TEORIA RELATIVITĂȚII RESTRÂNSE

Cuvinte cheie:

- sisteme de referință inerțiale
- viteza luminii în vid
- contracția lungimilor
- dilatarea duratelor
- energia şi masa relativiste

Noțiuni anterioare necesare:

- mecanica newtoniană

În acest capitol veți învăța că:

- viteza luminii în vid este o constantă universală şi este cea mai mare viteză cu care se pot transmite interacțiunile
- simultaneitatea a două evenimente nu este absolută
- vitezele mari nu se compun ca în mecanica lui Newton
- la viteze mari lungimile se contractă, iar duratele se dilată
- particulele care se mişcă cu viteze mari se deplasează conform legilor TRR
- masa unui corp depinde de viteza sa
- există o proporționalitate între energia unui corp şi masa sa, $E=mc^2$; pe această relație se bazează energetica nucleară
- particule masive se pot transforma în particule fără masă de repaus (fotoni)
- toate acceleratoarele de particule sunt proiectate şi construite pe baza legilor şi a relațiilor din Teoria Relativității Restrânse (TRR)

CUPRINS

1. Introducere

1.1. Puțină istorie

Teoria relativității restrânse (TRR) este un capitol care deschide istoria *fizicii moderne* la începutul secolului al XX-lea. Acest capitol este complet diferit de toate celelalte părți studiate anterior, pe care le vom numi "nerelativiste" sau "clasice". (*Tema 1*)

Până spre sfârşitul secolului al XIX-lea fizica nerelativistă se prezenta ca o teorie armonioasă şi cuprinzătoare. Mecanica clasică, termodinamica şi electromagnetismul – care includea şi optica – reuşiseră să explice foarte multe fenomene. Însă teoria lui Maxwell nu explică electromagnetismul corpurilor în mişcare într-un mod care să se potrivească cu rezultatele mecanicii. Aceste fenomene sunt studiate de *teoria relativității restrânse* (ne restrângem la mişcări rectilinii şi uniforme ale sistemelor de referință). Interpretările teoretice au încercat să explice comportarea luminii în corpuri în mişcare pe baza existenței *eterului*

Teoria actuală a relativității restrânse a fost elaborată de Albert Einstein, care, în 1905, a dat o explicație revoluționară tuturor rezultatelor anterioare. De aceea TRR este legată de numele său. Interpretarea lui Einstein modifică drastic ideile noastre despre spațiu şi timp precum şi capitolele fizicii clasice, în particular mecanica. Însă mecanica clasică era o ştiință cu realizări teoretice enorme şi cu aplicații numeroase şi diverse. Dacă se acceptă TRR, atunci mecanica nerelativistă trebuie modificată radical. De ce ar trebui să schimbăm un capitol al fizicii care se aplică în tehnică şi în ştiință cu rezultate frumoase ? Răspunsul la această întrebare este următorul: ori se păstrează mecanica nerelativistă, şi atunci eletromagnetismul nu este corect explicat; ori se descrie corect electromagnetismul (şi optica), dar în schimb se modifică mecanica. Măsurările electromagnetice şi optice sunt printre cele mai precise pe care le putem face, mult mai precise decât cele mecanice. Acest fapt era adevărat la sfârşitul secolului al XIX-lea şi a rămas adevărat până acum. De aceea fizicienii au adoptat punctual de vedere al lui Einstein, ceea ce a dus la modificarea mecanicii clasice.

Între anii 1907-1915 tot Einstein a elaborat Teoria Relativității Generale, care studiază fenomenele fizice în prezența gravitației, sau în sisteme de referință neinerțiale.

1.2. Domeniu, importanță, aplicații

Teoria Relativității Restrânse este teoria actuală a fenomenelor fizice care se petrec la viteze mari, de ordinul de mărime al vitezei luminii în vid ($c \cong 3 \cdot 10^8$ m/s). După cum vom vedea, TRR arată că viteza *c* nu poate fi depăşită de nici un corp. Discutăm aşadar despre fizica sistemelor care se mişcă cu viteze apropiate, dar mai mici decât *c*. Vom arăta că în cazul vitezelor mici rezultatele relativiste coincid cu cele clasice, nerelativiste. În acest fel, *fizica nerelativistă este un caz particular al celei relativiste*. Acesta este **Principiul de corespondență: o teorie mai completă şi mai corectă conține vechea teorie ca un caz particular**.

Ca să fixăm ideile, sa presupunem că fizica nerelativistă este corectă până la viteze de ordinul $v \approx 0{,}01 \times c$, adică de aproximativ $3 \cdot 10^6\ \mathrm{m/s}$. De fapt, eroarea care se face lucrând nerelativist este de ordinul pătratului raportului dintre viteza corpului şi viteza luminii în vid, raport notat cu litera grecească β. Alegerea noastră duce la erori de ordinul $\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} \approx 10^{-4}$.

Observație: Majoritatea corpurilor cunoscute şi studiate de oameni au viteze mult mai mici decât limita aleasă de noi de $3 \cdot 10^6\ \mathrm{m/s}$ (*Tema 2*). De ce trebuie totuşi să folosim TRR ? În ce cazuri suntem obligați să o facem ? (*Tema 3*)

După cum vom vedea mai departe (§ 6.2.bis) *viteza luminii în vid, c, este cea mai mare viteză cu care se poate deplasa un corp material, precum şi cea mai mare viteză cu care se propagă interacțiunile şi informația*. Acest lucru este cunoscut încă din anul 1905, dar de-a lungul timpului au existat multe încercări de a dovedi contrariul. Să luăm exemplul unui colectiv care lucrează la laboratorul CERN din Geneva. Cercetătorii care efectuau experimentul OPERA au declarat în septembrie 2011 că **au măsurat viteze ale neutrinilor mai mari decât *c*.** Deşi autorii erau specialişti recunoscuți şi lucraseră cu multă grijă, mulți fizicieni s-au îndoit de corectitudinea măsurătorilor. Neîncrederea lor era bazată pe soliditatea consecințelor TRR, care afirmă cu tărie imposibilitatea unui astfel de rezultat. Abia în Februarie 2012, colaboratorii experimentului OPERA au publicat două surse de erori care au viciat rezultatul; viteza neutrinilor a revenit la valori „cuminți", mai mici decât *c*. (pentru amănunte: http://en.wikipedia.org/wiki/OPERA_experiment) (*Tema 4*).

Aşadar TRR descrie mişcarea şi interacțiile dintre corpuri la viteze mari, mai mari decât aproximativ $3 \cdot 10^6\ \mathrm{m/s}$. O mare parte din dinamica particulelor microscopice – cum sunt de exemplu electronii, protonii, fotonii – este perfect descrisă de TRR, pe când explicația nerelativistă este cu totul aproximativă, devenind complet nefolositoare la energii mari. Toate marile acceleratoare de particule din lume, inclusive cele de la CERN-Geneva (http://public.web.cern.ch/public/Welcome.html), sunt construite pe baza rezultatelor relativiste (http://en.wikipedia.org/wiki/Particle_accelerator). Energetica nucleară se bazează în mare parte pe celebra relație relativistă dintre masă şi energie $E=mc^2$ (§ 6.2bis). Aceeaşi relație permite explicarea generării şi anihilării perechilor particulă-antiparticulă (§ 6.2.bis). Din punct de vedere strict matematic, formularea noilor teorii fizice trebuie să fie în concordanță cu consecințele TRR. În sfârşit, electromagnetismul este corect exprimat numai în forma dată de TRR.

De aceea, chiar dacă relativitatea poate părea un capitol mai exotic al fizicii, rezultatele şi aplicațiile sale sunt prezente în multe domenii actuale.

2. Relativitatea galileană

Reamintim că un *sistem de referință inerțial* (SRI) este un sistem de referință în care este valabil principiul inerției. Toate sistemele de referință care se mişcă rectiliniu şi uniform față de un SRI sunt inerțiale (*Tema 5*).

În mecanica nerelativistă mişcarea unui sistem material este descrisă într-un spațiu cu patru dimensiuni: trei dimensiuni pentru poziția spațială la care se adaugă axa timpului. Punctele din acest spațiu cuadridimensional $\boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}$ se numesc *evenimente*. Toate corpurile se mişcă în acest *spațiu absolut*, iar poziția lor față de un SR se modifică în cursul timpului care „*curge uniform*"(Isaac Newton). Aşadar, spațiul şi timpul sunt considerate absolute şi independente de corpurile sau de câmpurile existente. Datorită marii influențe a lui Newton asupra lumii ştiințifice, această concepție a predominat în toată fizica nerelativistă, până spre sfârşitul secolului al XIX-lea (vezi totuşi polemica dintre Leibniz şi Newton, [3]).

Ne punem *problema găsirii tuturor transformărilor de coordonate (spațiale şi de timp) care păstrează principiul întâi al mecanicii, adică legea inerției*. Pentru a o studia, trebuie să introducem noțiunea de *corp material liber* (*Completarea teoretică 1*).

Un astfel de corp are deci o viteză constantă:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) = \vec{v}_0 \tag{2.1}$$

Prin integrare se obține ecuația traiectoriei:

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \tag{2.2}$$

unde cu $\vec{r}_0$ şi $\vec{v}_0$ am notat poziția şi viteza în momentul inițial ales arbitrar ca origine a timpului. În orice SRI un corp liber se mişcă rectiliniu şi uniform sau stă pe loc.

Acest principiu limitează posibilitățile de descriere a timpului la funcțiile liniare. Singurele transformări permise asupra variabilei timp sunt cele liniare:

$$t' = at + b, \qquad a \text{ şi } b \text{ constante} \tag{2.3}$$

Din pricina arbitrarului alegerii originii timpului şi a unității de măsură, transfornările (2.3) nu modifică decât scara timpului, aşa că putem considera că timpul este universal şi scriem:

$$t' = t \tag{2.4}$$

Transformările spațiale care păstrează legea inerției sunt tot liniare, şi anume rotațiile şi translațiile. Vom căuta acum transformările *cinematice* (adică dependente de timp) care păstrează această lege. În 1632, Galilei şi-a imaginat un savant care face observații şi măsurători mecanice în interiorul unei corăbii care se mişcă rectiliniu şi uniform pe un lac liniştit. A ajuns la concluzia că nici o astfel de observație nu poate sa pună în evidență mişcarea vasului. Într-adevăr, transformarea care trece de la un SRI (*S*) la altul (*S'*) care se mişcă cu viteza constantă $\vec{V}$ este:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t \tag{2.5}$$

Am folosit universalitatea timpului (2.4). Relația (2.5) este descrisă în Fig. 1.

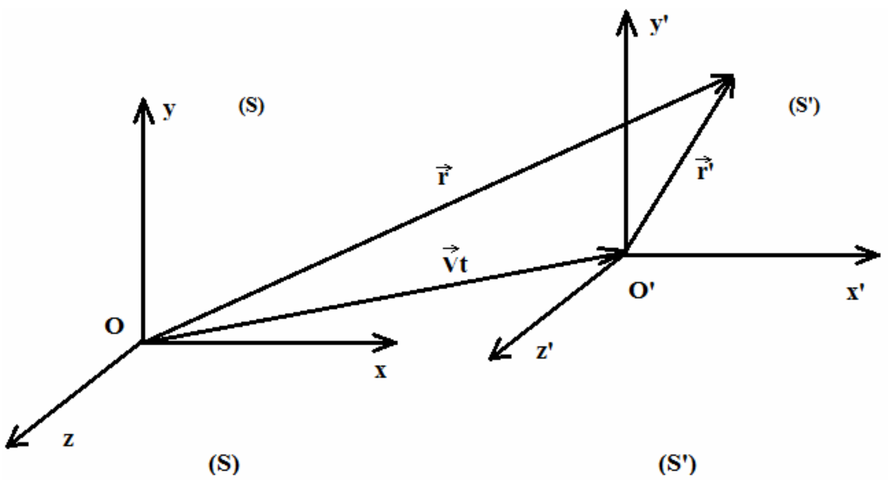

Fig. 1. Transformarea de la SRI (*S*) la (*S'*)

Ecuațiile de mişcare ale unui corp de masă *m* în cele două sisteme de referință sunt:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \qquad \text{în } (S)$$
$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F}' \qquad \text{în } (S') \tag{2.6}$$

Dar relațiile (2.4) şi (2.5) arată că $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}'$ şi, deoarece masa nu se modifică, rezultă că nici forța nu se modifică prin transformare. Aceasta înseamnă că *legile mişcării sunt invariante la o transformare între două SRI*. În particular, dacă în sistemul (*S*) corpul era liber (adică $\vec{F} = 0$), el rămâne liber în (*S*') şi legea inerției se păstrează în ambele SRI.

O altă concluzie a relațiilor de transformare (2.4, 2.5) este „*legea de compunere a vitezelor a lui Galilei*" (vezi şi [Completarea teoretică 2](#)):

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} \tag{2.7}$$

Această binecunoscută compunere vectorială a vitezelor nu mai este valabilă în relativitatea lui Einstein.

Să regrupăm rezultatele din acest capitol:

- Principiul relativității al lui Galilei: **legile mecanicii sunt invariante la trecerea de la un SRI la altul**
- Transformarea cinematică la care legile mecanicii rămân invariante este dată de transformările Galilei (2.4) şi (2.5):

$$t' = t \tag{2.4}$$
$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t \tag{2.5}$$

Putem scrie transformările Galilei sub formă matricială:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v_x \\ 0 & 1 & 0 & -v_y \\ 0 & 0 & 1 & -v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

In relațiile anterioare de transformare (2.4, 2.5, 2.8) am neglijat translația sau rotația axelor de coordonate. Pentru cazul particular în care rotația are loc în jurul axei *Oz* folosim *Tema 6* şi scriem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Consecințe.

1. Deoarece timpul este universal, simultaneitatea a două evenimente din (*S*) se păstrează în orice alt SRI: dacă $t_2 = t_1$, atunci $t_2' = t_1'$.
2. Trecerea de la coordonatele spațiale din (*S*) la cele din (*S'*) facându-se prin relația (2.5), rezultă că distanța dintre aceste puncte este constantă, $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = |\vec{r}_2' - \vec{r}_1'|$, sau $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2}$. (*Tema 7*)

3. Premize teoretice şi experimentale ale teoriei relativității restrânse

3.1. Ecuațiile electromagnetismului şi transformarea Galilei (*Completarea teoretică 3*)

Ştim că legile mecanicii sunt aceleaşi în toate SRI. Dar ecuațiile lui Maxwell, care descriu electromagnetismul – şi în particular optica – nu sunt invariante la transformarea Galilei. Pentru a arăta acest lucru, nu vom folosi ecuațiile lui Maxwell, care sunt mai complicate, ci o consecință a acestora, şi anume ecuația undelor electromagnetice. Pentru simplitate, presupunem că propagarea se face în vid şi ne restrângem la cazul 1D. Atunci, ecuația undelor electromagnetice în sistemul (S) se scrie:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \tag{3.1}$$

unde ψ este una din componentele câmpului electric sau magnetic al undei, iar c este viteza luminii în vid. După cum au demonstrat experiențele celebre ale lui Michelson şi Morley din anii 1880 (vezi § 3.2.) **viteza luminii este aceeaşi, indiferent de SRI în care o măsurăm**. Este evident că în cazul 1D sistemul (S') se deplasează de-a lungul axei comune *xx'*.Cum se scrie ecuația undelor electromagnetice în sistemul (S') ? Aplicăm transformarea Galilei (2.4, 2.5) şi găsim în (*S*'):

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial t'^2}-\frac{2V}{c^2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'\partial t'}-\frac{V}{c^2}\frac{\partial}{\partial x'}\left(V\frac{\partial\psi'}{\partial x'}\right)=0 \qquad (3.2)$$

Am notat cu V viteza dintre cele două SRI şi am folosit independența vitezei luminii de SRI din care este masurată. Relația (3.2) diferă față de (3.1), ceea ce înseamnă că legile electromagnetismului nu sunt aceleaşi în toate SRI. Deci relativitatea Galilei *nu se aplică electromagnetismului*. Trebuie găsite alte relații de trecere de la un SRI la altul, care să lase invariante legile electromagnetismului. Acest lucru a fost făcut mai întâi de Lorentz (şi de Larmor) şi de aceea se numesc *relațiile Lorentz*.

Particularitatea şocantă a transformărilor Lorentz este că *timpul nu mai este universal şi depinde de SRI în care este măsurat*.

3.2. Eterul luminos şi experiența Michelson-Morley

Ecuația care descrie undele electromagnetice se scrie sub forma (3.1) numai într-un SRI privilegiat, iar forma ei se modifică la trecerea în alt SRI conform (3.2). Făcând o analogie cu undele elastice, s-a presupus că există un mediu material, numit *eter*, prin care se propagă undele electromagnetice. Deoarece aceste unde se propagă şi prin vid, este mai simplu să căutăm aici unele proprietăți ale eterului. Maxwell a arătat că în vid viteza undelor electromagnetice, ca şi cea a luminii, este $c=\left(\varepsilon_0\mu_0\right)^{-1/2}\approx 3\cdot 10^8$ m/s. Constantele vidului permitivitatea dielecrică ε_0 şi permeabilitatea magnetică μ_0 sunt invariante la orice schimbare a SRI. Rezultă că **viteza luminii în vid este o constantă universală**, care nu depinde de mişcarea sursei sau a observatorului. Aşadar viteza unui fascicul luminos emis de pe sol este egală cu viteza fasciculului luminos proiectat de pe un avion în zbor şi cu cea a luminii emise de cometa Halley, care se mişcă față de Soare cu viteza maximă de 75 km/s. Această concluzie contrazice compunerea galileană a vitezelor. S-au făcut diverse experiențe, cele mai importante fiind efectuate în anii 1881-1887 de către Michelson şi Morley. Scopul lor era de a măsura viteza Pământului faţă de eter, Pământul având cea mai mare viteză accesibilă, şi anume 30 km/s faţă de Soare. Aparatul folosit este *interferometrul lui Michelson*, schiţat în Fig. 2a.

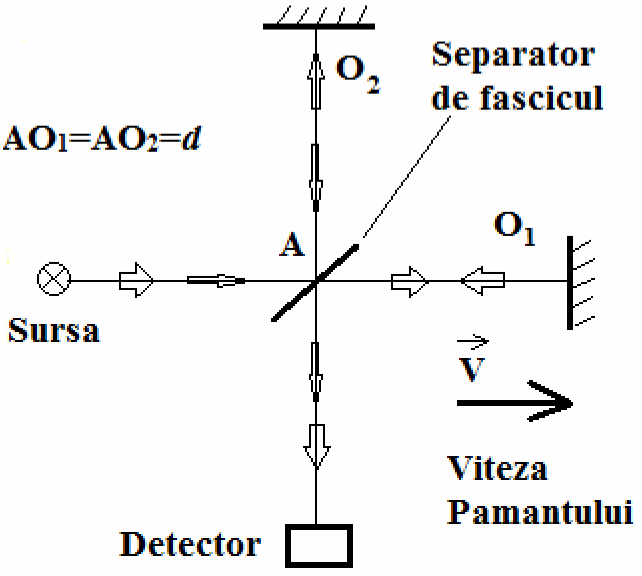

Fig. 2a. Interferometrul Michelson

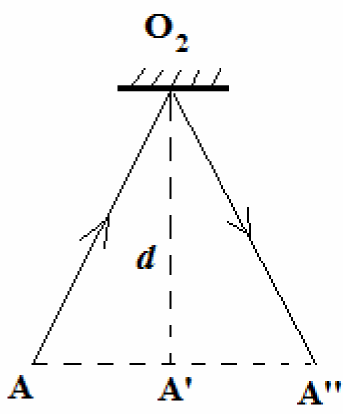

Fig. 2.b. Drumul fasciculului AO_2A

Un fascicul îngust de lumină monocromatică emis de sursa S este divizat în două de către un separator aflat în A. Acesta este o lamă semitransparentă care lasa sa treacă jumătate din intensitatea incidentă şi reflectă cealaltă jumătate. Cele două fascicule perpendiculare astfel formate se reflectă pe oglinzile O_1 şi O_2 şi, trecând din nou prin separator, se suprapun în drumul lor spre detector. Acesta permite observarea cu mare precizie a franjelor de interferenţă. Aparatul este aranjat cu braţul AO_1 paralel cu viteza Pământului $\vec{V}$.

Să calculăm duratele în care lumina parcurge drumurile AO_1A pe de o parte şi AO_2A pe de alta. Viteza luminii în eter este *c*, aşadar:

$$t_{AO_1A} = t_1 = \frac{d}{c-V} + \frac{d}{c+V} = \frac{2dc}{c^2 - V^2} \tag{3.3}$$

Pe direcţia perpendiculară pe mişcarea Pământului lumina se propagă aşa cum se vede în Fig. 2.b. În timpul în care lumina parcurge distanţa AO'$_2$ aparatul se mişcă Impreună cu Pământul pe distanţa AA'. Rezultă: $AO_2' = ct_2' = O_2'A''$, $AA' = A'A'' = Vt_2'$. În final:

$$t_{AO_2A} = t_2 = 2t_2' = \frac{2d}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{3.4}$$

Diferența dintre cele două intervale de timp este:

$$t_1 - t_2 = \frac{2d}{c}\left(\frac{1}{1-\beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

Deoarece $\beta^2 \approx 10^{-8} << 1$, aproximăm $\frac{1}{1-\beta^2} \approx 1 + \beta^2$, și $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx 1 + \frac{\beta^2}{2}$.

Se obține $t_1 - t_2 \cong \frac{d}{c}\beta^2$. Această întârziere duce la deplasarea franjelor față de poziția lor în absența mișcării Pământului. Rotind aparatul cu 90°, diferența de drum apare în sens opus. Franjele ar trebui să se deplaseze cu mărimea $2c(t_1 - t_2) = 2d\beta^2$. Fracțiunea corespunzătoare din interfranjă se obține împărțind la lungimea de undă a luminii. În experiență d=11 m, $\lambda = 0{,}59\,\mu\text{m}$. Calculăm $\frac{2d\beta^2}{\lambda} \approx 0{,}37$, adică figura de interferență ar trebui să se deplaseze cu mai mult de o treime dintr-o interfranjă. Deplasarea minimă sesizabilă de cercetători era de 100 de ori mai mică. Totuşi nu s-a detectat nici o deplasare.

Experiența a fost repetată în condiții mult îmbunătățite, cu diverse surse de lumină, terestre şi cosmice, cu diverse lungimi de undă, dar niciodată nu s-a descoperit nici o deplasare a franjelor (http://ro.wikipedia.org/wiki/Experimentul_Michelson-Morley). Concluzia este că *nu se poate detecta mişcarea corpurilor prin eter.* De aceea, în prezent nu se mai foloseşte noțiunea de eter (vezi http://en.wikipedia.org/wiki/Luminiferous_aether, sau un rezumat pe româneşte http://ro.wikipedia.org/wiki/Eter _ luminifer).

Pentru a aprofunda deosebirea dintre relativitatea lui Galilei şi rezultatele experiențelor de optică, vezi *Tema 8* şi *Tema 9*.

4. Principiile teoriei relativității restrânse. Transformarea Lorentz.

4.1. Reconsiderarea noțiunii de simultaneitate

Deoarece viteza luminii nu depinde de SRI din care o măsurăm, înseamnă că relativitatea galieană nu este valabilă decât la limita vitezelor mult mai mici decât *c*. Ar trebui revăzute toate conceptele care au dus la relațiile lui Galilei, în particular universalitatea timpului.

Pentru un fizician pre-relativist, ca şi pentru orice nespecialist, fraza „un fenomen petrecut pe sol este simultan cu altul petrecut într-un avion în zbor" este perfect plauzibilă. Simultaneitatea este o proprietate intrinsecă a perechii de fenomene discutate. Orice observator, oriunde s-ar găsi el, ar fi de acord cu simultaneitatea în cauză. Totul se bazează pe principiul enunțat de Newton al timpului universal (vezi Relativitatea galileană).

Dar pentru un fizician relativist afirmația anterioară nu este evidentă. Pentru a putea afirma că două fenomene se petrec în acelaşi timp, trebuie să dispunem de ceasuri legate de cele două puncte unde au loc fenomenele, iar aceste ceasuri trebuie să fie *sincronizate*, adică să meargă la fel. Cum putem verifica mersul sincronizat al două ceasuri ? De exemplu, le putem pune împreună, le potrivim la fel şi apoi le ducem pe fiecare unde avem nevoie. Dar în acest fel sincronizarea se face o singura dată, iar dacă ulterior unul din ceasuri funcționează greşit, rezultatele nu mai sunt corecte (in plus in timpul miscarii ceasurile merg altfel decat cele care raman in repaus). De aceea se preferă o altă metodă: ceasurile sunt sincronizate prin semnale pe care şi le trimit reciproc. În acest fel sincronizarea este continuă (*Tema 10*).
Deoarece viteza luminii nu depinde de mişcarea sursei sau a observatorului, este convenabil să folosim pentru sincronizare semnale luminoase. In cartea sa [1] „Teoria relativității", Einstein scrie la pagina 38:

„S-a reproşat adesea teoriei relativității că ea acordă fenomenului de propagare a luminii, în mod nejustificat, un rol teoretic central întrucât ea întemeiază noțiunea de timp pe legea de propagare a luminii. Aici lucrurile stau astfel. Pentru a da noțiunii de timp o semnificație fizică, trebuie să folosim unele procese care pot stabili relații între locuri diferite. Natura proceselor alese pentru o astfel de definiție este în sine indiferentă. Este însă avantajos pentru teorie să se aleagă un proces despre care ştim ceva precis. Grație cercetărilor lui Maxwell şi H. A. Lorentz propagarea luminii în vid prezintă acest caracter într-o măsura mai mare decât toate celelalte procese ce ar putea fi luate în considerare."

Oare o sincronizare cu semnale luminoase este absolută ? Aceasta ar însemna ca ceasurile să funcționeze sincron oricare ar fi mişcările lor. Dar acest lucru de întâmplă doar dacă am dispune de *o interacţiune care să se propage instantaneu, la distanţă*. După cum ştim, lumina se propagă cu viteză foarte mare, dar finită. Nici o altă interacţiune cunoscută nu se propagă instantaneu la distanţă. Deci *nu există sincronizare absolută a ceasurilor care se mişcă unul faţă de celălalt. Timpul este relativ la SRI din care-l măsurăm.*

S-ar părea atunci că ajungem la un cerc vicios: sincronizăm ceasurile cu semnale luminoase, dar pentru a şti viteza luminii trebuie să putem măsura timpul. Putem ieşi din acest paradox folosind *sincronizarea relativă a ceasurilor care se află în repaus unul faţă de altul.* Procedeul acesta al lui Einstein nu necesită cunoaşterea vitezei luminii.

Să presupunem că ne situăm într-un SRI. Pentru a măsura distanţele acesta este înzestrat cu rigle rigide aşezate de-a lungul axelor de coordonate. Pentru măsurarea timpului nu este de ajuns să avem un singur ceas, aflat într-un punct. Cu acesta nu putem măsura timpul pentru un fenomen care se petrece foarte departe. De aceea ne imaginăm că dispunem de o mulţime de ceasuri aflate în diverse puncte ale referenţialului. De la unul dintre ceasuri, de exemplu de la cel aflat în origine, se trimit semnale luminoaseîn toate direcţiile. Un asemenea semnal pleacă din origine în momentul t_0. Deoarece lumina se propagă cu aceeaşi viteză în toate direcţiile, semnalul ajunge la ceasul aflat la distanţa r_1 în momentul $t_1 = \frac{r_1}{c}$, la ceasul aflat la distanţa r_2 în momentul $t_2 = \frac{r_2}{c}$, etc. În acest fel toate ceasurile aflate în repaus relativ sunt sincronizate convenabil şi dispunem într-un SRI de toate instrumentele pentru a măsura distanţe şi durate. Aceasta nu înseamnă că ceasurile din alt SRI devin şi ele sincronizate. Acelaşi procedeu trebuie repetat pentru fiecare referenţial în parte. *Duratele măsurate din sisteme diferite de referinţă nu vor fi identice, deoarece ceasurile din fiecare SRI sunt sincronizate numai cu celelalte ceasuri din acelaşi sistem*. ***Nu există simultaneitate absolută***.

4.2. *Principiile teoriei relativității restrânse*

Bazându-ne pe paragrafele precedente, putem enunța principiile TRR introduse de Einstein în 1905:

1. **Principiul relativității: Legile fizicii sunt aceleaşi în toate sistemele de referință inerțiale.**
2. **Principiul invarianței vitezei luminii: Viteza luminii în vid este invariantă în toate sistemele de referință inerțiale.**

Pentru valoarea exactă a lui *c*, vezi *Tema 11*:

$$c = 299\,792\,458 \text{ ms}^{-1} \tag{4.1}$$

4.3. *Transformările Lorentz*

Vrem să determinăm transformările de coordonate spațio-temporale ale unui eveniment la trecerea de la SRI (*S*) la SRI (*S*'), care se mişcă rectiliniu şi uniform față de primul cu viteza $\vec{V}$. Notăm cele patru coordonate ale evenimentului cu (*x, y, z, t*) în sistemul (*S*) şi cu (*x', y', z', t'*) în sistemul (*S'*). Vom căuta relațiile de transformare impunând ca un rezultat al teoriei lui Maxwell – şi anume ecuația tridimensională a undelor – să aibă aceeaşi formă în ambele sisteme. În sistemul (*S*) ecuația undelor în 3D se scrie:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \tag{4.2}$$

Este mai comod şi mai simplu să introducem următoarele notații, datorate lui Minkowsky:

$$x_1 = x, \qquad x_2 = y, \qquad x_3 = z, \qquad x_4 = ict \tag{4.3}$$

unde $i=\sqrt{-1}$ este unitatea imaginară. Folosirea coordonatei x_4 nu înseamnă introducerea unui „timp imaginar”, ci este un simplu artificiu pentru simplificarea scrierii. Într-adevăr, ecuația undelor (4.2) se scrie mai simplu şi mai compact:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial {x_2}^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial {x_3}^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial {x_4}^2}=0, \quad \text{sau} \quad \sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial^2\psi}{\partial {x_\mu}^2}=0 \qquad (4.2')$$

Transformarea Lorentz explicitează schimbarea de coordonate

$$x'_\mu = x'_\mu\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right), \qquad \mu=1,2,3,4 \qquad (4.4)$$

Spre deosebire de transformările Galilei, aici coordonata temporală se modifică, deoarece nu există o sincronizare absolută a evenimentelor. Pentru proprietățile transformărilor Lorentz, vezi *Completarea teoretică 4*

4.4. Transformarea Lorentz specială

Vom folosi explicit matricea Lorentz într-un caz particular. Presupunem că sistemele (S) şi (S’) au axele paralele, că în momentul t=0 originile lor coincid şi că sistemul (S') se mişcă cu constantă V de-a lungul axei comune xx' (Fig. 3):

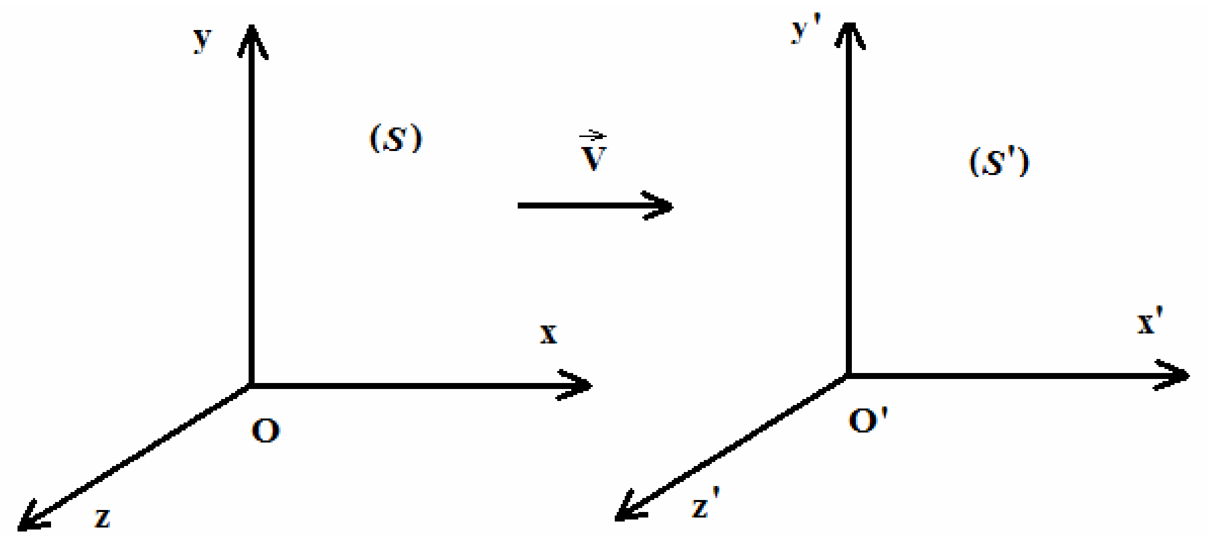

Fig. 3. Mişcarea sistemelor de referință în transformarea Lorentz specială

În tot restul capitolului vom avea nevoie numai de această forma particulară. Deoarece în momentul t=0 originile sistemelor coincid, putem sincroniza ceasurile din (S') astfel ca în acest moment să fie definită şi originea t'=0. Mişcarea facându-se numai de-a lungul axei comune xx', celelalte coordonate spaţiale nu se modifică:

$$y' = y, \quad \text{sau} \quad x_2' = x_2, \qquad\qquad z' = z, \quad \text{sau} \quad x_3' = x_3 \tag{4.5}$$

Matricea Lorentz se simplifică:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Continuarea calculelor se găseşte în Completarea teoretică 5.

Cu notaţiile din Completarea teoretică 5 putem scrie matricea Lorentz specială sub forma:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Transformarea Lorentz directă este dată de

$$\begin{cases} x_1' = \gamma(x_1 + i\beta x_4) \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 \\ x_4' = \gamma(-i\beta x_1 + \gamma x_4) \end{cases} \tag{4.7}$$

sau, revenind la coordonatele (x, y, z, t)

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt) = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{Vx}{c^2}\right) = \dfrac{t - \dfrac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \dfrac{t - \dfrac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \tag{4.8}$$

Transformările descrise de relațiile (4.6-4.8) se numesc *speciale,* deoarece mişcarea referențialului (*S'*) se face numai de-a lungul axei *xx*'.

Transformarea inversă, de la sistemul (*S'*) la sistemul (*S*) se obține ca în *Tema 12*. Rezultatele sunt:

$$\alpha' = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{4.6'}$$

Transformarea Lorentz inversă este dată de

$$\begin{cases} x_1 = \gamma(x_1' - i\beta x_4') \\ x_2 = x_2' \\ x_3 = x_3' \\ x_4 = \gamma(i\beta x_1' + \gamma x_4') \end{cases} \tag{4.7'}$$

sau, revenind la coordonatele (x, y, z, t)

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + Vt') = \dfrac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \dfrac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{Vx'}{c^2}\right) = \dfrac{t' + \dfrac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \dfrac{t' + \dfrac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \tag{4.8'}$$

Transformările Lorentz sunt mai complicate decât cele ale lui Galilei (4 şi 5, sau 8), atât din punct de vedere pur matematic, cât şi conceptual. Modificarea timpului la trecerea de la un SRI la altul este o operaţie cu totul nouă şi a întâmpinat o anumită rezistenţă printre fizicienii de la începutul secolului al XX–lea. Totuşi numai această transformare conservă legile electromagnetismului la schimbarea referenţialului şi de aceea trebuie luată în considerare în studiul proceselor care au loc la viteze mari.

La viteze mici, transformările Lorentz trec în relaţiile Galilei (*Tema 13*).

Rezultă că mecanica clasică este un caz particular al celei relativiste şi că principiul de corespondenţă (pag. 5) este satisfăcut.

4.5. Interpretarea geometrică a transformării Lorentz speciale

Relaţia (2.9) din cap. 2 prezintă matricea unei rotaţii spaţiale în jurul axei *Oz*, în fizica nerelativistă. Forma matricială a transformării Lorentz (4.6') seamănă cu relaţia (2.9), dacă facem notaţiile:

$$\gamma = \cos\varphi, \qquad i\beta\gamma = \sin\varphi, \qquad \text{adică} \qquad \mathrm{tg}\varphi = i\beta = i\frac{V}{c} \qquad (4.9)$$

Transformarea Lorentz este deci echivalentă unei rotaţii de unghi φ în planul (x_1, x_4), aşa cum se arată în Fig. 4.

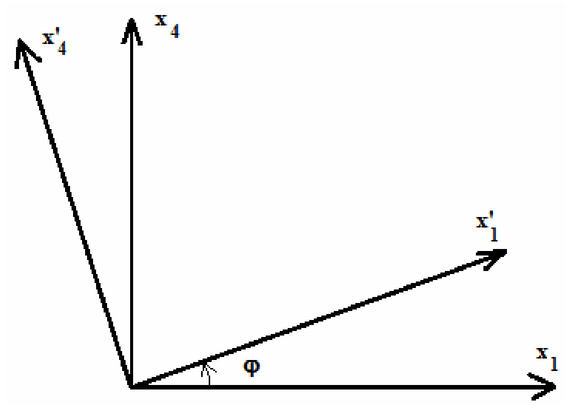

Fig. 4. Interpretarea geometrică a transformării Lorentz

După cum vom arăta în § 4.3. nici un corp material nu se poate mişca cu viteze mai mari decât *c*. De aceea, există un unghi maxim pentru care $\mathrm{tg}\varphi_{\max} = i$, iar rotaţiile cu unghiuri mai mari nu au înţeles fizic.

SR față de care un corp este în repaus se numeşte *sistem propriu de referință*. Mişcarea corpului se reprezintă în spațiul Minkowsky print-o curbă numită *linie de univers*. Deoarece în SR propriu orice corp stă pe loc, în acest sistem linia de univers este o dreaptă paralelă cu axa x_4; dacă acel corp se află în origine, linia sa de univers în SR propriu este chiar axa x_4. Mişcarea uniformă se reprezintă printr-o dreaptă, cea accelerată printr-o curbă:

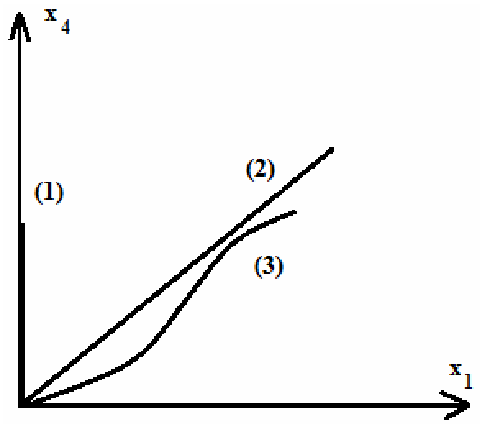

Fig. 5. Linii de univers: (1) repaus (SR propriu); (2) mişcare uniformă; c) mişcare accelerată

5. Consecințe cinematice ale transformării Lorentz

În cele ce urmează considerăm că sistemul (*S*') se mişcă cu viteza *V* față de (*S*) în sensul pozitiv al axei *Ox*, ca în cazul transformării Lorentz speciale.

5.1. Măsurarea intervalelor de timp. Dilatarea duratelor.

Procedeul de sincronizare din § 4.1. se aplică numai ceasurilor din acelaşi SRI. Să studiem măsurarea intervalelor de timp în două SRI. Presupunem că în SR propriu al unui obiect masurăm durata dintre două evenimente *A* şi B, care au loc în acelaşi punct $x_A = x_B$: $\tau = t_B - t_A$. Acesta se numeşte *intervalul de timp propriu*. Intervalul de timp dintre aceleaşi evenimente măsurat în (*S'*) este, conform relațiilor (4.8), dat de

$$t'_B - t'_A = \gamma(t_B - t_A) = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{5.1}$$

Intervalul de timp măsurat dintr-un referenţial mobil este mai mare decât intervalul de timp propriu. Se spune ca *timpul se dilată*. Rezulta că *simultaneitatea îşi pierde caracterul absolut*. Într-adevăr, să considerăm că în punctele x_A şi x_B din sistemul (S) au loc două evenimente simultane $t_A = t_B$. Faţă de (S'), intervalul de timp dintre evenimente nu mai este nul, şi anume $t'_B - t'_A = \frac{V}{c^2}\gamma(x_A - x_B) \neq 0$.

O problemă legată de relativitatea simultaneităţii este posibilitatea inversării ordinii în timp a evenimentelor. Aceasta ordonare este strâns legatâ de cauzalitate, cauza precedând întotdeauna efectul. O inversare a ordinii cauzei şi efectului ar fi incompatibilă cu principiul cauzalităţii. Vom arăta că aşa ceva nu se întâmplă: ordinea evenimentelor care interacţionează se păstrează în orice SRI. Presupunem că evenimentele *A* şi *B* sunt legate cauzal printr-o interacţiune care se propagă cu viteza $u \le c$, unde $u = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}$. Atunci:

$$t'_B - t'_A = \gamma\left(t_B - t_A - \frac{V}{c^2}(x_B - x_A)\right) = \gamma(t_B - t_A)\left(1 - \frac{uV}{c^2}\right)$$

Deoarece atât *u*, cât şi *V* sunt mai mici decât *c*, $\frac{t'_B - t'_A}{t_B - t_A} > 0$ şi succesiunea în timp a evenimentelor în interacţiune se păstrează.

5.2. Măsurarea lungimilor. Contracţia Lorentz

Coordonatele transversale nu se modifică prin transformarea Lorentz, aşa încât şi lungimile transversale rămân invariante. Altfel stau lucrurile cu lungimile măsurate pe direcţia mişcării. Să considerăm o bară rigidă aşezată da-a lungul axei *Ox*, cu lungimea proprie $l_0 = x_B - x_A$. În sistemul (S') trebuie măsurăm capetele barei în acelaşi moment $t'_A = t'_B$ (Completarea teoretică 6)

Folosind transformările Lorentz inverse găsim:

$$l_0 = x_B - x_A = \gamma[x'_B - x'_A + V(t'_B - t'_A)]$$

deci

$$l' = \frac{l_0}{\gamma} = l_0\sqrt{1-\beta^2} \tag{5.2}$$

Lungimile măsurate pe direcția de mişcare, dintr-un sistem mobil, sunt mai mici decât lungimile proprii. Aceasta este *contracția Lorentz.* Această contracție explică rezultatul negativ al experienței Michelson (*Tema 14*)

5.3. Compunerea vitezelor

Diferențiem relațiile Lorentz (34) ținând cont că V este constantă:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x' = \gamma(\mathrm{d}x - V\mathrm{d}t) \\ \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y \\ dz' = dz \\ \mathrm{d}t' = \gamma\left(\mathrm{d}t - \dfrac{V}{c^2}\mathrm{d}x\right) \end{cases}$$

Componentele vitezei unui corp pe axele de coordonate sunt $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, $v_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ în sistemul (S) şi $v'_x = \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}$, $v'_y = \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}$, $v'_z = \dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}$ în sistemul (S'). Relațiile anterioare duc la:

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - V}{1 - \dfrac{Vv_x}{c^2}} \\ v'_y = \dfrac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{Vv_x}{c^2}} \\ v'_z = \dfrac{v_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{Vv_x}{c^2}} \end{cases} \qquad (5.3)$$

Încercați rezolvarea temelor *Tema 15*, *Tema 16*, *Tema 17*, *Tema 18*.

Generalizarea temelor 17 şi 18 este imediată: *dacă un corp se deplasează cu viteza c în sistemul (S), atunci el se va deplasa cu aceeaşi viteză în orice SRI.*

Folosind transformările relativiste (38) se poate arăta că la trecere de la un SRI la altul *viteza corpurilor nu depăşeşte niciodată viteza luminii în vid* (*Tema 19*). În acelaşi sens se poate calcula viteza relativă a doi protoni din acceleratorul LHC de la CERN (Large Hadron Collider, vezi http://public.web.cern.ch/public/en/lhc/Computing-en.html). Protonii se deplasează în sensuri opuse, fiecare cu o viteză egală cu 99,9999991% din viteza luminii în vid (http://public.web.cern.ch/public/en/lhc/Facts-en.html) (*Tema 20*). În ambele cazuri, vitezele calculate sunt mai mici decât c, chiar dacă foarte apropiate de această viteză limită.

5.4. Aberaţia luminii şi efectul Doppler in 7

6. Dinamica relativistă

6.1.bis (pt Automatica) Functia Lagrange relativista pentru un punct materal liber

Trebuie sa gasim o alta forma a lui L, diferita de cea din fizica nerelativista (2.1.11) din Mecanica Analitica. Scriem L in referentialul propriu al unei particule libere:

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L_0 \mathrm{d}\tau \tag{6.1}$$

Aici L_0 este o constanta, deoarece pm liber este in repaus fata de SR propriu. Timpul propriu este invariant relativist, rezulta ca si **actiunea *S* este invariant relativist.** Expresia actiunii fata de alt SRI rezulta inlocuind $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1-\beta^2}$. Asadar

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L_0 \sqrt{1 - \beta^2}\,\mathrm{d}t \tag{6.2}$$

$$L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2} \tag{6.3}$$

Pentru viteze mici $L_0\sqrt{1-\beta^2} \approx L_0\left(1-\frac{\beta^2}{2}\right)$ si deci

$$\delta S = -\delta\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}L_0\beta^2\,\mathrm{d}t$$

Folosim principiul de corespondenta:

$$\delta S = -\delta\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}L_0\,\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\,\mathrm{d}t = \delta\int_{t_1}^{t_2}\frac{m_0 v^2}{2}\,\mathrm{d}t$$

de unde

$$\boxed{L_0 = -m_0c^2} \qquad (6.4)$$

Rezulta Lagrangeianul relativist al unui pm liber

$$\boxed{L = -m_0c^2\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (6.5)$$

In relatiile anterioare m_0 este masa de repaus a corpului.

6.2.bis (pt. Automatica) Hamiltoniana unui punct material liber. Impulsul relativist

$$H = \vec{p}\vec{v} - L \qquad (6.6)$$

Impulsul este dat de definitia din Mecanica Analitica:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial v_x} = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

La fel pentru p_y si p_z, asa incat

$$\boxed{\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}} \tag{6.7}$$

Introducand in (6.6) gasim

$$\boxed{H = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m(v^2)c^2} \tag{6.8}$$

Sau, avand in vedere ca Hamiltonianul care nu depinde explicit de timp reprezinta enrgia,

$$\boxed{E = mc^2} \tag{6.8'}$$

Am introdus **masa de miscare**

$$\boxed{m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}} \tag{6.9}$$

Din relatiile (45-47) se poate deduce usor o alta relatie intre energie si impuls:

$$\boxed{H = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}} \tag{6.10}$$

Observatie In (48) am considerat numai semnul „+" in fata radicalului, cu toate ca matematic ambele semne sunt posibile. **Semnul „–„ a fost luat in considerarre de Dirac**, in anul 1930, odata cu introducerea notiunii de antiparticula.

In sistemul propriu, o particula este totdeauna in repaus si atunci energia devine **energia de repaus**

$$\boxed{E_0 = m_0 c^2} \tag{6.11}$$

Energia cinetica relativista este diferenta

$$\boxed{E_{cin} = E - E_0 = (m - m_0)c^2} \tag{6.12}$$

Aceasta coincide cu expresia nerelativista numai pentru viteze mici, cand $\dfrac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx m_0\left(1 + \dfrac{v^2}{c^2}\right)$, si atunci $E_{\text{cin nerelat}} = E - E_0 \approx m_0\left(1 + \dfrac{v^2}{2c^2} - 1\right)c^2 = \dfrac{m_0 v^2}{2}$.

Particule cu masa de repaus nula

La viteze foarte mari, tinzand spre *c*, masa, impulsul si energia particulelor tind spre infinit, $m(v) \xrightarrow[v \to c]{} \infty$. Particulele cu viteza egala cu *c*, de ex. fotonii, au masa de repaus nula, $m_{0\,foton} = 0$. Numai asa restul caracteristicilor raman finite. Pentru foton asadar, ca si pentru celelalte particule care se misca cu viteza *c*,

$$E_{fot} = p_{fot}c \tag{6.13}$$

Putem vorbi doar de „masa de miscare”, $m_{fot} = \dfrac{p_{fot}}{c}$.

Problema. Sa se arate ca o particula cu masa de repaus nenula nu poate emite sau absorbi un foton.

7. Relativitatea restransa in spatiul Minkowski

7.1. Spatiul Minkowski cuadri-dimensional

Inca de la studiul undelor am introdus **coordonatele Minkowski** reluate in (4.3):

$$x_1 = x, \qquad x_2 = y, \qquad x_3 = z, \qquad x_4 = ict \tag{4.3}$$

Punctele din acest spatiu se numesc **evenimente**. Vecorii din acest spatiu au 4 componente, se numesc **cuadri-vectori sau 4-vectori** si se noteaza cu litere ronde $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{P}$. Ele sunt vectori coloana pe care, pentru economie de spatiu, ii notam

$$\mathcal{A} = (A_1,\ A_2,\ A_3;\ A_4)_{\text{col}} = (\vec{A};\ A_4)_{\text{col}} = (\vec{A};\ iA_t)_{\text{col}} \tag{7.1}$$

Primele 3 elemente compun **partea spatiala** a 4-vectorului, iar a 4-a este **partea temporala**, care contine unitatea imaginara. Un exemplu de 4-vector este **cuadri-intervalul**

$$\mathcal{X} = (\vec{r};\ ict)_{\text{col}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

La o transformare Lorentz cuadri-intervalul se transforma dupa relatia (4.7), care in spatiul Minkowski se scrie

$$\mathcal{X}' = \alpha\,\mathcal{X} \text{ sau } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{pmatrix} = \alpha = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

matricea α fiind data de (4.6). Matricea α este o matrice ortogonala, adica $\alpha^{\mathrm{t}}\alpha = I$.

La o transformare Lorentz un 4-vector se transforma aidoma 4-intervalului.

Definim **produsul scalar cuadridimensional** prin

$$\mathsf{A}\,\mathsf{B} = \sum_{\mu=1}^{4} A_\mu B_\mu = \left(\vec{A};\ A_4\right)_{\text{lin}} \left(\vec{B};\ B_4\right)_{\text{col}} = \vec{A}\cdot\vec{B} - A_t B_t \qquad (7.4)$$

Produsul scalar este un invariant relativist. Demonstratia este simpla

$$\mathsf{A}'\cdot\mathsf{B}' = (\mathsf{A}')^t\cdot\mathsf{B}' = (\alpha\mathring{A})_{\text{lin}}(\alpha\mathsf{B})_{\text{col}} = = (\alpha\mathring{A})^t(\alpha\mathsf{B}) = \mathring{A}^t(\alpha^t\alpha)\mathsf{B} = \mathring{A}^t\cdot\mathsf{B}$$

De exemplu, pentru 4-interval, $\mathsf{X}^2 = r^2 - c^2t^2$ =const (demonstrati asta).

Putem forma alti 4-vectori **prin inmultire cu o constanta**, sau cu o marime definita in sistemul propriu de referinta: masa de repaus, timpul propriu, etc. O alta posibilitate este **derivarea la o cantitate fizica constanta**, care nu se modifica la o transformare Lorentz. Exemple:

Cuadri-viteza $\mathsf{V} = \mathrm{d}\mathsf{X}/\mathrm{d}\tau$, unde τ este timpul propriu:

$$\mathsf{V} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\tau};\ ic\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right) = \gamma(\vec{v};\ ic) \qquad \text{cu patratul} \qquad \mathsf{V}^2 = -c^2 \qquad (7.5)$$

Cuadri-acceleratia este $\mathsf{A} = \mathrm{d}^2\mathsf{X}/\mathrm{d}\tau^2$.

Cuadri-impulsul este cuadri-viteza inmultita cu masa de repaus:

$$\mathsf{P} = m_0\mathsf{V} = \gamma(m_0\vec{v};\ im_0c) \qquad \text{cu patratul} \qquad \mathsf{P}^2 = -\,m_0^2c^2 \qquad (7.6)$$

Cuadri-vectorul de unda. Faza unei unde plane este o realitate fizica nedeformata de o transformare Lorentz, adica exista invariantul relativist

$$\vec{k}\vec{r} - \omega t = \vec{k}'\vec{r}' - \omega' t' = \text{invariant} \qquad (7.7)$$

Relatia (7.7) se poate scrie ca produs scalar intre doi 4-vectori, dintre care unul este 4-intervalul $\mathsf{X} = (\vec{r};\ ict)$, iar celalalt trebuie sa fie

$$\mathsf{K} = \left(\vec{k};\ i\frac{\omega}{c}\right) \qquad (7.8)$$

Acesta este cuadri-vectorul de unda. Patratul sau este nul

$$\kappa^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

(**de ce ?**)

7.2. Interpretarea geometrica a transformarii Lorentz

Comparam matricea Lorentz cu matricea de rotatie in jurul lui *Oz* (Cap. 1 Cinematica relatia (1.1.5)) care in 4D se scrie $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Transformarea **Lorentz se poate interpreta ca o rotatie in planul x_1–x_4 cu unghiul ψ dat de**

$$\sin\psi = i\beta\gamma, \quad \cos\psi = \gamma, \qquad \tan\psi = i\beta = i\frac{V}{c} \qquad (7.9)$$

Ce e cuprins intre ►►► si ◄◄◄ nu este materie de examen

6.2. ►►►Masa şi impulsul în fizica relativistă (deducere fara Mecanica Analitica)

Încă înainte de primul război mondial s-au făcut primele experienţe cu particule având viteze mari, în special cu particule β^-, adică electroni provenind din dezintegrări radioactive. Primele măsurători precise asupra particulelor β^- au fost făcute în 1940, iar în 1964 Bertozzi a făcut o experienţă care să măsoare viteza şi energia cinetică a acestor particule (vezi [5], p. 340). Rezultatul acestor experienţe, ca şi a multor altora, făcute în acceleratori de toate tipurile, au arătat fără nici un dubiu că *la viteze mari definiţia obişnuită a impulsului* $\vec{p} = m_0\vec{v}$ *nu este corectă, că masa nu se conservă în forma dată de relaţia (40), că energia cinetică a unui corp nu este dată de relaţia (43) şi că viteza unui corp nu poate depăşi viteza luminii în vid* (http://en.wikipedia.org/wiki/Tests_of_relativistic_energy_and_momentum). Relaţiile corecte relativiste se găsesc dacă în loc de masa obişnuită, numită *masă de repaus*, se introduce în formule *masa de mişcare*, care depinde de viteza corpului:

$$\boxed{m(v) \equiv m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma m_0} \qquad (6.14)$$

Aici m_0 este masa inerţială a corpului, adică masa în sistemul propriu de referinţă, în care corpul este în repaus. (*Completare teoretică 7*).

De fapt este aproape evident că impulsul particulelor rapide nu poate fi definit ca în fizica nerelativistă, deoarece transformarea vitezelor nu se face după relaţiile lui Galilei. Vom demonstra acest lucru în cazul particular al ciocnirii elastice centrale dintre două bile identice, care se îndreaptă una spre cealaltă de-a lungul axei $O'x'$ din sistemul (S') cu vitezele $+v'$ şi $-v'$. Ciocnirea fiind elastică, după interacţiune fiecare bilă se întoarce înapoi cu viteza egală şi de sens opus cu cea iniţială. Să studiem acum acelaşi proces din sistemul (S), care se mişcă cu viteza $-V$ de-a lungul axei comune xx'. Situaţia din fizica nerelativistă este tratată în *Tema 22*.

În relativitate, vitezele celor două corpuri măsurate din sistemul (S) sunt date de

$$v_1 = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}} \qquad\qquad v_2 = \frac{-v' + V}{1 - \frac{v'V}{c^2}}$$

Introducem aceste valori în conservarea impulsului scrisă ca în *Tema 22* $m_1 v_1 + m_2 v_2 = M_{tot} V$ şi după câteva simplificări găsim

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 + \frac{v'V}{c^2}}{1 - \frac{v'V}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \qquad (6.15)$$

Pentru ultima egalitate vezi *Completare teoretică 8*. Relația (6.15) arată că masa depinde de viteză invers proporțional cu radicalul $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$:

$$m(v) = \frac{\text{const}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Scriind relația anterioară pentru viteză nulă v=0, se obține constanta egală cu *masa de repaus* m_0, adică în definitiv relația (6.9), care defineşte *masa de miscare*:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (6.9)$$

Impulsul relativist se defineşte folosind masa de mişcare:

$$\boxed{\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m(v)\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}} \qquad (6.7)$$

Bibliografie

1. Albert Einstein, *Teoria relativității*, Ed. Tehnică 1957.
2. Albert Einstein, *Teoria relativității pe înțelesul tuturor*, Ed. Humanitas, 2010.
3. Ezio Vailati, *Leibniz şi Clarke, corespondența filosofică*, Ed. Tehnică, 2000.
4. Max Born, *Teoria relativității a lui Einstein*, Ed. Ştiințifică, 1969.
5. Charles Kittel, Walter D. Knight, Malvin A. Ruderman, *Mecanica,* vol.1 din Cursul de Fizică de la Berkeley, Ed. Didactică şi Pedagogică, 1981.
6. Gheorghe A. Stanciu, Alexandru I. Lupaşcu, *Fizica vol. I*, Ed. I.P.B., 1989.
7. Lewis Carroll Epstein, *Teoria relativității în imagini,* Ed. ALL, 1996
8. Robert Resnick, *Introduction to Special Relativity,* John Wiley & Sons, 2005
9. Foarte multe informații se găsesc în Wikipedia, în limba engleză sau pe româneşte; propunem titlurile:
   - http://en.wikipedia.org/wiki/Special_relativity, http://ro.wikipedia.org/wiki/Teoria_relativit%C4%83%C8%9Bii_restr%C3%A2nse
   - http://en.wikipedia.org/wiki/Introduction_to_special_relativity
   - http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_special_relativity.