Undele electromagnetice

1. Ecuatiile undelor electromagnetice in vid

In vid nu exista sarcini sau curenti, deci $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$ Ec Maxwell devin

$$\nabla \vec{E} = 0 \qquad \nabla \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1}$$

Aplicam $\nabla \times$ ecuatiei (Mx III') si folosim $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ cu $\vec{a} \equiv \vec{b} \equiv \nabla$:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B})$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - (\nabla \cdot \nabla)\vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Dar $\nabla \vec{E} = 0$ si $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Produsul $\varepsilon_0 \mu_0$ este inversul patratului unei viteze, mai precis al vitezei luminii in vid. Se gaseste ecuatia undelor electromagnetice

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{2}$$

In materiale, (2) devine

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c_n^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{2'}$$

cu viteza luminii in mediul considerat

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n} \tag{3}$$

Marimea

$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r} \qquad (4)$$

se numeste *indice de refractie*. Aproximatia este valabila in materiale nemagnetice, unde $\mu_r \approx 1$. De obicei $n>1$, so that $c_n<c$.

2. Caracteristicile generale ale undelor electromagnetice

Toate cele ale undelor elastice. Solutiile Fourier si d'Alembert sunt de acelasi tip, cu singura deosebire ca acum campurile sunt vectoriale. Insa pt fiecare componenta a campului electric sau magnetic, a inductiei electrice sau magnetice, totul ramane valabil. De ex. se poate dezvolta solutia in serie sau integrala Fourier, adica in unde armonice plane (uap):

$$\psi\left(\vec{r},\ t\right) = a \exp[\ i(\omega t - \vec{k}\vec{r})] \qquad (5)$$

sau in functii sin sau cos. Marimile a, ω, $\vec{k}$ sunt constante. Directia lui $\vec{k}$ este directia de propagare a undei. Exista relatia dintre frecventa si vectorul de unda $\vec{k}$

$$\omega = \frac{c}{|\vec{k}|} \quad \text{in vid si} \quad \omega = \frac{c_n}{|\vec{k}|} = \frac{c}{n|\vec{k}|} \quad \text{in materiale} \qquad (6)$$

Pentru undele vectoriale, asa cum sunt cele elmgn, relatia (5) este corecta pentru fiecare componenta. Pentru campul electric total se scrie

$$\vec{E}(\vec{r},\ t) = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})] \qquad (7)$$

3. Transversalitatea u. elmgn

In vid sau intr-un bun izolator in care nu exista sarcini sau curenti ($\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) ecuatiile Maxwell locale se scriu

$$\mathrm{div}\vec{E} = \nabla\vec{E} = 0;\ \mathrm{div}\vec{B} = \nabla\vec{B} = 0;\ \mathrm{curl}\vec{E} = \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};\ curl\vec{B} = \nabla\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Pentru uap operatorii de derivare se inlocuiesc cu inmultiri (scalare sau vectoriale)

$$\frac{\partial}{\partial t} \to i\omega \qquad \nabla\cdot \to -i\vec{k}\,\cdot \qquad \nabla\times \to -i\vec{k}\,\times \tag{8}$$

Din (Mx I' si II') rezulta:

$$\vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \qquad \vec{k}\cdot\vec{B} = 0 \tag{9}$$

Deci $$\vec{E}\perp\vec{k} \text{ si } \vec{B}\perp\vec{k} \tag{10}$$

Undele elmgn sunt transversale.

4. Relatiile dintre $\vec{E}$ si $\vec{B}$

Folosind (Mx III' si IV') precum si (8), rezulta

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{u}_{\vec{k}}\times\vec{E} \qquad \vec{E} = -c\vec{u}_{\vec{k}}\times\vec{B} \tag{11}$$

Pentru campuri se obtine

$$\sqrt{\varepsilon_0}\left|\vec{E}\right| = \sqrt{\mu_0}\left|\vec{H}\right| \tag{12}$$

sau

$$\left|\vec{E}\right| = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left|\vec{H}\right| = \zeta_0\left|\vec{H}\right| \qquad (12')$$

Marimea $\zeta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cong 376\,\Omega$ este *impedanta intrinseca a vidului.* (13)

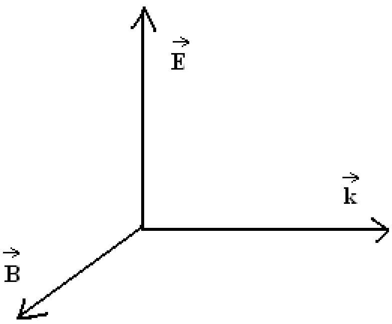

Fig. 1

Intensitatea este marimea masurata de toti detectorii, fie ei electrici, electronici, sau biologici. **Intensitatea este proportionala cu patratul modulului campului electric al undei**: $I \propto \left|\vec{E}\right|^2$. In domeniul vizibil frecventa luminii este de ordinul 10^{14}–10^{15} s^{-1}. Detectorii nu sunt asa de rapizi incat sa masoare instantaneu intensitatea, asa incat trebuie sa consideram ca de fapt masuram o medie a intensitatii pe foarte multe perioade: cca. 10^3 perioade pentru detectori ultrarapizi cu constante de ordinul ps, 10^6 perioade pentru detectori in domniul ns si 10^{13} perioade pentru ochiul uman. In aceste conditii consideram ca intensitatea este data de relatia:

$$\boxed{\langle I \rangle = \frac{1}{2\zeta}\left|\vec{E}\right|^2} \qquad (14)$$

Aici $\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ este impedanta mediului de propagare, iar media in timp este definita in mod obisnuit $\langle I \rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} I(t)dt$, pentru $\tau \to \infty$.

5. Ecuatia lui Helmholtz

Presupunem ca marimea care oscileaza este armonica, fara sa fie o unda plana: $\vec{E}(\vec{r},\, t) = \vec{E}_0(\vec{r})\exp^{i\omega t}$. Atunci timpul se elimina si gasim ecuatia lui Helmholtz:

$$\Delta\vec{E}_0(\vec{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \vec{E}_0(\vec{r}) = \Delta\vec{E}_0(\vec{r}) + \vec{k}^2\vec{E}_0(\vec{r}) = \left(\nabla^2 + \vec{k}^2\right)\vec{E}_0(\vec{r}) = 0 \tag{15}$$

6. Reflectia si refractia

Se demonstreaza ca pe suprafetele fara sarcini sau curenti **se conserva componentele normale ale inductiilor si cele tangentiale ale campurilor**, ca in figura:

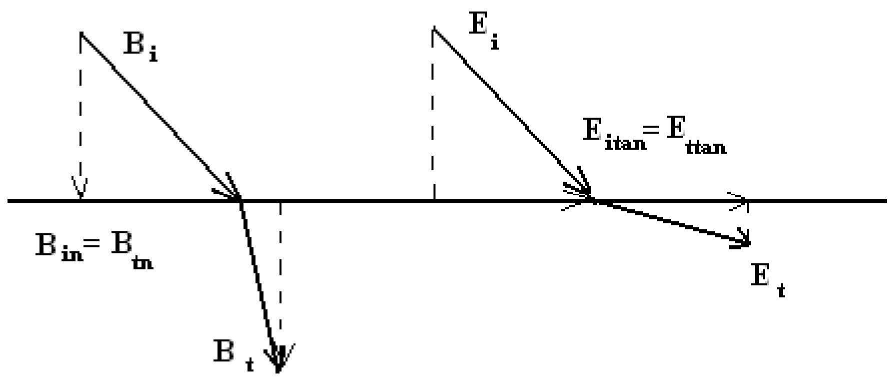

Fig. 2

$$\vec{B}_{1n} = \vec{B}_{2n}; \quad \vec{D}_{1n} = \vec{D}_{2n}; \quad \vec{E}_{1\tan} = \vec{E}_{2\tan}; \quad \vec{H}_{1\tan} = \vec{H}_{2\tan} \tag{16}$$

Legile reflectiei si refractiei. Vezi Fig. 3 mai jos

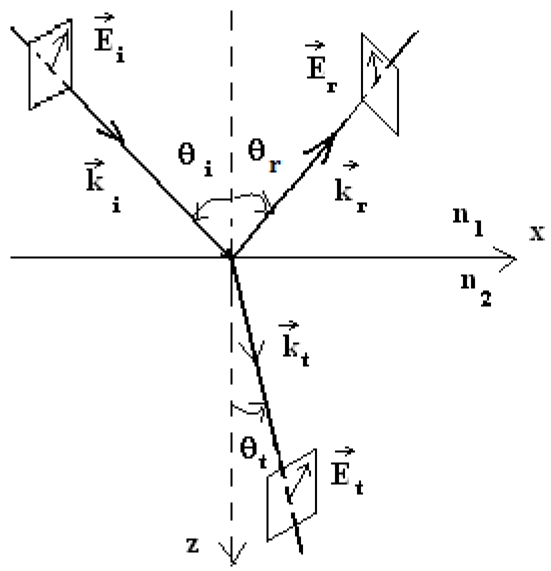

Fig. 3

Undele incidenta, reflectata si transmisa sunt

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} \exp\left[i\left(\omega t - \vec{k}_i \vec{r}\right)\right] \qquad \vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \exp\left[i\left(\omega' t - \vec{k}_r \vec{r}\right)\right] \qquad \vec{E}_t = \vec{E}_{0t} \exp\left[i\left(\omega'' t - \vec{k}_t \vec{r}\right)\right]$$

cu $\quad k_i = \dfrac{\omega}{c_{n1}} = \dfrac{n_1\omega}{c}, \qquad k_r = \dfrac{\omega'}{c_{n1}} = \dfrac{n_1\omega'}{c}, \qquad k_t = \dfrac{\omega''}{c_{n2}} = \dfrac{n_2\omega''}{c}$

Continuitatea pe suprafata *z*=0 duce la

$$\vec{E}_{0i} \exp\left[i\left(\omega t - \vec{k}_i \vec{r}\right)\right] + \vec{E}_{0r} \exp\left[i\left(\omega' t - \vec{k}_r \vec{r}\right)\right] = \vec{E}_{0t} \exp\left[i\left(\omega'' t - \vec{k}_t \vec{r}\right)\right], \qquad z = 0$$

relatie care trebuie sa fie valabila pt orice *x, y,* si *t*, de unde

$$\omega = \omega' = \omega'' \qquad \theta_r = \theta_i \qquad n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t \qquad (17)$$

"Legile reflexiei si refractiei":

a). Undele reflectata si transmisa se afla in planul de incidenta,definit de directia undei incidente si de normala la planul de separare.

b). Frecventa nu se modifica prin reflexie sau transmisie.

c). Unghiul de reflexie este egal cu cel de incidenta.

d). Este valabila legea Snellius-Descartes $n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$.

Reflexia totala vezi cursul

Relatiile lui Fresnel

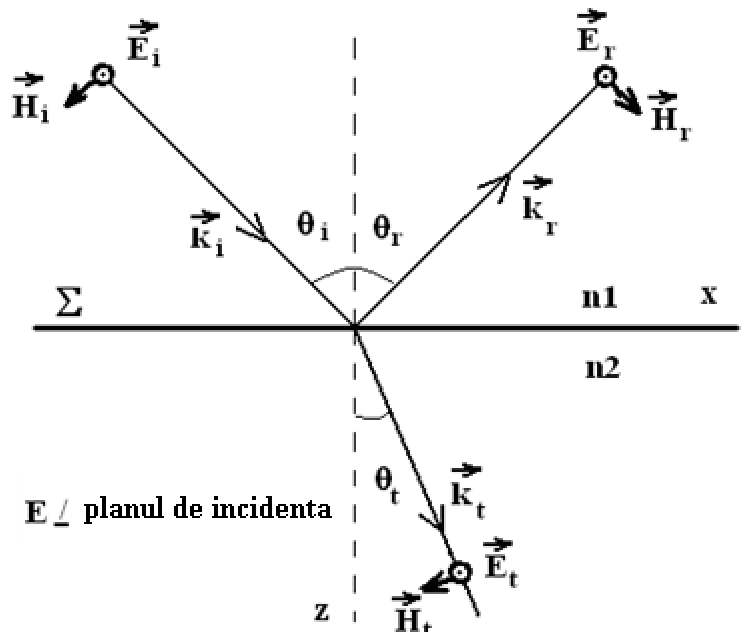

Fig 4

Pentru Campul electric $\perp$ planul de incidenta, campul magnetic este in acest plan.

$$\vec{\mathbf{E}}_i = E_i \vec{\mathbf{u}}_y \qquad \vec{\mathbf{H}}_i = \frac{1}{Z_i} E_i \vec{\mathbf{u}}_i \times \vec{\mathbf{u}}_y$$

cu: $\vec{\mathbf{u}}_i = \sin\theta_i \, \vec{\mathbf{u}}_x + \cos\theta_i \, \vec{\mathbf{u}}_z$

Continuitatea duce la relatiile:

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \qquad \text{si} \qquad (H_{0r} - H_{0i})\cos\theta_i = -H_{0t}\cos\theta_t$$

sau $$\left(E_{0i} - E_{0r}\right)\frac{\cos\theta_i}{Z_1} = E_{0t}\,\frac{\cos\theta_t}{Z_2}$$

Rapoartele $r_{perp} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{perp}$ si $t_{perp} = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{perp}$

Sunt *coeficientii Fresnel pt reflexie si transmisie* in cazul perpendicular.

$$r_{perp} = \frac{Z_2 \cos\theta_i - Z_1 \cos\theta_t}{Z_2 \cos\theta_i + Z_1 \cos\theta_t} = \frac{n_1 \cos\theta_i - n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \quad (18)$$

$$t_{perp} = \frac{2Z_2 \cos\theta_i}{Z_2 \cos\theta_i + Z_1 \cos\theta_t} = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t} = \frac{2\cos\theta_i \sin\theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \quad (19)$$

(in materiale nemagnetice $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{n_2}{n_1}$). In cazul $\vec{\mathbf{E}}_i$ // planul de incidenta gasim:

$$r_{//} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{//} = \frac{Z_1 \cos\theta_i - Z_2 \cos\theta_t}{Z_1 \cos\theta_i + Z_2 \cos\theta_t} = \frac{n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_t}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_t} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \quad (20)$$

$$t_{//} = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{//} = \frac{2Z_2 \cos\theta_i}{Z_1 \cos\theta_i + Z_2 \cos\theta_t} = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_t} = \frac{2\cos\theta_i \sin\theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_t)} \quad (21)$$

Exercitiu. Aratati ca $\frac{n_2}{n_1} t_{//} - r_{//} = 1$, $t_{perp} - r_{perp} = 1$.

Energia transferata prin reflexie si refractie

Factorul de reflexie este

$$R = \frac{\text{fluxul energiei reflectate}}{\text{fluxul energiei incidente}} = r^2 \quad (22)$$

Factorul de transmisie este

$$T = \frac{\text{fluxul energiei transmise}}{\text{fluxul energiei incidente}} = \frac{n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_i} t^2 \quad (23)$$

Discutia relatiilor Fresnel

Din Wikipedia, articolul *The Fresnel equations*