Teoreme de variatie si de conservare

Variatia impulsului

Variatia in timp a impulsului unui sistem de puncte materiale este egal cu rezultanta fortelor exerne aplicate punctelor sistemului.

N=1 punct $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ (Newton II)

N puncte $\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i + \vec{F}_{iext}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ (1)

Demo la curs, cu folosirea legii Newton III

Centrul de masa (CM)

Definitie: Un punct cu masa egala cu masa totala a corpurilor

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_\mathrm{i} \tag{2}$$

vectorul de pozitie

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_\mathrm{i} \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_\mathrm{i}} \tag{3}$$

Sa se calculeze viteza CM si sa se arate ca impulsul total calculat in SR al CM este nul.

Daca rezultanta fortelor externe este nula, se conserva impulsul total.

Exemple la curs.

Variatia momentului cinetic

Definitii (exemple la curs)

N=1 $$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad (4)$$

N puncte $$\vec{L} = \sum \vec{l}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i \qquad (5)$$

Momentul fortei $\vec{F}$ fata de punctul O, daca punctul de aplictie al fortei se afla in pozitia data de $\vec{r}$

$$\vec{M}_{\vec{F}O} = \vec{r} \times \overline{F} \qquad (6)$$

N=1 $$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (7)$$

N puncte $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_{iext} \qquad (8)$$

Daca momentul fortelor externe este nul, momentul cinetic se conserva ca vector.

Aplicatie la camp central: In camp central forta este paralela cu vectorul de pozitie, $\vec{F} = a\vec{r}$, pentru atractie a<0, ca d.e. forta centripeta. Deci $\vec{M}_{\vec{F}O} = \vec{r} \times \overline{F} = 0$. Momentul cinetic se conserva si este mereu perpendicular pe planul miscarii (explicatii la curs, Pamantul si Soarele).

Energia cinetica

Recapitulare din liceu si definitii

Forta este cauza modificarii miscarii, energia masoara variatia acestei modificari.

Lucrul mecanic este cantitatea de energie transmisa de o forta care deplaseaza un corp pe o anumita distanta. Definitie simpla pt un corp si o forta constanta (v. liceu)

1D: $$L = \pm F \cdot x \qquad (9)$$

$L>0$ forta omoparalela cu miscarea, $L<0$, antiparalela

3D: $$L = \vec{F} \cdot \vec{r} = F\, r \cos\alpha \qquad (10)$$

Daca forta variaza, scriem lucrul elementar:

$$\delta L = F\mathrm{d}x \qquad \text{deci} \qquad L = \int_{(1)}^{(2)} F\mathrm{d}x \qquad (11)$$

In cazul 3*D* trebuie sa stim ce inseamna lucrul elementar

$$\delta L = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z \qquad (12)$$

si integrala

$$L = \int_{(1)}^{(2)} \left(F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z \right) \qquad (13)$$

Energia cinetica

$N=1$ $$E_c = \frac{m\vec{v}^2}{2} = \frac{\vec{p}^2}{2m} \qquad (14)$$

N corpuri

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} \qquad (15)$$

Variatia energiei cinetice este egala cu lucrul mecanic al tuturor fortelor, interne si externe care actioneaza asuprapunctelor sistemului.

Demo pt N=1

$$\mathrm{d}E_c = \vec{v} \cdot m\mathrm{d}\vec{v} = \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{p} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{p} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \delta W \qquad (16)$$

$$\Delta E_c = \int_1^2 \delta W = W_{12} \qquad (17)$$

Faceti singuri demo pt *N* corpuri.

Observatie. Daca exista mai multe drumuri de la punctul (1) la punctul (2), lucrul depinde de obicei de drum (chiar in cazul 1*D*, daca punctul merge direct, apoi pleaca din 1, se intoarce si iar porneste spre 2).

Daca lucrul mecanic este nul, energia cinetica se conserva.

Forte conservative. Daca lucrul nu depinde de drum, se spune ca forta este **conservativa**, sau ca **deriva dintr-un potential**. Atunci lucrul elementar δL devine o diferentiala obisnuita d*L*, si se poate defini **energia potentiala** *U* prin

$$\delta L \to dL = -dU \qquad (18)$$

Forta devine

$$F = -\frac{dU}{dx} \qquad (19)$$

Exemple: camp gravitational, camp elastic, dar nu probleme cu frecare.

Camp elastic:

$$U = \frac{kx^2}{2} \qquad\qquad F = -\frac{dU}{dx} = -kx \qquad\qquad (20)$$

iar in 3*D*:

$$U = \frac{k\vec{r}^{\,2}}{2} \qquad\qquad \vec{F} = -k\vec{r} \qquad\qquad (21)$$

Atunci se conserva **energia totala**:

$$\mathrm{d}E_c + \mathrm{d}U = \mathrm{d}(E_c + U) = \mathrm{d}E_{tot} = 0, \quad \text{sau} \quad E_{tot} = const \qquad\qquad (22)$$