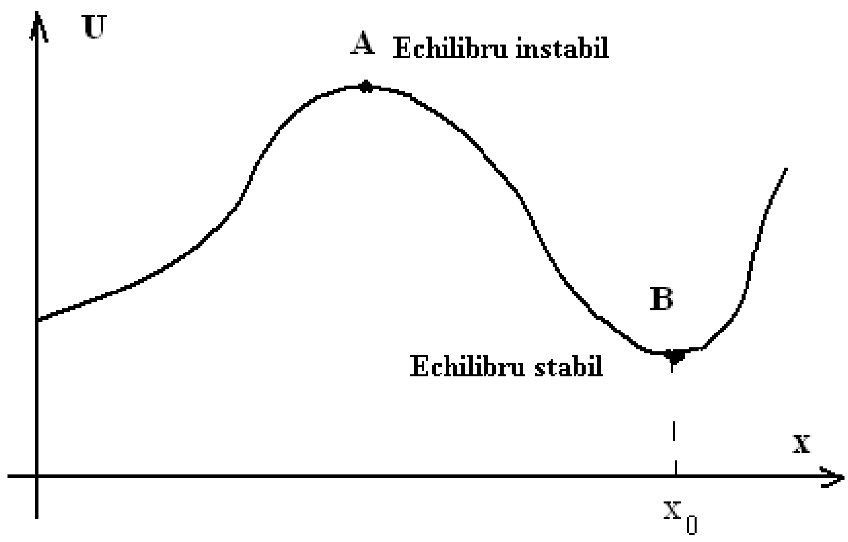
3.1. Oscilatii armonice 1D

Multe miscari facute de sisteme in jurul unor puncte de echilibru pot fi aproximate cu oscilatii armonice. Aproximatia se bazeaza pe dezvoltarea in serie a energiei potentiale in jurul unor astfel de puncte. Situatia este prezentata in figura urmatoare:



Punctele A si B sunt puncte de echilibtru pentru ca $\frac{dU}{dx}=0$ si deci forta este zero. De ce in punctul A este un echilibru instabil ? de ce este stabil echilibrul in punctul B ?

Intr-o vecinatate mica a lui B dezvoltam in serie potentialul si tinem cont ca $\frac{dU}{dx}\Big|_{x_0}=0$:

$$U(x)\cong U(x_0)+\frac{dU}{dx}\Big|_{x_0}(x-x_0)+\frac{1}{2}\frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{x_0}(x-x_0)^2=U(x_0)+\frac{1}{2}\frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{x_0}(x-x_0)^2$$

Forta in vecinatatea lui B este de forma

$$F=-\frac{dU}{dx}\cong-\frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{x_0}(x-x_0)=-k(x-x_0),\ \text{cu } k>0 \text{ am notat derivata a doua.} \qquad (3.1.1)$$

Oscilatiile liniare sunt prima aproximatie a miscarii in jurul unui punct de echilibru.

Ecuatii (3.1.2)

Newton	Lagrange	Hamilton
$m\ddot{x} = F = -kx$ $m\ddot{x} + kx = 0$ $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$	$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$ $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx$ $m\ddot{x} = -kx$	$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$ $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx \qquad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$ $\dot{p} = m\ddot{x} = -kx$

Solutia este de tip

$$x(t) = A\exp[i\omega_0 t] + B\exp[-i\omega_0 t] \tag{3.1.3}$$

sau $$x(t) = a\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{3.1.3'}$$

Constantele se determina punand conditiile initiale, de ex. $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$.

Energii

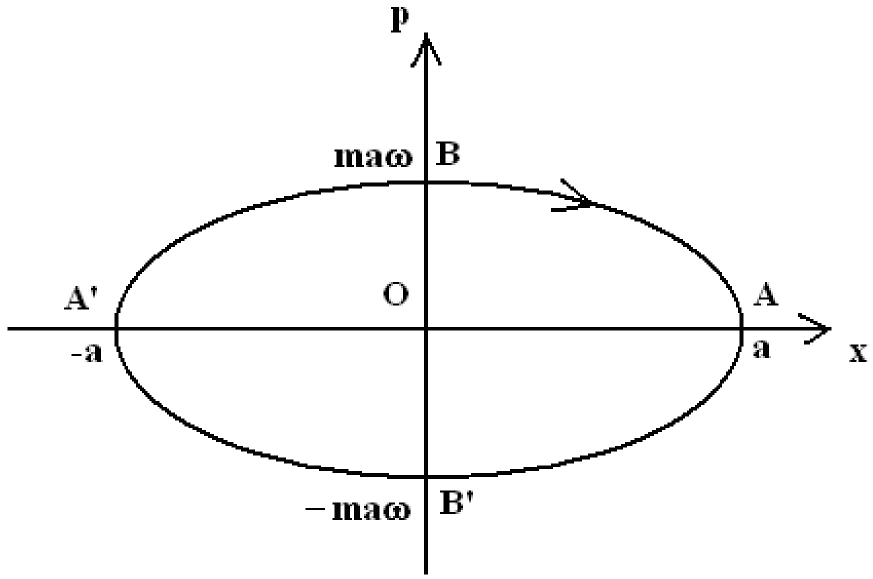
Calculati energiile cinetica si potentiala si aratati ca suma lor este constanta si egala cu $E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{pot}} = \mathrm{const} = E_{\mathrm{kinmax}} = \frac{m\omega_0^2 a^2}{2}$.

Oscilatorul armonic in spatiul fazelor

(reluare din Mecanica analitica 2 pag. 1)

Pentru un oscilator armonic 1D, pozitia este data de $x(t) = a\sin(\omega t + \varphi_0)$, cu *a, ω* si *φ* constante iar impulsul este $p(t) = m\dot{x}(t) = ma\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$. Spatiul Γ are 2 dimensiuni, iar traiectoria in acest spatiu se obtine eliminand timpul. Rezultatul este *o elipsa* reprezentata in cap 2 sau in problema 2.4.1

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{p^2}{(ma\omega_0)^2}=1$$



Aria elipsei este $A=\pi\times(\text{semiaxa mica})\times(\text{semiaxa mare})=\pi ma^2\omega_0 \;=2\pi\,\frac{E}{\omega_0}$

Discutie. **Relatia lui Planck.**