Campuri, analiza vectoriala

1. Definitii si exemple

Daca doua corpuri incarcate electric se afla destul de aproape unul de altul, intre ele apar interactiuni – forte, cupluri – dupa cum apar si interactiuni magnetice, sau gravitationale. Acestea **nu apar instantaneu**. **Nu exista interactiuni instantanee, la distanta (de ce ?).** Se spune ca fiecare corp modifica regiunea din jurul lui, generand un **camp – electromagnetic, gravitational, de temperaturi, de tensiuni elastice…** Unele campuri sunt scalare (de temperaturi), altele vectoriale (electromagnetice, elmgn).

Exemplu "cunoscut" : forta Coulomb generata de un corp cuasi-punctual cu sarcina electrica Q asupra unui alt corp incarcat cu sarcina q:

$$F = q\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\frac{\vec{r}}{r} = q\vec{E} \qquad (1)$$

Vectorul $\vec{E}$ este **campul electric** generat de sarcina Q, definit ca **forta pe unitatea de sarcina**. $[E] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$. Daca sarcinile au acelasi semn, $Qq>0$ si corpurile se resping, daca $Qq<0$ corpurile se atrag. Interactiunea este mediata de camp.

2. Linii de camp

Este un mod de vizualizare eficace al campurilor. Tangenta in orice punct la linia de camp reprezinta forta care actioneza asupra unui mic corp incarcat pozitiv. Exemple dupa Wikipedia in continuare. Pentru corpuri cuasi-punctuale campurile sunt centrale in apropierea sarcinilor, ca in Fig. 1. In general nu este asa, vezi Fig. 2. La fel se intampla pt un camp magnetic. Daca intensitataea campului este mai mare, liniile de camp sunt mai dese.

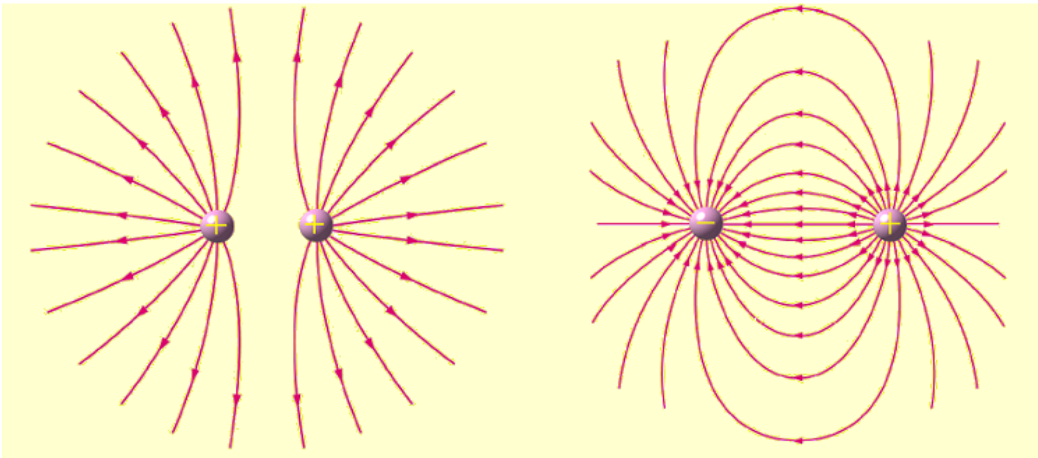

Fig. 1 Linii de camp pentru sarcini punctuale, din Wikipedia

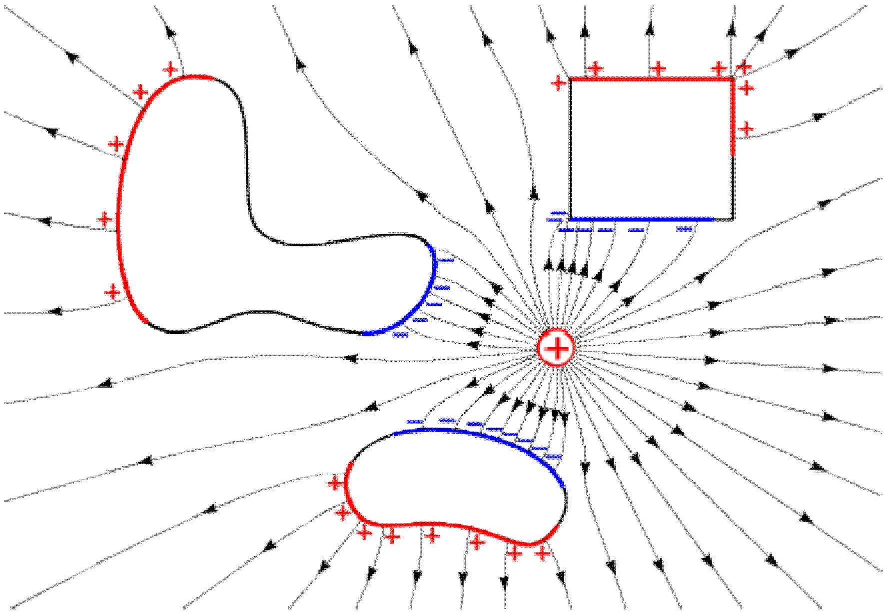

Fig. 2. Linii de camp in jurul unor corpuri metalice de forma oarecare. Sarcinile se acumuleaza numai pe suprafetele exterioare ale metalelor. In interior nu exista sarcini electrice (daca nu sunt campuri variabile), din Wikipedia

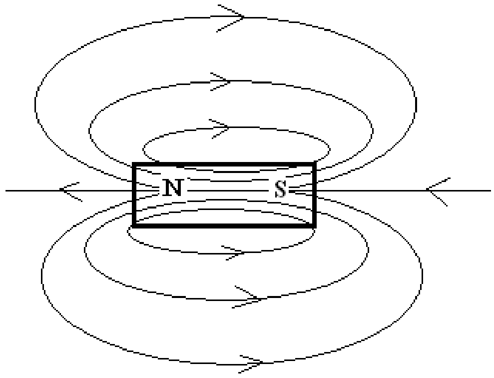

Fig. 3. Linii de camp magnetice pentru un magnet de tip bara.

3. Lucrul mecanic

Lucrul elemenatr este $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Lucrul total intre punctele A si B este integrala curbilinie

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{2}$$

4. Flux electric. Legea lui Gauss

Modelul presupune ca densitatea liniilor de camp – adica numarul de linii de camp pe unitatea de arie perpendiculara pe liniile de camp – masoara intensitatea campului:

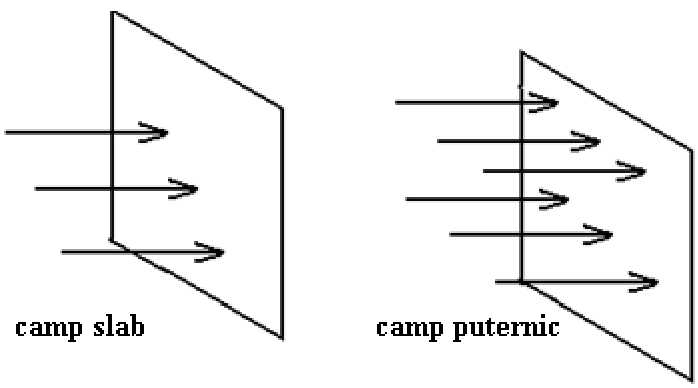

Fig.4.

$$E \propto \frac{\text{Numar de linii de camp}}{\text{Aria normala pe camp}} \tag{3}$$

Pe de alta parte, numarul de linii este proportional cu sarcina care produce campul

$$\text{Numar de linii de camp} \propto \text{ sarcina } Q \tag{4}$$

Factorul de proportionalitate este inversul permitivitatii mediului, ε^{-1}. Pentru sarcini dispuse neuniform, ca in Fig. 2, campul nu este nici radial, nici constant, dar produsul scalar $\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ are acelasi inteles de numar local de linii de camp. In Fig. 5 se arata liniile de camp datorate unei sarcini Q care inrtersecteaza o suprafata inchisa Σ

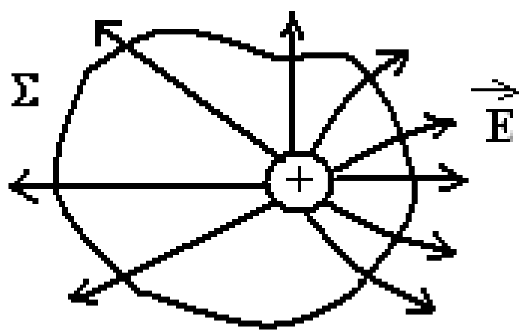

Fig. 5 Fluxul electric printr-o suprafata inchisa

Integrala campului electric pe suprafata inchisa Σ este **fluxul campului** $\vec{E}$ prin Σ:

$$\Phi_{electric} = \oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} \tag{5}$$

Legea lui Gauss, sau prima lege a lui Maxwell, este (in vid)

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{interior total}}}{\varepsilon_0} \tag{6, Mx I}$$

Liniile de camp pornesc din sarcinile pozitive si se opresc pe sarcinile negative.

Exemple in Fig. 6

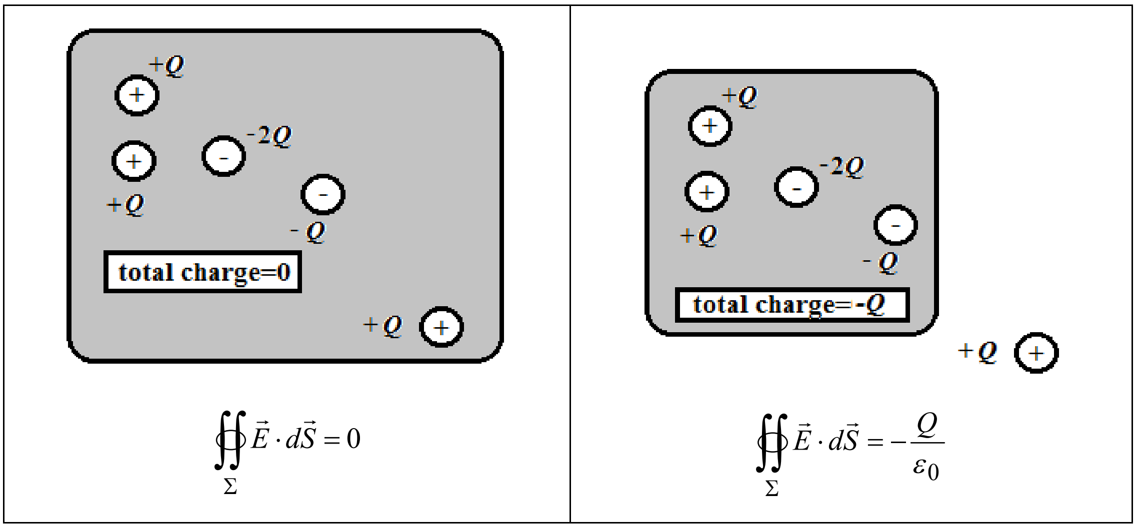

Fig. 6. Fluxul electric in doua cazuri particulare

5. Fluxul magnetic

Liniile de camp magnetic sunt inchise, nu exista monopoli magnetici. Analogul relatiei (6) este **a doua lege a lui Maxwell**

$$\oint\!\!\oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \qquad \text{(7, Mx. II)}$$

6. Circulatia vectorului camp electric. Potentialul electrostatic

Campul generat de o distributie stationara de sarcini, numit **camp electrostatic**, este un camp potential. Lucrul mecanic facut de campul $\vec{E}$ in timpul deplasarii unei sarcini q pe distanta $d\vec{r}$ este $\mathrm{d}W = q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$, iar lucrul total intre punctele (1) si (2) este $W = \int_1^2 q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$.

Integrala nu depinde de drum, asadar $\oint q\vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$, relatie valabile pt orice sarcina q. Asadar

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0 \qquad (8)$$

Introducem o functie scalara $\varphi(\vec{r})$ numita **potential electrostatic** a. i.

$$\varphi(1)-\varphi(2)=\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{r} \qquad (9)$$

Potentialul este egal numeric cu energia potentiala electrostatica a unitatii de sarcina aflata in punctul din camp considerat. UM voltul, $1\mathrm{V}=\dfrac{1\mathrm{N}}{1\mathrm{C}}$.

Relatii intre camp si potential:

$$d\varphi=-\vec{E}\cdot d\vec{r} \qquad (10)$$

$$\vec{E}=-\nabla\varphi \qquad (11)$$

Exemplu. Sarcina punctuala

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}, \qquad \text{si deci} \qquad \varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \qquad (12)$$

Observatie: daca sarcinile se misca sau daca exiata un camp magnetic variabil, campul electric nu mai este potential si relatiile (8-10) sunt incorecte. In acest ultim caz,

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{r}\neq 0 \qquad (8')$$

Integrala pe un circuit inchis se numeste in acest caz **tensiune electromotoare indusa**, care se noteaza cu *e* sau, evidentiind curba de integrare, e_Γ.

7. Inductia electromagnetica, legea lui Lenz

In cazul unui camp magnetic variabil care intersecteaza un circuit electric inchis

$$e = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int_{S_{\Gamma}} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma}, \qquad (13, \text{Mx.III})$$

Geometria problemei este aratata in Fig. 7:

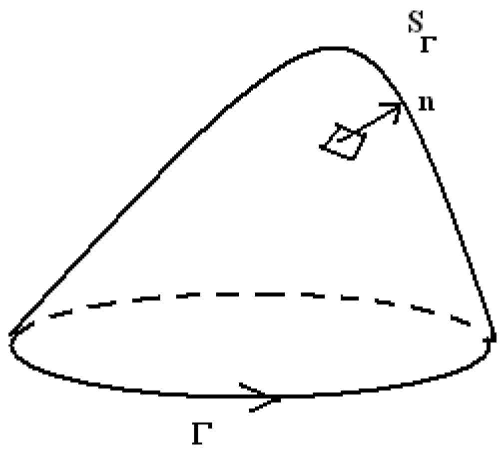

Fig. 7 Suprafata S_{Γ} care se sprijina pe curba Γ

8. Legea lui Ampère

Se stie ca un curent electric produce un camp magnetic. In cazul stationar relatia dintre curentul electric si campul magnetic este

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_{S_{\Gamma}} \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} \int_{S_{\Gamma}} \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma} \qquad (14)$$

Exemplu: fir infinit lung

Maxwell a generalizat ecuatia (14) in cazul nestationar, cand campurile variaza in timp:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_{S_\Gamma} \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma} + \mu_0 \frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} \qquad \text{(15, Mx IV)}$$

9. Ecuatiile lui Maxwell in materiale

In vid exista o proportionalitate intre inductii si campuri:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \qquad (16)$$

Un material reactioneaza la un camp electric extern polarizandu-se:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad (17)$$

Analog pentru un material in camp magnetic, material care se magnetizeaza

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \qquad (18)$$

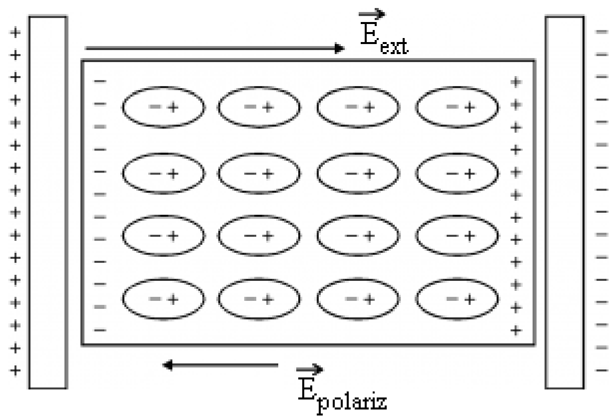

Fig. 8. Polarizarea moleculelor unui dielectric induce sarcini de suprafata

Pentru materiale liniare, omogene, izotrope, fara memorie si fara efecte mixte (electro-mecanice, magneto-mecanice, etc)

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \qquad \vec{M} = \chi_m \vec{H} \qquad (19)$$

10. Forma diferentiala (locala) a legilor lui Maxwell

(pentru deducere v. lectiile de curs. Se folosesc teoremele Gauss si Stokes)

Pentru forma locala se introduc densitatea de sarcina electrica masurata in C/m^3

$$\rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V} \tag{20}$$

si densitatea de curent masurata in A/m^2 ($\vec{u}_i$ este versorul intensitatii curentului electric)

$$\vec{j} = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}S}\vec{u}_i \tag{21}$$

Sarcina totala din volumul V_Σ inchis de suprafata Σ (Fig. 9) este

$$Q = \iiint_{V_\Sigma} \rho \mathrm{d}V \tag{22}$$

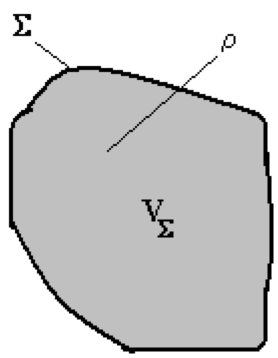

Fig. 9

Curentul total prin suprafata S este (Fig. 10)

$$I = \iint_{S} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{23}$$

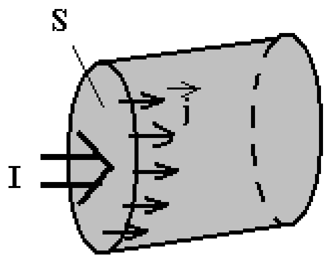

Fig. 10

Legile lui Maxwell in forma locala:

$$\boxed{div\vec{E} = \nabla\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad \text{(Mx I')}$$

$$\boxed{div\vec{B} = \nabla\vec{B} = 0} \qquad \text{(Mx II')}$$

$$\boxed{rot\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}} \qquad \text{(Mx III')}$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\vec{B} = \nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}} \qquad \text{(Mx IV')}$$