Răspuns: a) Nu. Caracterul inerțial/neinerțial al unui referențial este specific acestuia, fiind stabilit (pornind de la definiția dată) pe cale experimentală, cu utilizarea unui punct material aproape liber (în absența frecărilor şi în condițiile unei rezultante neglijabile a interacțiunilor).

b) Durata celui mai scurt proces neinerțial specific Pământului (rotația în jurul axei proprii) fiind de 24 ore, referențialele solidar legate de Pământ sunt aproximativ inerțiale pentru durate $\Delta t \leq 1$ minut.

Deoarece valoarea numerică SI a vitezei undelor electromagnetice față de un referențial (în particular, a vitezei luminii în vid) [1],[5] este implicată în definiția unității fundamentale SI de lungime (metrul), *viteza luminii în vid este o constantă fizică fundamentală (primitivă).*

d) Cuasisincronizarea ceasornicelor aflate în mişcare relativă lentă

Considerăm un mobil M aflat în mişcare relativă cu viteza v față de sistemul de referință S. Fie C, C_1 şi C_2 - trei ceasornice identice, primul (C) solidar legat de mobilul M, iar celelalte două (C_1 şi C_2) aflate în repaus relativ față de referențialul S şi sincronizate între ele (vezi fig.2.5).

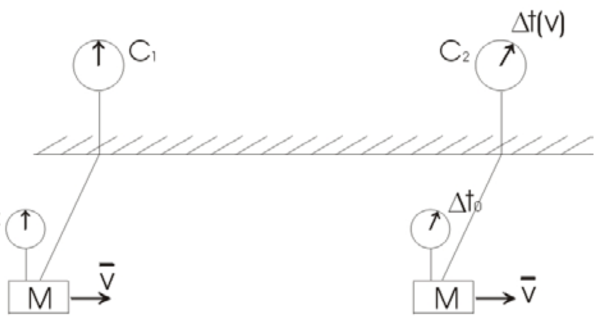

Fig. 2.5

În momentul când mobilul M trece în dreptul ceasornicului C_1, ceasornicele determinată C şi C_1 sunt desincroniz ceasornicul C, obținându-se rezultatul Δt_o (durata "proprie"), respectiv de ceasornicele C_1 şi C_2, obținându-se rezultatul $\Delta t(v)$. Datorită efectului de "dilatare" relativistă a duratelor (v.secțiunea 3A.4d), avem:

$$\Delta t(v) = \frac{\Delta t_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} .$$

Desincronizarea ceasornicelor C şi C_2, produsă după durata Δt_o (măsurată de ceasornicul C) de la sincronizarea ceasornicelor C şi C_1 este:

$$\delta t(v) = \Delta t(v) - \Delta t_o = \Delta t_o \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \qquad (2.2.1)$$

Pentru $\beta = \frac{v}{c} << 1$, paranteza de mai sus este aproximativ egală cu:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \cong \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} .$$

Reiese că desincronizarea relativă a ceasornicelor aflate în mişcare relativă este:

$$\frac{\delta t(v)}{\Delta t_o} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1, \qquad (2.2.2)$$

iar pentru mişcările relativ lente (v<<c):

$$\frac{\delta t(v)}{\Delta t_o} \cong \frac{v^2}{2c^2}. \qquad (2.2.3)$$

Vitezele mobilelor uzuale (macroscopice) fiind mai mici sau cel mult de ordinul de mărime al primei viteze cosmice ($v_1 \cong 7,9$ km/s), reiese că - în acest caz:

$$\frac{\delta t(v)}{\Delta t_o} \le \frac{1}{2}\left(\frac{7,9}{3\cdot 10^5}\right)^2 \cong 3,47\cdot 10^{-10},$$

deci desincronizarea absolută produsă în durata unui an ($\cong 3,1557\cdot 10^7$ s) este: $\delta t(v) \le 3,1557\cdot 10^7 \cdot 3,47\cdot 10^{-10} \cong 10,95$ ms.

Se constată că, în condiţii uzuale (corpuri macroscopice cu viteze ≤ 8 km/s), desincronizarea produsă este neglijabilă; în concluzie, deşi *sincronizarea perfectă a unor ceasornice aflate în mişcare relativă nu este posibilă,* deoarece desincronizarea unor *ceasornice aflate în mişcare relativă lentă* ($v \le 8$ km/s) este neglijabilă, reiese că aceste ceasornice *pot fi sincronizate aproximativ* (cuasi-sincronizate).

e) Definiţiile coordonatelor poziţiei momentane a unui punct material

Considerăm un ansamblu de 3 staţii radar necoliniare, aflate în repaus relativ, cuplate rigid cu ceasornice identice sincronizate (ansamblu care formează un referenţial R) şi un mobil (punct material) M având o mişcare arbitrară faţă de acest referenţial (fig.2.6). Fie t_{ie} şi $t_{ir}(t_{ie})$ (i=1,2,...n (≥ 3)) - momentele la care este emis un impuls electromagnetic foarte scurt, respectiv este recepţionat de radarul R_i (momente determinate de ceasornicul C_i) impulsul foarte scurt emis la momentul t_{ie}, după reflectarea (reemisia instantanee) de către mobilul M. În condiţiile unor câmpuri (în particular, gravitaţionale) slabe, duratele de propagare R_iM şi invers (MR_i) sunt egale: $t_i - t_{ie} = t_{ir}(t_{ie}) - t_i$, deci momentul pentru care staţia radar R_i oferă o informaţie despre poziţia mobilului M este: $t_i = (t_{ie} + t_{ir}(t_{ie}))/2$, distanţa MR_i fiind la acest moment:

$$d_i(t_i) = \frac{c}{2}\left[t_{ir}(t_{ie}) - t_{ie}\right].$$

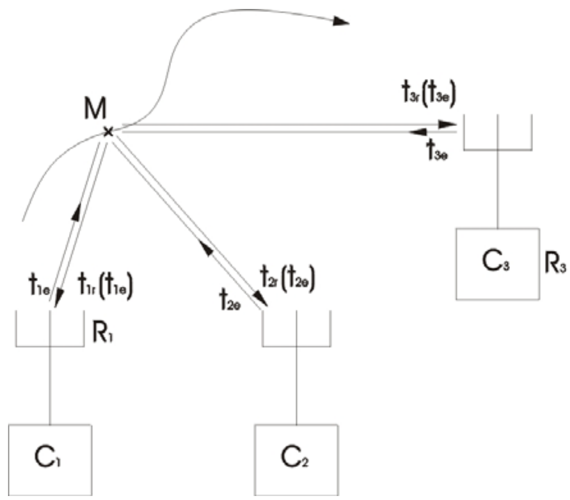

Figura 2.6.

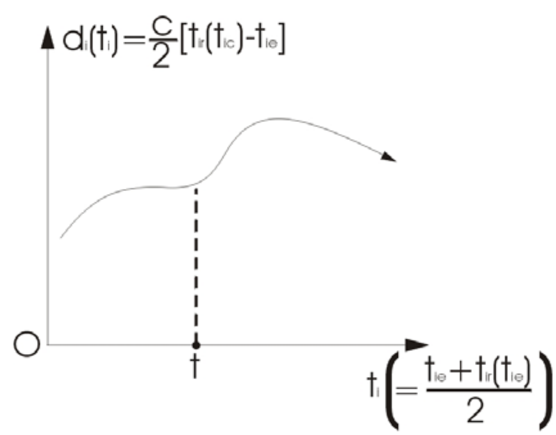

Figura 2.7.

Emisia succesivă (la intervale scurte de timp) a unor asemenea impulsuri electromagnetice foarte scurte permite evidenţierea mişcării relative a mobilului M faţă de staţia radar R_i (v.fig.2.7). Cu ajutorul graficelor de tipul celui din fig.2.7, se determină distanţele:

(i) d_{ij} dintre staţiile radar R_i, R_j (aflate în repaus relativ, $i \neq j$) şi coordonatele x_i, y_i (i=1, 2, 3) ale staţiilor radar, în baza sistemului: $(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = d_{ij}^2$, unde (i, j=1, 2, 3) (se presupune că: $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, impunându-se încă 3 condiţii arbitrare, în particular: $x_1 = y_1 = y_2 = 0$),

(ii)$d_i(t)$ la un acelaşi moment t (măsurat în referenţialul R), după care *coordonatele x(t), y(t) şi z(t) ale mobilului M,* la momentul t*, se definesc ca soluţii ale sistemului:*

$$(x(t) - x_i)^2 + (y(t) - y_i)^2 + (z(t) - z_i)^2 = d_i^2(t) \text{ unde } i=1, 2, 3. \qquad (2.2.4)$$

f) Definiţiile mărimilor vectoriale: rază vectoare, viteză şi acceleraţie

Raza vectoare $\bar{r}(t)$ corespunzând poziţiei mobilului M la momentul t se defineşte drept vectorul-coloană $\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ al coordonatelor acestui mobil.

Distanţa d(t) *dintre mobilele* M_1 şi M_2 *la momentul t* se defineşte prin relaţia:

$$d^2(t) = (x_2(t) - x_1(t))^2 + (y_2(t) - y_1(t))^2 + (z_2(t) - z_1(t))^2 = (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)^T \cdot (\bar{r}_2 - \bar{r}_1), \quad (2.2.5)$$

unde $\bar{r}_1$ şi $\bar{r}_2$ sunt razele vectoare corespunzând (la momentul t) celor două mobile, iar $(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)^T$ este transpusul vectorului $\bar{r}_2 - \bar{r}_1$:

$$(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)^T = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Componentele vitezei momentane a mobilului M faţă de referenţialul R se definesc prin relaţiile: $v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}$, iar *viteza momentană* - ca *mărime fizică vectorială* - prin expresiile echivalente:

$$\bar{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \equiv \frac{d\bar{r}}{dt} \qquad (2.2.6)$$

Componentele acceleraţiei se definesc prin relaţiile:

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt}, \qquad (2.2.7)$$

iar *acceleraţia - ca mărime fizică vectorială* - prin relaţiile echivalente:

$$\bar{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} \equiv \frac{d\bar{v}}{dt} \qquad (2.2.8)$$

Desigur, ultimele 2 expresii vectoriale admit şi relaţii inverse:

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(0) + \int_0^t \bar{v}\,dt, \text{ respectiv: } \bar{v}(t) = \bar{v}(0) + \int_0^t \bar{a}\,dt \qquad (2.2.9)$$

2.2.3. Un mobil porneşte din repaus într-o mişcare rectilinie, cu viteza inițială $v_0 = 1 \ m/s$. Ştiind că accelerația mobilului variază uniform în timp: a=a't (unde $a' = 0{,}5\, m \cdot s^{-3}$) şi are acelaşi sens cu viteza, să se determine: a) viteza mobilului după 10 secunde; b) spațiul parcurs în acest timp.

Rezolvare: În baza relațiilor (2.2.9), obținem:

$$\text{a)}\quad v(t) = v_0 + \int_0^t a(t)dt = v_0 + \int_0^t a' t dt = v_0 + \frac{a'}{2}t^2 = 26\ m/s.$$

$$\text{b)}\quad s = x(t) - x_0 = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t (v_0 + \frac{a'}{2}t^2)dt = v_0 t + \frac{a'}{6}t^3 = 93{,}3\ m.$$

2.2.4. Un corp se deplasează uniform în lungul unei circumferințe de diametru d=0,159 m, pe care o parcurge în durata T=5s. Se cere: a) valoarea medie $<|\bar{v}|>$ a modulului vitezei punctului material; b) modulul $|<\bar{v}>| \equiv |\bar{v}_m|$ al vitezei medii (ca mărime vectorială) corespunzând duratei T=5 s; c) să se explice de ce valorile obținute mai sus sunt diferite.

Rezolvare: a) Deoarece lungimea circumferinței este $s = \pi d$, găsim:

$$<|\bar{v}|> \equiv \tilde{v} = \frac{\pi d}{T} \cong 0{,}1\ m/s.$$

b) $|<\bar{v}>| \equiv |\bar{v}_m| = \left|\frac{\Delta\bar{r}}{T}\right|$. Deoarece durata T=5 s coincide cu perioada mişcarii circulare, după acest timp corpul revine în locul de pornire, deci: $\Delta\bar{r} = 0$ şi $|<\bar{v}>| \equiv |\bar{v}_m| = 0$.

c) Între variațiile razelor vectoare ale corpului în intervalele de timp: $(0, \Delta t_1), (\Delta t_1, \Delta t_1 + \Delta t_2)$ şi $(0, \Delta t_1 + \Delta t_2)$, notate prin $\Delta\bar{r}_1, \Delta\bar{r}_2$ şi – respectiv - $\Delta\bar{r}$, există relația: $\Delta\bar{r} = \Delta\bar{r}_1 + \Delta\bar{r}_2$, care implică inegalitatea: $|\Delta\bar{r}| \leq |\Delta\bar{r}_1| + |\Delta\bar{r}_2| = \Delta r_1 + \Delta r_2$. Pe de altă parte, din relația: $\Delta\bar{r} = \Delta\bar{r}_1 + \Delta\bar{r}_2$, reiese şi expresia:

$$\bar{v}_m = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta\bar{r}_1}{\Delta t_1} + \frac{\Delta t_2}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta\bar{r}_2}{\Delta t_2} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t}\cdot\bar{v}_1 + \frac{\Delta t_2}{\Delta t}\cdot\bar{v}_2;$$

din aceasta ultimă expresie dedusă, găsim că:

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} \leq v_1 \cdot \frac{\Delta t_1}{\Delta t} + v_2 \cdot \frac{\Delta t_2}{\Delta t},$$

de unde: $|<\bar{v}>| \leq <|\bar{v}|>$, semnul egal realizându-se doar în cazul mişcărilor rectilinii.

Problema 2.2.5: Se consideră mişcarea plană (într-un plan) a unui punct material. Să se deducă expresiile:

a) vitezei liniare $\bar{v}$ în funcție de raza vectoare $\bar{r}$ şi viteza unghiulară $\bar{\omega}$ corespunzătoare;

b) accelerației liniare $\bar{a}$ în funcție de $\bar{r}$, $\bar{\omega}$ şi accelerația unghiulară $\bar{\varepsilon}$.

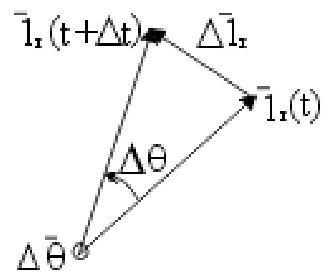

Figura 2.8

Rezolvare: a) Deoarece raza vectoare $\bar{r} = r \cdot \bar{1}_r$, unde $\bar{1}_r$ este vectorul unitar al razei vectoare, avem:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cdot \bar{1}_r) = \dot{r}\bar{1}_r + r \cdot \dot{\bar{1}}_r;$$

în continuare, ținând seamă că (vezi fig.2.8):

$$\Delta\overline{1}_r = \overline{1}_r(t+\Delta t) - \overline{1}_r(t) \cong \Delta\overline{\theta} \times \overline{1}_r \text{ , deci:}$$

$$\dot{\overline{1}}_r = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overline{1}_r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overline{\theta}\times\overline{1}_r}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overline{\theta}}{\Delta t}\right)\times\overline{1}_r = \overline{\omega}\times\overline{1}_r \ ,$$

reieşind următoarea expresia a vitezei liniare:

$$\overline{v} \equiv \dot{\overline{r}} = \dot{r}\,\overline{1}_r + \overline{\omega}\times\overline{r} \,. \tag{2.2.10}$$

b) Pornind de la definiția accelerației liniare $\overline{a}$, găsim:

$$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\,\overline{1}_r + \overline{\omega}\times\overline{r});$$

în continuare, se obține:

$$\overline{a} = \ddot{r}\,\overline{1}_r + \dot{r}\,\dot{\overline{1}}_r + \frac{d\overline{\omega}}{dt}\times\overline{r} + \overline{\omega}\times\overline{v} \ ,$$

şi în final:

$$\overline{a} = \ddot{r}\,\overline{1}_r + 2(\overline{\omega}\times\dot{r}\,\overline{1}_r) + \overline{\varepsilon}\times\overline{r} + \overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{r}). \tag{2.2.11}$$

Problema 2.2.6: Un punct material efectuează o mişcare circulară uniformă în jurul originii *O* a axelor. Componentele *x* şi *y* ale vitezei sale unghiulare sunt $\omega_x = 2\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\omega_y = -3\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. În cursul mişcării sale, punctul material considerat trece printr-un punct a cărui rază vectoare este $\overline{r} = 3\cdot\overline{1}_x + \overline{1}_y - 3\cdot\overline{1}_z$. Deduceți: a) componenta ω_z şi modulul vitezei unghiulare, b) viteza liniară $\overline{v}$ şi accelerația centripetă $\overline{a}_{cp}$ corespunzând poziției punctului material dată de raza vectoare $\overline{r}$.

Rezolvare: a) Deoarece: $(\overline{\omega},\overline{r}) = 90^o$, avem: $0 = \overline{\omega}\cdot\overline{r} = \omega_x x + \omega_y y + \omega_z z = 3\times 2 - 3\times 1 - 3\omega_z$, reieşind că: $\omega_z = 1\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\omega = \sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2} = \sqrt{14}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

$$\text{b) } \overline{v} = \overline{\omega}\times\overline{r} = \begin{vmatrix} \overline{1}_x & \overline{1}_y & \overline{1}_z \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 8\cdot\overline{1}_x + 9\cdot\overline{1}_y + 11\cdot\overline{1}_z\left(\frac{m}{s}\right) \ , \text{ respectiv:}$$

$$\overline{a}_{cp} = \overline{\omega}\times\overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{1}_x & \overline{1}_y & \overline{1}_z \\ 2 & -3 & 1 \\ 8 & 9 & 11 \end{vmatrix} = -42\cdot\overline{1}_x - 14\cdot\overline{1}_y + 42\cdot\overline{1}_z\left(\frac{m}{s^2}\right) \ .$$

§2.3. Definiții şi raporturi între principalele mărimi ale dinamicii

a) Definiția (componentelor) impulsului ca mărime fizică primitivă

Considerăm 2 corpuri rigide *1* şi *2*, aflate inițial în mişcare cu vitezele $v_{1x}\ (>0)$ şi $v_{2x}\ (<0)$ în lungul axei Ox (v.fig.2.9). După ciocnirea plastică dintre cele 2 corpuri, corpul rigid R rezultat se va deplasa cu viteza v_x. Operațiile de echivalență - ordonare şi legea de compunere care conduc la definirea componentei *x* a impulsului ca mărime primitivă sunt: $v_x > 0 \to p_{1x} > |p_{2x}|$,

$v_x < 0 \to p_{1x} < |\,p_{2x}\,|$ şi

$p_{1x} T p_{2x} = p_x$.

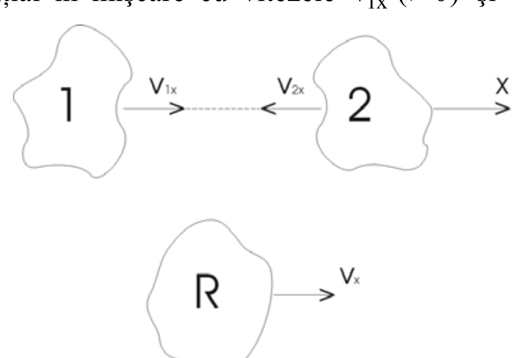

Figura 2.9.

După definirea similară a componentelor p_y şi p_z, se defineşte *mărimea primitivă vectorială - impuls* prin componentele sale:

$$\overline{p} = p_x \overline{1}_x + p_y \overline{1}_y + p_z \overline{1}_z \equiv \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \tag{2.3.1}$$

b) Definiția generală (în medii anizotrope) a masei

În cazul general al mediilor anizotrope [problemă deosebit de importantă în particular pentru studiul dinamicii microparticulelor (spre exemplu, a electronilor) în rețelele cristaline], impulsul şi viteza au direcții diferite, ceeace face ca relațiile dintre componentele acestor mărimi să fie de forma:

$$p_x = m_{xx}v_x + m_{xy}v_y + m_{xz}v_z\,,$$
$$p_y = m_{yx}v_x + m_{yy}v_y + m_{yz}v_z\,,$$
$$p_z = m_{zx}v_x + m_{zy}v_y + m_{zz}v_z\,.$$

Sistemul format de aceste relații poate fi scris în forma matricială:

$$\overline{p}(\overline{v}) \equiv \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{xx} & m_{xy} & m_{xz} \\ m_{yx} & m_{yy} & m_{yz} \\ m_{zx} & m_{zy} & m_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \overline{\overline{m}} \cdot \overline{v}\,, \tag{2.3.2}$$

unde $\overline{\overline{m}}$ este *matricea masei efective.*

În absența fenomenelor de histerezis (memorie) dinamic(ă), elementele acestei matrici pot fi definite prin relația: $m_{ij}(\overline{v}) = \dfrac{1}{v_j}\displaystyle\int_0^{v_j} \dfrac{\partial p_i}{\partial v_j} dv_j \equiv \left\langle \dfrac{\partial p_i}{\partial v_j} \right\rangle$, unde i,j=x,y,z (2.3.3)

Într-adevăr, pornind de la expresia diferențială a componentelor impulsului:

$$dp_i(\overline{v}) = \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial p_i}{\partial v_j}\,,$$

se obține - în absența fenomenelor de histerezis: $\overline{p}(\overline{0}) = \overline{0}$ - expresia:

$$p_i(\overline{v}) = \sum_{j=x,y,z} \int_0^{v_j} \frac{\partial p_i}{\partial v_j} dv_j = \sum_j m_{ij}(\overline{v}) \cdot v_j\,,$$

de unde:

$$\overline{p}(\overline{v}) = \left\| m_{ij}(\overline{v}) \right\| \cdot \overline{v} = \overline{\overline{m}} \cdot \overline{v}\,. \tag{2.3.4}$$

Menționăm că, pentru mişcări relativiste ($v \le c$) este utilizată şi *matricea masei incrementale* (diferențiale) $\overline{\overline{m}}\,*$, ale cărei elemente sunt definite prin relația:

$$m_{ij}^* = \frac{\partial p_i}{\partial v_j}\text{, unde i,j=x,y,z.} \tag{2.3.5}$$

Matricea masei incrementale satisface relația:

$$d\overline{p} = \overline{\overline{m}}\,* \cdot d\overline{v}\,. \tag{2.3.6}$$

c) Definițiile forței, momentului cinetic (orbital), momentului forței, lucrului mecanic şi puterii; raporturi între acestea

În fizica modernă, forța este definită prin relația:

$$\overline{F} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{p}}{\Delta t} = \frac{d\overline{p}}{dt} \tag{2.3.7}$$

Se constată astfel că - în cadrul fizicii moderne - legile lui Newton ale dinamicii se transformă în definiții ale:

(i) sistemelor fizice de referinţă inerţiale (prima lege a lui Newton),

(ii) forţei (cea de a doua lege a lui Newton).

Deoarece: $\overline{p} = \overline{\overline{m}} \cdot \overline{v}$, a doua lege Newton a dinamicii poate fi scrisă şi în forma:

$$\overline{F} = \frac{d\overline{p}}{dt} = \frac{d\overline{\overline{m}}}{dt} \cdot \overline{v} + \overline{\overline{m}} \frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{\overline{m}} \cdot \overline{a} + \frac{d\overline{\overline{m}}}{dt} \cdot \overline{v} \qquad (2.3.8)$$

Se constată astfel că doar dacă elementele matricii masei efective nu depind de timp, legea a doua a dinamicii poate fi scrisă într-o formă: $\overline{F} = \overline{\overline{m}} \cdot \overline{a}$, similară celei uzuale din manualele de liceu; conform definiţiei masei incrementale, avem în schimb: $\overline{F} = \overline{\overline{m}} * \overline{a}$ şi în cazul relativist[1].

Pornind de la mărimea fizică vectorială - impuls $\overline{p}$, se poate defini *momentul cinetic* (orbital) al unui punct material faţă de originea O a unui sistem de referinţă prin relaţia:

$$\overline{L} = \overline{r} \times \overline{p} \qquad (2.3.9)$$

În mod similar, mărimea *moment al forţei* $\overline{F}$ faţă de originea O a unui sistem de referinţă este definită prin relaţia: $\overline{M} = \overline{r} \times \overline{F}$, unde $\overline{r}$ este raza vectoare a punctului de aplicaţie faţă de origine. În cazul general, celei de a doua legi Newton a dinamicii îi corespunde, în cazul mişcărilor de rotaţie, relaţia analoagă:

$$\frac{d\overline{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overline{r} \times \overline{p}) = \frac{d\overline{r}}{dt} \times \overline{p} + \overline{r} \times \frac{d\overline{p}}{dt} = \overline{r} \times \overline{F} + \overline{v} \times \overline{p} = \overline{M} + \overline{v} \times \overline{p} \qquad (2.3.10)$$

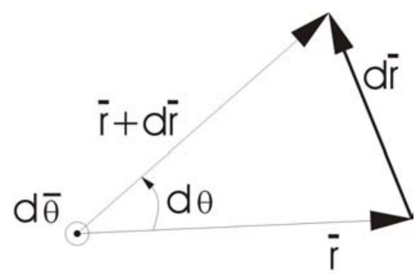

Figura 2.10.

Se constată că, doar în cazul mişcărilor în medii izotrope ($\overline{v} \times \overline{p} = 0$), relaţia dintre momentul forţei şi cel cinetic capătă forma "clasică":

$$\overline{M} = \frac{d\overline{L}}{dt} \qquad (2.3.10')$$

În continuare, *lucrul mecanic elementar* (diferenţial) corespunzând unei deplasări a punctului de aplicaţie al forţei cu $d\overline{r}$ este definit prin relaţia:

$$dL = \overline{F} \cdot d\overline{r} \qquad (2.3.11)$$

Desigur, lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea punctului de aplicaţie al forţei $\overline{F}$ (eventual variabile: $\overline{F} = \overline{F}(\overline{r})$) în lungul traiectoriei C, între punctele de raze vectoare $\overline{r}_1$ şi $\overline{r}_2$, va fi dat de integrala curbilinie (în lungul traiectoriei C parcurse de punctul de aplicaţie):

$$L_{C(\overline{r}_1 \to \overline{r}_2)} = \int_{C,\overline{r}_1}^{\overline{r}_2} \overline{F} \cdot d\overline{r} \qquad (2.3.12)$$

În cazul în care deplasarea $d\overline{r}$ a punctului de aplicaţie al forţei corespunde unei rotaţii cu unghiul $d\theta$ (v.fig.2.10) a razei vectoare $\overline{r}$ a punctului de aplicaţie faţă de originea O, avem: $d\overline{r} = d\overline{\theta} \times \overline{r}$, deci expresia lucrului mecanic elementar devine:

$$dL = \overline{F} \cdot (d\overline{\theta} \times \overline{r}) = d\overline{\theta} \cdot (\overline{r} \times \overline{F}) = \overline{M} \cdot d\overline{\theta} \qquad (2.3.13)$$

---

[1] Oricum, se constată că este bine sa legea a doua a dinamicii să fie reţinută în forma sa generală (valabilă şi în cazul mişcărilor relativiste): $\overline{F} = \frac{d\overline{p}}{dt}$ şi nu în forma particulară (valabilă doar în mecanica nerelativistă): $\overline{F} = m\overline{a}$.

În fine, *puterea* este definită prin relația: $P = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta t}$, unde ΔL este lucrul mecanic efectuat asupra punctului material (în general, asupra sistemului studiat) în durata Δt. Ținând seamă de definiția lucrului mecanic, se obține:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{F} \cdot \Delta \overline{r}}{\Delta t} = \overline{F} \cdot \overline{v} \tag{2.3.14}$$

Problema 2.3.1: Să se deducă dependența de viteză a masei incrementale în teoria relativității restrânse.

Rezolvare: Pornind de la expresia cunoscută (v.şi §3., consacrat dinamicii relativiste) a dependenței relativiste a masei de mişcare de viteză, precum şi de la definiția masei incrementale şi ținând seamă că în teoria relativității restrânse spațiul fizic este considerat izotrop, obținem:

$$m^*(v) = \frac{dp}{dv} = \frac{d}{dv}\left(\frac{m_o v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m_o v^2 / c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}$$

şi, în final: $$m^*(v) = \frac{m_o}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} .$$

d) Definițiile energiei cinetice şi energiei potențiale

Energia cinetică a unui punct material este definită drept energia datorată mişcării acestuia cu o anumită viteză $\overline{v}$ (respectiv, impuls $\overline{p}$), în baza relației[2]**:**

$$E_c(\overline{v}) = \int_0^{\overline{v}} \overline{v} \cdot d\overline{p} \left(\equiv \int_0^{\overline{v}} \overline{v} \cdot \overline{\overline{m}}^* \cdot d\overline{v}\right) \tag{2.3.15}$$

În cazul sistemelor conservative (care nu schimbă energie sub formă de căldură cu exteriorul), *conform principiului conservării energiei,* lucrul mecanic efectuat trebuie să provină din scăderea energiei de interacțiune (potențiale) a sistemului: $dL = -dE_p$, de unde:

$$E_p = -\int \overline{F} \cdot d\overline{r} \tag{2.3.16}$$

Se constată astfel că energia potențială este definită (pentru sistemele conservative) până la o constantă aditivă arbitrară.

Ținând seamă de definiția produsului scalar, relația energie de interacțiune (potențială)-forță poate fi scrisă şi în forma inversă. Într-adevăr:

$$dE_p = -dL = -\overline{F} \cdot d\overline{r} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz ,$$

de unde, pentru valori constante ale y şi z:

$$dE_p = -F_x dx, \text{ de unde: } F_x = -\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{y,z=const.} = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \tag{2.3.17}$$

Deoarece componentele *y* şi *z* ale forței sunt date, desigur, de relații similare, reiese că:

---

[2] Expresia definitorie a energiei cinetice poate fi justificată în baza *"teoremei variației energiei cinetice"*: $dE_c = dL = \overline{F} \cdot d\overline{r}$, dedusă în baza "teoremei conservării energiei mecanice", sau pornind de la principiul conservării energiei (v.şi §2.4).

$$\overline{F} = F_x \overline{1}_x + F_y \overline{1}_y + F_z \overline{1}_z = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \overline{1}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y} \overline{1}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z} \overline{1}_z \right) \equiv -gradE_p \qquad (2.3.18)$$

paranteza din ultima expresie (numită şi *gradient al funcţiei energie potenţială* $E_p(x,y,z)$) poate fi scrisă şi cu ajutorul *operatorul*ui *diferenţial* (şi vectorial) *nabla* (simbol ∇):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \overline{1}_x + \frac{\partial}{\partial y} \overline{1}_y + \frac{\partial}{\partial z} \overline{1}_z , \qquad (2.3.19)$$

în forma:

$$gradE_p = \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \overline{1}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y} \overline{1}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z} \overline{1}_z \right) E_p \equiv \nabla E_p \qquad (2.3.20)$$

În mod asemănător, în cazul mişcărilor de rotaţie ale unor sisteme conservative, avem:

$$dE_p = -dL_{rot.} = -\overline{M} \cdot d\overline{\theta} \ .$$

Utilizând expresia produsului scalar prin componentele celor doi vectori:

$$dE_p = -\overline{M} \cdot d\overline{\theta} = -M_x d\theta_x - M_y d\theta_y - M_z d\theta_z \ ,$$

obţinem - pentru valori constante ale componentelor *y* şi *z* ale unghiului (vector) de rotaţie $\overline{\theta}$:

$$dE_p = -M_x d\theta_x \text{, de unde: } M_x = -\left(\frac{dE_p}{d\theta_x} \right)_{\theta_y, \theta_z = const.} = -\frac{\partial E_p}{\partial \theta_x} \qquad (2.3.21)$$

Deoarece componentele *y* şi *z* ale momentului forţei sunt date de relaţii similare, în final se obţine:

$$\overline{M} = M_x \overline{1}_x + M_y \overline{1}_y + M_z \overline{1}_z = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \overline{1}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y} \overline{1}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z} \overline{1}_z \right), \qquad (2.3.22)$$

deci:

$$\overline{M} = -grad_{\overline{\theta}} E_p = -\nabla_{\overline{\theta}} E_p \qquad (2.3.23)$$

Problema 2.3.2: Pornind de la definiţia *momentul*ui *magnetic* $\overline{\mu}$ prin momentul forţei datorat interacţiunii sale cu un câmp magnetic uniform de inducţie $\overline{B}$: $\overline{M} = \overline{\mu} \times \overline{B}$, să se deducă expresia energiei de interacţiune corespunzătoare.

Rezolvare: Deoarece sensurile momentului forţei $\overline{M} = \overline{\mu} \times \overline{B}$ şi cel al creşterii $d\overline{\theta}$ a unghiului $\overline{\theta}$ (format de $\overline{\mu}$ faţă de $\overline{B}$) sunt opuse (v.figura 2.11), avem:

$$\cos(\overline{M}, d\overline{\theta}) = -1$$

şi:

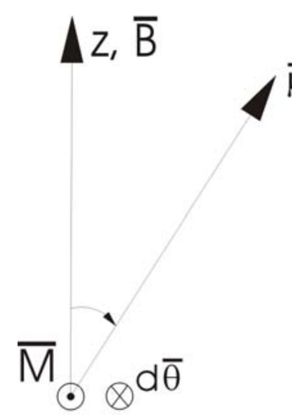

Figura 2.11.

$$E_p = -\int \overline{M} \cdot d\overline{\theta} = \mu B \int sin\theta \cdot d\theta = -\mu B \cdot cos\theta = -\overline{\mu} \cdot \overline{B} = -\mu_z B \qquad (2.3.24)$$

e) Principiul conservării energiei

După cum s-a constatat mai sus, principiul conservării energiei a fost deja utilizat pentru definirea energiei potenţiale (pentru sistemele conservative); acest lucru nu contravine rigurozităţii introducerii principalelor mărimi ale mecanicii, deoarece - prin definiţie - principiile fizice sunt adevăruri obținute prin generalizarea unor rezultate particulare (deci, prin *inducție incompletă*), neputând fi deduse (spre deosebire de teoremele fizice).

Ținând seamă de cea de a doua lege Newton a dinamicii: $\overline{F} = \frac{d\overline{p}}{dt}$, precum şi de definițiile vitezei momentane ($\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt}$) şi energiei cinetice, diferențiala energiei cinetice capătă forma:

$$dE_c = \overline{v} \cdot d\overline{p} = \overline{v} dt \cdot \overline{F} = \overline{F} \cdot d\overline{r} \;\;;$$

pentru sistemele conservative: $dE_c = -\overline{F} \cdot d\overline{r}$, deci: $dE_c = -dE_p$, rezultând că - în acest caz - suma energiilor cinetică şi potențială (numită şi *energia mecanică totală*) este constantă:

$$E_t = E_c + E_p = C(onstanta)$$ (*teorema conservării energiei mecanice*).

§2.4. Elemente privind simetriile geometrice [6]

a) Operații de simetrie geometrică; matrici asociate

Problema simetriilor fizice va fi abordată în detaliu în cadrul capitolului 5, consacrat formalismului analitic al fizicii. Întrucât însă, descrierea ansamblelor de numere fizice corespunzând unor vectori sau tensori necesită unele elemente privind simetriile geometrice, vom introduce în cadrul acestui paragraf noțiunile de bază privind aceste simetrii.

Diferitele configurații (la momente deosebite) ale unui sistem fizic dinamic prezintă simetrii specifice, *simetria corespunzând configurației de echilibru fiind esențială pentru descrierea sistemului*, inclusiv evoluțiilor sale. Trecerea de la o configurație a sistemului la o altă configurație identică se numeşte *operație de simetrie* (simbol $\hat{O}$). Evident, principalele operații de simetrie geometrică se realizează prin:

(i) *rotații*,

(ii) *oglindiri* (cu menționea că prezintă interes îndeosebi operațiile de oglindire "verticală" $\hat{\sigma}_v$ față de plane paralele față de o anumită direcție de referință şi cele de oglindire "orizontală" $\hat{\sigma}_h$ față de plane perpendiculare pe direcția de referință),

(iii) *translații*, precum şi operații de simetrie combinate (exemplu: rotații urmate de oglindiri, translații urmate de rotații ş.a.).

Oricărei operații de simetrie $\hat{O}$ i se poate asocia câte o matrice $\overline{\overline{O}}$. Deoarece *operații*le *de simetrie* geometrică nu schimbă lungimile segmentelor, ele se numesc *unitare* (simbol $\hat{U}$), iar *matricile* asociate sunt numite de asemenea *unitare* (simbol $\overline{\overline{U}}$). Fie $\bar{r}^T \equiv (x, y, z)$ vectorul-linie al coordonatelor unui punct material, iar $\bar{r}$ vectorul-coloană conținând aceleaşi coordonate. În cazul unei *transformări unitare*: $\bar{r}' = \overline{\overline{U}} \cdot \bar{r}$, lungimile segmentelor $\bar{r}$ şi $\bar{r}'$ vor trebui să coincidă, deci:

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \bar{r}'^T \cdot \bar{r}' = \left(\overline{\overline{U}} \cdot \bar{r}\right)^T \cdot \overline{\overline{U}} \cdot \bar{r} = \bar{r}^T \left(\overline{\overline{U}}^T \cdot \overline{\overline{U}}\right) \bar{r} = \bar{r}^T \cdot \bar{r} = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 ,$$

constatând că: $\overline{\overline{U}}^T \cdot \overline{\overline{U}} = \overline{\overline{1}}_3$ (unde $\overline{\overline{1}}_3$ este matricea unitate de ordinul 3) şi:

$$\overline{\overline{U}}^T = \overline{\overline{U}}^{-1} \text{ (\textit{proprietatea caracteristică matricilor unitare}).} \qquad (2.4.1)$$

Pe de altă parte:

$$det(\overline{\overline{U}}^T \cdot \overline{\overline{U}}) = (det\overline{\overline{U}})^2 = det\ \overline{\overline{1}}_3 = 1,$$

deci determinantul matricii asociate unei transformări unitare poate fi egal cu +1 (*transformări unitare proprii*, cum sunt - în particular - rotațiile, eventual "cuplate" cu un număr par de oglindiri) sau cu -1 (*transformări unitare improprii*, cum sunt oglindirile, rotațiile+un număr impar de oglindiri ş.a.).

Problema 2.4.1: Să se deducă matricea asociată rotației cu unghiul θ în jurul axei Oz. (fig. 2.12)

Rezolvare: Fie *x,y,z* coordonatele inițiale ale punctului material, iar *x',y',z'* - coordonatele aceluiaşi punct material după rotația cu unghiul θ în jurul axei Oz. Din figura 2.12 reiese că între aceste coordonate există relațiile: $x' = x\cos\theta - y\sin\theta$, $y' = x\sin\theta + y\cos\theta$, $z' = z$, care pot fi scrise în forma matricială:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$ deci matricea asociată

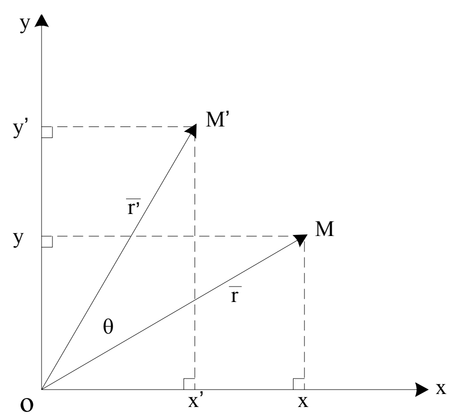

Figura 2.12

rotației cu unghiul θ în jurul axei Oz este: $\overline{\overline{C}}_z(\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (2.4.2)

Problema 2.4.2: Să se deducă matricea asociată oglindirii în planul $\sigma_{z\theta}$, care trece prin axa Oz şi formează unghiul θ cu planul xOz.

Rezolvare: Fie *x,y,z* coordonatele inițiale ale punctului material considerat, iar *x",y",z"* coordonatele acestui punct după efectuarea oglindirii considerate. Deoarece oglindirea studiată este echivalentă cu rotația punctului material cu unghiul -2θ (în sensul invers trigonometric), urmată de o oglindire în planul xOz, avem: $x'' = x\,cos\,2\theta + y\,sin\,2\theta, y'' = x\,sin\,2\theta - y\,cos\,2\theta, z'' = z$.

Relațiile precedente pot fi scrise în forma matricială:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\,2\theta & sin\,2\theta & 0 \\ sin\,2\theta & -cos\,2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

reieşind că matricea asociată oglindirii studiate este:

$$\overline{\overline{\sigma}}_{z\theta} = \begin{pmatrix} cos\,2\theta & sin\,2\theta & 0 \\ sin\,2\theta & -cos\,2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4.3)$$

b) Descrierea rotațiilor între două sisteme de axe triortogonale arbitrare

Fie (α,β,γ), (α',β',γ') şi $(\alpha'',\beta'',\gamma'')$ - proiecțiile vectorilor unitari (versorilor) $\overline{1}_{x'}, \overline{1}_{y'}$ şi - respectiv - $\overline{1}_{z'}$, ai axelor Ox', Oy', Oz' în lungul axelor Ox,Oy şi Oz. În consecință, avem (v.şi fig.2.13):

$$\alpha = \overline{1}_{x'} \cdot \overline{1}_x = cos\,\theta_x,$$
$$\beta = \overline{1}_{y'} \cdot \overline{1}_y = cos\,\theta_y, \quad (2.4.4)$$
$$\gamma = \overline{1}_{z'} \cdot \overline{1}_z = cos\,\theta_z,$$

motiv pentru care parametrii (α,β,γ), (α',β',γ') şi $(\alpha'',\beta'',\gamma'')$ sunt numiți *cosinuşi directori iai direcțiilor axelor Ox', Oy', Oz' față de axele Ox,Oy, respectiv Oz.*

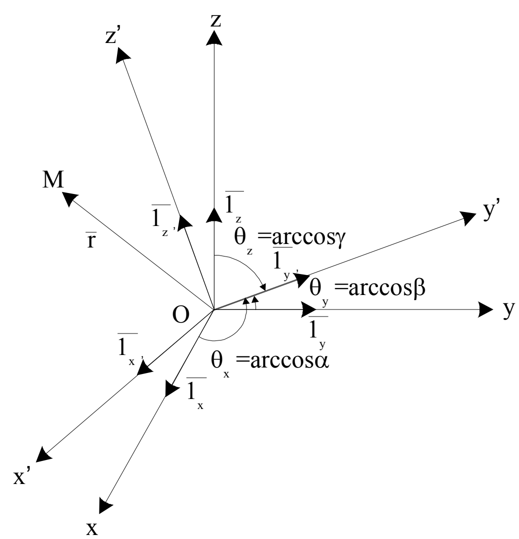

Figura 2.13

Se constată că:

$$x' = \overline{r} \cdot \overline{1}_{x'} = \overline{r}(\alpha\overline{1}_x + \beta\overline{1}_y + \gamma\overline{1}_z) = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$
$$y' = \overline{r} \cdot \overline{1}_{y'} = \overline{r}(\alpha'\overline{1}_x + \beta'\overline{1}_y + \gamma'\overline{1}_z) = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \quad (2.4.5)$$
$$z' = \overline{r} \cdot \overline{1}_{z'} = \overline{r}(\alpha''\overline{1}_x + \beta''\overline{1}_y + \gamma''\overline{1}_z) = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z,$$

deci relațiile dintre coordonatele x',y',z', respectiv x,y,z ale aceluiaşi punct material față de cele 2 sisteme de axe triortogonale considerate pot fi scrise în forma matricială:

$$\overline{r}' \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overline{\overline{R}} \cdot \overline{r}, \text{ unde: } \overline{\overline{R}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} \quad (2.4.6)$$

este matricea care descrie rotația de la sistemul triortogonal de axe Oxyz la sistemul similar Ox'y'z'.

Deoarece axele x',y' şi z' sunt reciproc ortogonale, avem:

$$0 = \overline{1}_{x'} \cdot \overline{1}_{y'} = (\alpha \overline{1}_x + \beta \overline{1}_y + \gamma \overline{1}_z) \cdot (\alpha' \overline{1}_x + \beta' \overline{1}_y + \gamma' \overline{1}_z) = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' \, ,$$

respectiv:

$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0 \text{ şi: } \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0 \, , \tag{2.4.7}$$

relații numite *de "ortogonalitate" a cosinuşilor directori.*

În fine, deoarece - prin definiție - lungimile versorilor sunt egale cu 1, avem:

$$1 = \overline{1}_{x'} \cdot \overline{1}_{x'} = (\alpha \overline{1}_x + \beta \overline{1}_y + \gamma \overline{1}_z) \cdot (\alpha \overline{1}_x + \beta \overline{1}_y + \gamma \overline{1}_z) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \, ,$$

respectiv:

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 \text{ şi: } \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1 \, , \tag{2.4.8}$$

relații numite *de normare a cosinuşilor directori*.

Reiese că dintre cei 9 cosinuşi directori: $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta''$ şi γ'' ai unui sistem triortogonal de axe Ox'y'z' față de un alt sistem triortogonal de axe Oxyz, numai 3 cosinuşi directori sunt independenți, ceilalți putând fi calculați în funcție de aceştia, în baza relațiilor de ortogonalitate şi - respectiv - de normare a cosinuşilor directori.

c) Mărimi (cantități) fizice vectoriale

Ansamblele $\overline{v}$ de 3 mărimi scalare, care se transformă - la aplicarea unei operații unitare - în baza relației: $\overline{v}' = \overline{\overline{U}} \cdot \overline{v}$ se numesc *vectori* (*cantități fizice vectoriale*).

După cum la oglindirea într-un plan σ_v paralel cu vectorul considerat, respectiv într-un plan σ_h perpendicular pe acest vector, avem:

$$\hat{\sigma}_v \overline{v}_p = +\overline{v}_p \text{ şi: } \hat{\sigma}_h \overline{v}_p = -\overline{v}_p \, , \tag{2.4.9}$$

respectiv:

$$\hat{\sigma}_v \overline{v}_a = -\overline{v}_a \text{ şi: } \hat{\sigma}_h \overline{v}_a = +\overline{v}_a \, , \tag{2.4.10}$$

mărimea (cantitatea) fizică vectorială respectivă este numită *vector polar* ($\overline{v}_p$), respectiv *vector axial* ($\overline{v}_a$).

Problema 2.4.3: Fie *m* o oglindă plană, paralelă cu raza vectoare $\overline{r}$ şi viteza unghiulară $\overline{\omega}$ a unui anumit punct material, iar $\hat{m}$ - operația de oglindire față de planul *m*. Deduceți expresiile rezultatelor $\hat{m}\overline{r}$ şi $\hat{m}\overline{\omega}$ ale oglindirilor vectorilor $\overline{r}$ şi $\overline{\omega}$ în planul (oglinda) *m*.

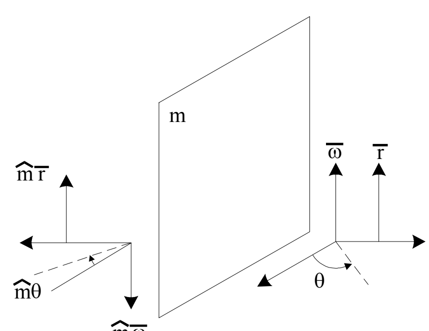

Figura 2.14

Rezolvare: Din figura 2.14, reiese că: $\hat{m}\overline{r} = +\overline{r}, \; \hat{m}\overline{\omega} = -\overline{\omega}$.

Problema 2.4.4: Rezolvați aceeași problemă (2.4.3) pentru un plan $\overline{m}$ perpendicular pe vectorii $\overline{r}$ și $\overline{\omega}$.

Rezolvare: Din figura 2.15, se obține: $\hat{m}\bar{r} = -\bar{r}, \hat{m}\bar{\omega} = +\bar{\omega}$.

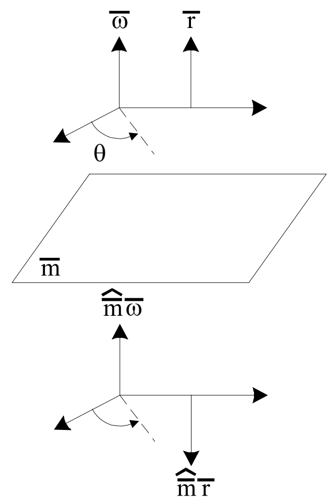

Figura 2.15

Problema 2.4.5: Mărimile fizice vectoriale care se transformă - în urma unor oglindiri - în același mod ca și raza vectoare $\bar{r}$, respectiv viteza unghiulară $\overline{\omega}$, se numesc *vectori polari* (simbol $\overline{v}_p$), respectiv *vectori axiali* (simbol $\overline{v}_a$). Deduceți rezultatele operațiilor de oglindire - într-un plan arbitrar m - corespunzând acestor două tipuri de vectori.
Rezolvare: În conformitate, cu relațiile (2.4.9) și (2.4.10), avem:

$$\hat{m}\bar{v}_p = \bar{v}_{p\|} - \bar{v}_{p\perp},\ \hat{m}\bar{v}_a = -\bar{v}_{a\|} + \bar{v}_{a\perp},$$

unde $\overline{v}_{p\|}, \overline{v}_{a\|}$ și $\overline{v}_{p\perp}, \overline{v}_{a\perp}$ sunt vectorii corespunzând componentelor vectorilor $\overline{v}_p$ și $\overline{v}_a$, paralele și - respectiv - perpendiculare pe planul m.

Problema 2.4.6: Deduceți natura vectorială (vector polar sau axial) a produsului vectorial al:
a) doi vectori polari $\bar{v}_p \times \bar{v}_p'$,
b) unui vector axial cu unul polar: $\bar{v}_a \times \bar{v}_p$.
Dați unele exemple de asemenea mărimi fizice vectoriale.

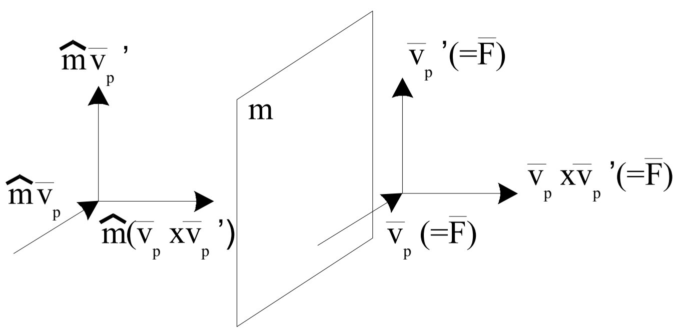

Figura 2.16

Rezolvare: a) Fie $\overline{m}$ un plan paralel cu vectorii $\overline{v}_p$ (în particular, raza vectoare $\overline{r}$ a unui anumit punct material P) și $\overline{v}_p'$ (în particular, forța $\overline{F}$ care acționează asupra acestui punct material), plan care este - în consecință - perpendicular pe produsul vectorial $\overline{v}_p \times \overline{v}_p'$ (în particular, pe momentul forței: $\overline{M} = \overline{r} \times \overline{F}$).

Deoarece $\hat{m}(\bar{v}_p \times \bar{v}_p') = +\bar{v}_p \times \bar{v}_p'$ (v.fig.2.16), reiese că produsul vectorial al doi vectori polari (în particular, momentul forței $\overline{M}$) este un vector axial.

b) Folosind aceeași metodă grafică, se constată că produsul vectorial $\bar{v}_a \times \bar{v}_p$ este un vector polar (vezi, în particular, egalitatea: $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$).

Problema 2.4.7: Sunt fizic echivalente sensurile de rotație corespunzând acelor de ceasornic, respectiv cel direct trigonometric, în prezența unui câmp paralel: a) electric, b) magnetic (fig.2.17)?

Rezolvare: Întrucât forța este un vector polar, din expresiile forței electrice, respectiv a forței Lorentz:

$$\overline{F}_e = q\overline{E}, \overline{F}_L = q\overline{v} \times \overline{B},$$

reiese că intensitatea câmpului electric $\overline{\mathrm{E}}$ este un vector polar (care nu se schimbă după oglindirea într-un plan paralel m), în timp ce inducția magnetică $\overline{\mathrm{B}}$ este un vector axial (care își schimbă sensul în urma unei asemenea oglindiri).

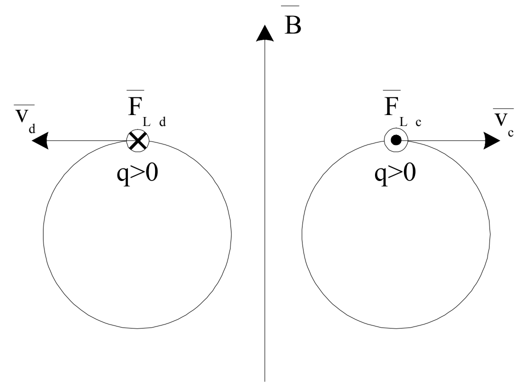

Figura 2.17

În consecință, cele două sensuri de rotație indicate (fig.2.17):

a) sunt fizic echivalente într-un câmp electric paralel,

b) nu pot fi fizic echivalente într-un câmp magnetic paralel.

Problema 2.4.8: Să se deducă natura (vector polar, respectiv vector axial) a momentului magnetic.

Rezolvare: În conformitate cu rezultatul problemei 2.3.2 (v.mai sus), energia potențială de interacțiune magnetică este:

$$E_{mag} = -\mu_z B = -\overline{\mu} \cdot \overline{B}.$$

Deoarece energia magnetică nu-și schimbă valoarea la oglindiri în plane paralele (σ_v), respectiv perpendiculare (σ_h) pe inducția magnetică, reiese că *momentul magnetic* $\overline{\mu}$ are aceeași comportare la aceste oglindiri ca și inducția magnetică (vector axial, v.problema anterioară), fiind deci un *vector axial.*

d) Mărimi (Cantități) fizice tensoriale

(i) *Masa efectivă - mărime fizică tensorială*

Considerăm sistemele fizice de referință R și R', în raport cu care punctul material studiat are impulsurile $\overline{p}$, respectiv $\overline{p}'$ și vitezele $\overline{v}$, $\overline{v}'$. În conformitate cu relația (2.3.4), aceste mărimi fizice sunt legate prin relațiile: $\overline{p} = \overline{\overline{m}} \cdot \overline{v}, \overline{p}' = \overline{\overline{m}}' \cdot \overline{v}'$, unde $\overline{\overline{m}}$ și $\overline{\overline{m}}'$ sunt matricile formate de elementele masei (efective) față de sistemele de referință R, respectiv R'. ºinând seamă de definiția mărimilor fizice vectoriale (v.secțiunea 2.4.b), între mărimile de acest tip din sistemele de referință R și R' există relațiile: $\overline{p}' = \overline{\overline{U}} \cdot \overline{p}$ și $\overline{v}' = \overline{\overline{U}} \cdot \overline{v}$, unde $\overline{\overline{U}}$ este o matrice unitară ($\overline{\overline{U}}^{-1} = \overline{\overline{U}}^T$).

Rezultă că relația dintre vectorii $\overline{p}$ și $\overline{v}$ poate fi scrisă și în forma:

$$\overline{p} = \overline{\overline{U}}^{-1} \cdot \overline{p}' = \overline{\overline{m}} \cdot \overline{v} = \overline{\overline{m}} \cdot \overline{\overline{U}}^{-1} \cdot \overline{v}',$$

care - prin înmulțire la stânga cu matricea $\overline{\overline{U}}$ - devine:

$$\overline{p}' = \overline{\overline{U}} \cdot \overline{\overline{m}} \cdot \overline{\overline{U}}^T \cdot \overline{v}'.$$

Comparând această expresie a impulsului $\overline{p}'$ cu precedenta ($\overline{p}'=\overline{\overline{m}}'\cdot\overline{v}'$), se obține relația de transformare a componentelor matricii masei efective între două sisteme de referință:

$$\overline{\overline{m}}'=\overline{\overline{U}}\cdot\overline{\overline{m}}\cdot\overline{\overline{U}}^{T}. \tag{2.4.11}$$

Deoarece, prin definiție, o *mărime tensorială* $\overline{\overline{T}}$ *de ordinul N* corespunde unei matrici pătratice de ordinul N, care - la aplicarea unei transformări unitare $\overline{\overline{U}}$ - se transformă prin relația:

$$\overline{\overline{T}}'=\overline{\overline{U}}\cdot\overline{\overline{T}}\cdot\overline{\overline{U}}^{T}, \tag{2.4.11'}$$

reiese că masa efectivă $\overline{\overline{m}}$ este o mărime fizică tensorială de ordinul 3.

(ii) *Caracterul simetric al matricii masei efective*

Conform definiției energiei cinetice (v.relația (2.3.15)), expresia diferențială a energiei cinetice este:

$$dE_c=\overline{v}\cdot d\overline{p}=\sum_{i=x,y,z}v_i dp_i \text{ , de unde: } \frac{\partial E_c}{\partial p_i}=v_i \ .$$

Pe de altă parte, relația $\overline{p}=\overline{\overline{m}}\cdot\overline{v}$ poate fi scrisă şi în forma inversă: $\overline{v}=\overline{\overline{m}}^{-1}\cdot\overline{p}$, de unde:

$$v_i=\sum_{j=1}^{3}(\overline{\overline{m}}^{-1})_{ij}\,p_j\,,$$

unde $\overline{\overline{m}}^{-1}$ este inversa matricii masei efective, iar $(\overline{\overline{m}}^{-1})_{ij}$ (unde i,j=x,y,z) este elementul (i,j) al matricii inverse.

Pentru simplitate, vom considera în continuare cazul mişcărilor nerelativiste, pentru care valorile m_{ij} şi $(\overline{\overline{m}}^{-1})_{ij}$ nu depind de componentele vitezei (respectiv, impulsului). În acest caz:

$$\frac{\partial^2 E_c}{\partial p_i\partial p_j}=\frac{\partial v_i}{\partial p_j}=(\overline{\overline{m}}^{-1})_{ij} \text{ şi desigur: } \frac{\partial^2 E_c}{\partial p_j p_i}=(\overline{\overline{m}}^{-1})_{ji} \ .$$

Deoarece dependența energiei cinetice de componentele p_i, p_j (i,j=x,y,z) ale vitezei este descrisă de o funcție continuă, avem:

$$\frac{\partial^2 E_c}{\partial p_i\partial p_j}=\frac{\partial^2 E_c}{\partial p_j\partial p_i},$$

de unde reiese că inversa matricii masei efective este o matrice simetrică: $(\overline{\overline{m}}^{-1})_{ij}=(\overline{\overline{m}}^{-1})_{ji}$.

Deoarece:

$$\overline{\overline{m}}\cdot(\overline{\overline{m}}^{-1})^{T}=(\overline{\overline{m}}^{-1}\cdot\overline{\overline{m}})^{T}=\overline{\overline{I}}_3^{\,T}=\overline{\overline{I}}_3 \quad \text{(matricea unitate de ordinul 3),}$$

reiese că:

$$(\overline{\overline{m}}^{T})^{-1}=(\overline{\overline{m}}^{-1})^{T},$$

deci şi *matricea masei efective este simetrică:*

$$\overline{\overline{m}}^{T}=\left[(\overline{\overline{m}}^{T})^{-1}\right]^{-1}=\left[(\overline{\overline{m}}^{-1})^{T}\right]^{-1}=(\overline{\overline{m}}^{-1})^{-1}=\overline{\overline{m}} \tag{2.4.12}$$

De o manieră similară, se poate demonstra că şi alte mărimi fizice scalare caracteristice unor sisteme sau medii izotrope au - în cazul general (anizotrop) - caracterul unor tensori simetrici, în particular: momentul de inerție, permitivitatea electrică, permeabilitatea magnetică şi altele.

(iii) *Posibilitatea diagonalizării tensorilor simetrici; axele principale, vectorii şi valorile proprii asociate unor tensori simetrici*

În conformitate cu definiția mărimilor fizice tensoriale (v. secțiunea 2.4.a de mai sus), la aplicarea transformării unitare $\overline{\overline{R}}$ de rotație de la axele triortogonale Oxyz la axele triortogonale

Ox'y'z', mărimea tensorială $\overline{\overline{T}}$ se transformă în baza relației matriciale: $\overline{\overline{T}}' = \overline{\overline{R}} \cdot \overline{\overline{T}} \cdot \overline{\overline{R}}^T$, a cărei formă explicită este:

$$\begin{pmatrix} T_{x'x'} & T_{x'y'} & T_{x'z'} \\ T_{y'x'} & T_{y'y'} & T_{y'z'} \\ T_{z'x'} & T_{z'y'} & T_{z'z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{pmatrix}$$

Expresiei matriciale de mai sus îi corespund ecuațiile scalare:

$$T_{x'y'} = \alpha'(\alpha T_{xx} + \beta T_{yx} + \gamma T_{zx}) + \beta'(\alpha T_{xy} + \beta T_{yy} + \gamma T_{zy}) + \gamma'(\alpha T_{xz} + \beta T_{yz} + \gamma T_{zz}) \text{ ş.a.m.d.}$$

În cazul unui tensor simetric:

$$T_{y'x'} = T_{x'y'}, T_{z'x'} = T_{x'z'} \text{ şi: } T_{z'y'} = T_{y'z'},$$

pentru diagonalizarea matricii $\overline{\overline{T}}'$ este suficientă anularea a 3 elemente nediagonale diferite (spre exemplu a $T_{x'y'}, T_{y'z'}$ şi $T_{z'x'}$); ori, ecuațiile:

$$T_{x'y'} = 0,\ T_{y'z'} = 0 \text{ şi: } T_{z'x'} = 0$$

includ doar 3 cosinuşi directori independenți (spre exemplu: α, β şi α'), deci sistemul format de aceste ecuații este compatibil (admite soluții). Fie α_p, β_p şi γ_p - soluțiile acestui sistem de ecuații ($T_{x'y'} = T_{y'z'} = T_{z'x'} = 0$), iar $\gamma_p, \beta'_p, \gamma'_p, \alpha''_p, \beta''_p$ şi γ''_p valorile celorlalți cosinuşi directori, determinate în baza relațiilor de ortogonalitate şi a celor de normare. Prin definiție, vectorii:

$$\overline{1}_X = \begin{pmatrix} \alpha_p \\ \beta_p \\ \gamma_p \end{pmatrix}, \overline{1}_Y = \begin{pmatrix} \alpha'_p \\ \beta'_p \\ \gamma'_p \end{pmatrix} \text{ şi: } \overline{1}_Z = \begin{pmatrix} \alpha''_p \\ \beta''_p \\ \gamma''_p \end{pmatrix}$$

se numesc *vectori proprii*, iar direcțiile OX, OY şi OZ determinate de respectivii cosinuşi directori se numesc *axe principale ale tensorului simetric* $\overline{\overline{T}}$.

Deoarece elementele nediagonale ale matricii asociate tensorului $\overline{\overline{T}}$ sunt nule față de axele principale OX, OY şi OZ ale acestui tensor: $T_{XY} = T_{YX} = 0$, $T_{YZ} = T_{ZY} = 0$ şi: $T_{ZX} = T_{XZ} = 0$, acest tensor este diagonalizat față de axele sale principale:

$$\overline{\overline{T}}_{XYZ} = \begin{pmatrix} T_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & T_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & T_{ZZ} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} T_X & 0 & 0 \\ 0 & T_Y & 0 \\ 0 & 0 & T_Z \end{pmatrix}.$$

Cele 3 valori diagonale nenule (T_X, T_Y şi T_Z) ale formei diagonalizate a unui tensor simetric se numesc *valori proprii* ale respectivului tensor. În cazul în care două dintre valorile proprii sunt egale, dar diferite de cea de a treia: $T_X = T_Y \neq T_Z$, axa principală asociată valorii proprii distincte (axa OZ) este o *axă de simetrie (proprie) a mediului (sistemului) fizic studiat,* iar *mediu*l în care se întâlneşte această proprietate este numit *uniax.*

În fine, în cazul când toate cele 3 valori proprii ale unui tensor simetric sunt egale între ele: $T_X = T_Y = T_Z = T$, *mediu*l față de care există această proprietate este *izotrop*, iar matricea asociată unui tensor simetric capătă față de un mediu izotrop forma:

$$\overline{\overline{T}} = \begin{pmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix} = T \cdot \overline{\overline{1}}_3$$

unde $\overline{\overline{1}}_3$ este matricea unitate de ordinul 3; ultima relație ne arată şi calea prin care mărimile fizice tensoriale în cazul general (al mediilor anizotrope) se particularizează în mărimi scalare pentru medii izotrope.

Problemă: Cunoscând valorile (în unități egale cu masa de repaus în vid a electronului) elementelor matricii masă efectivă a unui electron liber într-un solid față de un sistem triortogonal de axe Oxyz arbitrar:

$$\overline{\overline{m}} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2\sqrt{3} & 0 \\ 0{,}2\sqrt{3} & 1{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}95 \end{pmatrix}$$

să se deducă pozițiile axelor principale ale tensorului masă efectivă.

Rezolvare: Deoarece, în acest caz, matricea masei efective este parțial diagonalizată, pentru diagonalizarea completă a acestei matrici este suficientă efectuarea unei rotații în planul xOy de matrice (v.figura 2.12):

$$\overline{\overline{R}}(\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pentru diagonalizarea completă este necesară îndeplinirea condiției

$$\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_X & 0 & 0 \\ 0 & m_Y & 0 \\ 0 & 0 & m_Z \end{pmatrix}$$

de unde:

$$-sin\theta(a \cdot cos\theta + b \cdot sin\theta) + cos\theta(b \cdot cos\theta + c \cdot sin\theta) = 0 \text{ şi: } tg2\theta = \frac{2b}{c-a}.$$

Deoarece: $2b = 0{,}4\sqrt{3}$, iar: $c - a = 0{,}4$, se obține: $tg2\theta = \sqrt{3}$ şi: $\theta = \pi / 6$ radiani, adică *axele principale OX,OY sunt obținute prin rotația cu* 30^o *a axelor arbitrare Ox,Oy în jurul axei Oz* (care coincide cu axa principală OZ) *în sensul direct trigonometric.* Desigur, pe această bază ($\theta = \pi / 6$) se pot deduce uşor (în continuare) valorile proprii m_X şi m_Y ale masei efective (evident: $m_Z = 0{,}95 m_{oe}$).

....

În final, menționăm că o aplicație importantă a metodei simetriilor fizice o constituie *condiția* (necesară, dar nu şi suficientă) *de omogenitate față de operațiile de simetrie a relațiilor fizice*: "Pentru ca o relație fizică să fie corectă este necesar ca toți termenii săi să prezinte o aceeaşi comportare față de fiecare operație de simetrie admisă de sistemul fizic studiat". Evident, această condiție este analoagă celei de omogenitate dimensională a relațiilor fizice (v.secțiunea 1.4.b).

Referințe

1.*** **International Standard ISO 1-1(1992) -** "*Quantities and Units*", International Standardization Organization.
2. **E. R. Cohen, B. N. Taylor -** *J. Phys. Chem. Ref. Data,* 2(4)663(1973).
3. **E. R. Cohen, B. N. Taylor -** *International Council of Scientific Univers.Committee on Data for Science and Technology,* **Codata Bulletin**, nr. 63, nov. 1986.
4. **D. Iordache** - *"Noțiuni şi metode generale ale fizicii"*, Inst. Politehnic Bucureşti, 1980.
5. **D. Iordache** - *"Fundamentele fizicii moderne"*, Inst. Politehnic Bucureşti, 1985.
6. **J. P. Eliott, P. G. Dawber** - *"Symmetry in Physics"*, 2 vol., Macmillan Press, 1979.