4. Unde

4.1. Ce sunt undele

O oscilatie este o miscare periodica a unui punct material. Oscilatiile armonice 1D sunt miscari sinusoidale, la fel si cele 3D, dar in acestea elongatia este un vector. De ex. pentru miscari 1D libere paralele cu *Ox*:

$$\psi(t) = a\sin(\omega t + \varphi_0) \tag{4.1.1}$$

O unda este propagarea unei oscilatii (sau, in general, a unei perturbatii) **intr-un mediu**. Miscarea unui punct intr-un loc se transmite punctelor invecinate din mediu, acestea la randul lor pun in miscare alte puncte si deplasarea **se propaga** din aproape in aproape.

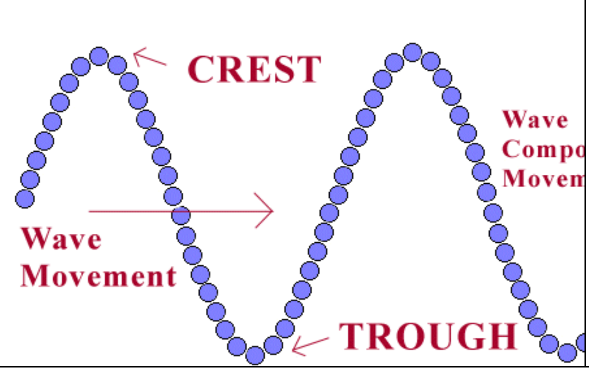
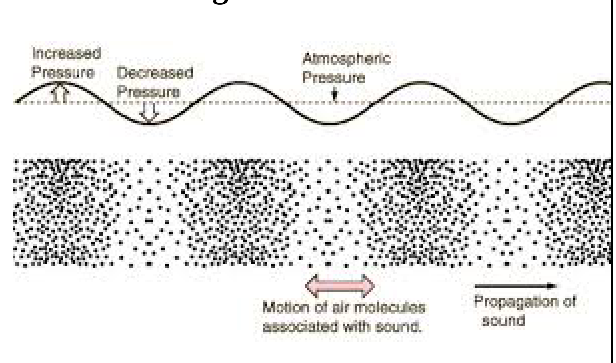
Undele pot fi: elastice, electromagnetice, magnetohidrodinamice, de Broglie,...

Tipuri de unde: longitudinale (sunete in aer, unde de compresie in solide)

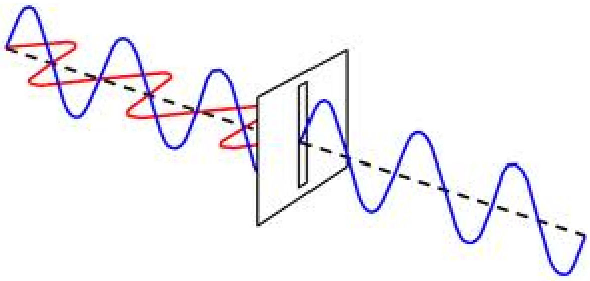
transversale (unde in corzi vibrante, electromagnetice)

Pentru figuri vezi

https://www.google.ro/search?q=transverse+waves&rlz=1C2FDUM_enRO472RO472&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=KnqTUraLM7P2yAPhxoHoCg&ved=0CCwQsAQ&biw=1513&bih=752

Transversala	Longitudinala
	

Undele transversale pot fi **polarizate**



Trebuie facuta deosebirea dintre **viteza de propagare** a undei pe directia de deplasare si **viteza** punctelor mediului. Ele se deosebesc atat prin directie (la unde transversale), dar si prin modul. *Exemplu* valurile marii.

Intr-un mediu 1D ca de ex. o coarda, presupunem ca in originea *O*, cu abscisa $x_0 = 0$ se gaseste o sursa de oscilatii armonice. Miscarea acestui oscilator se descrie prin functia de timp $\psi(x_0 = 0, t) = a\sin(\omega t)$. Miscarea punctului aflat la distanta *x* de origine este data de functia $\psi(x, t)$. Presupunem ca viteza de propagare v_p este constanta si aceasi in ambele sensuri de deplasare posibile. Atunci ce se intampla in origine la momentul *t* se va petrece in punctul de abscisa *x* dupa *timpul de propagare* $t_p = x / v_p$:

$$\psi(x,\ t) = a\sin\left[\omega\left(t - t_p\right)\right] = a\sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{v_p}\right) = a\sin(\omega t - kx) \qquad (4.1.2)$$

unde *k* este ***vectorul de unda*** (e un scalar in 1D)

$$k = \frac{\omega}{v_p} \qquad (4.1.3)$$

(4.1.2) reprezinta o unda armonica 1D care se propaga in directia axei *Ox*. Acelasi lucru reprezinta $a\cos(\omega t - kx)$ sau $a\exp[i(\omega t - kx)]$. Ce inseamna $a\cos(\omega t + kx)$?

4.2. Ecuatia unei unde 1D intr-o coarda vibranta

Calculam derivatele de ord. al doilea ale lui $\psi(x, t)$ din(4.1.2):

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = k^2 a\sin(\omega t - kx) = \frac{\omega^2}{v_p^2} a\sin(\omega t - kx) \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \omega^2 a\sin(\omega t - kx)$$

Impartim cu v_p^2 derivata a doua in timp si gasim ecuatia undei 1D:

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0} \tag{4.2.1}$$

In 3D

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \Delta\psi - \frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0} \tag{4.2.2}$$

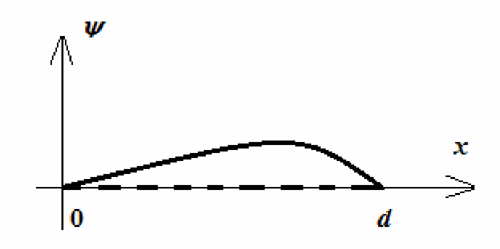
Tema: Verificati ca $\psi(x, y, z, t) = \cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)$ este solutia ec. (4.2.2). Putem simplifica mai mult scrierea ecuatiei in 3D daca introducem urmatoarele notatii:

$$x_1 = x \qquad x_2 = y \qquad x_3 = z \qquad x_4 = iv_p t \tag{4.2.3}$$

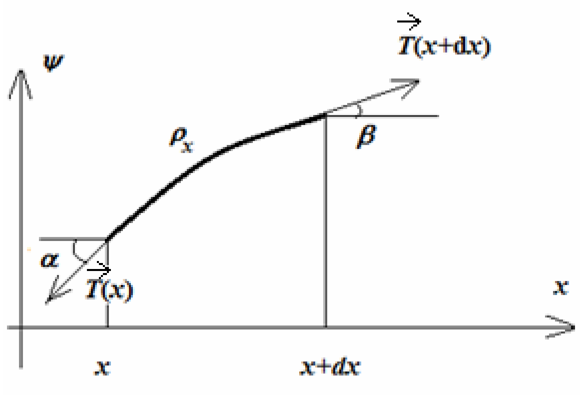
Ecuatia devine

$$\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j} = \Box\psi=0 \tag{4.2.4}$$

Consideram o coarda vibranta omogena cu densitatea liniara ρ_x, de sectiune constanta si de lungime *d*. In echilibru coarda se afla de-a lungul axei *Ox*. In figura urmatoare ea este aratata si in afara echilibrului:



Pozitia unei parti mici a corzii perturbate de lungime d*x* este desenata mai jos, unde sunt figurate si tensiunile care tin coarda intinsa:



Tensiunile au module aproximativ egale $T(x) \cong T(x+\mathrm{d}x)$. Deplasarea fiecarei portiuni de coarda este verticala. Scriem legea Newton II pentru portiunea corzii (x, x+dx), de masa dm= ρ_xdx:

$$\mathrm{d}m \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T(x+\mathrm{d}x)\sin\beta - T(x)\sin\alpha$$

Unghiurile sunt mici si aproximam sinusii cu tangentele, adica cu derivatele spatiale

$$\rho_x \mathrm{d}x \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T(x)(\tan\beta - \tan\alpha) = T(x)\left[\frac{\partial\psi(x+\mathrm{d}x)}{\partial x} - \frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right] = T(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

Daca viteza de propagare a undelor transversale este $v_t = \sqrt{\dfrac{T}{\rho_x}}$, relatia anterioara are forma ecuatiei undei (4.2.1)

4.3. Solutia d'Alembert (metoda caracteristicilor)

Idee: schimbare de variabile $u = x - v_p t$ si $w = x + v_p t$. Ecuatia (4.2.1) devine $\frac{\partial^2\psi}{\partial u \partial w} = 0$. Asadar derivata $\frac{\partial\psi}{\partial u}$ nu depinde de w si nici $\frac{\partial\psi}{\partial w}$ nu depinde de u:

$$\frac{\partial\psi}{\partial w} = f_2(w) \qquad\qquad \frac{\partial\psi}{\partial u} = f_1(u)$$

Rezulta

$$\mathrm{d}\psi = \frac{\partial \psi}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial \psi}{\partial w}\mathrm{d}w = f_1(u)\mathrm{d}u + f_2(w)\mathrm{d}w$$

Care da prin integrare $\psi(u, w) = f(u) + g(w)$, sau in final

$$\boxed{\psi(x, t) = f(x - v_p t) + g(x + v_p t)} \qquad (4.3.1)$$

Aici f si g sunt functii cu derivate de ord II continui.

4.4. Metoda Fourier

Vezi cursul predat la tabla

4.5. Caracteristicile undelor

Unde directe si inverse

Faza undei

Front de unda

Unde armonice:

$$\psi(x, t) = a\sin(\omega t - kx) \qquad \text{in 1D} \qquad (4.5.1)$$

$$\psi(\vec{r}, t) = a\sin(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \qquad \text{in 3D} \qquad (4.5.2)$$

Suprafete echifaza (*de unda*) cu ecuatia

$$x - v_p t = \text{const} \qquad (4.5.3)$$

Diferentiem si gasim expresia *vitzei de faza*

$$\mathrm{d}x - v_p \mathrm{d}t = 0 \qquad \text{sau} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_p \tag{4.5.4}$$

Viteza de faza v_p este viteza cu care se deplaseaza suprafetele echifaza.

Distanta dintre doua suprafete de faza adiacente (sau distanta parcursa de unda intr-o perioada) este *lungimea de unda*. Discutam numai despre undele armonice.

Energia transportata de unda este proportionala cu patratul amplitudinii $\psi(x, t)$ sau $\psi(\vec{r}, t)$. **Energia care trece in unitatea de timp prin unitatea de suprafata** se numeste ***intensitatea*** undei (UM sunt W/m^2).

Interferenta

Difractia

Vor fi studiate la undele electromagnetice.