(\vec{r}) dx dy dz \quad (4.1.6)$$

Un **operator**  $\hat{A}$  (asociat unei mărimi fizice) ce acționează pe clasa funcțiilor de undă din spațiul Hilbert, definește o corespondență care asociază fiecărei funcții de undă  $\Psi$  o funcție de undă  $\Phi$  aparținând aceleiași clase.

Ecuația:

$$\hat{A} \Psi = a \Psi \quad (4.1.7)$$

se numește în matematică **ecuația cu valori proprii**. Soluțiile acestei ecuații,  $\Psi$  se numesc **funcțiile proprii** ale operatorului hermitic (autoadjunct)  $\hat{A}$  ( $\hat{A} = \hat{A}^+$ ), iar valorile lui  $a$  reprezintă **valorile proprii** ale operatorului  $\hat{A}$ . Pentru operatorii hermitici valorile proprii sunt numere reale, iar valorile mărimilor fizice sunt chiar valorile proprii ale operatorilor asociați observabilelor (mărimilor).

În general, fiind date doi operatori  $\hat{A}$  și  $\hat{B}$ , produsul acestora nu este comutativ, adică:  $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ . Se definește **comutatorul** acestor operatori, mărirea:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (4.1.8)$$

și are următoarele proprietăți:

- $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$
- $[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$
- $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$
- $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$

Dacă comutatorul a doi operatori asociați la două mărimi fizice este nul, atunci cele două mărimi fizice sunt **compatibile**, deci au valori simultan determinate în starea caracterizată de funcția  $\Psi$ . Dacă comutatorul este diferit

de zero, atunci mărimile fizice sunt **incompatibile**, deci nu au valori simultan determinate într-o stare cuantică dată.

Intre operatorii corespunzători coordonatelor și impulsurilor generalizate ale unui sistem cuantic există următoarele relații de comutare:

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (4.1.9)$$

## 4.2 Probleme propuse

**4.1** Se dau operatorii  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  și  $\hat{C}$ . Să se demonstreze următoarele relații:

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$$

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$$

**4.2** Să se calculeze valorile comutatorilor:  $[\hat{x}, \hat{p}_x]$ ,  $[\hat{x}, \hat{p}_y]$ ,  $[\hat{x}, \hat{p}_z]$ .

**4.3** Să se demonstreze următoarele relații:

$$[\hat{l}_x, \hat{x}] = 0; \quad [\hat{l}_x, \hat{y}] = i\hbar\hat{z}; \quad [\hat{l}_x, \hat{z}] = -i\hbar\hat{y}$$

$$[\hat{l}_x, \hat{p}_x] = 0; \quad [\hat{l}_x, \hat{p}_y] = i\hbar\hat{p}_z; \quad [\hat{l}_x, \hat{p}_z] = -i\hbar\hat{p}_y$$

$$[\hat{l}_x, \hat{l}_x] = 0; \quad [\hat{l}_x, \hat{l}_y] = i\hbar\hat{l}_z; \quad [\hat{l}_x, \hat{l}_z] = -i\hbar\hat{l}_y$$

unde  $\hat{l}_x$ ,  $\hat{l}_y$  și  $\hat{l}_z$  sunt componentele momentului cinetic.

**4.4** Să se verifice cu ajutorul rezultatelor de la problema precedentă că, dacă notăm  $\hat{l}_+ = \hat{l}_x + i\hat{l}_y$  și  $\hat{l}_- = \hat{l}_x - i\hat{l}_y$  sunt valabile relațiile:

$$[\hat{l}_+, \hat{l}_-] = 2\hbar\hat{l}_z; \quad [\hat{l}_z, \hat{l}_+] = \hbar\hat{l}_+; \quad [\hat{l}_z, \hat{l}_-] = -\hbar\hat{l}_-$$

$$\hat{l}^2 = \hat{l}_+ \hat{l}_- + \hat{l}_z^2 - \hbar\hat{l}_z$$

**4.5** Să se arate că valoarea medie a unei observabile  $A$  care comută cu hamiltonianul  $H$  și nu depinde explicit de timp, este nulă.

**4.6** Să se arate că în cazul unei particule cuantice de masă  $m$  și impuls  $p_x$ , care se mișcă într-un câmp potențial  $U(x)$  sunt valabile *relațiile Ehrenfest*:

$$\langle p_x \rangle = m \frac{d}{dt} \langle x \rangle \quad \frac{d}{dt} \langle p_z \rangle = - \langle \frac{\partial U}{\partial x} \rangle$$

**4.7** Să se determine funcțiile proprii normate și valorile proprii ale operatorului impulsului  $\hat{p}_x$ .

**4.8** Folosind principiul general de corespondență să se scrie ecuația Schrödinger:

- a.) pentru o particulă aflată într-un potențial scalar  $U(\vec{r})$ .
- b.) pentru o particulă relativistă liberă
- c.) pentru o particulă de sarcină electrică  $e$  aflată într-un câmp electromagnetic care derivă dintr-un potențial vector  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  și un potențial scalar  $\varphi(\vec{r}, t)$ .

**4.9** O particulă cuantică de masă  $m$  și de impuls  $\vec{p}$  se deplasează într-un potențial constant  $U_o$ . Să se determine soluția generală a ecuației Schrödinger dependente de timp și să se particularizeze în cazul în care deplasarea are loc de-a lungul axei  $Ox$ .

**4.10** Să se determine spectrul de energii și funcțiile proprii corespunzătoare, pentru o particulă care se poate mișca liber în intervalul  $(0, L)$  al axei  $Ox$ .

**4.11** Să se determine spectrul de energii și funcțiile proprii corespunzătoare ale unei particule, în condițiile în care energia potențială este:

$$U(x) = \begin{cases} U_o > 0 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{într-un potențial}$$

Să se particularizeze apoi pentru  $U_o \rightarrow 0$  și pentru  $U_o \rightarrow \infty$ .

**4.12** Să se determine spectrul energetic al stărilor legate pentru o particulă aflată în *groapa de potențial*:

$$U(x) = \begin{cases} +\infty & x < 0 \\ -U_o & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

**4.13** Să se calculeze reflectanța  $R$  și transparenta  $T$  a unei particule de energie  $E$  pentru cazul *barierei de potențial*:

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, x > a \\ U_o & 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

**4.14** Să se demonstreze următoarele proprietăți ale soluțiilor ecuației Schrödinger în cazul unui *câmp de forță periodic*  $U(x) = U(x + na)$ ,  $n \in Z$ :

a). Pentru fiecare valoare a parametrului  $E$  există două soluții liniar independente (*soluții Floquet*)  $\Psi_1(x)$  și  $\Psi_2(x)$ , care se bucură de proprietatea:

$$\Psi_i(x + a) = \lambda_i \Psi_i(x), \quad i = 1, 2$$

unde  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$  sunt constante cu proprietatea  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ .

b). În cazul în care  $E$  este valoare proprie atunci  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$

c). La energiile admise corespund funcții proprii de forma:

$$\Psi(K, x) = e^{iKx} u(K, x) \quad -\frac{\pi}{a} \leq K \leq \frac{\pi}{a}$$

unde  $u(K, x)$  este o funcție periodică  $u(K, x + na) = u(K, x)$ ,  $n \in Z$  (*teorema lui Bloch*)

d). Spectrul de energii constă din benzi de energie care se obțin prin explicitarea condiției  $|\lambda_1| = 1$ .

**4.15** Să se aplice rezultatele problemei precedente la cazul *câmpului de forță Kröning-Penney*:

$$U(x) = \begin{cases} U_o & 0 < x < a \\ 0 & a < x < b \end{cases}$$

cu  $U(x + nc) = U(x)$ ,  $c = a + b$

**4.16** Să se determine funcțiile și valorile proprii ale energiei pentru un oscilator liniar armonic de sarcină  $q$  aflat într-un câmp electric omogen de intensitate  $E$ .

**4.17** Să se arate că în starea cuantică  $n$  a oscilatorului armonic liniar există relația:

$$\Delta x \Delta p = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar$$

unde  $\Delta x = \sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle_n}$  și  $\Delta p = \sqrt{\langle \Delta p^2 \rangle_n}$ .

**4.18** Utilizând relația de incertitudine sub forma:

$$\langle p^2 \rangle \langle x^2 \rangle \geq \frac{\hbar}{4}$$

să se evalueze energia stării fundamentale a unui oscilator armonic liniar.

### 4.3 Soluții

#### 4.1

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = (\hat{A}\hat{B})\hat{C} - \hat{C}(\hat{A}\hat{B}) = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{A}\hat{C}\hat{B} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C}) + (\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A})\hat{B} = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$$

Analog se demonstrează și cea de-a doua relație.

**4.2** Explicităm comutatorul  $[\hat{x}, \hat{p}_x]$ :

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = \hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x} = x(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) - (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x})x$$

Aplicăm comutatorul (operator) asupra unei funcții de stare  $\Psi$ :

$$[\hat{x}, \hat{p}_x]\Psi = -i\hbar(x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}x)\Psi = -i\hbar(x\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{\partial(x\Psi)}{\partial x}) = -i\hbar(x\frac{\partial\Psi}{\partial x} - x\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \Psi) = i\hbar\Psi \rightarrow [\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$$

Analog se demonstrează următoarele relații:

$$[\hat{y}, \hat{p}_y] = i\hbar; \quad [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar$$

Deoarece:

$$[\hat{x}, \hat{p}_y] = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{p}_y\hat{x} = x(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y}) - (-i\hbar \frac{\hbar}{\partial y})x = -i\hbar(x\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}x)$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_y]\Psi = -i\hbar(x\frac{\partial\Psi}{\partial y} - \frac{\partial(x\Psi)}{\partial y}) = -i\hbar(x\frac{\partial\Psi}{\partial y} - x\frac{\partial\Psi}{\partial y}) = 0$$

se poate scrie în general că:

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = \begin{cases} i\hbar & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

De asemenea, se pot demonstra analog următoarele relații:

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0; \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$$

**4.3** Vom folosi rezultatele de la problema precedentă, definiția momentului cinetic precum și proprietățile comutatorilor:

$$\begin{aligned} [\hat{l}_x, \hat{x}] &= [\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \hat{x}] = [\hat{y}\hat{p}_z, \hat{x}] - \hat{z}\hat{p}_y, \hat{x}] \\ &= [\hat{y}, \hat{x}]\hat{p}_z + \hat{y}[\hat{p}_z, \hat{x}] - [\hat{z}, \hat{x}]\hat{p}_y - \hat{z}[\hat{p}_y, \hat{x}] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\hat{l}_x, \hat{y}] &= [\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \hat{y}] = [\hat{y}\hat{p}_z, \hat{y}] - \hat{z}\hat{p}_y, \hat{y}] \\ &= [\hat{y}, \hat{y}]\hat{p}_z + \hat{y}[\hat{p}_z, \hat{y}] - [\hat{z}, \hat{y}]\hat{p}_y - \hat{z}[\hat{p}_y, \hat{y}] = i\hbar\hat{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\hat{l}_x, \hat{z}] &= [\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \hat{z}] = [\hat{y}\hat{p}_z, \hat{z}] - \hat{z}\hat{p}_y, \hat{z}] \\ &= [\hat{y}, \hat{z}]\hat{p}_z + \hat{y}[\hat{p}_z, \hat{z}] - [\hat{z}, \hat{z}]\hat{p}_y - \hat{z}[\hat{p}_y, \hat{z}] = -i\hbar\hat{y} \end{aligned}$$

$$[\hat{l}_x, \hat{p}_x] = [[\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \hat{p}_x]] = [\hat{y}, \hat{p}_x]\hat{p}_z + \hat{y}[\hat{p}_z, \hat{p}_x] - [\hat{z}, \hat{p}_z]\hat{p}_y - \hat{z}[\hat{p}_y, \hat{p}_z] = 0$$

$$[\hat{l}_x, \hat{p}_y] = [[\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \hat{p}_y]] = [\hat{y}, \hat{p}_y]\hat{p}_z + \hat{y}[\hat{p}_z, \hat{p}_y] - [\hat{z}, \hat{p}_y]\hat{p}_y - \hat{z}[\hat{p}_y, \hat{p}_y] = i\hbar\hat{p}_z$$

$$[\hat{l}_x, \hat{p}_z] = [[\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \hat{p}_z]] = [\hat{y}, \hat{p}_z]\hat{p}_z + \hat{y}[\hat{p}_z, \hat{p}_z] - [\hat{z}, \hat{p}_z]\hat{p}_y - \hat{z}[\hat{p}_y, \hat{p}_z] = -i\hbar\hat{p}_y$$

$$[\hat{l}_x, \hat{l}_y] = [\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z] = [\hat{y}\hat{p}_z, \hat{z}\hat{p}_x] + [\hat{z}\hat{p}_y, \hat{x}\hat{p}_z] = i\hbar\hat{l}_z$$

$$\begin{aligned} [\hat{l}_x, \hat{l}_z] &= [\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x] = \hat{x}[\hat{y}, \hat{p}_y]\hat{p}_z + \hat{z}[\hat{p}_y, \hat{y}]\hat{p}_x \\ &= -i\hbar(\hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z) = -i\hbar\hat{l}_y \end{aligned}$$

Aceste relații precum și analoagele lor obținute prin permutări circulare, se pot scrie sub formă condensată cu ajutorul unui tensor antisimetric de ordin trei,  $l_{ikl}$ ,  $i, k, l = 1, 2, 3$ :

$$[\hat{l}_i, \hat{x}_k] = i\hbar l_{ikl}\hat{x}_l \quad [\hat{l}_i, \hat{p}_k] = i\hbar l_{ikl}\hat{p}_l \quad [\hat{l}_i, \hat{l}_k] = i\hbar l_{ikl}\hat{l}_l$$

**4.4** Vom utiliza rezultatele obținute la problema precedentă:

$$[\hat{l}_i, \hat{l}_k] = i\hbar l_{ikl}\hat{l}_l$$

astfel încât vom obține:

$$[\hat{l}_+, \hat{l}_-] = [\hat{l}_x + i\hat{l}_y, \hat{l}_x - i\hat{l}_y] = [\hat{l}_x, \hat{l}_x] - i[\hat{l}_x, \hat{l}_y] + i[\hat{l}_y, \hat{l}_x] + [\hat{l}_y, \hat{l}_y] = 2\hbar\hat{l}_z$$

$$[\hat{l}_x, \hat{l}_+] = [\hat{l}_x, \hat{l}_x + i\hat{l}_y] = [\hat{l}_x, \hat{l}_x] + i[\hat{l}_x, \hat{l}_y] = \hbar\hat{l}_+$$

Analog se demonstrează și celealte relații cerute de problemă.

**4.5** Valoarea medie a unei mărimi fizice  $A$  (observable), conform fizicii statistice, scrisă cu ajutorul operatorului asociat observabilei este:

$$\langle \hat{A} \rangle = \int_V \Psi^* \hat{A} \Psi dV$$

Vom deriva la timp această valoare medie:

$$\frac{d \langle \hat{A} \rangle}{dt} = \int_V \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \hat{A} \Psi dV + \int_V \Psi^* \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \Psi dV + \int_V \Psi^* \hat{A} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dV$$

Cu ajutorul ecuației Schrödinger dependentă de timp precum și a celei complex conjugate va rezulta:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \hat{H} \Psi \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar} (\hat{H} \Psi)^*$$

Dar  $\hat{H} = \hat{H}^*$  (hermitic) astfel încât vom putea exprima valoarea medie a observabilei  $A$  derivată la timp prin relația:

$$\begin{aligned} \frac{d \langle \hat{A} \rangle}{dt} &= -\frac{1}{i\hbar} \int_V \hat{H} \Psi^* \hat{A} \Psi dV + \int_V \Psi^* \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \Psi dV + \frac{1}{i\hbar} \int_V \Psi^* \hat{A} \hat{H} \Psi dV \\ &= \langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_V \Psi^* [\hat{A}, \hat{H}] \Psi dV \end{aligned}$$

Revenind la observabila  $A$  vom putea scrie ecuația generală care dă variația în timp a valorii medii a observabilei  $A$  este:

$$\frac{d \langle A \rangle}{dt} = \langle \frac{\partial A}{\partial t} \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle$$

Dacă operatorul asociat observabilei comută cu hamiltonianul, adică  $[\hat{A}, \hat{H}] = 0$  și de asemenea valoarea sa medie nu depinde explicit de timp,  $\langle \frac{\partial A}{\partial t} \rangle = 0$  rezultă:

$$\frac{d \langle A \rangle}{dt} = 0$$

În această situație, observabila  $A$  este, prin analogie cu mecanica clasiceă o constantă de mișcare.

**4.6** Vom particulariza ecuația generală de la problema precedentă care ne dă variația în timp a mediei unei observabile. Pentru cazul în care vom alege  $A = x$ , ținând cont că  $x$  nu depinde explicit de timp ( $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$ ), va fi satisfăcută relația:

$$\frac{d \langle x \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle \hat{x}, \hat{H} \rangle$$

În cazul nostru, al unei particule ce se mișcă în câmpul potențial  $U(x)$ , hamiltonianul asociat particulei va fi:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \hat{U}(x)$$

Vom obține în continuare:

$$[x, \hat{H}] = [\hat{x}, \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \hat{U}(x)] = \frac{1}{2m} [\hat{x}, \hat{p}_x^2] = \frac{i\hbar}{m} \hat{p}_x$$

De unde rezultă:

$$\langle p \rangle_z = m \frac{d \langle x \rangle}{dt}$$

Dacă alegem  $A = p_x$  și vom aplica ecuația generală de dependență de timp, vom obține:

$$\frac{d \langle \hat{p}_x \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{p}_x, \hat{H}] \rangle$$

Dar

$$[\hat{p}_x, \hat{H}] = [\hat{p}_x, \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \hat{U}(x)] = [\hat{p}_x, \hat{U}(x)] = -i\hbar \frac{\partial \hat{U}(x)}{\partial x}$$

$$\rightarrow \frac{d \langle p_x \rangle}{dt} = - \langle \frac{\partial U(x)}{\partial x} \rangle$$

Teoremele lui Ehrenfest constituie o ilustrare a principiului de corespondență și arată că valorile medii ale impulsului și coordonatelor satisfac relații identice cu legea lui Newton.

**4.7** Deoarece operatorul asociat impulsului este  $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ , atunci ecuația cu valori proprii corespunzătoare este:

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x} = p\Psi$$

unde  $p$  este valoarea proprie a operatorului impulsului și este o constantă. Soluția ecuației cu valori proprii va fi:

$$\Psi(x) = Ne^{\frac{i}{\hbar}px}$$

Această funcție proprie trebuie să fie mărginită, deci valoarea proprie  $p$  va fi un număr real. Orice valoare reală  $p \in (-\infty, +\infty)$  este acceptată ca valoare proprie, deci spectrul impulsului este continuu în întregime. Constanta de normare  $N$  o vom determina din condiția de normare impusă funcției proprii, sub forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(p', x)\Psi(p, x)dx = \delta(p - p')$$

$$\rightarrow N^*(p')N(p) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}x(p-p')}dx = \delta(p - p')$$

Dar, după cum se știe:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}x(p-p')}dx = 2\pi\hbar\delta(p - p')$$

În condiția de normare vom integra în raport cu  $p$ :

$$2\pi\hbar N^*(p') \int_{-\infty}^{+\infty} N(p)\delta(p - p')dp = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p - p')dp = 1$$

de unde rezultă valoarea constantei de normare  $N$ :

$$N = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

Funția proprie normată în scara parametrului  $p$  va avea forma:

$$\Psi(p, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar} px}$$

**4.8 a).** Energia unei particule nerelativiste aflate într-un potențial  $U(\vec{r})$  este, conform teoriei clasice:

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r})$$

Conform principiului de corespondență, fiecărei mărimi dinamice clasice i se asociază un operator:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}; \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \text{ grad}; \quad U(\vec{r}) \rightarrow \hat{U}(\vec{r})$$

Mărimii  $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$  i se asociază operatorul:

$$\vec{p}^2 \rightarrow -\hbar^2 \Delta = -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

Astfel, energiei totale  $E$  a particulei nerelativiste aflate în câmpul potențial scalar  $U(\vec{r})$  i se asociază operatorul:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \hat{U}(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}, t)$$

care reprezintă chiar ecuația Schrödinger temporală pentru o particulă nerezervistică.

b). Pentru o particulă relativistă se va pleca de la relația dintre energia și impulsul spațial al particulei:

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m_o^2 c^4$$

Dacă vom ține cont de forma operatorilor care se asociază mărimilor fizice prezente în formulă, vom obține următoarea ecuație:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \Delta \Psi$$

ecuație care se mai poate scrie și sub forma:

$$\left( \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \Psi(\vec{r}, t) = 0$$

unde  $\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta$  reprezintă operatorul d'Alembert asociat particulei relativiste. Ecuația obținută este cunoscută sub numele de *ecuația Klein-Gordon* și are același rol ca și ecuația Schrödinger, doar că se aplică particulelor relativiste.

c). Din punct de vedere clasic, energia unei particule aflate într-un câmp electromagnetic care derivă din potențialul vector  $\vec{A}$  și cel scalar  $\varphi$  este:

$$E = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \right)^2 + e\varphi(\vec{r}, t)$$

Conform principiului de corespondență, obținem următoarea ecuație în mecanica cuantică:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = [\frac{1}{2m}(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \vec{A})^2 + e\varphi] \Psi(\vec{r}, t)$$

Dacă vom ține cont de dezvoltarea:

$$(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 = \vec{p}^2 - \frac{e}{c} (\vec{A} \vec{p} + \vec{p} \vec{A}) + \frac{e^2}{c^2}$$

vom obține ecuația finală:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = [-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{ie\hbar}{mc} \vec{A} \text{grad} + \frac{ie\hbar}{2mc} \text{div} \vec{A} + \frac{e^2 \vec{A}^2}{c^2} + e\varphi] \Psi(\vec{r}, t)$$

**4.9** Vom scrie ecuația Schrödinger temporală pentru acest caz:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) + U_o \Psi(\vec{r}, t)$$

Vom căuta soluția acestei ecuații sub forma

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}) f(t)$$

prin metoda separării variabilelor. Înlocuind această soluție în ecuația Schrödinger de mai sus vom găsi următoarele două ecuații:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(t)} \frac{df}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} C \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}) + U_o \Psi(\vec{r}) &= C \Psi(\vec{r}) \end{aligned}$$

unde  $C$  este o constantă. Soluțiile celor două ecuații vor fi:

$$f(t) = f_o e^{\frac{i}{\hbar} C t}; \quad \Psi(\vec{r}) = A e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}}$$

Deoarece

$$\Delta e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}} = -\frac{1}{\hbar^2} \vec{p}^2 e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}}$$

va rezulta:

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} + U_o = C$$

Deci,  $\vec{p}$  este chiar impulsul particulei, iar  $C$  este energia sa totală. Soluția ecuației temporale va fi:

$$\Psi(\vec{r}, t) = A e^{\frac{i}{\hbar} [\vec{p} \cdot \vec{r} - (\frac{\vec{p}^2}{2m} + U_o)t]}$$

Această soluție verifică condițiile de mărginire și continuitate pe tot spațiul, pentru orice valori pozitive ale energiei  $C$ , deci spectrul energetic este continuu. Conform principiului suprapunerii stărilor, rezultă că soluția generală poate fi scrisă sub forma:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar} [\vec{p} \cdot \vec{r} - (\frac{\vec{p}^2}{2m} + U_o)t]} d\vec{p}$$

Deoarece energia potențială este definită până la o constantă aditivă arbitrară, se poate alege  $U_o = 0$ ; se notează  $\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$  și soluția generală devine:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - \frac{i\hbar k^2}{2m} t} d\vec{k}$$

și descrie un pachet de unde atașat particulei cuantice.

**4.10** Potențialul în care se mișcă particula este de forma:

$$U(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < L \\ \infty & x \in (-\infty, 0) \cup (L, +\infty) \end{cases}$$

Vom scrie ecuația Schrödinger atemporală pentru intervalul  $(0, L)$ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = E\Psi(x)$$

cu proprietate că  $\Psi(x) = 0$  pentru  $x \in (-\infty, 0) \cup (L, +\infty)$ .

a).  $E > 0$

Vom nota cu:

$$k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

Orice soluție continuă a ecuației unidimensionale Schrödinger (ecuație diferențială de ordin doi) se poate scrie:

$$\Psi(x) = A \sin kx + B \cos kx; \quad x \in (0, L)$$

Impunând condiția de continuitate a soluției la capetele intervalului:

$$\Psi(0) = 0 \quad \Psi(L) = 0$$

va rezulta  $B = 0$  precum și ecuația:

$$\sin kL = 0 \rightarrow k_n = n \frac{\pi}{L}, \quad n \in N^*$$

Astfel, valorile pe care le poate lua energia formează un spectru discret:

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL}, \quad n \in N^*$$

Fiecărei energii  $E_n$  îi corespunde funcția proprie:

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin n\pi \frac{x}{L}$$

Constanta  $\sqrt{\frac{2}{L}}$  a fost determinată din condiția de normare:

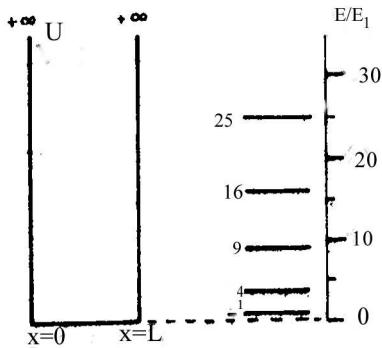
$$\int_0^L \Psi_n^*(x) \Psi_n(x) dx = 1$$

b).  $E = 0$

Soluția ecuației Schrödinger atemporală este de forma:

$$\Psi(x) = Ax + B$$

Dacă se aplică condiția de continuitate la capetele intervalului, va rezulta  $A = 0$  și  $B = 0$ , ceea ce conduce la soluția  $E = 0$ . Această soluție nu



**Fig. 4.10.1.r**

apartine însă spectrului de energii.

c).  $E < 0$

Soluția ecuației Schrödinger unidimensionale va fi în acest caz:

$$\Psi(x) = Ce^{-\chi x} + De^{\chi x}, \quad \chi = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}$$

Dar, nici această soluție nu îndeplinește condițiile de continuitate decât pentru  $C = 0$  și  $D = 0$ , astfel încât nu există valori proprii negative.

Spectrul de energii este, pentru o particulă liberă ce se mișcă pe axa  $Ox$  în intervalul  $(0, L)$ , un spectru discret și este reprezentat grafic în Fig.4.10.1. În Fig.4.10.2 sunt redate grafic funcțiile proprii corespunzătoare valorilor proprii.

**4.11** Graficul energiei potențiale este redat în Fig.4.11.1.r.

Vom studia două cazuri, și anume: a).  $0 < E < U_o$ ; b).  $E > U_o$ .

a).  $0 < E < U_o$

Ecuația Schrödinger pentru cele două regiuni  $x < 0$  și  $x > 0$  va fi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi_I}{dx^2} = E\Psi_I \quad x < 0$$

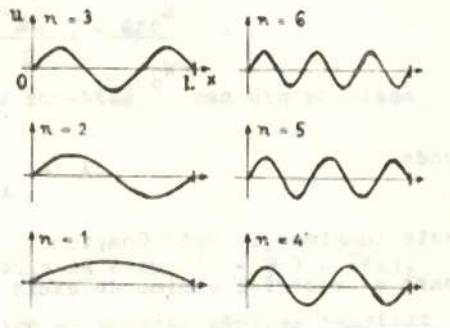


Fig. 4.10.2.r

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi_{II}}{dx^2} + U_o \Psi_{II} = E \Psi_{II} \quad x > 0$$

unde  $\Psi_I$  și  $\Psi_{II}$  sunt funcțiile proprii ale energiei; ele trebuie să fie continue, mărginite și cu derivată continuă, deci:

$$\Psi_I(0) = \Psi_{II}(0) \quad \Psi'_I(0) = \Psi'_{II}(0)$$

Vom nota prin:

$$k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

Astfel, ecuația Schrödinger pentru cazul  $x < 0$  (regiunea I) se poate scrie sub forma:

$$\frac{d^2\Psi_I}{dx^2} + k^2 \Psi_I = 0$$

ce admite soluția generală:

$$\Psi_I(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad (x < 0) \quad \text{oricare ar fi } E > 0$$

unde  $A$  și  $B$  sunt constante ce se vor determina pe parcurs. Această soluție, după cum se vede are o comportare osculatorie. Pentru cazul  $x > 0$  (regiunea

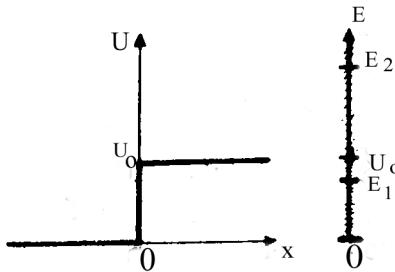


Fig. 4.11.1.r

II) vom face următoarea notație:

$$\chi \equiv \sqrt{\frac{2m(U_o - E)}{\hbar^2}}$$

iar ecuația Schrödinger se va scrie sub forma:

$$\frac{d^2\Psi_{II}}{dx^2} - \chi^2\Psi_{II} = 0$$

având soluția generală:

$$\Psi_{II}(x) = Ce^{-\chi x} + De^{\chi x} \quad (x > 0)$$

Soluția aceasta are o comportare exponențială și, pentru a îndeplini condiția de mărginire (să fie funcție proprie) trebuie ca, pentru  $x \rightarrow \infty$  funcția să se anuleze  $\rightarrow D = 0$ . Astfel, soluția generală pentru  $x > 0$  devine:

$$\Psi_{II} = Ce^{-\chi x} \quad (x > 0)$$

Aplicăm în continuare condițiile de continuitate pentru cele două soluții din cele două regiuni precum și pentru derivele lor, astfel încât vom obține un sistem de două ecuații cu trei necunoscute  $A$ ,  $B$  și  $C$ :

$$\begin{aligned} A + B &= C \\ ik(A - B) &= -\chi C \end{aligned}$$

Vom exprima două din aceste necunoscute în funcție de a treia:

$$B = \frac{k - i\chi}{k + i\chi} A \quad C = \frac{2k}{k + i\chi}$$

Notăm în continuare prin  $A' = \frac{A}{k+i\chi}$ . Funcția proprie a energiei pentru cele două regiuni se va exprima sub forma:

$$\begin{aligned}\Psi_I(x) &= A'[(k + i\chi)e^{ikx} + (k - i\chi)e^{-ikx}] & x < 0 \\ \Psi_{II}(x) &= 2kA'e^{-\chi x} & x > 0\end{aligned}$$

Se observă că, dacă  $A'$  este un număr real, atunci soluția construită este reală. Este convenabil să se introducă unghiul  $\alpha$ , definit prin:

$$\alpha \equiv \arg(k + i\chi)$$

pentru care funcțiile sin și cos au expresia:

$$\sin \alpha = \frac{\chi}{\sqrt{k^2 + \chi^2}} \quad \cos \alpha = \frac{k}{\sqrt{k^2 + \chi^2}} = \sqrt{\frac{E}{U_o}}$$

Astfel, *funcția proprie nedegenerată* a energiei pentru cazul când energia particulei cuantice este  $0 < E < U_o$ , are forma:

$$\begin{aligned}\Psi_I(x) &= N \cos(kx + \alpha) & x < 0 \\ \Psi_{II}(x) &= N \sqrt{\frac{E}{U_o}} e^{-\chi x} & x > 0\end{aligned}$$

O funcție proprie  $\Psi(x)$  este reprezentată în Fig.4.11.2.r.

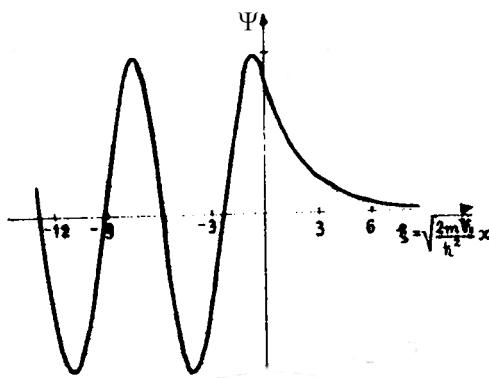


Fig.4.11.2.r

Funcția  $\Psi(x)$  nu este integrabilă în modul pătrat. Constanta  $N$  poate fi determinată dintr-o condiție de ortonormare în sens generalizat.

b).  $E > U_o$

Pentru cazul acesta, ecuația Schrödinger unidimensională este:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Psi_I}{dx^2} + k^2\Psi_I &= 0 \quad x < 0 \\ \frac{d\Psi_{II}}{dx^2} + K^2\Psi_{II} &= 0 \quad x > 0\end{aligned}$$

unde

$$K = \sqrt{\frac{2m(E - U_o)}{\hbar^2}}$$

Deci, pentru  $x < 0$  ecuația Schrödinger își păstrează expresia. Soluțiile celor două ecuații vor fi:

$$\begin{aligned}\Psi_I(x) &= Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad x < 0 \\ \Psi_{II}(x) &= Ce^{iKx} + De^{-iKx} \quad x > 0\end{aligned}$$

Dacă impunem condițiile de continuitate și mărginire, vom obține următorul sistem de două ecuații cu patru necunoscute:

$$\begin{aligned}A + B &= C + D \\ k(A - B) &= K(C - D)\end{aligned}$$

Două din cele patru necunoscute  $A, B, C$  și  $D$  se pot exprima prin celelalte două, deci, din punct de vedere matematic ecuația Schrödinger admite două funcții proprii liniar independente pentru o valoare proprie  $E > U_o$ . Pentru aplicații sunt importante cazurile  $A = 0$  și respectiv  $D = 0$  pentru care cele două funcții liniar independente sunt:

$$\Psi_I(x) = \begin{cases} Ne^{-ikx} & x < 0 \\ \frac{N}{2K}[(k + K)e^{-iKx} - (k - K)e^{iKx}] & x > 0 \end{cases}$$

$$\Psi_{II}(x) = \begin{cases} \frac{M}{2K}[(k + K)e^{ikx} + (k - K)e^{-ikx}] & x < 0 \\ Me^{iKx} & x > 0 \end{cases}$$

unde  $M$  și  $N$  sunt constante. În concluzie, valorile proprii  $E > U_o$  sunt degenerate de ordinul doi și orice funcție proprie este o combinație liniară a

funcțiilor proprii  $\Psi_I(x)$  și  $\Psi_{II}(x)$ .

Dacă  $U_o \rightarrow \infty$  se va realiza doar situația  $E < U_o$  pentru care funcția proprie va lua forma:

$$\Psi(x) = \begin{cases} N \sin kx & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Această funcție descrie mișcarea unei particule care întâlnește un perete impenetrabil.

Dacă  $U_o \rightarrow 0$  va rămâne doar cazul  $E > U_o$ . iar funcțiile proprii se pot scrie sub forma:

$$\Psi_I(x) = e^{-ikx} \quad \Psi_{II}(x) = e^{-ikx}$$

soluții corespunzătoare particulei libere,  $x \in (-\infty, +\infty)$ .

**4.12** Stările legate se obțin pentru cazul în care energia este negativă,  $-U_o < E < 0$ , iar ecuația cu valori proprii (ecuația Schrödinger) este:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi_I}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}|E|\Psi_I &= 0 & x > a \\ \frac{d^2\Psi_{II}}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[U_o - |E|]\Psi_{II} &= 0 & 0 < x < a \\ \Psi_{III} &= 0 & x < 0 \end{aligned}$$

Cu următoarele notății:

$$\alpha = \left(\frac{2m}{\hbar^2}|E|\right)^{1/2} \quad \beta = \left[\frac{2m}{\hbar^2}(U_o - |E|)\right]^{1/2}$$

funcțiile proprii vor fi de forma:

$$\Psi(x) = \begin{cases} \Psi_I = A_1 e^{\alpha x} + B_1 e^{-\alpha x} & x > a \\ \Psi_{II} = A_2 \sin \beta x + B_2 \cos \beta x & 0 < x < a \\ \Psi_{III} = 0 & x < 0 \end{cases}$$

Din condiția de anulare a funcției de undă la infinit rezultă  $A_1 = 0$ . Deci, probabilitatea  $w = |\Psi(x)|^2$  de a găsi particula în domeniul III este nulă, iar în domeniul I scade exponential cu creșterea lui  $x$  (Fig.4.12.1.r).

Din condițiile de continuitate în punctele  $x = 0$  și  $x = a$ :

$$\Psi_{II}(0) = 0; \quad \Psi_{II}(a) = \Psi_I(a); \quad \frac{d\Psi_{II}(a)}{dx} = \frac{d\Psi_I(a)}{dx}$$

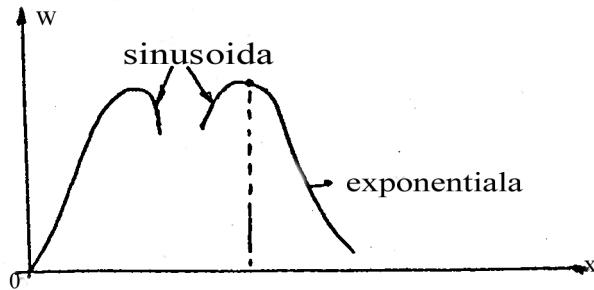


Fig. 4.12.1.r

deducem  $B_2 = 0$  și:

$$\begin{aligned} A_2 \sin \beta a &= B_1 e^{-\alpha a} \\ \beta A_2 \cos \beta a &= -\alpha B_1 e^{-\alpha a} \end{aligned}$$

Vom împăti ultimele două ecuații și vom obține *ecuația transcendentă*:

$$\beta \operatorname{ctg}(\beta a) = -\alpha$$

Vom introduce noile variabile:

$$X = \beta a \quad Y = \alpha a$$

astfel încât ecuația transcendentă devine:

$$X \operatorname{ctg}(X) = -Y$$

Se observă de asemenea că:

$$X^2 + Y^2 = \frac{2m}{\hbar^2} U_o$$

adică valorile proprii ale energiei date de:

$$E = -\frac{\hbar}{2ma^2} Y^2$$

se obțin grafic prin intersecția curbei date de ecuația transcendentă cu "cercul" de rază (fig.4.12.2.r):

$$R = \left( \frac{2m}{\hbar^2} a^2 U_o \right)^{1/2}$$

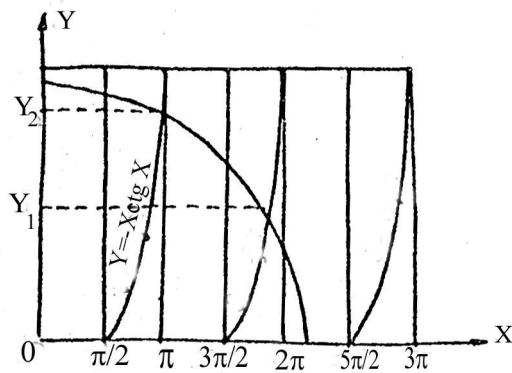


Fig. 4.12.2.r

Se observă că, dacă  $R < \frac{\pi}{2}$ , adică  $a^2 U_o < \frac{\hbar^2 \pi^2}{8m}$  nu există stări legate; condiția de existență a cel puțin unei stări legate este:

$$a^2 U_o \geq \frac{\hbar^2 \pi^2}{8m}$$

#### 4.13 a). $0 < E < U_o$

Ecuția Schrödinger, pentru cele trei zone (Fig.4.13.r) este:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Psi_I}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi_I &= 0 \quad x < 0 \\ \frac{d\Psi_{II}}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2} (U_o - E) \Psi_{II} &= 0 \quad 0 \leq x < a \\ \frac{d^2 \Psi_{III}}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi_{III} &= 0 \quad x > a \end{aligned}$$

iar soluția generală va avea expresia:

$$\Psi(x) = \begin{cases} \Psi_I(x) &= A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} \\ \Psi_{II}(x) &= A_2 e^{\chi x} + B_2 e^{-\chi x} \\ \Psi_{III}(x) &= A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx} \end{cases}$$

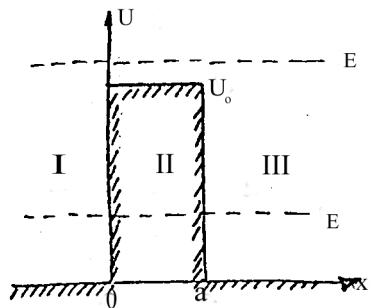


Fig. 4.13.r

unde

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \chi = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(U_o - E)}$$

Vom considera că particula se deplasează din zona I spre zona III (de la stânga spre dreapta pe axa Ox). Coeficienții  $A_1$ ,  $B_1$  și  $A_3$  reprezintă unda incidentă, unda refelctată și respectiv unda transmisă prin barieră. Deoarece în zona III nu avem undă refelctată,  $\rightarrow B_3 = 0$ .

Condițiile de continuitate pentru funcție și pentru derivata ei în punctele de delimitare a zonelor,  $x = 0$  și  $x = a$ :

$$\begin{aligned} \Psi_I(0) &= \Psi_{II}(0) & \frac{d\Psi_I(0)}{dx} &= \frac{d\Psi_{II}(0)}{dx} \\ \Psi_{II}(a) &= \Psi_{III}(a) & \frac{d\Psi_{II}(a)}{dx} &= \frac{d\Psi_{III}(a)}{dx} \end{aligned}$$

conduc la următorul sistem de patru ecuații cu cinci necunoscute:

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 &= A_2 + B_2 \\ ik(A_1 - B_1) &= \chi(A_2 - B_2) \\ A_2 e^{\chi a} + B_2 e^{-\chi a} &= A_3 e^{ika} \\ \chi(A_2 e^{\chi a} - B_2 e^{-\chi a}) &= ikA_3 e^{ika} \end{aligned}$$

Pentru a calcula reflectanța  $R$  a barierei de potențial, care este definită prin relația:

$$R = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2$$

va trebui să exprimăm raportul  $\left| \frac{B_1}{A_1} \right|$  din sistemul de continuitate. Din primele două ecuații ale sistemului vom exprima pe  $A_2$  și respectiv  $B_2$  în funcție de  $A_1$  și  $B_1$ :

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2\chi} [(A_1 + B_1)\chi + ik(A_1 - B_1)] \\ B_2 &= \frac{1}{2\chi} [(A_1 + B_1)\chi - ik(A_1 - B_1)] \end{aligned}$$

iar din ultimele două ecuații ale sistemului de continuitate, prin eliminarea lui  $A_3$  vom obține încă o ecuație:

$$A_2(ik e^{\chi a} - e^{-\chi a}) = -B_2(-e^{\chi a} + ik e^{-\chi a})$$

Am obținut astfel trei ecuații cu patru necunoscute; ne intereză însă raportul  $\left| \frac{B_1}{A_1} \right|$ . Prin înlocuiri și prin împărțire la  $A_1$  vom obține următoarea expresie pentru raportul cerut:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{(k^2 + \chi^2)(e^{\chi a} - e^{-\chi a})}{e^{\chi a}(k + i\chi)^2 - e^{-\chi a}(k - i\chi)^2}$$

*Reflectanța barierei* de potențial va fi, conform definiției:

$$R = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2 = \frac{(k^2 + \chi^2)^2 (e^{\chi a} - e^{-\chi a})^2}{|[e^{\chi a}(k + i\chi)^2 - e^{-\chi a}(k - i\chi)^2]|^2}$$

Tinând cont de expresiile pentru  $k$  și  $\chi$  precum și de faptul că  $sh(\alpha) = (e^\alpha - e^{-\alpha})/2$ , reflectanța va avea expresia finală:

$$R = \frac{U_o sh(\chi a)}{U_o^2 sh^2(\chi a) + 4E(U_o - E)}$$

iar *transparența barierei* de potențial va fi:

$$T = 1 - R = \frac{EE(U_o - E)}{U_o^2 sh^2(\chi a) + 4E(U_o - E)} \neq 0$$

Deoarece  $T \neq 0$ , particula va trece prin barieră cu o anumită probabilitate, chiar dacă energia ei, din punct de vedere clasic pare insuficientă pentru penetrarea barierei (*efect tunel*). Efectul tunel este considerabil numai dacă  $\chi a \sim 1$ . Dacă lărimea barierei  $a$  este suficient de mare încât  $a \gg \frac{1}{\chi}$ , atunci probabilitatea de penetrare a barierei scade.

b).  $E > U_o$

Ecuatia Schrödinger va fi:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Psi_I}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\Psi_I &= 0 \quad x < 0 \\ \frac{d\Psi_{II}}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_o)\Psi_{II} &= 0 \quad 0 \leq a \\ \frac{d^2\Psi_{III}}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\Psi_{III} &= 0 \quad x > a\end{aligned}$$

iar soluția generală va avea expresia:

$$\Psi(x) = \begin{cases} \Psi_I(x) &= A_1e^{ikx} + B_1e^{-ikx} \\ \Psi_{II}(x) &= A_2e^{\chi x} + B_2e^{-\chi x} \\ \Psi_{III}(x) &= A_3e^{ikx} + B_3e^{-ikx} \end{cases}$$

și admite soluția generală:

$$\Psi(x) = \begin{cases} \Psi_I(x) &= A_1e^{ikx} + B_1e^{-ikx} \\ \Psi_{II}(x) &= A_2e^{iqx} + B_2e^{-iqx} \\ \Psi_{III}(x) &= A_3e^{ikx} + B_3e^{-ikx} \end{cases}$$

unde

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad q = \sqrt{\frac{2m(E - U_o)}{\hbar^2}} = i\chi$$

Deci, după cum se observă se pot utiliza rezultatele anterioare, cu deosebirea că, în loc de  $\chi$  vom pune  $iq$ . Astfel, reflectanța  $R$  și transparenta  $T$  vor avea expresiile:

$$\begin{aligned}R &= \frac{U_o \sin^2(qa)}{U_o^2 \sin^2(qa) + 4E(E - U_o)} \neq 0 \\ T &= 1 - R = \frac{4E(E - U_o)}{U_o^2 \sin^2(qa) + 4E(E - U_o)}\end{aligned}$$

Se observă că, în acest caz ( $E > U_o$ ) reflectanța este diferită de zero, deși, conform mecanicii clasice ar trebui să fie zero.

Bariera va deveni absolut transparentă dacă  $\sin(qa) = 0$  adică  $qa = n\pi$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Această situație se realizează atunci când în interior iau naștere unde materiale staționare (rezonanță).

**4.14 a).** Fie  $\Psi(x)$  o soluție a ecuației Schrödinger corespunzătoare energiei

potențiale  $U(x)$ . Vom înlocui în ecuația Schrödinger pe  $x$  cu  $x + a$  și vom obține că:

$$\tilde{\Psi}(x) = \Psi(x + a)$$

reprezintă de asemenea o funcție proprie (satisfac ecuația cu valori proprii). Cele două funcții,  $\Psi(x)$  și  $\tilde{\Psi}(x) = \Psi(x + a)$  sunt, în cazul general, liniar-independente. Orice soluție a ecuației Schrödinger, continuă și cu derivată continuă, se poate exprima ca o combinație liniară a două soluțiilor liniar-independente  $u_1(x)$  și respectiv  $u_2(x)$ :

$$\Psi(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$$

Pentru demonstrarea proprietății a) va trebui să determinăm coeficienții  $c_1$  și  $c_2$  astfel încât să fie îndeplinită condiția:

$$\Psi(x + a) = \lambda \Psi(x)$$

deci, funcțiile  $\tilde{\Psi}(x)$  și  $\Psi(x)$  să fie proporționale. Înținând cont de  $u_1(x)$  și  $u_2(x)$  condiția de proporționalitate se va scrie:

$$c_1 \tilde{u}_1(x) + c_2 \tilde{u}_2(x) = \lambda(c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x))$$

Dar,  $\tilde{u}_1(x)$  și  $\tilde{u}_2(x)$  fiind soluții ale ecuației Schrödinger, se pot exprima prin  $u_1(x)$  și  $u_2(x)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(x) &= \alpha u_1(x) + \beta u_2(x) \\ \tilde{u}_2(x) &= \gamma u_1(x) + \delta u_2(x) \end{aligned}$$

Oricare ar fi soluțiile  $u_1(x)$  și  $u_2(x)$ , numerele  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  respectă condiția:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

condiție ce rezultă din proprietatea de independență de  $x$  a wronskianului a două soluțiilor liniar-independente ale ecuației Schrödinger corespunzătoare la aceeași valoare a parametrului  $E$  din ecuație. Pentru a determina numerele  $\alpha$  și  $\delta$ , mărimi de care avem nevoie, plecăm de la expresia soluțiilor  $\tilde{u}_1$  și  $\tilde{u}_2$  în care facem pe  $x = 0$ , și din derivele lor în care punem pe  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(0 + a) &= u_1(a) = \alpha u_1(0) + \beta u_2(0) \\ \frac{d\tilde{u}_1(0 + a)}{dx} &= \frac{du_1(a)}{dx} = \alpha \frac{du_1(0)}{dx} + \beta \frac{du_2(0)}{dx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_2(0+a) &= u_2(a) = \gamma u_1(0) + \delta u_2(0) \\ \frac{d\tilde{u}_2(0+a)}{dx} &= \frac{du_2(a)}{dx} = \gamma \frac{du_2(0)}{dx} + \delta \frac{du_2(0)}{dx}\end{aligned}$$

Din acest sistem de patru ecuații vom exprima pe  $\alpha$  și  $\delta$ :

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{u_1(a)u'_2(0) - u'_1(a)u_2(0)}{W_{12}} \\ \delta &= \frac{u_1(0)u'_2(a) - u'_1(0)u_2(a)}{W_{12}}\end{aligned}$$

unde  $W_{12}$  este wronskianul celor două soluții  $u_1$  și  $u_2$ :

$$W_{12} = u_1(0)u'_2(0) - u_2(0)u'_1(0)$$

Pentru determinarea coeficienților  $c_1$  și  $c_2$  vom apela la condiția de proporționalitate:

$$\begin{aligned}\alpha c_1 + \gamma c_2 &= \lambda c_1 \\ \beta c_1 + \delta c_2 &= \lambda c_2\end{aligned}$$

care reprezintă un sistem omogen de ecuații pentru determinarea coeficienților  $c_1$  și  $c_2$ . Soluția nebanală admisă de sistem este:

$$\lambda^2 - (\alpha + \delta)\lambda + 1 = 0$$

ce admite la rândul ei soluțiile  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$ . Proprietatea de proporționalitate ar fi posibilă dacă:

$$\lambda = \lambda_1 \quad \text{sau} \quad \lambda = \lambda_2$$

unde  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$  au proprietățile:

$$\begin{aligned}\lambda_1 \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= \alpha + \delta\end{aligned}$$

Este important de observat că suma  $\alpha + \delta$ , deci și  $\lambda_1 + \lambda_2$  nu depinde decât de valoarea parametrului  $E$  și nu depinde de soluțiile particulare  $u_1(x)$  și  $u_2(x)$  de care ne servim la rezolvarea problemei.

Pentru fiecare valoare a lui  $\lambda$  sistemul coeficienților ne furnizează o valoare pentru raportul coeficienților  $c_1$  și  $c_2$ , și deci, o funcție  $\Psi(x)$  care satisfac condiția de periodicitate. Vom nota prin  $\Psi_1(x)$  și  $\Psi_2(x)$  soluțiile corespunzătoare lui  $\lambda_1$  și respectiv lui  $\lambda_2$ . Aceste soluții se numesc *soluții Floquet* și sunt liniar-independente. Deci, în concluzie putem afirma că orice soluție a ecuației Schrödinger în cazul unui câmp periodic, se poate exprima

ca o combinație de soluții Floquet.

b). La punctul anterior am considerat soluțiile continue și cu derivată continuă; ele există pentru orice valoare a parametrului  $E$  din ecuație. Funcțiile proprii ale energiei trebuie să fie mărginite; asemenea soluții nu există însă pentru orice valoare a lui  $E$ . Soluțiile Floquet sunt nemărginite pentru  $x \rightarrow +\infty$  sau  $x \rightarrow -\infty$ , cu excepția cazului în care  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ . Cum însă produsul lor  $\lambda_1\lambda_2 = 1$  rezultă că, valorile posibile ale energiei sunt numai acelea pentru care:

$$|\lambda| = 1$$

c). Dacă  $E$  este valoarea proprie a energiei, atunci, conform punctului b) vom putea scrie:

$$\lambda_1 = e^{iKa}; \quad \lambda_2 = e^{-iKa}, \quad K \in [-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$$

Vom indexa cu  $K$  soluția Floquet corespunzătoare lui  $\lambda_1$ ,  $\Psi_K(x)$ . Dar, funcția:

$$u_K(x) = e^{-iKx}\Psi_K(x)$$

se bucură de proprietatea:

$$u_K(x+a) = u_K(x)$$

Deci, funcțiile proprii ale energiei de tip Floquet sunt de forma:

$$\Psi_K(x) = e^{iKx}u_K(x) \quad \text{cu} \quad u_K(x+a) = u_K(x)$$

ceea ce reprezintă chiar *teorema Bloch*.

d). Dacă  $|\lambda| = 1$ , și numai în acest caz, avem:

$$|\lambda + \frac{1}{\lambda}| \leq 2$$

unde  $\lambda$  este o funcție de energie. Pe de altă parte, de la punctele anterioare știm că  $\lambda + \frac{1}{\lambda} = \alpha + \delta$ . Astfel, condiția de inegalitate de mai sus se poate scrie:

$$|f(E)| \leq 1$$

Valorile lui  $E$  pentru care este satisfăcută această ultimă inegalitate formează porțiuni compacte pe axa energiei, numite *benzi de energie*. Ele sunt separate prin intervale în care condiția nu este îndeplinită, numite *zone interzise*. Deci, spectrul de energii al unei particule aflate într-un câmp periodic are o structură de benzi.

**4.15** Vom studia două cazuri:

a).  $0 < E < U_o$

În acest caz (Fig. 4.15.r) soluția generală a ecuației Schrödinger pe intervalul  $(0, a + b)$  este:

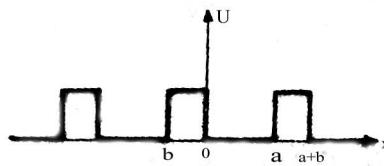


Fig. 4.15.r

$$u(x) = \begin{cases} C_1 sh(k_1 x) + C_2 ch(k_1 x) & 0 \leq x < b \\ D_1 \cos(kx) + D_2 \sin(kx) & b \leq x \leq a+b \end{cases}$$

unde

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m(U_o - E)}{\hbar^2}} \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

Pentru simplitate vom alege

$$\begin{aligned} u_1(x) &= sh(k_1 x) & 0 \leq x \leq a \\ u_2(x) &= ch(k_1 x) & 0 \leq x \leq a \end{aligned}$$

Impunând condiția de continuitate a funcțiilor și a derivatei lor în  $x = a$  vom găsi, după transformări simple:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= sh(k_1 a) \cos k(x - a) + \frac{k_1}{k} ch(k_1 a) \sin k(x - a) & a \leq x \leq a + b \\ u_2(x) &= ch(k_1 a) \cos k(x - a) + \frac{k_1}{k} sh(k_1 a) \sin k(x - a) & a \leq x \leq a + b \end{aligned}$$

Folosind expresia wronskianului  $W_{12}$  din problema precedentă vom găsi  $W_{12} = -k_1$ , iar pentru funcția  $f(E)$  expresia:

$$f(E) = ch(k_1 a) \cos kb + \frac{1}{2} \left( \frac{k_1}{k} - \frac{k}{k_1} \right) sh(k_1 a) \sin kb$$

b).  $E > U_o$

Vom lucra cu soluții particulare la fel ca și în cazul a):

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \sin k_2 x & 0 \leq x \leq a \\ u_2(x) &= \cos k_2 x & \leq x \leq a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \sin k_2 a \cos k(x-a) + \frac{k_2}{k} \cos k_2 a \sin k(x-a) & a \leq x \leq a+b \\ u_2(x) &= \cos k_2 a \cos k(x-a) - \frac{k_2}{k} \sin k_2 a \sin k(x-a) & a \leq x \leq a+b \end{aligned}$$

unde

$$k_2 = \sqrt{\frac{2m(E - U_o)}{\hbar^2}}$$

Astfel, vom găsi pentru  $f(E)$  expresia:

$$f(E) = \cos k_2 a \cos kb - \frac{1}{2} \left( \frac{k_2}{k} + \frac{k}{k_2} \right) \sin k_2 a \sin kb$$

**4.16** Pentru un oscilator liniar armonic de sarcină  $q$  aflat în câmpul electric  $E$ , ecuația Schrödinger va avea forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{k}{2} \left( x - \frac{qE}{k} \right)^2 u = \left( E + \frac{q^2 E^2}{2k} \right) u$$

Vom nota prin  $x' = x - q \frac{E}{k}$  noua variabilă, astfel încât ecuația Schrödinger devine:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2u}{dx'^2} + \frac{k}{2} x'^2 u = W u$$

unde

$$W = E + \frac{q^2 E^2}{2k}$$

Ecuatia obtinuta este chiar ecuatie unui oscilator liniar armonic, deci valorile proprii pentru  $W$  vor fi:

$$W_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\rightarrow E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{q^2E^2}{2k}$$

Spectrul de energii este in intregime discret si rezulta prin deplasarea cu  $-\frac{q^2E^2}{2k}$  a spectrului de energii al oscilatorului liniar armonic. Deci, valorii proprii  $E_n$  ii corespunde functia proprie:

$$u_n(x) = N_n e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(x - \frac{qE}{k})^2} H_n(\alpha(x - \frac{qE}{k}))$$

**4.17** Deoarece functiile de unda ale oscilatorului liniar armonic au paritati bine determinate, se poate observa ca in orice stare cuantica este valabila relatia:

$$\langle x \rangle_n = \langle p \rangle_n = 0$$

Deci,

$$\begin{aligned} \langle \Delta x^2 \rangle_n &= \langle x^2 \rangle_n - \langle x \rangle_n^2 = \langle x^2 \rangle_n \\ \langle \Delta p^2 \rangle_n &= \langle p^2 \rangle_n \end{aligned}$$

Cum insa:

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle_n &= \frac{E_n}{m\omega^2} = (n + 1/2) \frac{\hbar}{m\omega} \\ \langle p^2 \rangle_n &= mE_n = (n + 1/2)m\hbar\omega \end{aligned}$$

In concluzie se poate scrie:

$$\Delta x \Delta p = (n + 1/2)\hbar$$

Se poate observa ca functia de unda corespunzatoare starii fundamentale a oscilatorului minimizeaza relatia de nedeterminare ( $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$ ). Deci, in aceasta stare se realizeaza simultan, cu cea mai mare precizie coordonata si impulsul.

**4.18** Valoarea medie a energiei este:

$$\langle H \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \langle x^2 \rangle$$

unde  $m$  este masa oscilatorului, iar  $\omega$  este pulsăția sa proprie. Din relația de incertitudine va rezulta:

$$\langle p^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4 \langle x^2 \rangle}$$

care, înlocuită în expresia energiei medii va rezulta:

$$\langle H \rangle = \frac{\hbar^2}{8m \langle x^2 \rangle} + \frac{m\omega^2}{2} \langle x^2 \rangle = f(\langle x^2 \rangle)$$

Vom alege pe  $\langle x^2 \rangle$  astfel încât să corespundă minimului energiei, deci să fie îndeplinită condiția:

$$\begin{aligned} \frac{df(\langle x^2 \rangle)}{d \langle x^2 \rangle} &= -\frac{\hbar}{8m(\langle x_o^2 \rangle)^2} + \frac{m\omega^2}{2} = 0 \\ \rightarrow \langle x_o \rangle^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega} \end{aligned}$$

Înlocuim această valoare în expresia lui  $f$  și vom obține energia stării fundamentale:

$$E_o = \frac{\hbar\omega}{2}$$

ceea ce coincide cu rezultatul general  $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$  când  $n = 0$ .