INTRODUCERE

Spre deosebire de ramurile "clasice" ale Fizicii: Fizica experimentală, Fizica teoretică, respectiv Fizica aplicată (tehnică), deşi a fost luată în consideraţie încă din antichitate[1]**,** Fizica numerică a început să fie examinată cu atenţie abia în ultimii ani. Acest lucru s-a produs în ciuda faptului că – frecvent - investigaţiile dădeau la iveală noi regularităţi numerice, atât în Fizica macroscopică, cât şi în cosmologie sau microfizică. Astfel:

a) conform legii empirice a lui Titius-Bode, semiaxele mari ale planetelor satisfac aproximativ relaţia: $R_n = a + b \cdot 2^n$, unde a şi b sunt constante, iar n este "ordinul" planetei (n=1 pentru Mercur, n=2 pentru Venus, n=3 pentru Pământ, n=4 pentru Marte, n=5 pentru asteroizi, n=6 pentru Jupiter ş.a.m.d.);

b) fizicianul elveţian J.J.Balmer a evidenţiat încă din 1885 faptul că frecvenţele liniilor spectrale ale hidrogenului atomic sunt date de expresia (*legea lui Balmer*):

$$\nu = Rc(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}),$$

unde n este un număr întreg ≥ 3 (*numărul cuantic principal*) ş.a.

De asemenea, în domeniul (total diferit) al Acusticii, s-a constatat încă din vremea lui Johann Sebastian Bach (1685-1750) că - după cum raportul frecvenţelor sunetelor de bază este: (I) un număr raţional, (II) un număr transcendent de natură algebrică ($\sqrt[12]{2}$ pentru raportul frecvenţelor sunetelor succesive la semiton), (III) un număr transcendent - se realizează armonia: (I) preclasică (Palestrina, Vivaldi), (II) clasică, (III) "modernă" (tip jazz).

În prezent, dezvoltarea excepţională a tehnicilor electronice de calcul din ultimii ani au impus (în fine) cu necesitate Fizica numerică, drept una dintre cele mai importante metode ale Fizicii contemporane. Trebuie subliniat şi faptul că această dezvoltare impetuoasă a tehnicii de calcul a permis nu numai descrierea comportării sistemelor fizice în diferite condiţii, dar şi simularea unor procese fizice şi tehnice desfăşurate în condiţii greu accesibile (din punct de vedere experimental). Deoarece acest lucru a permis scăderea considerabilă a cheltuielilor necesare experimentării unor modele tehnice variate, precum şi simularea unor procese desfăşurate în condiţii inaccesibile, în numeroase ţări au apărut Societăţi naţionale de simulare (dintre Societăţile de acest tip din ţările din apropierea noastră, menţionăm: HSS în Ungaria, PSS în Polonia, CSSS în Cehia şi Slovacia, LSS în Letonia, TSS în Turcia ş.a.), precum şi continentale (Federation of European Simulation Societies - EUROSIM, European Simulation Council - EuSC, Simulation in Europe ESPRIT Working Group - SIE), respectiv mondiale: The International Society for Computer Simulation. Trebuie să subliniem faptul că *utilizarea unor modele teoretice riguroase ale fenomenelor descrise*, *precum şi a unor metode numerice adecvate, sunt absolut necesare pentru obţinerea unor simulări de înaltă precizie.*

Ce este Fizica numerică? Departe de a se reduce la aplicaţiile în Fizică ale metodelor numerice, Fizica numerică include practic toate problemele importante ale Fizicii, acordând însă

[1] Pornind de la determinarea raportului lungimilor corzilor pentru terţa mare (5/4) şi pentru terţa mică (6/5), precum şi de la încercarea de a extinde aceste rezultate în domeniul cosmosului ("armonia" sferelor pe care s-ar găsi planetele, la distanţe aflate în rapoarte similare celor din acustică), învăţatul grec **Pythagoras** (secolul VI înaintea erei noastre) **considera că întreaga natură** (implicit Fizica, deoarece în greaca veche "physis"=natură) **este descrisă de numere.**

prioritate absolută modului în care sunt obţinute valorile numerice ale parametrilor fizici, precum şi semnificaţiei reale a acestor valori numerice (după cum Fizica experimentală acordă prioritate experimentelor, iar Fizica teoretică - modelelor teoretice). Deoarece, în multe cazuri, valorile numerice ale unor parametri fizici depind de metoda experimentală şi de modelul teoretic care au condus la aceste valori, respectivii ***parametri fizici*** sunt numiţi ***efectivi***, atributul "efectiv" subliniind că semnificaţia valorilor corespunzătoare este legată de metoda experimentală şi cea de prelucrare a rezultatelor experimentale (modelul teoretic) utilizat(ă).

Chiar în cazul mărimilor fizice adimensionale, *numerele fizice* (asociate valorilor numerice corespunzătoare) *au semnificaţii specifice, reprezentând o caracteristică a unui sistem aflat în anumite condiţii*; în particular, o aceeaşi valoare (spre exemplu 0,5) are semnificaţii total diferite dacă este asociată criteriului de similitudine $\beta = \frac{v}{c}$ (specific relativităţii restrânse), respectiv criteriului *Froude* ($Fr = \frac{v^2}{gL}$) - specific curgerilor forţate.

De multe ori, o valoare numerică constituie doar o componentă a unui ansamblu de valori numerice determinat de considerente de simetrie a problemei fizice studiate (vectori, tensori), asociat unor operatori (cazul fizicii cuantice, dar şi al operatorilor descriind ciclurile histerezis) sau datorat fenomenelor de disipaţie energetică, respectiv anizotropie la oglindire (fazorii).

Trebuie evidenţiat faptul că valorile numerice obţinute prin măsurări (afectate de erori) pot conduce la informaţii - sau în cazul unor erori mari - la dezinformaţii. Din acest motiv, *fizica numerică este obligată să studieze cu atenţie modul de obţinere a informaţiilor, inclusiv problemele prelucrării rezultatelor experimentale.* Desigur, evaluarea cantităţii de informaţie (eventual, dezinformaţie) rezultată în urma măsurărilor şi prelucrărilor rezultatelor experimentale este de asemenea necesară şi utilă.

În consecinţă, ***principalele obiective ale Fizicii numerice constau în***:

1) evidenţierea modului în care se obţin informaţiile care conduc la obţinerea valorilor numerice (*numerelor fizice*); menţionăm că, în prezent, prezintă interes îndeosebi instrumentele electromagnetice, detectorii de semnale ondulatorii (acustice, electromagnetice ş.a.), traductorii termici, respectiv cei cuantici;

2) stabilirea semnificaţiilor numerelor fizice, în baza metodelor analitice (similitudine, simetrii) ale Fizicii;

3) evidenţierea ecuaţiilor care conduc la evaluarea numerelor fizice, în baza metodelor de sinteză (analogii fizice ş.a.) ale Fizicii;

4) aplicaţii în Fizică ale principalelor metode numerice: cu caracter determinist (spre exemplu, metoda gradientului), stochastic (metoda Monte Carlo, cea a "pasului aleator" – random walk – ş.a.) sau mixt (metoda algoritmilor genetici ş.a.), respectiv de integrare a ecuaţiilor diferenţiale (în mod deosebit, metoda diferenţelor finite, specifică propagării "din aproape în aproape") şi altele; desigur, este necesară de asemenea utilizarea bibliotecilor matematice (Mathlab, Mathematica, Mathcad ş.a.) ale calculatoarelor uzuale;

5) prelucrarea riguroasă a rezultatelor experimentale;

6) simularea unor procese fizice desfăşurate în condiţii inaccesibile sau greu accesibile;

7) evidenţierea şi studiul fenomenelor numerice care intervin în simulările unor procese fizice prin anumite metode numerice;

8) aplicaţii în proiectarea: a) experienţelor (modelelor de laborator), b) aparatelor, c) instalaţiilor.

După cum se va constata din studiul primului capitol, definirea valorilor numerice este condiţionată de existenţa unor relaţii de ordine pentru mulţimea informaţiilor investigate. La rândul lor, odată determinate, valorile numerice vor constitui "jaloane" ale unei anumite ordini în problemele studiate, ceeace face ca problemele Fizicii numerice să fie strâns legate de cele ale Structurilor fizicii.

Constatările de mai sus conduc la concluziile:

a) Fizica numerică este o metodă a Fizicii contemporane care, pornind de la rezultatele riguroase ale Fizicii teoretice şi folosind elemente aprofundate de matematici, precum şi tehnicile moderne de calcul, conduce la simularea unor procese fizice, precum şi la proiectarea ştiinţifică a unor obiective tehnice (experienţe de laborator, aparate, instalaţii şi altele),

b) studiul Fizicii numerice necesită şi se realizează în strânsă legătură cu studiul unor probleme ale temelor Fizica şi Informaţia, respectiv Structurile fizicii.

Cap. 1. *Noțiuni și metode generale ale Fizicii*

După cum este cunoscut, categoria filozofică *"**materie**"* corespunde sistemelor care au o natură obiectivă. Spre exemplu, un scaun sau o rază de lumină aparțin categoriei *"materie"*, deoarece existența lor nu depinde de un anumit subiect, în timp ce teorema lui Pitagora nu aparține acestei categorii, deoarece constituie o reprezentare convențională a anumitor raporturi topologice. Sistemele materiale sunt clasificate în *sisteme substanțiale*, respectiv de ***câmp***, după cum masa lor de repaus este diferită de zero, respectiv este nulă.

Științele naturii studiază evoluția sistemelor fizice materiale (cu existență obiectivă). Desigur, comportarea sistemelor fizice materiale depinde de dimensiunile lor. Pentru clasificarea comportărilor diferitelor sisteme materiale este utilă noțiunea de "nivele de organizare" ale materiei, deși - după cum se va constata în cadrul următoarelor capitole - problemele descrierii comportării nu se reduc la aceste "nivele", fiind considerabil mai complicate. În prezent sunt recunoscute:

a) ***nivelul cosmologic*** de organizare a materiei, corespunzând sistemelor fizice ale căror dimensiuni sunt de ordinul a $10^{10}\,m$ sau mai mult,

b) ***nivelul macroscopic***, corespunzând sistemelor fizice uzuale, cu dimensiuni de ordinul a $10^{-2}...10^{3}\,m$,

c) ***nivelul mesoscopic***, corespunzând sistemelor cu dimensiuni de ordinul $10^{-6}\,m$,

d) ***nivelul molecular***, corespunzând sistemelor fizice cu dimensiuni de ordinul a $10^{-10}...10^{-8}\,m$,

e) ***nivelul atomic***, pentru sisteme fizice de ordinul a $10^{-10}\,m$,

f) ***nivelul nucleelor atomice***, cu dimensiuni de ordinul a $10^{-15}...10^{-14}\,m$,

g) ***nivelul particulelor elementare***, cu dimensiuni de ordinul a 10^{-15} m,

h) ***nivelul particulelor "subelementare"*** (cuarci, gluoni ș.a.)

și - în fine - pe un plan calitativ diferit:

i) ***nivelul materiei vii*** (superior organizate).

Materia posedă anumite atribute (caracteristici) ireductibile, numite și ***atribute fundamentale ale materiei***. În prezent, sunt recunoscute ca atare următoarele atribute fundamentale (ireductibile) ale materiei: ***timpul și spațiul*** (orice mișcare se produce în spațiu și în timp), ***atributul interacțional*** (orice sistem material interacționează), ***atributul asociat conversiei substanță-câmp*** (spre exemplu, prin difuzia Bhabha: $e^- + e^+ \leftrightarrow 2h\nu_\gamma$, adică o pereche electron-pozitron se poate transforma într-o pereche de cuante γ, sau invers), respectiv: ***atributul termic*** (specific nivelului molecular de "organizare" a materiei), ***atributul electric*** (specific nivelului particulelor "elementare") și - în fine - ***atributul fizico-fiziologic*** (specific materiei vii).

În prezent, științele naturii sunt clasificate după cum obiectivul lor de bază îl constituie evidențierea *corelațiilor legice* (valabile în condiții foarte generale), *corelațiilor semiempirice* (valabile doar pentru un număr finit de tipuri de substanțe sau sisteme fizice), respectiv *aplicațiilor tehnice* în:

a) *științe fizice* (care acordă prioritate evidențierii corelațiilor legice)[2],

[2] Această opinie este exprimată printre alții de către A.Einstein [1], pag.67, R.Feynman [2], vol.1, pag.36 ș.a.

b) *ştiinţe tehnologice* (inclusiv chimia propriu-zisă, care acordă prioritate evidenţierii corelaţiilor semiempirice),

c) *ştiinţe tehnice.*

Având în vedere rolul central al corelaţiilor în studiul ştiinţelor naturii, este firesc ca noţiunile de bază ale fizicii (principala ştiinţă fizică, celelalte fiind chimia fizică, biofizica, electronica fizică, astrofizica ş.a.) să fie clasificate în: (i) *noţiuni precorelaţionale,* (ii) *noţiuni specifice corelaţiilor,* (iii) *noţiuni postcorelaţionale*.

§1.1. Noţiuni de bază precorelaţionale

Principalele noţiuni precorelaţionale sunt introduse pentru caracterizarea diferitelor informaţii fizice.

În fapt, din mediul ambiant primim diferite informaţii brute. Spre exemplu, constatăm că, împingând un vagon albastru, acesta se deplasează mai repede şi că emite anumite sunete (scârţâituri). Unele dintre aceste informaţii pot corespunde unor proprietăţi fizice, respectiv unor mărimi fizice, dacă ansamblele de asemenea informaţii posedă anumite *structuri algebrice* ("speciale").

Astfel, dacă ansamblul P al anumitor informaţii posedă ***o operaţie de echivalenţă E*** cu proprietăţile:

a) ***de reflexivitate*** (***reproductibilitate***): dacă $x \in P$, atunci $x \equiv x(\mathrm{mod}E)$ (spre exemplu, privind vagonul mai sus menţionat la diferite momente constatăm că are aceeaşi culoare - albastră),

b) ***simetrie***: dacă $x, y \in P$, atunci $x \equiv y(\mathrm{mod}E) \rightarrow$ (implică) $y \equiv x(\mathrm{mod}E)$ (spre exemplu, dacă privind mai întâi vagonul *1* şi apoi vagonul *2*, constatăm că ambele sunt albastre, atunci trebuie să obţinem aceeaşi constatare şi în cazul în care vagonul *2* este privit înaintea vagonului *1*),

c) ***tranzitivitate****:* dacă $x, y, z \in P$, atunci $x \equiv y(\mathrm{mod}E)$ şi $y \equiv z(\mathrm{mod}E) \rightarrow x \equiv z(\mathrm{mod}E)$,

atunci ansamblul P corespunde unei *proprietăţi (însuşiri) fizice.*

Un ansamblu M de informaţii fizice corespunde unei *mărimi fizice* dacă posedă, în plus faţă de operaţia de echivalenţă E (cu proprietăţile mai sus specificate) şi ***o operaţie de ordonare O*** cu proprietăţile de:

a) ***asimetrie***: dacă $x, y \in M$ şi $x < y(\mathrm{mod}\,O) \rightarrow y$ nu poate fi mai mic decât x (mod O),

b) ***tranzitivitate***: dacă $x, y, z \in M$ şi $x < y(\mathrm{mod}\,O)$, $y < z(\mathrm{mod}\,O)$,atunci:$x < z(\mathrm{mod}\,O)$,

precum şi ***o lege de compunere T*** cu proprietatea: $(\forall)$ (pentru orice) $x, y \in M$ există $(\exists) z \in M$, astfel încât: $xTy=z$.

Spre exemplu, ansamblul lungimilor unor rigle rigide corespunde unei mărimi fizice (lungimea), deoarece suprapunerea a două asemenea rigle, cu o extremitate comună, de-a lungul aceleiaşi drepte şi în acelaşi sens, respectiv în sensuri opuse, permite efectuarea operaţiilor de echivalenţă (fig.1.1a), ordonare (fig.1.1b) şi, respectiv, a compunerii celor două lungimi oarecari (fig.1.1c).

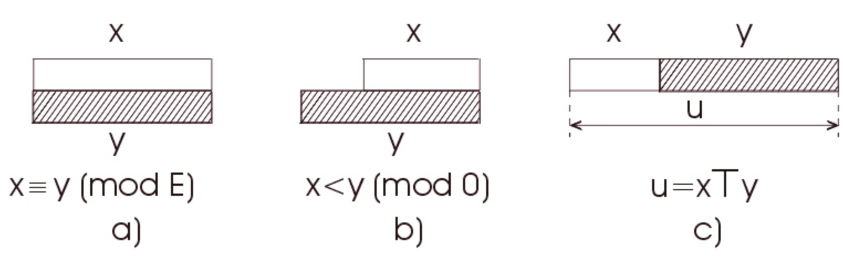


Figura 1.1

Deoarece mulțimea lungimilor posedă operațiile de echivalență şi ordonare, precum şi legea de compunere, mai sus specificate, această mulțime corespunde unei mărimi fizice, în timp ce mulțimea culorilor reprezintă doar o proprietate fizică, deoarece pentru această mulțime poate fi definită doar operația de echivalență, dar nu şi operația de ordonare şi legea de compunere (a nu se confunda mulțimea culorilor cu mulțimea lungimilor de undă sau a frecvențelor corespunzătoare, care corespund unor mărimi fizice).

O reprezentare *f(x)* a elementelor *x* ale unei anumite mărimi fizice *M* în corpul numerelor reale *R* este numită ***măsură fizică*** dacă această reprezentare are următoarele proprietăți:

a) ***univocitate****:* $(\forall)x \in M \rightarrow$un singur $f(x) \in R$,

b) ***păstrarea ordonării****:* dacă $x, y \in M$, atunci: $x < y(\mathrm{mod}\, O) \rightarrow f(x) < f(y)$,

c)***"inducerea" unei legi de compunere*** T_R *în R:* $(\forall)x, y \in M$, atunci: $z=xTy\rightarrow f(x)T_R f(y) = f(z)$. Pentru orice mărime fizică există mai multe măsuri fizice posibile, după cum se arată în figura 1.2 pentru mulțimea lungimilor.

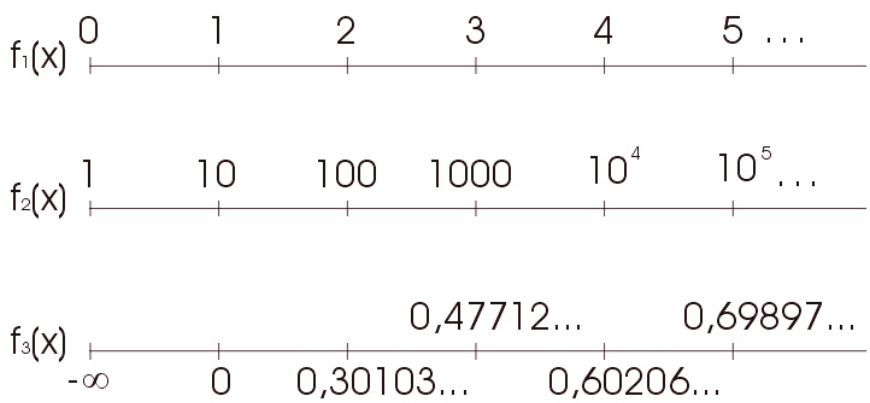


Figura 1.2

O măsură fizică pentru care legea de compunere T_R "indusă" în corpul numerelor reale *R* este operația de adunare: $T_R = "+"$ este numită ***măsură fizică liniară***.

Un element al mulțimii de informații asociate unei mărimi fizice *M* este numit ***cantitate fizică***; spre exemplu, viteza luminii în vid este o cantitate fizică. Mulțimea informațiilor corespunzând unei aceleiaşi caracteristici a unui sistem fizic dat în diferite condiții (la temperaturi, presiuni, umidități ş.a.m.d. diferite) se numeşte ***parametru fizic***. Spre exemplu, lungimea unei rigle (în diferite condiții) este un parametru fizic.

Numărul real *f(x)*, asociat în corpul numerelor reale *R* cantității fizice $x \in M$ prin măsura fizică *f* este numit *valoarea numerică a cantității fizice x în măsura f* (simbolul uzual al valorii numerice este $\{x\}_f$). Cantitatea fizică $<x>_f$ (aparținând mărimii fizice *M*) pentru care valoarea numerică este egală cu 1: $\{<x>_f\}_f = 1$ este numită *unitate de măsură a cantității fizice x (sau a mărimii fizice M) în măsura fizică f.*

Pentru măsurile fizice liniare avem [3]: $x = \{x\}_f <x>_f$. Deoarece o cantitate fizică *x* rămâne aceeaşi pentru măsuri fizice diferite: $x = \{x\}_1 <x>_1 = \{x\}_2 <x>_2$, avem:

$$\frac{\{x\}_1}{\{x\}_2} = \frac{<x>_2}{<x>_1} .$$

Spre exemplu, valoarea înălțimii unui om în metri este de 100 ori mai mică decât valoarea aceleiaşi înălțimi în centimetri, deoarece $1\,m = 10^2\,cm$.

Problema 1.1: Să se deducă legile de compunere T_{R1}, T_{R2}, T_{R3}, corespunzând celor 3 măsuri fizice (ale lungimilor unor segmente rigide) definite prin figura 1.2.

Rezolvare: În cazul măsurii f_1 se constată că unor segmente congruente le corespund valori numerice egale, ceeace înseamnă în particular că, dacă *z=xTy*, atunci $f_1(z) = f_1(x) + f_1(y)$ (v. figurile 1.2 si 1.3), adică T_{R1} ="+", reieşind că *măsura fizică 1 este liniară.*

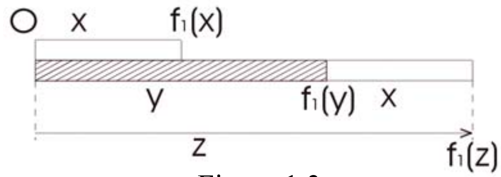


Figura 1.3

Deoarece în cazul măsurii fizice f_2, valorile numerice ale lungimilor diferitelor segmente sunt date de funcții exponențiale: $f_2(x) = 10^{f_1(x)}$, avem:

$$\log_{10} f_2(z) = f_1(z) = \log_{10} f_2(x) + \log_{10} f_2(y) = \log_{10}[f_2(x) \cdot f_2(y)],$$

de unde: $f_2(z) = f_2(x) \cdot f_2(y)$ şi: T_{R2} ="×" (înmulțirea).

Măsurile de tipul f_2 sunt utilizate (din acest motiv) la construirea riglelor de calcul.

În fine, în cazul măsurii f_3, valorile numerice ale lungimilor diferitelor segmente sunt date de funcții logaritmice: $f_3(x) = \log_{10} f_1(x)$. Pentru *z=xTy*, avem:

$$10^{f_3(z)} = f_1(z) = f_1(x) + f_1(y) = 10^{f_3(x)} + 10^{f_3(y)},$$

relație care defineşte legea de compunere T_{R3} (mai complicată) din acest caz.

§1.2. Noțiuni fizice cu caracter corelațional

În cazul cel mai general, relațiile dintre diferiții parametri ai unui sistem fizic sunt neliniare. Spre exemplu, în cazul înserierii unei cutii de rezistori (cu rezistențe *r* fixe) cu o cutie "neagră" (conținând un circuit *RLC* serie), la bornele unei surse de curent alternativ de pulsație ω variabilă (fig.1.4), factorul de putere şi intensitatea curentului în circuitul de la bornele sursei sunt date de expresiile:

$$\cos\varphi = \frac{R + r}{\sqrt{(R + r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}},$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{(R + r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}.$$

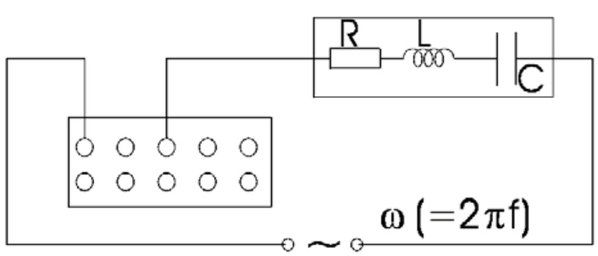


Figura 1.4

Se constată că starea sistemului studiat (circuitul legat la bornele sursei) este determinată (mărimile caracteristice "cutiei negre" fiind fixate) de anumiți *parametri de univocitate* u_k (tensiunea *U* la bornele sursei şi pulsația ω a acesteia, precum şi rezistența *r* introdusă prin cutia de rezistori), *mărim*ile *testate* (măsurabile): intensitatea curentului în circuit, factorul de putere ş.a. putând fi evaluate teoretic pe baza valorilor parametrilor de univocitate şi a *parametri*lor *specifici sistemului* (respectiv, în cazul altor studii fizice, *materialului investigat*), aici parametrii *R, L, C* ai cutiei "negre". În general, oricare dintre parametrii testați t_i (*i=1,2,...N*) poate fi evaluat (calculat) în baza valorilor parametrilor de univocitate u_k (*k=1,2,...m*) şi a valorilor parametrilor p_j (*j=1,2,...n*) ai sistemului (materialului) studiat:

$t_{calc.i} = t_i(u_1, u_2, ...u_m; p_1, p_2, ...p_n)$, pentru orice *i=1,2,...N*.

În orice domeniu al său, fizica urmăreşte evaluarea parametrilor caracteristici sistemului (respectiv, materialului) studiat: $p_1, p_2, ... p_n$, pornind de la un număr *N* de valori măsurate $t_{exp.i}$ ale parametrilor de test. Dată fiind existența erorilor, numărul *N* al valorilor (independente) măsurate trebuie să fie mai mare sau cel puțin egal ($N \geq n$) cu cel al parametrilor p_k ai sistemului (respectiv, materialului) studiat, determinarea fiind realizată în baza *principiului abaterilor pătratice minime*. Conform acestui principiu (vezi şi capitolul de Fizică statistică), valorile parametrilor p_k sunt cele pentru care suma pătratelor ponderate ale abaterilor valorilor calculate ale parametrilor testați de la cele măsurate (experimentale) este minimă:

$$S = \sum_{i=1}^{N} W_i (t_{calc.i} - t_{\exp.i})^2 = \min im .$$

În expresia de mai sus, W_i este ponderea asociată parametrului de test t_i. Se aleg ponderi diferite în funcție de următoarele cazuri [4]:

a) măsurările parametrilor t_i au fost efectuate cu acuratețe, fiind evaluate şi dispersiile D(t_i) ale parametrilor de test (pentru definirea dispersiilor, v. capitolul de "Fizică statistică") se alege $W_i = \dfrac{C}{D(t_i)}$;

b) dispersiile D(t_i) nu sunt cunoscute:

b') dacă parametrii t_i sunt de naturi diferite, sau prezintă valori considerabil diferite, se alege $W_i = \dfrac{C}{t_{\exp.i}^2}$;

b") dacă parametrii t_i sunt de aceeaşi natură şi au valori apropiate, se alege $W_i = C$;

unde C este o constantă convenabil aleasă.

Notând:

- $\bar{t}_{\exp.}^T = (t_{\exp.1}, t_{\exp.2}, ...t_{\exp.N})$ - vectorul "linie" al valorilor experimentale ale parametrilor de test,
- $\bar{t}_{\exp}$ - vectorul "coloană" al aceloraşi valori,
- $\bar{t}_{calc.}^T$ şi $\bar{t}_{calc.}$ - vectorii similari ai valorilor calculate ale parametrilor de test,
- $\overline{A}^T = \bar{t}_{calc.}^T - \bar{t}_{\exp.}^T$ şi $\overline{A} = \bar{t}_{calc.} - \bar{t}_{\exp.}$ - vectorii "linie" şi, respectiv, "coloană" ai abaterilor valorilor calculate de la cele experimentale, iar
- $\overline{\overline{W}}$ (cu elementele $W_{ij} = W_i \delta_{ij}$, unde δ_{ij} este *simbolul lui Kronecker*) - matricea diagonală a ponderilor, se poate scrie expresia principiului abaterilor pătratice minime în forma matricială:

$$S = \overline{A}^T \cdot \overline{\overline{W}} \cdot \overline{A} = \min im.$$

Găsirea valorilor parametrilor p_k pentru care suma S este minimă nu poate fi realizată (în cazul general, al relațiilor $t_i = t_i(u_k, p_j)$ neliniare) prin metode matematice analitice, fiind necesară utilizarea metodelor de aproximații succesive. Fie: $J_{ij}^{(I)} = \dfrac{\partial t_{calc.i}^{(I)}}{\partial p_j}$ - elementul (i,j) al

matricii "determinant funcţional" (*iacobian*) în iteraţia de ordinul *I*. Din definiţia de mai sus, reiese că variaţiilor $\delta p_1^{(I)}, \delta p_2^{(I)}, ...\delta p_n^{(I)}$ ale parametrilor de sistem (material) în iteraţia I le corespunde o variaţie a valorii calculate $t_{calc.i}$:
$$\delta t_{calc.i} = \sum_{j=1}^{n} J_{ij}^{(I)} \cdot \delta p_j^{(I)},$$
egală cu variaţia $\delta A_i^{(I)}$ a abaterii valorii calculate de la cea experimentală a parametrului t_i. Fie $\overline{C}^{(I)}$ vectorul corecţiilor parametrilor de sistem p_j în iteraţia $I \to I+1$, pentru care - dacă relaţiile $t_{calc.i} = t_i(u_k, p_j)$ ar fi liniare (ceeace, în general, nu este adevărat) - suma:

$$S^{(I+1)} = (\overline{A}^{(I)} + \overline{\overline{J}}^{(I)} \cdot \overline{C}^{(I)})^T \cdot \overline{\overline{W}} \cdot (\overline{A}^{(I)} + \overline{\overline{J}}^{(I)} \cdot \overline{C}^{(I)})$$

şi-ar atinge minimul. Expresia $S^{(I+1)}$ se compune din 4 scalari, dintre care $\overline{A}^{(I)^T} \cdot \overline{\overline{W}} \cdot \overline{A}^{(I)}$ nu depinde de p_j (este o constantă), iar:

$$\overline{C}^{(I)^T} \cdot \overline{\overline{J}}^{(I)^T} \cdot \overline{\overline{W}} \cdot \overline{A}^{(I)} \quad \text{şi:} \quad \overline{A}^{(I)^T} \cdot \overline{\overline{W}} \cdot \overline{\overline{J}}^{(I)} \cdot \overline{C}^{(I)}$$

sunt egali (fiecare dintre aceşti scalari fiind transpusul celuilalt).

Condiţia de minim devine:

$$0 = \frac{\partial S^{(I+1)}}{\partial \overline{C}^{(I)}} = \frac{\partial}{\partial \overline{C}^{(I)}} (\overline{\overline{J}}^{(I)^T} \cdot \overline{C}^{(I)^T} \cdot \overline{\overline{W}} \cdot \overline{\overline{J}}^{(I)} \cdot \overline{C}^{(I)} + 2\overline{C}^{(I)^T} \cdot \overline{\overline{J}}^{(I)^T} \cdot \overline{\overline{W}} \cdot \overline{A}^{(I)}),$$

de unde:

$$2\overline{\overline{J}}^{(I)^T} \cdot \overline{\overline{W}} \cdot \overline{\overline{J}}^{(I)} \cdot \overline{C}^{(I)} + 2\overline{\overline{J}}^{(I)^T} \cdot \overline{\overline{W}} \cdot \overline{A}^{(I)} = 0 \quad \text{şi:}$$
$$\overline{C}^{(I)} = -(\overline{\overline{J}}^{(I)^T} \cdot \overline{\overline{W}} \cdot \overline{\overline{J}}^{(I)})^{-1} \cdot \overline{\overline{J}}^{(I)^T} \cdot \overline{\overline{W}} \cdot \overline{A}^{(I)} .$$

Ultima expresie dedusă constituie ***principala relaţie a metodei gradientului***, cea mai importantă metodă numerică pentru evaluarea parametrilor corelaţiilor neliniare ale Fizicii.[3]

Datorită caracterului (în general) neliniar al corelaţiilor fizice, pornind de la o anumită *aproximaţie de ordinul zero* a parametrilor de sistem (sau material): $p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, ...p_n^{(0)}$, se obţin aproximaţiile succesive, mai întâi aproximaţia de ordinul 1 (I=1): $p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, ...p_n^{(1)}$, apoi cea de ordinul 2 (I=2) ş.a.m.d. ($\overline{p}^{(I+1)} = \overline{p}^{(I)} + \overline{C}^{(I)}$). De regulă, procesul iterativ este oprit când suma S atinge o valoare suficient de mică (de ordinul de mărime corespunzând erorilor experimentale), sau - în cazul unei convergenţe lente - după un anumit număr de iteraţii.

Problema 1.2: Să se deducă expresiile elementelor iacobianului mărimilor măsurabile *I, cos*φ ale sistemului din figura 1.4, faţă de parametrii *R,L* şi *C* ai respectivului sistem.

Rezolvare:
$$J_{I,R} = \frac{\partial I}{\partial R} = -U(R+r)\left[(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2\right]^{-3/2}, \text{ ş.a.m.d.}$$

[3] Trebuie subliniat faptul că metoda gradientului este la fel de importantă şi în celelalte ştiinţe ale naturii (chimie, biologie), în ştiinţele tehnice, precum şi în ştiinţele economice.

§1.3. Noțiuni generale cu caracter postcorelațional

a) Corelații, teoreme, legi, postulate, principii şi constante fizice

După cum o corelație fizică este sau nu valabilă pentru un număr foarte mare (practic nelimitat, ceeace nu înseamnă însă valabilitatea generală!) de tipuri de sisteme (respectiv, de materiale) fizice, *corelația* este numită *legică*, respectiv (în cazul valabilității pentru un număr limitat de sisteme fizice) *semiempirică.* După cum o corelație legică poate sau nu poate fi dedusă în baza mulțimii legilor fizice cunoscute la un anumit moment, această corelație este numită *teoremă fizică*, respectiv este declarată (nouă) *lege a fizicii.*

Datorită caracterului istoric al apariției lor, mulțimea legilor fizice are un caracter eterogen: unele legi fizice se "suprapun" parțial, sau, în cazul în care corespund unor condiții diferite, se pot chiar contrazice, existând şi condiții fizice pentru care nu sunt formulate legi ale fizicii (în sensul strict, de mai sus, al acestei noțiuni) ş.a. Din acest motiv, prezintă interes ca, pornind de la ansamblul legilor fizice şi cel al constatărilor experimentale existente la un moment dat, să se găsească adevărurile fundamentale ireductibile, pornind de la care pot fi deduse riguros ("matematic") toate legile fizicii, precum şi celelalte rezultate experimentale riguros verificate. După cum aceste adevăruri fundamentale au o valabilitate limitată la anumite condiții, respectiv par să fie valabile în condiții extrem de largi, ele sunt numite ***postulate fizice***, respectiv ***principii ale Fizicii***. Deoarece postulatele şi principiile fizice nu au fost deduse din legile fizicii şi constatările experimentale existente (în sensul riguros, matematic al deducerii), ele *reprezintă rezultatul unui proces de **inducție incompletă***[4], deci mulțimea postulatelor şi principiilor fizice nu este echivalentă cu cea a legilor Fizicii! Această neechivalență implică posibilitatea existenței: a) unor părți ale ipotezelor de bază care nu concordă cu rezultatele experimentale (acest lucru poate fi uşor rezolvat, prin corectarea sau înlăturarea totală a respectivelor elemente), b) unor elemente corecte ale ipotezelor formulate, pentru care experiențele corespunzătoare n-au fost încă efectuate. Ultimul caz este extrem de important, deoarece permite fizicii teoretice (care porneşte de la principiile Fizicii şi obține, pe cale exclusiv deductivă, descrieri ale diferitelor stări şi procese fizice) să obțină rezultate pe care fizica experimentală nu le-a găsit încă, sau pe care nici măcar nu le-a prevăzut (nici calitativ!).

Vom da aici doar două exemple în acest sens:

a) existența enormei energii (dată de relația $E = mc^2$) înmagazinată în substanță a fost evidențiată de Albert Einstein încă din 1905, în timp ce reacțiile de fisiune nucleară au fost studiate de abia în deceniul 4 al secolului XX, iar primii reactori nucleari au apărut (firesc) abia în deceniul 5;

b) existența emisiei stimulate a fost evidențiată (de asemenea de către A.Einstein) încă din anul 1919, în timp ce primele dispozitive corespunzătoare (maser, laser) au fost proiectate de Basov şi Prohorov în 1953, respectiv construite de americanii Gordon, Zeiger şi Townes (maserul cu amoniac) în 1954 şi Maiman (laserul cu rubin) în 1955. Recunoaşterea însemnătății deosebite a fizicii teoretice pentru progresul acestei ştiințe (evidențiat şi de exemplele de mai sus), nu trebuie să implice desconsiderarea fizicii experimentale. În fapt, fizica teoretică şi cea experimentală constituie (alături de metoda mai nouă, a fizicii numerice) metode distincte - dar complementare - ale Fizicii, progresul concomitent al acestor metode condiționând înaintarea rapidă a Fizicii (şi a tuturor ştiințelor naturii!). Un unic exemplu recent privind posibilitatea ca, uneori, fizica experimentală să devanseze considerabil pe cea teoretică: descoperirea materialelor supraconductoare cu temperatură critică relativ înaltă (începută prin lucrările

[4] Subliniem aici faptul că - spre deosebire de matematică, în care caz *inducția incompletă* nu este semnificativă decât dacă este însoțită de deducerea riguroasă a transferului prin recurență a constatării de corectitudine (*T=true*) - *inducția incompletă constituie una dintre metodele de bază ale Fizicii.*

fizicienilor Bednorz şi Müller, laureaţi ai premiului Nobel pentru Fizică) nu a fost prevăzută şi nici măcar explicată (complet) ulterior, de fizica teoretică actuală!

Pentru a încheia prezentarea principalelor noţiuni generale postcorelaţionale, vom arăta că, după cum parametrii p_i caracteristici unei corelaţii fizice depind sau nu de sistemul (respectiv, materialul) studiat, aceştia sunt numiţi *parametri de material* (sistem), respectiv *constante fizice.* Constantele fizice care au aceeaşi valoare indiferent de condiţiile în care sunt determinate (la temperaturi, presiuni etc. foarte înalte, respectiv joase, în diferite locuri ale Universului ş.a.m.d.) sunt numite *constante universale.* Nu toate constantele universale sunt independente între ele (spre exemplu, între permitivitatea ε_o, permeabilitatea μ_o şi viteza luminii c în vid există relaţia: $\varepsilon_o = \frac{1}{c^2\mu_o}$). Un ansamblu de constante fizice universale ireductibile între ele, pornind de la care pot fi deduse toate celelalte constante universale, se numeşte ansamblu (complet) de *constante fundamentale*. Principalele constante fundamentale, care realizează o "etalonare" reciprocă a mărimilor asociate atributelor ireductibile ale materiei sunt prezentate în diagrama din figura 1.5 de mai jos, în "casetele" căreia sunt indicate uneori, pe lângă atributul fundamental al materiei şi mărimea fizică specifică.

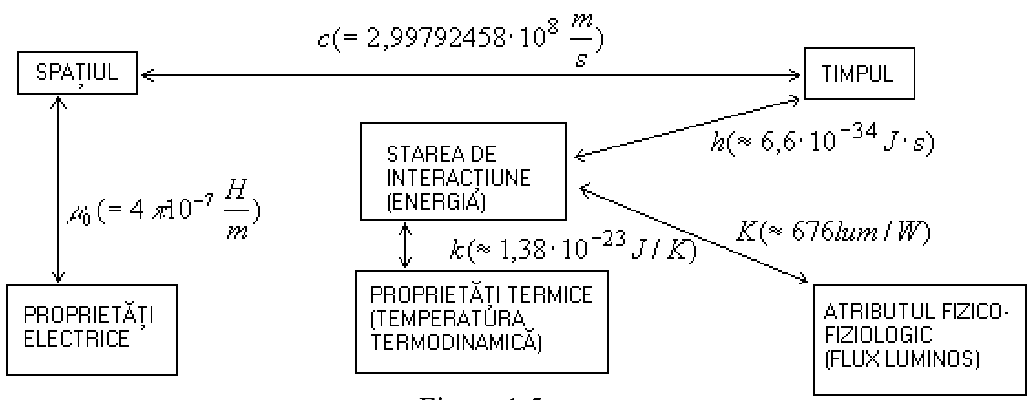


Figura 1.5

La prima vedere, s-ar părea că mărimile caracteristice particulelor elementare sunt de asemenea constante fundamentale; acest lucru nu este tocmai sigur, deoarece există relaţii (destul de "ciudate" în prezent) cu constantele fundamentale "primitive" din fig.1.5, de tipul celei corespunzând sarcinii electrice elementare: $e^2 = 2\alpha\varepsilon_o hc = \frac{2\alpha h}{\mu_o c}$, unde: $\alpha \cong \frac{1}{137,073}$ este (aşa numita) *constantă* (adimensională) *a structurii fine* (constanta lui Sommerfeld).

b) Sisteme de mărimi şi unităţi fizice

Utilizând operaţiile de echivalenţă şi ordonare, precum şi legile de compunere corespunzătoare, este posibil să asociem fiecărui atribut fundamental al materiei câte o mărime fizică, pe care o vom numi *mărime fizică fundamentală* (spre exemplu, mărimile fizice asociate deobicei atributelor fundamentale cinematice sunt: lungimea şi durata, asociate spaţiului şi - respectiv - timpului). Celelalte mărimi fizice pot fi definite pornind de la mărimile fizice fundamentale (spre exemplu, viteza momentană este definită prin relaţia: $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$, unde Δx este deplasarea în durata Δt) şi sunt numite *mărimi fizice derivate.*

Monomul algebric egal cu produsul puterilor simbolurilor mărimilor fundamentale alese, exponentul fiecărui simbol fiind egal cu puterea la care respectiva mărime fundamentală intervine în definiţia mărimii derivate *M* considerate, este numit *dimensiunea fizică a mărimii M* (simbol [*M*]). Spre exemplu, deoarece: $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$, reiese că $[v] = L \cdot T^{-1}$, L şi T fiind simbolurile mărimilor fundamentale: lungime (L) şi - respectiv - timp (durată, T).

Considerăm util să subliniem aici că orice relaţie fizică reprezintă o egalitate multiplă:

a) între mărimile (cantităţile) fizice reprezentând cei doi membri ai relaţiei;

b) între valorile numerice;

c) între unităţile fizice şi - în fine:

d) între dimensiunile fizice, corespunzând celor 2 membri ai relaţiei.

O altă noţiune (concept) care poate interveni în definirea unui sistem de mărimi şi unităţi fizice este cel de *coeficient* (coeficienţi) *de "raţionalizare".* După cum este cunoscut, experienţele care conduc la legile lui Coulomb şi - respectiv - Laplaçe (cu privire la interacţiunile dintre sarcini electrice punctiforme, respectiv dintre curenţii electrici care străbat conductori filiformi, rectilinii, paraleli şi infinit lungi) arată că:

a) forţele de interacţiune corespunzătoare sunt proporţionale cu sarcinile electrice, respectiv cu intensităţile curenţilor electrici,

b) dependenţele acestor forţe de distanţa *r* dintre sarcinile punctiforme (respectiv, dintre conductorii paraleli) şi de lungimea L a segmentului de conductor asupra căruia se exercită forţa şi:

c) dependenţele acestor forţe de natura mediului în care se găsesc sarcinile punctiforme, respectiv conductorii consideraţi (dependenţe descrise de permitivitatea ε, respectiv de permeabilitatea μ a mediului), însă:

d) nu pot evidenţia prezenţa anumitor factori numerici în expresiile acestor forţe, aşa cum se întâmplă în cazul expresiilor uzuale (în sistemul SI de unităţi şi mărimi fizice):

$$F_C = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r^2} \quad \text{(legea lui Coulomb)},$$

respectiv:

$$F_L = \frac{\mu I_1 I_2 L}{2\pi r} \quad \text{(legea lui Laplaçe)}.$$

Din acest motiv, expresiile mai generale ale acestor legi (v.şi figura 1.6) pot fi scrise în forma:

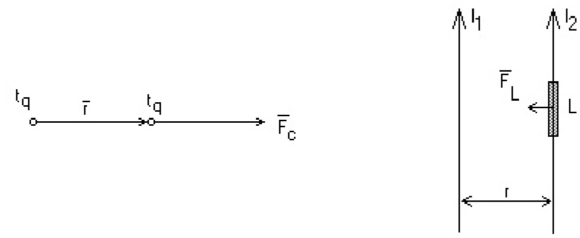
$$F_C = \frac{q_1 q_2}{\kappa_e \varepsilon r^2}, \qquad F_L = \frac{2\mu I_1 I_2 L}{\kappa_m r},$$

unde κ_e şi κ_m sunt numiţi *coeficienţi de raţionalizare electric şi* - respectiv - *magnetic.* Se poate arăta că, pentru valori egale ale acestor doi coeficienţi de raţionalizare, anumite expresii fizice importante (spre exemplu, expresia vitezei luminii într-un mediu cu permitivitatea ε şi permeabilitatea μ nu este dependentă [4] de coeficienţii de raţionalizare: $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$); din acest motiv, cele mai utilizate sisteme de mărimi şi unităţi fizice folosesc valori egale: $\kappa_e = \kappa_m$ pentru cei 2 coeficienţi de raţionalizare. Principalele tipuri de sisteme de mărimi şi unităţi fizice utilizează următoarele valori ale acestor coeficienţi:

a) $\kappa_e = \kappa_m = 1$ (sistemele "neraţionalizate" (fizice), care prezintă avantaje pentru calculul forţelor de interacţiune ş.a.),

b) $\kappa_e = \kappa_m = 4\pi$ (sistemele "raţionalizate" (electrotehnice), care prezintă avantaje privind expresiile ecuaţiilor fundamentale (ale lui Maxwell) ale electromagnetismului ş.a.).

Elementele definitorii ale unui *sistem de mărimi şi unităţi fizice* sunt:
a) un set de *mărimi fundamentale* (asociate atributelor fundamentale ale materiei);
b) un set de *unităţi fundamentale*, asociate mărimilor fundamentale,
c) valorile coeficienţilor de raţionalizare şi - eventual:
d) unele convenţii privind valorile şi dimensiunile fizice ale anumitor constante fizice universale (de regulă, ale permitivităţii vidului ε_o şi permeabilităţii vidului μ_o). Elementele definitorii ale sistemului internaţional (SI)[5] de mărimi şi unităţi fizice (care este un sistem raţionalizat: $\kappa_e = \kappa_m = 4\pi$) sunt sintetizate în tabelul care urmează.



a. **b.**

Figura 1.6

Tabelul 1.1

Atributul fundamental al materiei	Mărimea fizică Fundamentală (M.F.)	Simbolul M.F.	Unitatea fizică fundamentală U.F.	Simbolul U.F.
Spaţiul	Lungimea	L	metrul	m
Timpul	Durata (timpul)	T	secunda	s
Starea de interacţiune	Masa	M	kilogramul	kg
Termic	Temperatura Termodinamică	θ	kelvinul	K
Electric	Intensitatea Curentului Electric	I	amperul	A
Fizico-fiziologic	Intensitatea Luminoasă	$\Im$	candela	cd
Conversia substanţă-câmp[6]	Cantitatea de materie	ν	(kilo)molul	(k)mol[7]

Deşi SI este în prezent unicul sistem de mărimi şi unităţi fizice recomandat de organizaţiile internaţionale, considerăm util să semnalăm faptul că destul de mulţi fizicieni şi - respectiv - ingineri (îndeosebi din ţările dezvoltate ştiinţific) continuă să utilizeze destul de frecvent unele sisteme mai vechi, îndeosebi următoarele sisteme:

a) *sistemul electrostatic* (simbol *CGSes* sau *CGS*ε_o) definit prin unităţile fundamentale cu caracter mecanic: centimetrul, gramul şi secunda, precum şi prin convenţiile: $\varepsilon_o = [\varepsilon] = 1$ (pentru obţinerea denumirii unităţilor electrostatice, se utilizează prefixul "*stat*" (simbol *st*) înaintea denumirii unităţii *SI* corespunzătoare);

[5] Sistemul interna□ional de m□rimi □i unit□□i fizice (SI) a fost adoptat la cea de a 11-a Conferin□□ General□ de M□suri □i Unit□□i, în 1960.
[6] Dup□ cum masa de repaus m_o a unui sistem fizic este diferit□ de zero, respectiv este egal□ cu zero, sistemul fizic are natura de *substan□□*, respectiv de *câmp* (fizic).
[7] În privin□a unit□□ii fundamentale "mol", v. M.Oncescu, Curierul de Fizic□, nr. (1994).

b) *sistemul magnetostatic* (*CGSem*≡*CGS*μ_o), definit prin aceleaşi unităţi fundamentale ale mecanicii, adăugând însă convenţiile: $\mu_o = [\mu] = 1$ (pentru obţinerea denumirilor unităţilor magnetostatice, se utilizează prefixul "*ab*" (acelaşi simbol) înaintea denumirii unităţii *SI* corespunzătoare);

c) *sistemul electromagnetic* (*Gauss,* simbol *CGSemg* sau *CGS*$\varepsilon_o\mu_o$), definit prin aceleaşi unităţi fundamentale cu caracter mecanic, la care se adaugă însă convenţiile: $\varepsilon_o = [\varepsilon] = \mu_o = [\mu] = 1$ (în sistemul Gauss sunt folosite denumirile electrostatice pentru unităţile mărimilor electrice, respectiv denumirile magnetostatice pentru unităţile mărimilor magnetice). Aceste sisteme sunt neraţionalizate: $\kappa_e = \kappa_m$=1.

Problema 1.3.1: Pornind de la definiţia amperului drept "intensitatea curentului electric care - străbătând doi conductori rectilinii,paraleli,filiformi şi infinit lungi, aşezaţi în vid, la distanţa de *1 m* între ei - determină apariţia unei forţe de interacţiune de $2 \cdot 10^{-7}$ *N* pe fiecare metru de conductor" şi de la expresia mai sus indicată a legii lui Laplaçe, să se deducă valoarea numerică în sistemul internaţional (*SI*) a permeabilităţii vidului.

Rezolvare: $$\{F_L\}_{SI} = \frac{2\{\mu_o\}_{SI}\cdot\{I_1\}_{SI}\cdot\{I_2\}_{SI}}{\{\kappa_m\}_{SI}\cdot\{r\}_{SI}}\cdot\{L\}_{SI}\ ,\quad \text{deci:}$$

$$\{\mu_o\}_{SI} = \frac{\{\kappa_m\}_{SI}\cdot\{F\}_{SI}\cdot\{r\}_{SI}}{2\{I_1\}_{SI}\cdot\{I_2\}_{SI}\cdot\{L\}_{SI}} = \frac{4\pi\cdot 2\cdot 10^{-7}}{2\cdot 1\cdot 1\cdot 1} = 4\pi\cdot 10^{-7}\ .$$

Problema 1.3.2: Determinaţi valoarea în unităţi *SI* (*A*) a unităţii *CGSem* (*1 abA=1 Bi*(ot)) a intensităţii curentului electric.

Rezolvare: Pentru $I_1 = I_2 = I$, legea lui Laplaçe devine:

$$F = \frac{2\mu_r\mu_o I^2 L}{\kappa_m r}\ .$$

În continuare, obţinem:

$$<I>_{em} = \frac{I}{\{I\}_{em}} = \frac{I}{\sqrt{\dfrac{\{F_L\}_{em}\cdot\{\kappa_m\}_{em}\cdot\{r\}_{em}}{2\{\mu_o\}_{em}\cdot\mu_r\cdot\{L\}_{em}}}}\ ,$$

unde μ_r (*permeabilitatea relativă* fiind o mărime fizică adimensională (un număr întreg)) are o valoare independentă de sistemul de mărimi şi unităţi fizice. Deoarece:

$$<F>_{em} = <m>_{em}<a>_{em} = 1g\cdot 1\frac{cm}{s^2} = 10^{-3}kg\cdot\frac{10^{-2}m}{s^2} = 10^{-5}N$$

deducem că:

$$\{F_l\}_{em} = \{F_L\}_{SI}\cdot\frac{<F_L>_{SI}}{<F_L>_{em}} = 10^5\{F_L\}_{SI}\ .$$

Ştim de asemenea că:

$$\{\mu_o\}_{em} = \{\kappa_m\}_{em} = 1$$

şi deoarece raportul *r/L* este adimensional:

$$\left\langle\frac{r}{L}\right\rangle_{em} = \left\langle\frac{r}{L}\right\rangle_{SI}\ .$$

În final, găsim că:

$$1Bi \equiv 1abA = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{10^5\{F_L\}_{SI}\cdot\dfrac{1}{4\pi}\{\kappa_m\}_{SI}\cdot\{r\}_{SI}}{2\dfrac{1}{4\pi\cdot 10^{-7}\{\mu_o\}_{SI}\cdot\mu_r\cdot\{L\}_{SI}}}}} = \frac{1}{10^{-1}\{I\}_{SI}} = 10 < I >_{SI} = 10A \ .$$

Problema 1.3.3: Deduceţi valoarea în unităţi *SI* (volţi) a unităţii *CGSem* (1 abV) a potenţialului electric.

Rezolvare: Pornind de la definiţia potenţialului electric: $V=L/q$, unde L reprezintă lucrul mecanic, obţinem:

$$1abV \equiv < V >_{em} = \frac{< L >_{em}}{< q >_{em}} = \frac{< F >_{em}\cdot < d >_{em}}{< I >_{em}\cdot < t >_{em}} = \frac{10^{-5}N\cdot 10^{-2}m}{10A\cdot 1s} = 10^{-8} < V >_{SI} = 10^{-8}V \ .$$

§1.4. Clasificarea metodelor generale ale Fizicii; metoda analizei dimensionale

a) Clasificarea metodelor analitice ale Fizicii

În vederea sistematizării imensului material experimental (de altfel, în continuă creştere, inclusiv sub raport calitativ) pe care-l deţine, Fizica dispune de un număr important de metode [4], [5], utilizate uneori implicit. O analiză detaliată a problemei metodelor generale ale Fizicii [4] arată că acestea pot fi clasificate în:

(i) *metode cu caracter analitic* (analiza dimensională, teoria similitudinii fizice, teoria simetriilor fizice) şi:

(ii) *metode de sinteză* (metoda analogiilor fizice, metoda calculului perturbaţiilor ş.a., inclusiv metoda inducţiei incomplete!). Pentru a evita concentrarea în acest capitol cu caracter introductiv a unui număr mare de elemente generale (cu caracter abstract) vom prezenta aici doar metodele generale care permit o anumită clasificarea a domeniilor şi modelelor teoretice ale Fizicii: analiza dimensională şi - respectiv - teoria similitudinii fizice, urmând ca alte metode generale să fie prezentate în strânsă legătură cu unele aplicaţii specifice lor; spre exemplu, *vom prezenta metoda simetriilor fizice în cadrul capitolului consacrat Formalismului analitic al Fizicii,* iar *metoda analogiilor fizice va fi prezentată mai întâi în cadrul capitolului consacrat Oscilaţiilor, apoi în cadrul celui de Termodinamica proceselor ireversibile* ş.a.m.d.

Pe lângă aplicaţiile lor particulare, metodele generale ale Fizicii realizează structuri specifice [6] ale (noţiunilor) Fizicii. În cazul în care am folosi pentru "construcţia" Fizicii moderne imaginea unui oraş multidimensional, metodele analitice generează "bulevarde radiale" care delimitează "cartierele" (ale mecanicii, termodinamicii, electromagnetismului, fizicii relativiste, fizicii cuantice ş.a.), în timp ce metodele de sinteză generează "bulevarde inelare" care unesc, la diferite distanţe faţă de "centru" (reprezentat de Fizica clasică) cartierele. Chiar şi această imagine simplificată subliniază importanţa cunoaşterii metodelor generale ale Fizicii şi, în particular, a structurilor Fizicii.

b) Analiza dimensională

Studiul dimensiunilor diferitelor mărimi fizice (*analiza dimensională*) are următoarele aplicații:

a) recunoaşterea naturii fizice a mărimilor date de expresii complicate;

b) verificarea corectitudinii anumitor expresii (relații) fizice, pornind de la *condiția de omogenitate dimensională:* "Toți termenii unei relații fizice corecte trebuie să aibă aceeaşi dimensiune fizică".

Datorită posibilităților de:

a) existență a unor mărimi fizice calitativ diferite, care au însă aceeaşi dimensiune fizică (spre exemplu, dimensiunile fizice ale energiei *E*, respectiv momentului forței M_F, sunt aceleaşi:

$$[E]=[E_c]=[\frac{1}{2}mv^2]=ML^2T^{-2}=[r]\cdot[m]\cdot[a]=[r]\cdot[F]=[M_F],$$

unde *a* este accelerația);

b) prezență în expresia (expresiile) unui anumit termen(i) al (ai) relației fizice studiate a unor factori adimensionali incorecți (vezi problema 5 care urmează), *condiția de omogenitate dimensională este necesară, dar nu este suficientă pentru corectitudinea respectivei relații fizice.*

Problema 1.4.1: Determinați natura fizică a expresiei $\rho v^2/2$, unde ρ este densitatea volumică a masei, iar v este viteza.

Rezolvare: $\left[\rho v^2/2\right]_{SI}=[\rho]_{SI}\cdot[v]^2_{SI}=\left[\frac{m}{V}\right]_{SI}\cdot(LT^{-1})^2=\frac{M}{L^3}\cdot L^2T^{-2}=\frac{MLT^{-2}}{L^2}=\left[\frac{F}{A}\right]_{SI}=[p]_{SI},$

unde *V, A* şi *p* sunt respectiv volumul, aria şi presiunea. Se constată că dimensiunea fizică a expresiei studiate este cea a unei presiuni, deci $\rho v^2/2$ are natura (semnificația) fizică a unei presiuni.

Problema 1.4.2: Verificați corectitudinea expresiei:

$$p_s+\rho gh=\frac{L}{h}\cdot\frac{\rho v^2}{5}=\text{constantă}$$

(unde p_s, *g, L* şi *h* sunt presiunea (hidro)statică, accelerația gravitațională la suprafața Pământului, lungimea coloanei şi - respectiv - înălțimea) a formulei lui Bernoulli, cu ajutorul analizei dimensionale.

Rezolvare:

$$[p_s]=\left[\frac{F}{A}\right]=\frac{MLT^{-2}}{L^2}=ML^{-1}T^{-2}\ ,$$

$$[\rho gh]=[\rho]\cdot[g]\cdot[h]=\left[\frac{m}{V}\right]\cdot\frac{L}{T^2}\cdot L=ML^{-1}T^{-2}\ ,$$

$$\left[\frac{L}{h}\cdot\frac{\rho v^2}{5}\right]=\left[\frac{L}{h}\right]\cdot\left[\frac{\rho v^2}{5}\right]=ML^{-1}T^{-2}\quad\text{(v.problema 1.4.1).}$$

Se constată că expresia studiată este corectă din punctul de vedere al dimensiunilor fizice. Totuşi, datorită expresiei incorecte a ultimului termen: $\frac{L}{h}\cdot\frac{\rho v^2}{5}$ (*presiunea dinamică*, a cărei expresie corectă este $\rho v^2/2$) expresia studiată este incorectă (fizic).

§1.5. Elemente de teoria similitudinii fizice

a) Parametri de univocitate ai unei probleme fizice

Se știe că pentru a determina complet o figură geometrică este necesară cunoașterea unui anumit număr de parametri. Spre exemplu, un triunghiu oarecare este determinat de valorile a 3 parametri independenți, care pot fi (v.figura 1.7):

(i) lungimile celor 3 laturi (*a,b* și *c*),

(ii) lungimile a două laturi și valoarea unghiului dintre acestea (în particular: b, c și $\hat{A}$), (iii) lungimea unei laturi și valorile celor 2 unghiuri adiacente (în particular: a, $\hat{B}$ și $\hat{C}$),

(iv) lungimile celor 3 mediane (m_a, m_b și m_c) ș.a.

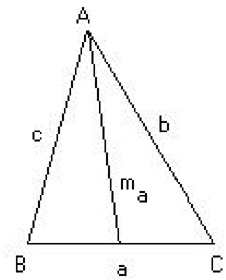


Figura 1.7.

Parametri ai căror valori determină complet un anumit corp (sau figură) geometric(ă)[8] sunt numiți *parametri de univocitate.* Această noțiune poate fi extinsă și pentru descrierea stărilor (respectiv proceselor) fizice. Spre exemplu, starea de echilibru termodinamic a unui anumit sistem fizic poate fi descrisă în baza parametrilor de univocitate specifici:

(i) *parametrii "externi"* (în cazul unui gaz perfect - volumul *V*),

(ii) *parametrii de "compoziție"* (în cazul unui gaz perfect - numărul ν de (kilo)moli, în cazul aerului - numărul de moli de N_2, O_2, CO_2, (vaporilor) H_2O etc),

(iii) *parametrii de "ordine"* (în cazul unui gaz perfect - entropia termodinamică *S*).

În cazul în care pentru un proces (sau stare) fizic(ă) a unui sistem fizic *idealizat*, numărul parametrilor de univocitate este determinat (spre exemplu, pentru descrierea stării unui gaz ideal sunt necesare valorile a 3 parametri de univocitate), există - pentru problemele fizice (ca și în geometrie) - mai multe posibilități de alegere a acestor parametri (în cazul gazelor ideale, pe lângă varianta "clasică": (i) V, ν și S sunt des utilizate descrierile prin ansamblele: (ii) V, ν și T, (iii) p, ν și T ș.a.).

Pentru a încheia problema (teoretică) a parametrilor de univocitate, trebuie să subliniem că, în timp ce:

(i) pentru sistemele fizice idealizate, noțiunea coincide perfect cu aceea din matematică,

(ii) *pentru sistemele fizice reale, numărul parametrilor de univocitate depinde de precizia cerută pentru descrierea procesului (stării) sistemului fizic real.*

Spre exemplu, necesitatea obținerii unei precizii mai bune în descrierea stării unui gaz real a impus introducerea a 2 parametri suplimentari de univocitate prin *"corecțiile" a și b ale lui Van der Waals*:

$$p = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{a\nu^2}{V^2} ,$$

apoi a încă unui parametru de univocitate (ε) prin *ecuația Beatty-Bridgeman:*

$$p = \frac{\nu RT}{V^2}(V + \nu b)(1 - \varepsilon) - \frac{a\nu^2}{V^2} \text{ ș.a.m.d.,}$$

[8] În general, care determină complet o anumită categorie (noțiune) matematică, deoarece pot fi definiți parametri de univocitate și în algebră (spre exemplu, pentru un polinom de un anumit grad), în analiza matematică (pentru un anumit tip de ecuații diferențiale de ordin dat) ș.a.

în final, numărul parametrilor de univocitate putând să tindă spre infinit (*ecuația Mayer-Bogoliubov, a virialului*) prin intermediul unei dezvoltări în serie după densitatea volumică a numărului de molecule $\rho_N = \frac{\nu N_A}{V}$ (v.spre exemplu [8], p.169):

$$p = \frac{\nu RT}{V}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(T) \cdot \left(\frac{\nu}{V}\right)^n\right] .$$

b) Alte noțiuni specifice teoriei similitudinii fizice [7]

Întrucât orice stare sau proces a(l) unui sistem fizic este determinat(ă) de un număr finit n de *parametri* specifici *de univocitate:* $U_1, U_2, ...U_{n_U}$, dimensiunea fizică [P] a oricărui parametru fizic P specific stării sau procesului considerat poate fi exprimată ca un monom algebric format de anumite puteri ale dimensiunilor parametrilor de univocitate, eventual înmulțit cu dimensiunea fizică a unei constante universale C_u :

$$[P] = [C_u]\prod_{i=1}^{n_U}[U_i]^{\alpha_i} \quad , \qquad (1.5.1)$$

exponenții puterilor dimensiunilor fizice ale parametrilor de univocitate fiind numiți *indici de similitudine.*

Fie $U_1^{'}, U_2^{'}, ...U_{n_U}^{'}$ valorile parametrilor de univocitate considerați corespunzând stărilor (proceselor) *S'*, respectiv *S''*. În cazul în care, oricare ar fi parametrul P, valorile sale *P', P''* în stările *S',* respectiv *S''*, satisfac relația:

$$\frac{P'}{P''} = \prod_{i=1}^{n_U}\left(\frac{U_i^{'}}{U_i^{''}}\right)^{\alpha_i} \quad , \qquad (1.5.2)$$

spunem că *stările* (respectiv *procesele*) *fizice S'* şi *S''* sunt *similare.*

Un parametru fizic adimensional s ([s]=1), care are aceleaşi valori $s'=s''$ în orice stări (procese) fizice similare *S', S''*, este numit *număr* (sau *criteriu*) *de similitudine.*

Problema 1.5.1: Se consideră stările cinematice ale unui corp aruncat pe verticală într-un câmp gravific uniform. Pornind de la parametrii de univocitate: accelerația gravitațională g, viteza inițială v_o şi momentul t (în raport cu cel al lansării), se cere: a) să se arate că există mai multe expresii (echivalente) ale dimensiunii înălțimii h atinse de corp la momentul t, în funcție de dimensiunile parametrilor de univocitate, b) să se deducă relațiile corespunzătoare dintre valorile respectivilor parametri în stările cinematice similare, c) să se arate că parametrul lui *Froude*: $\mathrm{Fr} = \frac{v_o^2}{g \cdot h}$ este un număr (criteriu) de similitudine.

Rezolvare: a) $[h] = [v_o] \cdot [t] = [g] \cdot [t]^2 = [v_o]^2 \cdot [g]^{-1}$

b) $\frac{h'}{h''} = \frac{v_o'}{v_o''} \cdot \frac{t'}{t''} = \frac{g'}{g''} \cdot \frac{t'^2}{t''^2} = \frac{v_o'^2}{v_o''^2}\left(\frac{g'}{g''}\right)^{-1}$

c) Pornind de la egalitatea termenilor extremi ai relațiilor de mai sus, se obține: [Fr]=1 şi: $Fr' = \frac{v_o'^2}{g'h'} = \frac{v_o''^2}{g''h''} = Fr''$, deci parametrul *Froude* este un număr (criteriu) de similitudine.

c) Teoremele teoriei similitudinii fizice

Fie $s = \frac{P}{C_u}\prod_{i=1}^{n_U} U_i^{\alpha_i}$ (v.relația (1.5.1)). Pornind de la definiția indicilor de similitudine, respectiv a stărilor (proceselor) similare, obținem: $[s]=1$ și respectiv: $s'=s''$, deci s este un număr (criteriu) de similitudine.

Reiese de aici **prima teoremă (Newton) a similitudinii fizice:** "Pentru orice stări (evoluții) ale unui sistem fizic pot fi găsite criterii de similitudine specifice" (**teorema existenței**).

Dată fiind dificultatea deducerii celorlalte teoreme ale teoriei similitudinii fizice, vom prefera să le evidențiem prin inducție incompletă, pornind de la exemplul simplu al aruncării pe verticală, prezentat în cadrul problemei 1.5.1. Astfel, pornind de la constatarea, obținută analog deducerii caracterului de număr de similitudine pentru parametrul Froude, că parametrii adimensionali: $s_1 = \frac{h}{v_o t}$, $s_2 = \frac{v_o}{gt}$, $s_3 = \frac{h}{gt^2}$,... sunt criterii de similitudine, se constată că:

$$s_1 = \frac{h}{v_o t} = 1 - \frac{gt}{2v_o} = 1 - \frac{1}{2s_2} \quad \text{(din ecuația spațiului)}$$

$$s_3 = \frac{h}{gt^2} = \frac{v_o}{gt} - \frac{1}{2} = s_2 - \frac{1}{2} \quad \text{(idem)}$$

$$s_4 \equiv Fr = \frac{v_o^2}{gh} = \frac{h(gt^2)^{-1}}{h^2(v_o^2 t^2)^{-1}} = \frac{s_3}{s_1^2}, \text{ etc.,}$$

deci, un singur criteriu de similitudine (spre exemplu s_2) este ireductibil în acest caz. Deoarece în problema studiată, numărul parametrilor de univocitate $n_U = 3$, iar cel al mărimilor fundamentale active $n_{Fa} = 2$ (lungimea și durata), reiese că: $n_{si} = n_U - n_{Fa}$, ceeace conduce la **enunțul teoremei Buckingham (Π) a similitudinii fizice:** *"Numărul* n_{si} *al criteriilor de similitudine ireductibile este egal cu diferența dintre numărul* n_U *al parametrilor de univocitate ai problemei fizice și numărul* n_{Fa} *al mărimilor fundamentale "active" (prin dimensiunile cărora se exprimă dimensiunile parametrilor fizici specifici problemei studiate):* $n_{si} = n_U - n_{Fa}$*".*

În continuare, se poate constata ușor că toate relațiile fizice specifice problemei considerate pot fi exprimate exclusiv prin criterii de similitudine. Pe lângă ecuația spațiului care, după cum am văzut mai sus, capătă expresia:

$s_1 = 1 - \frac{1}{2s_2}$, ecuația vitezei: $v = v_o - gt$ trece în expresia: $s_5 = \frac{v}{gt} = s_2 - 1$, iar *formula lui Galilei:* $v^2 = v_o^2 - 2gh$ conduce la relația: $s_6 = \frac{v^2}{gh} = Fr - 2$ sau la expresia echivalentă: $s_5^2 = s_2^2 - 2s_3$, unde s_5 și s_6 sunt de asemenea criterii de similitudine. Generalizarea riguroasă a acestei constatări particulare constituie **teorema a doua (Federman) a similitudinii fizice**: *"Orice relație specifică unei stări (evoluții) a oricărui proces fizic poate fi exprimată exclusiv prin numere (criterii) de similitudine".*

În fine, este ușor de constatat că, dacă $s_1' = s_1''$ sau $s_2' = s_2''$ etc., atunci: $\frac{h'}{v_o' t'} = \frac{h''}{v_o'' t''}$ ș.a.m.d., deci stările (evoluțiile) S' și S'' sunt similare. Generalizarea riguroasă a acestei constatări particulare constituie **teorema a treia (Kirpicev-Guhman) a similitudinii fizice**

[6],[4]: *"Dacă toate numerele (criteriile) de similitudine ireductibile, corespunzând pentru două stări (respectiv evoluţii) ale aceluiaşi sistem fizic sunt egale între ele* ($s'_1 = s''_1, s'_2 = s''_2, \ldots s'_{n_{si}} = s''_{n_{si}}$) *atunci cele două stări (respectiv evoluţii) sunt similare".*

Drept aplicaţii, vom prezenta în continuare două probleme care arată că *asemănarea figurilor geometrice este un caz particular (degenerat) al similitudinii fizice.*

Problema 1.5.2: Se consideră mulţimea triunghiurilor oarecari. Deduceţi: a) numărul parametrilor de univocitate, b) numărul criteriilor ireductibile de similitudine, c) relaţia dintre raportul *a'/a"* al lungimilor a două laturi omoloage şi raportul: (i) lungimilor altor două laturi omoloage, respectiv al: (ii) ariilor a două triunghiuri similare (asemenea).
Rezolvare: a) $n_U = 3$ (în particular, laturile triunghiului), b) deoarece există o singură mărime fundamentală "activă": lungimea, rezultă că: $n_{si} = n_U - n_{Fa} = 2$; deoarece: [b]=[*a*], iar dimensiunea ariei: $[A] = [a]^2$, conform definiţiei stărilor similare, pentru două triunghiuri similare (asemenea) avem: (i) $\frac{b'}{b''} = \frac{a'}{a''}$ şi: (ii) $\frac{A'}{A''} = \frac{a'^2}{a''^2}$.

Problema 1.5.3: Se consideră mulţimea piramidelor triunghiulare oarecare. Deduceţi: a) numărul parametrilor de univocitate, b) numărul criteriilor ireductibile de similitudine, c) relaţia dintre raportul *a'/a"* al lungimilor a două muchii omoloage şi raportul: (i) lungimilor altor două muchii omoloage, (ii) ariilor a două feţe omoloage, respectiv al: (iii) volumelor celor două piramide similare (asemenea).
Rezolvare: a) $n_U = 6$ (în particular, lungimile celor 6 muchii)

b) $n_{si} = n_U - n_{Fa} = 5$

c) deoarece: [b]=[a], $[A\} = [a]^2$, iar dimensiunea volumului: $[V] = [a]^3$, conform definiţiei stărilor similare, pentru două piramide similare (asemenea) avem: (i) $\frac{b'}{b''} = \frac{a'}{a''}$, (ii) $\frac{A'}{A''} = \frac{a'^2}{a''^2}$ şi: (iii) $\frac{V'}{V''} = \frac{a'^3}{a''^3}$.

c) Implicaţii şi aplicaţii ale teoriei similitudinii fizice

(i) Domenii de valabilitate ale legilor fizicii

Conform teoremelor 2 (Federman) şi 3 (Kirpicev-Guhman) ale similitudinii fizice, legile fizicii pot fi scrise, exclusiv, prin numere (criterii) de similitudine, iar stările - respectiv evoluţiile - similare corespund unor valori egale ale criteriilor de similitudine ireductibile. Reiese de aici că *domeniile de valabilitate ale legilor fizicii* corespund anumitor domenii de valori ale criteriilor de similitudine, fiind astfel *domenii de similitudine.* Deoarece, din punct de vedere principial, delimitarea domeniului de valabilitate al fizicii clasice (necuantice) nerelativiste de domeniile fizicii relativiste, teoriei Einstein a gravitaţiei şi al fizicii cuantice este deosebit de importantă, vom evidenţia în continuare criteriile de similitudine care realizează această delimitare.

(ii) Delimitarea fizicii nerelativiste de cea relativistă

Pornind de la expresiile relativiste ale relaţiilor energie-masă de mişcare-viteză:

$$E = m(v)c^2 = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2 \ , \qquad (1.5.3)$$

se obţine expresia relativistă a relaţiei energie-impuls:

$$E^2 = \frac{m_o^2 c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_o^2 v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot c^2 + m_o^2 c^4 = p^2 c^2 + m_o^2 c^4 \qquad (1.5.4)$$

Definind criteriul de similitudine al lui *Minkowski* prin relaţia:

$$\mathrm{Mi} = \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{m_o c}}, \qquad (1.5.5)$$

se obţine următoarea expresie relativistă a energiei cinetice a unui punct material:

$$E_c = E - m_o c^2 = m_o c^2 (\sqrt{Mi^2 + 1} - 1)\,. \qquad (1.5.6)$$

Ţinând seamă că, pentru $|x| << 1$, avem: $\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{x}{2}$, reiese că pentru $Mi = \frac{p}{m_o c} << 1$

avem: $$E_c \cong m_o c^2 \cdot \frac{Mi^2}{2} = \frac{p^2}{2m_o}$$ (*domeniul fizicii nerelativiste*).

Pentru valori de ordinul unităţii ale criteriului Mi(nkowski), expresia de mai sus a energiei cinetice îşi păstrează forma complicată, corespunzând fizicii relativiste, în timp ce pentru Mi>>1 expresia energiei se simplifică din nou ($E_c \cong m_o c^2 Mi \cong pc$), corespunzând acum *domeniul*ui *extrem relativist* (ultima expresie este valabilă, în particular, şi pentru fotoni).

(iii) Delimitarea fizicii clasice de teoria Einstein a gravitaţiei

Pornind de la expresia clasică (newtoniană, vezi problema 1.5.4) a deviaţiei unei particule care trece cu viteză foarte mare, apropiată de cea a luminii în vid, la distanţa R de centrul unei surse de gravitaţie de masă M: $\delta = arctg\left(\frac{2kM}{c^2 R}\right)$, se poate defini numărul (criteriul) de similitudine Ei(nstein) prin relaţia:

$$Ei = \frac{kM}{c^2 R}\ , \qquad (1.5.7)$$

cu următoarele valori specifice:

$Ei << 1$ (pentru *domeniul valabilităţii teoriei lui Newton a gravitaţiei*),

$Ei \le 1$ (*domeniul valabilităţii teoriei Einstein a gravitaţiei*),

$Ei > 1$ (*condiţii corespunzând "găurilor negre"* - "black holes"), regiuni ale spaţiului de la care nu se primesc nici un fel de radiaţii).

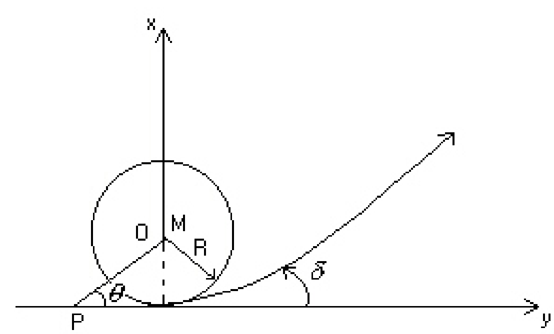


Figura 1.8

Problema 1.5.4: Să se deducă expresia newtoniană a deviaţiei unui corp care trece cu o viteză foarte mare (apropiată de viteza luminii în vid) pe lângă (la distanţa R de) o sursă de gravitaţie de masă M (v.fig.1.8).

Rezolvare: Componenta x a acceleraţiei într-un punct arbitrar P(q) al traiectoriei este:

$$a_x = \frac{kM}{R^2} \cdot \sin^3\theta\ ,$$

deci deviaţia "proiectilului" este:

$$tg\delta = \frac{v_{x\infty}}{c} = \frac{kM}{R^2 c}\int_{y=-\infty}^{\infty}\sin^3\theta \cdot dt = \frac{kM}{R^2 c}\int_{\theta=0}^{\pi}\sin^3\theta \cdot \frac{d(-R\cdot ctg\theta)}{c}$$

şi, în final:
$$tg\delta = \frac{2kM}{c^2 R}.$$

(iv) Delimitarea fizicii clasice de fizica cuantică (nerelativistă)

Conform ipotezei lui de Broglie, particulelor (unui fascicul) având energia cinetică $E_c = E - U(x)$ li se asociază o undă (de probabilitate) cu lungimea de undă raţionalizată:

$$\lambdabar = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE_c}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m[E-U(x)]}}. \qquad (1.5.8)$$

Pentru ca existenţa undelor asociate să poată fi detectată este necesar ca:

$$1 < \left|\frac{d\lambdabar}{dx}\right| = \frac{d}{dx}\left(\frac{h}{\sqrt{2m[E-U(x)}}\right) = \frac{m\hbar}{(2mE_c)^{3/2}}\left|\frac{dU}{dx}\right|. \qquad (1.5.9)$$

Deoarece $\left|\frac{dU}{dx}\right|$ reprezintă componenta *x* a forţei care acţionează asupra particulelor studiate, se poate defini *criteriul de similitudine al lui Brillouin-Kramers-Wentzel* prin relaţia:

$$Bkw = \frac{\hbar^2 F^2}{8mE_c^3}. \qquad (1.5.10)$$

Valorile:

Bkw<<<1 corespund *domeniul*ui *fizicii clasice (necuantice)*, valorile

Bkw>1 corespund *domeniul*ui *fizicii cuantice*, în timp ce valorile

Bkw~0,01 corespund unui *domeniu de tranziţie între cele două formalisme,* numit *al aproximaţiei cuasiclasice (Brillouin-Kramers-Wentzel).*

Problema 1.5.5: Să se deducă valorile criteriului de similitudine S_M / h (unde $S_M = 2\int E_c dt$ este acţiunea Maupertuis, iar *h* este constanta lui Planck) specifice domeniilor: a) fizicii clasice (necuantice), b) aproximaţiei cuasiclasice, c) fizicii cuantice.

Rezolvare: Pentru un punct material în mişcare nerelativistă: $2E_c = \frac{p^2}{m}$, deci:

$$S_M = \frac{1}{m}\int p^2 \cdot \frac{dp}{F} = \frac{1}{3mF}\cdot p^3 = \frac{1}{3F}\sqrt{8mE_c^3} = \frac{h}{3\sqrt{Bkw}}.$$

Reiese că:

a) $S_M >> h$ în domeniul fizicii clasice (necuantice),

b) $S_M > h$ în domeniul aproximaţiei cuasiclasice (Bkw), respectiv:

c) $S_M < h$ în domeniul fizicii cuantice.

Pe lângă criteriile de similitudine evidenţiate mai sus, există multe alte numere (criterii) de similitudine utilizate în fizică, îndeosebi în domeniile teoriei transferului de căldură (energie termică), curgerilor fluidelor ş.a. În anexa 1 sunt indicate definiţiile şi domeniile de utilizare ale câtorva dintre cele mai frecvent folosite criterii de similitudine. Menţionăm că, totuşi, însăşi luarea în consideraţie a celor 3 criterii de similitudine evidenţiate mai sus permite o delimitare clară a domeniilor de valabilitate ale principalelor modele teoretice ale fizicii moderne (v.fig.1.9).

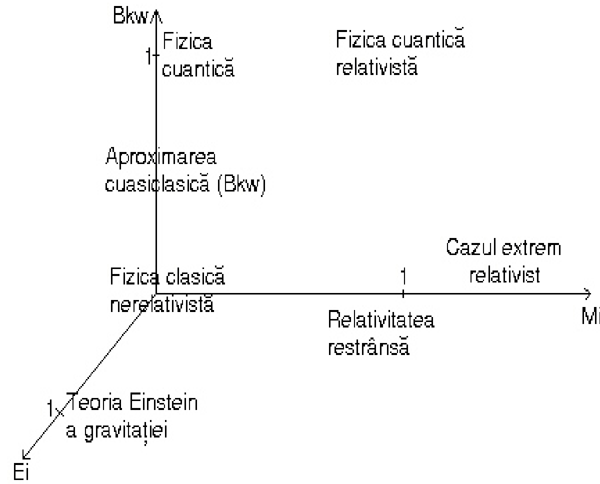


Figura 1.9

d) Modelele de laborator - modele de similitudine ale prototipurilor studiate

Studiul în laborator al unor sisteme fizice inaccesibile direct experimentului (o hidrocentrală, rețeaua energetică a unei țări, oscilațiile unei molecule poliatomice ş.a.) prezintă adesea interes. *Este posibil ca, pornind de la rezultatele experimentale obținute pentru modelele de laborator ale unor prototipuri macro-, respectiv microfizice, să se poată obține concluzii corecte asupra stării (evoluției) prototipurilor studiate?* Teoria similitudinii fizice afirmă - şi toate rezultatele experimentale cunoscute converg în acest sens - că *acest lucru este posibil* dacă...valorile tuturor criteriilor de similitudine ireductibile sunt aceleaşi pentru modelul de laborator şi prototipul studiat, deci *dacă modelul de laborator este modelul de similitudine al prototipului* (v. şi [9]).

Referințe

1. **A. Einstein** - *"Fizika i realnosti"* (trad. din lb. engleză), Izd. Inostr. Lit., Moscova, 1965.
2. **R. Feynman** - *"Fizica modernă"* (trad.din lb.engleză), Editura tehnică, Bucureşti, 1969-70, 2 volume.
3. **I. M. Popescu, D. Iordache, St. Tudorache, M. Stan, V. Fara** - *"Probleme rezolvate de fizică"*, Editura tehnică, Bucureşti, 1984, vol. 1, capitolul 1
4. **D. Iordache** - *"Noțiuni şi metode generale ale fizicii"*, Atel. poligrafice ale Inst. Politehnic Bucureşti, ediții în 1975 şi 1980.
5. **M. Gitterman, V. Halpern** - *"Qualitative Analysis of Physical Problems"*, Academic Press, New York-London, 1981.
6. **W. Stegmüller** - *"The Structuralist View of Theories. A Possible Analogue of the Bourbaki Programme in Physical Science"*, Springer, 1979.
7. **A. Gukhman** - *"Introduction to the Theory of Similarity"*, Academic Press, New York-London, 1965.
8. **L. D. Landau, E. M. Lifşiț** - *"Physique Statistique"*, Ed. Mir, Moscova, 1967.
9. **Oscar Kempthorne** - *"The Design and Analysis of Experiments"*, 4th edition, John Wiley, NewYork, 1965.

Anexa 1. *Definiţiile unora dintre cele mai frecvent utilizate criterii de similitudine*

Nr.crt.	Denumirea criteriului (simbol)	Definiţia	Notaţii speciale	Domeniul de utilizare (observaţii)
1	Arhimede (Ar)	$\frac{gl^3\Delta\rho}{\rho\nu^2}$	$\nu = \frac{\eta}{\rho}$ vâscozitatea cinematică	Amestecuri fluide, sau fluide cu incluziuni
2	Biot (Bi)	$\frac{\alpha l}{\lambda}$ (pentru solide)	$\frac{\delta Q}{\delta t} = \lambda \nabla T \cdot \delta \overline{A} = \alpha \delta T \cdot \delta A$	Transmiterea căldurii între solide şi fluide
3	Brillouin-Kramers-Wentzel (BKW)	$\frac{\hbar^2 F^2}{8mE_c^3}$	E_c = energia cinetică a unei particule de masă m, **F** = forţa acţionând asupra particulei	Fizica cuantică (clasificarea evoluţiilor: cuantică, semiclasică, clasică)
4	Cauchy (Ca)	$\frac{\rho v^2}{E}$	**E**= modulul de elasticitate longitudinală (Young)	Fizica mediilor continue
5	Coeficientul de corelaţie (r)	$\frac{Cov_N(U,T)}{s_N(U)\cdot s_N(T)}$	**U,T**= vectorii valorilor Parametrilor de univocitate, respectiv testaţi	Studiul corelaţiilor liniarizate
6	Constanta de cuplaj a interacţiunii (C)	$\frac{k \cdot g^2}{\hbar c}$	**k**= constanta interacţiunii, g= sarcina de interacţiune	Îndeosebi în fizica nucleară (clasificarea interacţiunilor fundamentale)
7	Primul criteriu Einstein (β)	$\frac{v}{c}$	-	Cinematica Relativistă
8	Einstein (Ei)	$\frac{kM}{c^2 R}$	**k**= constanta atracţiei universale, **M,R**=masa, respectiv raza sursei de gravitaţie	Teoria gravitaţiei
9	Eroare redusă (z)	$\frac{x_i - <x>_N}{s_N(x_i)}$	-	Prelucrarea rezultatelor experimentale
10	Euler (Eu)	$\frac{\Delta p}{\rho v^2}$	-	Curgeri forţate
11	Fermi (Fe)	$\frac{2mkT}{h^2}(\frac{4\pi g}{3n_o})^{2/3}$	n_o =numărul fermionilor de masă m şi degenerare g în unitatea de volum	Fizica cuantică (stările fermionilor în solide)
12	Fourier (Fo)	$\frac{\alpha t_o}{l^2}$	α=difuzivitate termică $\frac{\partial(T-T_a)}{\partial t} = \alpha \cdot \nabla^2 (T-T_a)$	Transmiterea energiei termice (căldurii)

Anexa 1 (continuare)

Nr.crt.	Denumirea criteriului (simbol)	Definiția	Notații speciale	Domeniul de utilizare (observații)
13	Froude (Fr)	$\frac{v^2}{gl}$	-	Curgere forțată
14	Galileo (Ga)	$\frac{gl^3}{\nu^2}$	ν=vâscozitatea cinematică	Fluide libere
15	Grashof (Gr)	$\frac{gl^3\beta(T-T_a)}{\nu^2}$	$\beta=\frac{1}{V}\cdot\frac{dV}{dT}$	Convecție termică
16	Lagrange (La)	$\frac{R\Delta p}{\eta v}$	η=vâscozitatea dinamică= $\nu\cdot\rho$	Curgere prin tuburi
17	Landau (Ln)	$\frac{\varepsilon_o c^3}{\kappa_i \hbar}\cdot E^2(\Delta t)^4$	E=intensitatea câmpului electric; Δt="durata" interacțiunii	Electrodinamica cuantică (interacțiuni cu câmpul electromagnetic cuantificat)
18	Lewis (Le)	$\frac{\rho D c_p}{\lambda}$	**D**=difuzivitatea masică; pentru λ, v. notații criteriu Bi	Procese ireversibile în fluide
19	Knudsen (Kn)	$\frac{<l>}{P}\cdot\frac{\Delta P}{\Delta x}$	**<l>**=lungimea medie a drumului liber; **P**=parametru caracteristic	Procese ireversibile (continuitatea mediului)
20	Mach (M)	$\frac{v_f}{v_s}$	v_f=viteza fluidului v_s=viteza sunetului	Compresiunea fluidelor mobile
21	Maxwell (Ma)	$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$	σ=conductivitatea electrică	Atenuarea undelor electromagnetice în diferite medii
22	Minkowski (Mi)	$\frac{p}{m_o c}$	p= impulsul	Dinamica relativistă
23	Nusselt (Nu)	$\frac{\alpha_f l}{\lambda_f}$ (pentru fluid)	v.definiția criteriului Biot	Transport energie termică între fluide şi solide
24	Péclet (Pe)	$\frac{vl}{\alpha}$	α=difuzivitatea termică (v.definiția Bi)	Transferul de energie termică în fluidele mobile
25	Prandtl (Pr)	$\frac{\nu}{\alpha}$	ν=vâscozitatea cinematică	Transferul de energie termică în fluidele mobile
26	Reynolds (Re)	$\frac{vl}{\nu}$	ν=vâscozitatea cinematică	Curgeri forțate

Anexa 1 (continuare)

Nr.crt.	Denumirea criteriului (simbol)	Definiția	Notații speciale	Domeniul de utilizare (observații)
27	Schmidt (Sm)	$\frac{\eta}{\rho D}$	D=difuzivitatea masică	Procese ireversibile în fluide
28	Stanton (St)	$\frac{\alpha}{c_p \rho v}$	α=difuzivitatea termică	Transferul de energie termică în fluide
29	Strouhal (Sh)	$\frac{vt}{l}$	t=perioada caracteristică curgerii	Curgere forțată
30	Weber (We)	$\frac{\rho v^2 l}{\sigma}$	σ=tensiunea superficială	Dinamica fluidelor