Cap.3. Elemente de teoria timpului şi spaţiului (Teoria Relativităţii)

3A. Partea de Fizică Generală

După cum s-a constatat în cadrul Capitolului 2, definiţia modernă a timpului necesită utilizarea unor pulsuri electromagnetice. Din acest motiv, studiul teoriei moderne a timpului şi spaţiului (teoriei relativităţii) trebuie să pornească de la ecuaţia propagării pulsurilor. Ţinând seamă că – în general – mediile sunt neomogene, reiese că ecuaţia de bază necesară este ecuaţia diferenţială a propagării pulsurilor în asemenea medii.

§3A.1. Deducerea ecuaţiei diferenţiale a propagării pulsurilor în medii nedispersive, neabsorbante, dar neomogene

Pentru a simplifica studiul nostru, vom examina aici deducerea ecuaţiei diferenţiale a propagării pulsurilor în medii neomogene, presupunând însă că aceste medii sunt nedispersive şi neabsorbante, precum şi că propagarea se produce în lungul dreptei OX (de cosinuşi directori α, β şi γ, faţă de axele ortogonale Ox, Oy şi Oz). Luând în consideraţie dependenţa vitezei propagării pulsului de coordonata X: $V=V(X)$, reiese că durata propagării pulsului din originea O, până în punctul de observaţie M (de coordonată X) este: $\int_0^X \frac{dX}{V(X)}$.

Dacă ecuaţia pulsului în origine este: $p(0,t)=f(t)$, luând în consideraţie de asemenea caracterul staţionar, nedispersiv şi neabsorbant al mediului de propagare, precum şi propagarea (nedifuzivă) în linie dreaptă a pulsului, reiese că ecuaţia integrală a propagării pulsului este:

$$p(x,t) = f\left(t - \int \frac{dX}{V(X)}\right) = f\left(t - \int \frac{\alpha \cdot dx + \beta \cdot dy + \gamma \cdot dz}{V(X)}\right) \tag{3A.1.1}$$

Notând momentul retardat (întârziat, la care porneşte pulsul din originea O pentru a ajunge în punctul M de observaţie la momentul t) prin:

$$\tau \equiv [t] = t - \int \frac{dX}{V(X)} = t - \int \frac{\alpha \cdot dx + \beta \cdot dy + \gamma \cdot dz}{V(X)} \tag{3A.1.2}$$

rezultă că:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{d\tau^2} \tag{3A.1.3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{df}{d\tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} = -\frac{\alpha}{V(X)} \cdot \frac{df}{d\tau} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha}{V(X)}\right) \cdot \frac{df}{d\tau} + \frac{\alpha^2}{V^2} \cdot \frac{d^2 f}{d\tau^2} \tag{3A.1.4}$$

Ţinând seamă că ordinul de mărime al cosinuşilor directori este uzual 1 ($\alpha, \beta, \gamma \le 1$), reiese că ordinul de mărime al modulului raportului termenilor din partea dreaptă a ultimei relaţii (3A.1.4) este:

$$\left|\frac{I}{II}\right| \approx V^2 \left| \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{1}{V(X)}\right) \cdot \frac{df}{d\tau} \cdot \left(\frac{d^2 f}{d\tau^2}\right)^{-1} \right| = \left| \frac{df}{d\tau} \cdot \left(\frac{d^2 f}{d\tau^2}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial X}\big(V(X)\big) \right| \tag{3A.1.5}$$

În scopul evidenţierii naturii fizice a acestui ordin de mărime, vom considera în continuare cazul particular al unui puls armonic: $f(\tau)=A.\sin(\omega\tau)$. Deoarece ordinul uzual de mărime al $tg(\omega\tau)$ este de asemenea 1, reiese că ordinul de mărime al modulului raportului primelor 2 derivate este:

$$\left| \frac{df}{d\tau} \cdot \left(\frac{d^2 f}{d\tau^2}\right)^{-1} \right| \approx \frac{1}{\omega} \tag{3A.1.6}$$

Deoarece pulsurile armonice sunt printre cele tipice, se constată că ordinul de mărime al modulului raportului dintre termenii membrului drept al ultimei relaţii (3A.1.4) este:

$$\left|\frac{I}{II}\right| \approx \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V(X)}{\omega}\right)\right| = \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)\right| = Bkw \qquad (3A.1.7)$$

În limitele Fizicii clasice: *Bkw<<1* (v.Secţiunea 1.5.c), deci *ecuaţia diferenţială a propagării pulsurilor în asemenea medii (nedispersive, neabsorbante şi slab neomogene)* este:

$$\Delta p \equiv \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{V^2} \cdot \frac{d^2 f}{d\tau^2} = \frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \qquad (3A.1.8)$$

unde Δp reprezintă aplicaţia operatorului lui Lagrange:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (3A.1.9)$$

asupra funcţiei (ecuaţia integrală) care descrie dependenţa de timp a pulsului.

În cazul mediilor omogene: *V=const.(x,y,z)*, deci *ecuaţia diferenţială a propagării pulsurilor în medii ideale* este:

$$[\ ]p \equiv \Delta p - \frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \qquad (3A.1.10)$$

unde:

$$[\ ] = \Delta - \frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \qquad (3A.1.11)$$

este *operatorul lui d'Alembert* (generalizare a operatorului lui Lagrange pentru spaţiile 4D(imensionale)), iar:

$$x_1 = x\,, \quad x_2 = y\,, \quad x_3 = z\,, \text{ iar } x_4 = iVt$$

§3A.2. Principiile Teoriei Relativităţii Restrânse (Speciale)

După cum s-a arătat deja în cadrul Secţiunii 1.5.c, viteza propagării undelor electromagnetice în spaţiul liber (vid, cu câmpuri de interacţiuni absente sau suficient de slabe) are o valoare constantă: c=299792,5 km/s.

Experienţele efectuate au arătat că această viteză este aceeaşi pentru orice referenţial inerţial (nu se compune cu viteza de transport a referenţialului inerţial, Michelson-Morley [1]) şi că nu este posibil să fie atinse viteze mai mari decât această limită (experienţele lui Kaufmann [2] şi – respectiv - Bertozzi [3]). Pornind de la rezultatele experimentale obţinute şi de la bine-cunoscuta metodă (a Fizicii) a inducţiei incomplete, pot fi obţinute *principiile teoriei relativităţii restrânse (speciale)*. Enunţurile acestor principii sunt prezentate în continuare.

Principiul 1 (al vitezei limită a vitezei de deplasare a corpurilor, respectiv de propagare a interacţiunilor şi – respectiv – informaţiilor), care cuprinde următoarele părţi:

a) Există o limită superioară a vitezelor de propagare, egală cu viteza undelor (şi pulsurilor) electromagnetice în spaţiul liber (*c*),
b) Viteza undelor (şi pulsurilor) electromagnetice în spaţiul liber este egală cu *c* faţă de orice referenţial inerţial (această viteză nu se compune cu viteza de transport a referenţialului inerţial).

Principiul (II, al) "relativităţii", care afirmă că:

"Expresia ecuaţiei propagării undelor (sau pulsurilor) electromagnetice în spaţiul liber este aceeaşi faţă de orice referenţial inerţial".

În fine, *principiul (III, al) "corespondenţei"* afirmă că:

"Pentru viteze foarte mici faţă de viteza pulsurilor electromagnetice în spaţiul liber: $v<<c$, expresiile teoriei relativităţii sunt aproximate cu înaltă precizie de (se particularizează în) expresiile corespunzătoare ale Fizicii nerelativiste".

§3A.3. Deducerea ecuaţiilor transformărilor Lorentz

a) Proprietăţi generale ale transformărilor Lorentz

Prin definiţie, transformarea care "leagă" vectorii "deplasare":

$$d\bar{r}' \equiv \begin{pmatrix} dx_1' = dx' \\ dx_2' = dy' \\ dx_3' = dz' \\ dx_4' = icdt' \end{pmatrix}, \quad d\bar{r} \equiv \begin{pmatrix} dx_1 = dx \\ dx_2 = dy \\ dx_3 = dz \\ dx_4' = icdt \end{pmatrix}, \qquad (3A.3.1)$$

corespunzând referenţialelor inerţiale R', respectiv R:

$$d\bar{r}' = \overline{\overline{L}} \cdot d\bar{r}\ , \text{ echivalentă cu: } dx_j' = \sum_i L_{ij} dx_i \qquad (3A.3.2)$$

este numită *transformare Lorentz*, iar L este *matricea transformării lui Lorentz.*

Pentru a deduce această matrice folosind principiul relativităţii, este necesar să găsim mai întâi relaţia matematică dintre operatorii lui d'Alembert faţă de referenţialele inerţiale R' şi R. În acest scop, vom porni de la faptul că:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial x_j'}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j'} = \sum_j L_{ji} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j'} \qquad (3A.3.3)$$

Pentru a obţine şi termenii nediagonali ai expresiei operatorului de ordinul al doilea, vom folosi expresia (3A.3.3) cu indici de sumare diferiţi:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \sum_j \frac{\partial x_j'}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j'} \left(\sum_k \frac{\partial x_k'}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k'} \right) = \sum_{j,k} L_{ji} \cdot \frac{\partial L_{ki}}{\partial x_j'} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k'} + \sum_{j,k} L_{ji} L_{ki} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_j' \partial x_k'}\ , \qquad (3A.3.4)$$

deci operatorul lui d'Alembert corespunzând coordonatelor spaţiale şi timpului din referenţialul R pot fi exprimate prin operatorii corespunzând referenţialului inerţial R' în baza relaţiei:

$$[\ ] = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \sum_{i,j,k} L_{ji} \cdot \frac{\partial L_{ki}}{\partial x_j'} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k'} + \sum_{i,j,k} L_{ki} \cdot L_{ij}^T \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_j' \partial x_k'} \qquad (3A.3.5)$$

În conformitate cu expresia (3A.1.10) şi cu principiul relativităţii, ecuaţiile propagării pulsului electromagnetic faţă de referenţialele inerţiale R şi R' sunt:

$$[\ ]p = 0, \quad [\ ]' p = 0 \qquad (3A.3.6)$$

Pentru a obţine – cu ajutorul relaţiei (3A.3.5) - cea de a prima ecuaţie (3A.3.6), pornind de la ecuaţia propagării pulsurilor electromagnetice faţă de referenţialul inerţial R', este necesar să fie eliminaţi mai întâi operatorii de primul ordin din expresia (3A.3.5) a operatorului lui d'Alembert. În acest scop, este necesar ca:

$$\frac{\partial L_{ki}}{\partial x_j'} = 0 \qquad (3A.3.7)$$

deci *elementele matricilor transformărilor lui Lorentz nu depind de coordonatele din spaţiul 4-dimensional (Minkowski): x, y, z, ict.* Rezultă că *transformările lui Lorentz sunt liniare.*

În final, pentru a elimina operatorii de ordinul 2 nediagonali din expresia (3A.3.5) a operatorului lui d'Alembert şi a asigura "echivalenţa" celor 2 operatori d'Alembert, este necesar:

$$\sum_i L_{ki} \cdot L_{ij}^T = \delta_{kj} \qquad (3A.3.8)$$

unde *simbolul lui Kronecker* este definit prin relaţiile:

$$\delta_{kj} = 1 \text{ pentru } k = j, \quad \delta_{kj} = 0 \text{ pentru } k \neq j.$$

Ecuaţia (3A.3.8) poate fi scrisă în forma echivalentă:

$$\overline{\overline{L}} \cdot \overline{\overline{L}}^T = \overline{\overline{1}}_4 \qquad (3A.3.9)$$

unde ultima matrice din relaţia precedentă este *matricea unitate de ordinul 4*. Relaţia (3A.3.9) evidenţiază că *matricile transformărilor Lorentz sunt unitare.*

b) Expresii particulare ale matricilor transformărilor Lorentz

Pentru a simplifica deducerea matricilor transformărilor Lorentz, vom considera o alegere convenabilă a axelor *O'x'y'z', Oxyz* ale celor 2 referenţiale inerţiale, cu axele *O'x', Ox* paralele cu direcţia vitezei relative de transport a referenţialului *R'* faţă de referenţialul *R* (v.fig.3A.3.1).

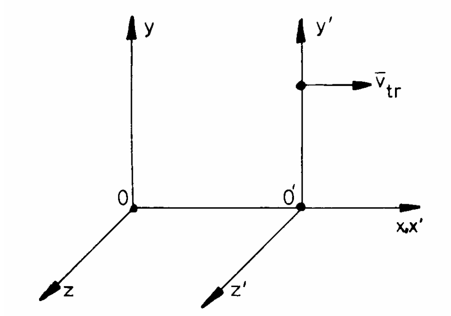

Fig. 3A.3.1

Desigur, celelalte axe vor fi alese în planul perpendicular pe axele *Ox* şi *O'x'*, drept 2 perechi de axe paralele, axele din fiecare pereche fiind perpendiculare pe axele celeilalte perechi:

$$(O'y' \| Oy) \perp (O'z' \| Oz)$$

Ţinând seamă de simetria spaţiului (liber) în jurul direcţiei vitezei relative de transport a referenţialului *R'* faţă de referenţialul *R*, reiese că:

$$y' = y \text{ şi: } z' = z. \qquad (3A.3.10)$$

După cum este cunoscut (v.şi paragraful 2.4), transformările unitare pot fi rotaţii, translaţii sau/şi oglindiri. Deoarece translaţiile şi oglindirile în spaţiul (*x,ict*) nu au legătură cu relativitatea, reiese că *transformările Lorentz corespund unor rotaţii în spaţiul (x,ict).*

Ţinând seamă că matricea rotaţiilor axelor de coordonate în spaţiul real 2D(imensional) este (v. de asemenea capitolul 2, problema 2.4.1):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

reiese că matricea rotaţiilor în planul complex (*x,ict*) va avea o structură similară, dar – în general – va conţine elemente complexe:

$$d\bar{r}_2' \equiv \begin{pmatrix} dx' \\ icdt' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa & \sigma \\ -\sigma & \kappa \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ icdt \end{pmatrix} \equiv \overline{\overline{L}}_2 \cdot d\bar{r}_2 \text{, unde: } \det \overline{\overline{L}}_2 = +1 \qquad (3A.3.11)$$

Deoarece elementele matricilor transformărilor Lorentz sunt constante (v.relaţia (3A.3.7)), reiese că aceste matrici descriu de asemenea transformările înseşi coordonatelor (*x,y,z,*ict) ale spaţiului Minkowski:

$$\bar{r}_2' \equiv \begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa & \sigma \\ -\sigma & \kappa \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix} \equiv \overline{\overline{L}}_2 \cdot d\bar{r}_2 \qquad (3A.3.11')$$

Aplicând relaţiile (3A.3.11') originii *O'* a referenţialului *R'* (v.figura 3A.3.2), se obţine:

$$\kappa \cdot x_{O'} + \sigma \cdot ict_{O'} = x'_{O'} = 0 \text{, deci: } \frac{\sigma}{\kappa} = -\frac{x_{O'}}{ict_{O'}} = \frac{iv}{c} = i\beta \qquad (3A.3.12)$$

unde v este viteza relativă de transport a originii *O'* faţă de referenţialul inerţial *R*.

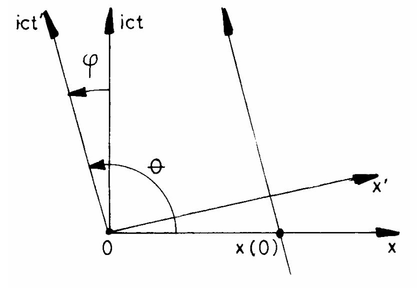

Fig. 3A.3.2

Ţinând seamă că transformările Lorentz sunt unitare şi "proprii" (determinantul matricii transformării fiind egal cu *+1*), se obţine:

$$det\,\overline{\overline{L}}_2 = \begin{vmatrix} \kappa & \sigma \\ -\sigma & \kappa \end{vmatrix} = \kappa^2 + \sigma \;\; = 1 \qquad (3A.3.13)$$

Din relaţiile (3A.3.12) şi (3A.3.13), se obţine:

$$\kappa = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{, şi } \sigma = \frac{\pm i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (3A.3.14)$$

Introducând aceste expresii în relaţiile (3A.3.11'), se obţine:

$$x' = \pm \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad .$$

Comparând particularizarea ultimei expresii pentru $\beta \ll 1$ cu principiul Galilei al relativităţii:

$$x' = x - vt \,, \qquad (3A.3.15)$$

se găseşte - în conformitate cu principiul corespondenţei – că numai semnul "+" este valabil, deci relaţiile (3A.3.14) capătă forma lor finală :

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \alpha \text{, şi } \sigma = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv i\beta\alpha \qquad (3A.3.16)$$

unde α si β sunt criteriile de similitudine ale lui Einstein, corespunzând teoriei relativităţii restrânse.

Se constată astfel că *expresia matricii transformării Lorentz corespunzând unei viteze relative de transport în lungul direcţiei comune a axelor Ox, O'x'* este:

$$\overline{\overline{L}}(v \cdot \overline{1}_x) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & i\alpha\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\alpha\beta & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad (3A.3.17)$$

Din relaţiile (3A.3.11') reiese că ecuaţiile transformărilor lui Lorentz sunt:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{, şi } t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (3A.3.18)$$

Desigur, putem considera de asemenea *transformarea Lorentz inversă*, care exprimă coordonatele faţă de referenţialul *R* prin coordonatele corespunzătoare referenţialului *R'*:

$$\bar{r}_2 \equiv \begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix} = \overline{\overline{L}}_2(-v\cdot \overline{1}_x)\cdot \bar{r}_2' = \begin{pmatrix} \alpha & -i\alpha\beta \\ i\alpha\beta & \alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix} \tag{3A.3.19}$$

Se obţin astfel următoarele *ecuaţii scalare ale transformării Lorentz inverse*:

$$x = \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \text{ şi } t = \frac{t'+\frac{v}{c^2}\cdot x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3A.3.18'}$$

§3A.4. Elemente de cinematică relativistă

a) Liniile de Univers

În cadrul Secţiunii 3A.3b (v.şi Figura 3A.3.1), am constatat deja că reprezentarea în spaţiul Minkowski (*x,ict*) a mişcării originii *O'* a referenţialului inerţial *R'*, în lungul direcţiei comune a axelor *Ox* şi *O'x'*:

$$x_{O'} = v\cdot t \tag{3A.4.1}$$

este dată de axa *O,ict',* deoarece în lungul acestei axe: *x'=0*, ceeace corespunde stării de repaus a originii *O'* faţă de referenţialul *R'.* Să considerăm acum mişcarea unui punct material liber *M* faţă de referenţialul inerţial *R*:

$$x_M(t) = x(0) + v\cdot t \tag{3A.4.2}$$

unde *v* este viteza acestui punct material. Ţinând seamă că această ecuaţie poate fi scrisă în forma:

$$x_{O''} = v\cdot t \tag{3A.4.1'}$$

unde *O"* este o altă origine a aceluiaşi referenţial *R'*, aleasă astfel încât coordonata sa iniţială *x* (la *t=0*) este egală cu *x*(0)*,* rezultă că reprezentarea ecuaţiei (3A.4.2) în spaţiul Minkowski (*x,ict*) este o dreaptă paralelă cu axa *O,ict'*, care intersectează axa *Ox* într-un punct de coordonată *x*(0). Această dreaptă este numită *linia de Univers a punctului material liber M.*

Dacă θ este argumentul real al axei *O,ict'*, avem:

$$tan\,\theta = \frac{c\cdot t}{-x} = -\frac{c}{v} \;,$$

deci unghiul φ format de această axă cu axa *O,ict* este dat de expresia:

$$tan\,\varphi = tan(\theta - \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{tan\,\theta} = \beta \tag{3A.4.3}$$

Deoarece $\beta\in[-1,1]$, rezultă că *liniile de Univers care corespund mişcărilor unor diferite puncte materiale formează (cu axa Ox) unghiuri* θ *cuprinse în intervalul:*

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$$

b) ***Intervalul relativist; invarianţa şi semnificaţia sa fizică***

Să considerăm 2 evenimente fizice:

$$E_1(\bar{r}_1, t_1),\; E_2(\bar{r}_2, t_2),$$

fiecare caracterizat de vectorul său de poziţie şi de momentul corespunzător, faţă de referenţialul inerţial ales *R*. Prin definiţie, intervalul relativist spaţiu-timp este:

$$\Delta s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + \left[ic(t_2 - t_1)\right]^2 = \Delta\bar{r}_4^T \cdot \Delta\bar{r} \tag{3A.4.4}$$

unde:

$$\Delta\bar{r}_4^T \equiv \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, ic(t_2 - t_1)\right) \qquad (3A.4.5)$$

este transpusul vectorului de poziţie al punctului reprezentativ al celui de al doilea eveniment, faţă de punctul reprezentativ al primului eveniment în spaţiul 4D(imensional) al lui Minkowski: (*x,y,z,ict*). Acelaşi interval relativist spaţiu-timp are – faţă de referenţialul *R'* – expresia:

$$\Delta s'^2 = \Delta\bar{r}_4^{'T} \cdot \Delta\bar{r}_4^{'} = \left(\overline{\overline{L}} \cdot \Delta\bar{r}_4\right)^T \cdot \overline{\overline{L}} \cdot \Delta\bar{r}_4 = \Delta\bar{r}_4^T \cdot \overline{\overline{L}}^T \cdot \overline{\overline{L}} \cdot \Delta\bar{r}_4 = \Delta\bar{r}_4^T \cdot \Delta\bar{r}_4 = \Delta s^2 \ ,$$

deci *intervalul relativist spaţiu-timp este invariant faţă de transformările lui Lorentz* (are aceeaşi valoare faţă de orice referenţial).

Având în vedere că:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{21}^2 \qquad (3A.4.6)$$

este pătratul distanţei dintre punctele reprezentative ale celor 2 evenimente fizice considerate faţă de referenţialul *R*, rezultă că:

$$\Delta s_{21}^2 = l_{21}^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 \qquad (3A.4.7)$$

Se constată astfel că *există 3 tipuri de perechi de evenimente fizice:*

(i) *evenimentele cauzal independente*, pentru care:

$$\Delta s_{21}^2 > 0,$$

deoarece – în conformitate cu primul principiu (privind existenţa unei limite superioare a vitezelor de propagare a interacţiunilor) al teoriei relativităţii restrânse – nu este posibil ca:

$$l_{21} > c|t_2 - t_1|$$

(ii) *evenimentele posibil corelate cauzal prin intermediul interacţiunilor electromagnetice*, pentru care intervalul relativist spaţiu-timp este nul, deoarece aceste evenimente corespund relaţiei:

$$l_{21} = c|t_2 - t_1|$$

deci singura interacţiune care poate corela (drept cauză şi efect) cele 2 evenimente fizice considerate este cea electromagnetică,

(iii) *evenimentele fizice posibil corelate cauzal, inclusiv prin interacţiuni diferite de cele electromagnetice*, care satisfac condiţia:

$$\Delta s_{21}^2 < 0$$

deoarece pentru asemenea perechi de evenimente avem:

$$l_{21} < c|t_2 - t_1|$$

deci este posibil să intervină interacţiuni cu viteze de propagare mai mici decât *c*.

Generalizând aceste constatări pentru evenimente fizice aflate în spaţii 2D(imensionale) (v. Figura 3A.4.1) sau în spaţii 3D, se constată că:

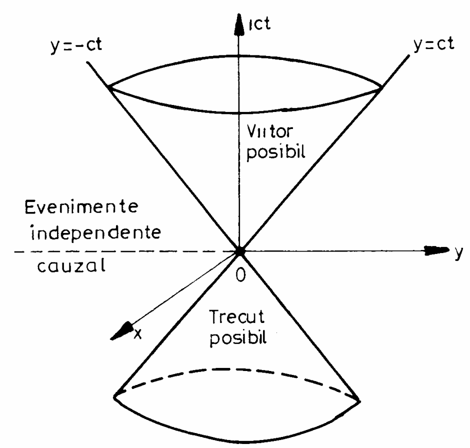

Fig. 3A.4.1

(i) evenimentele ale căror puncte reprezentative sunt situate în partea de sus a conului ale cărui generatoare formează unghiul $\theta=\pi/4$ cu axa *O,ict*, pot reprezenta posibile stări viitoare (efecte) ale evenimentului produs la momentul $t=0$ în origine: $x=y\ (=z)=0$,

(ii) evenimentele ale căror puncte reprezentative sunt situate în partea de jos a conului ("luminos") mai sus descris pot reprezenta posibile stări anterioare (cauze) ale evenimentului produs la momentul $t=0$ în origine,

(iii)evenimentele ale căror puncte reprezentative sunt situate în afara conului ("luminos") descris mai sus sunt cauzal independente faţă de evenimentul produs în origine la momentul $t=0$, deoarece intervalele lor relativiste (spaţiu-timp) corespunzătoare sunt pozitive.

c) Relativitatea Sincronismului

Considerăm 2 evenimente diferite:

$$E_1\ (x_1, t_1\ ),\quad E_2\ (x_2, t_2\ )$$

În conformitate cu relaţia (3A.3.18), diferenţa momentelor corespunzând acestor evenimente fizice faţă de referenţialul inerţial *R'* este:

$$\Delta t' = t_2^{'} - t_1^{'} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3A.4.8}$$

Dacă:

$t_2 = t_1$, dar: $x_2 \neq x_1$ *(evenimente fizice diferite),*

rezultă că $\Delta t'\neq 0$, în condiţiile în care: $\Delta t=0$. Se constată astfel că evenimentele fizice studiate sunt sincrone faţă de referenţialul inerţial *R*, dar (dacă poziţiile lor sunt diferite) aceste evenimente nu sunt sincrone şi faţă de referenţialul inerţial *R'*. Rezultă astfel *relativitatea (caracterul relativ al) sincronismului evenimentelor fizice.*

d) Dilatarea Relativistă a Duratelor

Să considerăm un proces fizic care se produce permanent în acelaşi loc:

x_0 *al referenţialului* R_0

(aşa numitul *referenţial "propriu"*), între evenimentele fizice:

$$E_1\ (x_0, t_{01}\ ),\quad E_2\ (x_0, t_{02}\ ),$$

şi un alt referenţial inerţial *R*, care se deplasează cu viteza v faţă de referenţialul propriu.

Aplicând ultima relaţie (3A.3.18) referenţialelor de mai sus, cu modificările:

$$R \to R_0\ si : R' \to R\ ,$$

se obţine:

$$t_1 = \frac{t_{01} - \frac{v}{c^2}x_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ,\quad t_2 = \frac{t_{02} - \frac{v}{c^2}x_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\ , \tag{3A.4.9}$$

de unde:

$$\Delta t(\,v\,) \equiv t_2 - t_1 = \frac{t_{02} - t_{01}}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3A.4.10}$$

Se constată astfel că durata cea mai scurtă a unui proces fizic corespunde referenţialului său "propriu" (faţă de care procesul se produce permanent în acelaşi loc), în timp ce *duratele aceluiaşi proces faţă de orice alt referenţial inerţial sunt mai mari (dilatate) faţă de durata "proprie".* Acest rezultat teoretic permite interpretarea paradoxului (absorpţiei anomale a) densităţii fluxului numărului de mezoni μ [5], precum şi a experienţelor lui H.E.Ives şi G.R.Stilwell [6], [7].

e) Contracţia Relativistă a Lungimilor

Să considerăm o riglă rectilinie rigidă în mişcare cu viteza:

$$\bar{v} = v \cdot \bar{1}_x$$

faţă de referenţialul inerţial *R.* Prin definiţie, *lungimea unei rigle rectilinii rigide mobile* faţă de un anumit referenţial *este egală cu diferenţa coordonatelor capetelor sale, măsurate în acelaşi moment:*

$$\Delta l(v) = x_2(t) - x_1(t) \tag{3A.4.11}$$

Aplicând prima relaţie (3A.3.18) acestui referenţial şi referenţialului "propriu" corespunzând riglei rectilinii rigide considerate, cu modificarea:

$$R' \to R_0 \,,$$

se obţine:

$$x_{01} = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad x_{02} = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad unde: \quad t_2 = t_1 = t\,,$$

deci:

$$\Delta l_0 \equiv x_{02} - x_{01} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \frac{\Delta l(v)}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3A.4.12}$$

Din ultima relaţie rezultă că lungimea "proprie" este cea mai mare, în timp ce lungimea aceleiaşi rigle rectilinii rigide - observată faţă de oricare referenţial mobil (faţă de rigla rigidă) - este mai scurtă decât lungimea "proprie":

$$\Delta l(v) = \Delta l_0 \sqrt{1-\beta^2} \tag{3A.4.12'}$$

(aşa numita *"contracţie relativistă a lungimilor"*).

f) Compunerea Relativistă a Vitezelor

Pornind de la definiţiile componentelor vitezelor unui punct material faţă de referenţialele inerţiale *R* şi *R'*:

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'}\,, \quad u_y' = \frac{dy'}{dt'}\,, \quad u_z' = \frac{dz'}{dt'}\,, \quad u_x = \frac{dx}{dt}\,, \quad u_y = \frac{dy}{dt}\,, \quad u_z = \frac{dz}{dt} \tag{4A.4.13}$$

şi folosind ecuaţiile (3A.3.18) ale transformărilor Lorentz, se obţine:

$$u_x' = \frac{\frac{dx'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}\cdot u_x}\,, \quad u_y' = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}} = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2}\cdot u_x}$$

respectiv:

$$u_z' = \frac{\frac{dz'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{\frac{dz}{dt}\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}} = \frac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2}\cdot u_x} \tag{3A.4.14}$$

Pornind de la relaţiile (3A.3.18'), se obţine în mod asemănător:

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v}{c^2}\cdot u_x'}\,, \quad u_y = \frac{u_y'\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2}\cdot u_x'} \quad si: \quad u_z = \frac{u_z'\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2}\cdot u_x'} \tag{3A.4.14'}$$

§3A.5. Elemente de teoria generalizată a relativităţii (gravitaţiei)

În cazul unor câmpuri de interacţiuni relativ intense, viteza propagării pulsurilor electromagnetice depinde considerabil de poziţia în interiorul acestui câmp de interacţiuni, deci criteriul BKW nu mai este neglijabil faţă de 1 şi primul termen al membrului drept al expresiei (3A.1.4) nu mai este neglijabil faţă de al doilea termen. Rezultă că – în asemenea condiţii – propagarea undelor (şi pulsurilor) electromagnetice nu este descrisă de ecuaţia uzuală (în medii ideale): [ ]$p=0$.

Analiza rezultatelor experimentale [7] privind deviaţia luminii în apropierea stelelor, precesia traiectoriilor (eliptice) ale planetelor în jurul Soarelui ş.a. l-a condus pe Einstein [8] la concluzia că ecuaţia undelor (pulsurilor) în asemenea medii trebuie să-şi conserve expresia sa prin d'Alembertian, dar cu o alegere convenabilă (corespunzând câmpului de interacţiuni) a metricii spaţiului 4D(imensional), descris de coordonatele:

$$x_1 = x\,,\quad x_2 = y\,,\quad x_3 = z\,,\quad x_4 = ict\,.$$

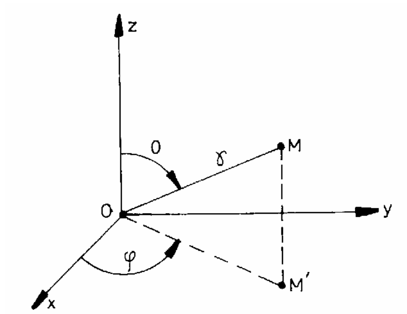

Fig. 3A.5.1

Generalizând constatarea (particulară) că - pentru coordonatele 3D(imensionale) sferice uzuale $r,\ \theta$ şi φ (v. Figura 3.5.1) – intervalul spaţial poate fi scris în forma:

$$dl^2 \equiv ds_3^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\, sin^2\theta \cdot d\varphi^2 = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\, dx_i dx_j\ ,$$

cu *tensorul metric:*

$$\overline{\overline{g}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\, sin^2\theta \end{pmatrix},$$

se poate enunţa *primul principiu (metric) al teoriei generalizate a relativităţii (gravitaţiei)* al lui Einstein în forma:

"Ecuaţia propagării undelor (şi pulsurilor) electromagnetice în spaţii cu câmpuri intense de interacţiuni este:

$$[\ ]_{\overline{\overline{g}}}\,\overline{E} = \frac{1}{\sqrt{Det\,\overline{\overline{g}}}} \cdot \nabla_4^T\left(\sqrt{Det\,\overline{\overline{g}}} \cdot \overline{\overline{g}}^{-1} \cdot \nabla_4\right)\overline{E} = 0 \qquad (3A.5.1)$$

unde:

$$\nabla_4^T = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}\right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{1}{ic}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\right) \qquad (3A.5.2)$$

este transpusul operatorului "nabla" pentru spaţii 4D(imensionale), iar ***g*** este *matricea (tensorul) metricii:*

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{4} g_{ij}\, dx_i dx_j = d\overline{r}_4^T \cdot \overline{\overline{g}} \cdot d\overline{r}_4 \qquad (3A.5.3)$$

ale cărei elemente (corespunzând interacţiunii studiate) pot fi determinate pornind de la ecuaţia undelor (3A.5.1) şi de la rezultatele experimentale".

Analiza rezultatelor experimentale privind propagarea undelor electromagnetice (a luminii, în particular) în apropierea unor surse (foarte intense) locale şi sferice de gravitaţie a condus [9] – pentru asemenea câmpuri particulare de interacţiuni – la *metrica (specifică) Schwarzschild-Einstein:*

$$ds^2 = \frac{r + r_s}{r - r_s} \cdot dr^2 + (r + r_s)^2 \cdot (d\theta^2 + sin^2 \theta \cdot d\varphi^2) - \frac{r - r_s}{r + r_s} \cdot c^2 dt^2 , \qquad (3A.5.4)$$

unde:

$$r_s = \frac{kM}{c^2} \qquad (3A.5.5)$$

este *raza (Schwarzschild) de "gravitaţie" a stelei considerate*, de masă M.

Al doilea principiu (al covarianţei) al teoriei relativităţii generalizate afirmă că:

"Expresiile ecuaţiilor fizice trebuie să rămână aceleaşi (nemodificate) faţă de orice referenţial (sistem de coordonate spaţio-temporale) definit prin principiul metric".

În fine, *al treilea principiu (de corespondenţă,* între teoria relativităţii generalizate şi teoria relativităţii restrânse) *al teoriei relativităţii generalizate (gravitaţiei)* afirmă că:

"La mari distanţe de sursele intense de gravitaţie (deci pentru valori ale criteriilor de similitudine ale lui Einstein şi – respectiv - Friedman neglijabile faţă de 1) matricea coeficienţilor metrici tinde spre matricea unitate de ordinul 4:

$$\lim_{Ei,Fd \to 0} \overline{\overline{g}} = \overline{\overline{1}}_4 \qquad (3A.5.6)$$

deci – în condiţiile specificate – expresia intervalului relativist devine:

$$\lim_{Ei,Fd \to 0} ds^2 = \lim_{Ei,Fd \to 0} \sum_{i,j=1}^{4} g_{ij} dx_i dx_j = dx^2 + dy^2 + dz^2 + (icdt)^2 = dl^2 - c^2 dt^2 \qquad (3A.5.7)$$

Spre deosebire de criteriul de similitudine al lui Einstein (specific surselor de gravitaţie locale (sferice), v. Capitolul 1), *criteriul de similitudine al lui Friedman*:

$$Fd = \frac{k\rho}{h^2} \qquad (3A.5.8)$$

este specific surselor distribuite de gravitaţie (ρ este densitatea medie a masei în domeniul studiat, iar:

$$h = \frac{c(\nu_0 - \nu)}{D \cdot \nu} \qquad (3A.5.9)$$

este constanta lui Hubble, care corelează "deplasările spre roşu" ale componentelor spectrale ale emisiilor galactice cu distanţa D de la observator la aceste galaxii).

Fie **U** matricea care descrie transformarea coordonatelor spaţio-temporale între referenţialele R şi R':

$$\bar{r}_4' = \overline{\overline{U}} \cdot \bar{r}_4 \qquad (3A.5.10)$$

ambele aceste sisteme de coordonate fiind definite în baza principiului metric.

Deoarece:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i'} = \sum_{i=1}^{4} U_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i'} = \sum_{i=1}^{4} (\overline{\overline{U}}^T)_{ji} (\nabla_4')_i \quad , \qquad (j = 1,2,3,4)$$

rezultă că:

$$\nabla_4 = \overline{\overline{U}} \cdot \nabla_4' \quad si: \quad \nabla_4^T = \nabla_4'^{\,T} \cdot \overline{\overline{U}} \qquad (3A.5.11)$$

Înlocuind aceste expresii în ecuaţia (3A.5.1) a propagării undelor electromagnetice, se obţine:

$$0=[\ ]_{\overline{\overline{g}}}\overline{E}=\frac{1}{\sqrt{Det\,\overline{\overline{g}}}}\nabla_4'^{\,T}\cdot\overline{\overline{U}}(\sqrt{Det\,\overline{\overline{g}}}\cdot\overline{\overline{g}}^{-1}\cdot\overline{\overline{U}}^{T}\cdot\nabla_4')\overline{E}=\frac{1}{\sqrt{Det\,\overline{\overline{g}}}}\nabla_4'^{\,T}(\sqrt{Det\,\overline{\overline{g}}}\cdot\overline{\overline{g}}^{-1}\cdot\overline{\overline{U}}^{T}\cdot\nabla_4')\overline{E}\ ,$$

unde am notat:

$$\overline{\overline{U}}\cdot\overline{\overline{g}}^{-1}\cdot\overline{\overline{U}}^{T}=\overline{\overline{g}}'^{-1}\quad .$$

Deoarece (în conformitate cu exemplul de mai sus, al coordonatelor sferice) elementele matricii **g** şi ale determinantului său depind de coordonatele spaţio-temporale, unica posibilitate de a îndeplini cerinţa principiului de covarianţă:

$$[\ ]_{\overline{\overline{g}}}=0\quad\rightarrow\quad[\ ]_{\overline{\overline{g}}'}=0$$

este ca:

$$Det\,\overline{\overline{g}}'=Det\,\overline{\overline{g}},\quad deci:\quad Det\,\overline{\overline{g}}'^{-1}=\frac{1}{Det\,\overline{\overline{g}}'}=\frac{1}{Det\,\overline{\overline{g}}}=Det\,\overline{\overline{g}}^{-1}$$

Ori, în conformitate cu relaţia dedusă mai sus, avem:

$$Det\,\overline{\overline{g}}'^{-1}=Det\,\overline{\overline{U}}\cdot Det\,\overline{\overline{g}}^{-1}\cdot Det\,\overline{\overline{U}}^{T}=Det\,\overline{\overline{g}}^{-1}\cdot(Det\,\overline{\overline{U}})^{2}\quad ,$$

constatând că – pentru a păstra expresia ecuaţiei undelor electromagnetice faţă de referenţiale diferite – este necesar ca:

$$\left|Det\,\overline{\overline{U}}\right|=1,$$

deci că *matricile care descriu transformările coordonatelor spaţio-temporale între diferite referenţiale trebuie să fie unitare.* Din relaţia:

$$\overline{\overline{g}}^{-1}=\overline{\overline{U}}\cdot\overline{\overline{g}}^{-1}\cdot\overline{\overline{U}}^{T}\ ,\quad reiese\ ca:\quad \overline{\overline{g}}'=\left(\overline{\overline{U}}^{T}\right)^{-1}\cdot\overline{\overline{g}}\cdot\overline{\overline{U}}^{-1}=\overline{\overline{U}}\cdot\overline{\overline{g}}\cdot\overline{\overline{U}}^{T}\qquad(3A.5.12)$$

deci *matricea* **g** *a coeficienţilor metrici este un tensor.*

Pornind de la acest rezultat, se constată că:

$$ds'^2=d\overline{r}_4'^{\,T}\cdot\overline{\overline{g}}'\cdot d\overline{r}_4'=\left(\overline{\overline{U}}\cdot d\overline{r}_4\right)^{T}\cdot\overline{\overline{U}}\cdot\overline{\overline{g}}\cdot\overline{\overline{U}}^{T}\cdot\overline{\overline{U}}\cdot d\overline{r}_4=d\overline{r}_4^{\,T}\cdot\overline{\overline{g}}\cdot d\overline{r}_4=ds^2\ ,$$

deci *intervalul relativist (generalizat) este un invariant al sistemelor de coordonate spaţio-temporale (care îndeplinesc principiile metric şi de covarianţă).*

3B. Metode Specifice de Calcul ale Teoriei Relativităţii

§3B.1. Metoda relaţiilor pseudotrigonometrice în spaţiul complex

Să considerăm un eveniment fizic arbitrar şi fie E – punctul său reprezentativ în spaţiul complex *(x,ict)* (v. figura 3B.1.1). Fie F şi G - proiecţiile punctului reprezentativ E pe axele Ox şi – respectiv - *O,ict*, iar *E',F',G'* – proiecţiile punctelor *E,F* şi G pe axa *Ox'*.

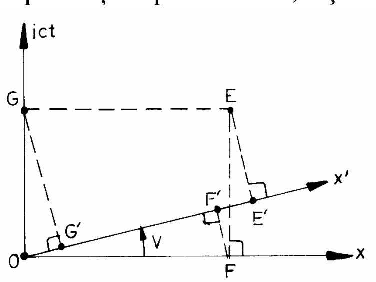

Fig. 3B.1.1

În conformitate cu relaţia (3A.3.12):

$$x'=\kappa\cdot x+\sigma\cdot ict=\kappa\cdot OF+\sigma\cdot OG\quad .$$