2.4. MECANICA ANALITICA 4. EXEMPLE SI EXERCITII

2.4.1. Actiunea pentru un oscilator armonic liniar

Sa se calculeze actiunea S pentru un oscilator armonic liniar format dintr-un corp de masa m si un arc de constanta k. Coordonata generalizata evidenta $q=x$. Lucram cu functia Lagrange L

$$T=\frac{m\dot{x}^2}{2}, \qquad U=\frac{kx^2}{2}, \qquad L=T-U=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2} \tag{2.4.1}$$

$$\frac{dL}{dx}=-kx, \qquad \frac{dL}{d\dot{x}}=m\dot{x}, \qquad \text{ecuatia de miscare } \frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{x}}=m\ddot{x}=\frac{dL}{dx}=-kx$$

adica

$$m\ddot{x}=-kx, \qquad \text{sau } m\ddot{x}+kx=0 \tag{2.4.2}$$

Deoarece L, ca si H, nu depind explicit de timp, $H=T+U=E$ se conserva, ceea ce se vede prin calcul direct: $\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}\right)=m\ddot{x}+kx=0$, deci $E=\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=$ const. Hamiltonianul este egal cu E, dar trebuie exprimat in coordonate (p, x):

$$H(p,q)=\frac{p^2}{2m}+\frac{kx^2}{2}=E \tag{2.4.3}$$

Din ultima egalitate gasim ecuatia elipsei sub forma (vezi si §2.2.1 figura 1):

$$\frac{p^2}{2mE}+\frac{x^2}{2E/k}=1$$

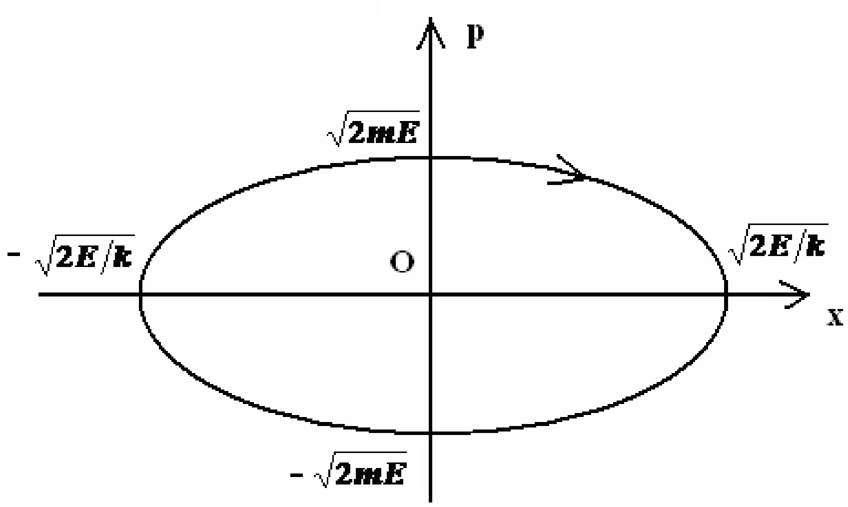


Fig. 1 Spatiul fazelor unui oscilator armonic liniar

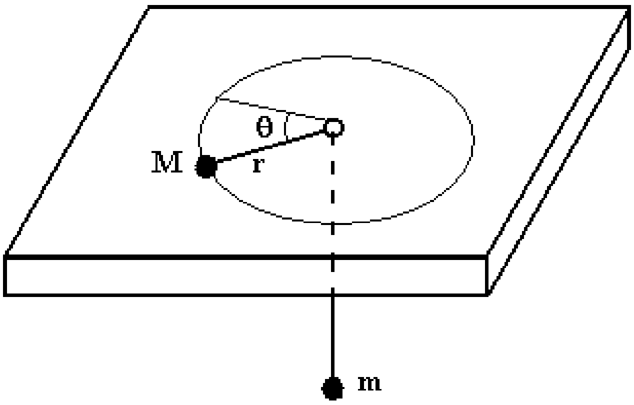
Aria unei elipse este data de expresia generala

$$A = \pi \times (\text{semiaxa mica}) \times (\text{semiaxa mare}) = \sqrt{2\,\mathrm{mE}} \times \sqrt{\frac{2\,\mathrm{E}}{\mathrm{k}}} = 2\pi E\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\frac{E}{\omega}.$$

Discutie. **Relatia lui Planck.**

2.4.2. Sistem cu moment cinetic constant

Un corp de masa M se misca fara frecare pe o masa orizontala, tras prin intermediul unui fir ideal de un corp de masa m care se misca vertical.



a). Gasiti functia Lagrange si ecuatiile de miscare ale sistemului

b). Aratati ca la modificarea razei de rotatie miscarea este stabila.

a). Alegem coordonatele generalizate $q_1=r$ – lungimea firului de pe masa si cu $q_2=\theta$ – unghiul de rotatie. $L = \frac{M}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{m}{2}\dot{r}^2 - mgr$ (explicati energiile pentru corpul de masa m).

Ecuatiile de miscare sunt:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r} \qquad (M+m)\ddot{r} = Mr\dot{\theta}^2 - mg$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \qquad \frac{d}{dt}\left(Mr^2\dot{\theta}\right) = 0 \;\Rightarrow\; Mr^2\dot{\theta}=\text{const}=L_0 \text{ conservarea momentului cinetic}$$

Rezulta $\dot{\theta} = L_0 / Mr^2$, care introdus in L duce la $L = \frac{M+m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2Mr^2} - mgr$. Este ca o miscare cu o singura variabila radiala, care se face intr-un potential efectiv

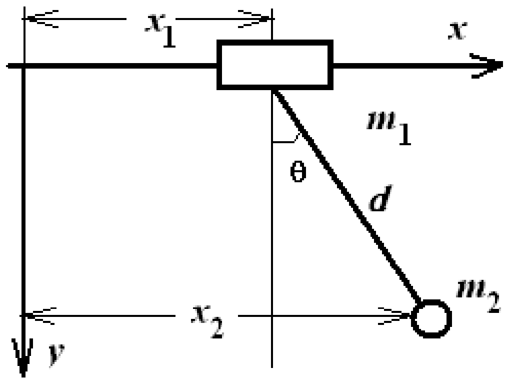
$$U_{ef}(r) = \frac{L_0^2}{2Mr^2} - mgr .$$

b). Echilibrul apare daca se anuleaza derivata lui U_{ef}: $\left.\frac{dU_{ef}}{dr}\right|_{r=r_0} = 0$, adica pentru

$r_0 = \left(\frac{L_0^2}{gMm}\right)^{1/3}$. Derivata a doua $\frac{d^2U_{ef}}{dr^2} > 0$, deci orbita este stabila la micile perturbatii ale razei r.

2.4.3. Pendul eliptic

Un manson de masa m_1 se misca liber pe o tija orizontala. De el este legata printr-un fir inextensibil de masa neglijabila si lungime d o bila de masa m_2. Pendulul astfel construit este lasat liber de la unghiul θ_0. Gasiti traiectoria bilei si perioada pendulului.



a). *Alegem coordonatelor generalizate*: f=3·2-4 =2 (enumerati cele 4 constrangeri). Alegem q_1=x_1 si q_2=θ.

b). *Scriem in coordonate carteziene energiile cinetica si potentiala ale celor doua corpuri*: $T = T_1 + T_2 = \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right)}{2}$, U_1=0, $U_2 = -m_2 g y_2$.

c). *Trecem in coordonate generalizate si scriem functia Lagrange*

$x_2 = x_1 + d\sin\theta$, $\qquad y_2 = d\cos\theta$

$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + d\dot{\theta}\cos\theta \qquad \dot{y}_2 = -d\dot{\theta}\sin\theta$

$$\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = \dot{x}_1^2 + d^2\dot{\theta}^2 + 2d\dot{x}_1\dot{\theta}\cos\theta \qquad U = -m_2 g d\cos\theta$$

$$L = T - U = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}d^2\dot{\theta}^2 + m_2 d\dot{x}_1\dot{\theta}\cos\theta + m_2 g d\cos\theta$$

Se observa ca L nu depinde de x_1; aceasta coordonata se numeste **ciclica** si impulsul asociat se conserva (**de ce ?**)

Ecuatia Lagrange corespunzatoare lui x_1 se reduce la $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 0$, sau $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}$=$A$=const.

In detaliu $(m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 d\dot{\theta}\cos\theta = A$, sau

$(m_1 + m_2)x_1 + m_2 d\sin\theta = At + B$. (*)

Pentru t=0 $\dot{x}_1(0) = 0$ *si* $\dot{\theta}(0) = 0$, deci A=0. $B = (m_1 + m_2)x_1(0) + m_2 d\sin\theta_0$. Alegem pozitia axei verticale Oy ai B=0 si din (*) ramanem cu solutia

$$x_1 = -\frac{m_2 d}{m_1 + m_2}\sin\theta$$

Pentru coordonatele bilei, gasim

$$x_2 = x_1 + d\sin\theta = -\frac{m_2 d}{m_1 + m_2}\sin\theta + d\sin\theta = \frac{m_1}{m_1 + m_2}d\sin\theta, \qquad y_2 = d\cos\theta$$

Eliminam θ si gasim elipsa

$$\frac{x_2^2}{\left(\frac{m_1 d}{m_1 + m_2}\right)^2} + \frac{y_2^2}{d^2} = 1$$

A doua ecuatie Lagrange se scrie folosind derivatele $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m_2 d(\dot{x}_1\dot{\theta} + g)\sin\theta$ si

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_2 d^2\dot{\theta} + m_2 d\dot{x}_1\cos\theta$. Pentru oscilatii mici aproximam $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$.

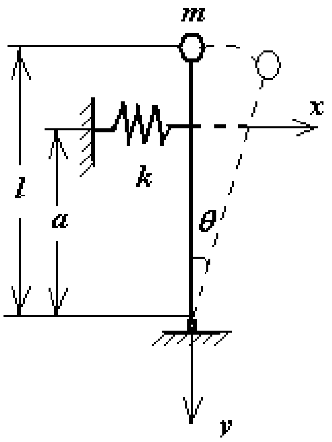
Folosind $(m_1+m_2)\dot{x}_1 + m_2 d\dot{\theta}\cos\theta = 0$, gasim ecuatia

$\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} d^2\ddot{\theta} - m_2 d\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\theta}^2 - g\right) = 0$, sau, neglijand termenii patratici

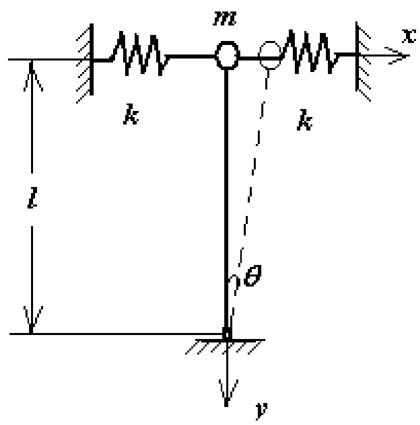
$\ddot{\theta} + \left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{d}\theta = 0$, adica ecuatia unei miscari armonice cu pulsatia $\omega = \sqrt{\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\frac{g}{d}}$

2.4.4. Pendul inversat

Sa se calculeze frecventele micilor oscilatii ale celor doua sisteme din figura. Se cunosc *l*, *a*, *m*, *k*, *g*. Neglijam masa barei de lungime *l* si a resorturilor.



a)



b)

a). Coordonate generalizate: f=3·2-4=2, presupunand ca resortul se misca numai orizontal; alegem q_1=x pentru capatul resortului, si unghiul θ pentru.. Exista doua tipuri de energie potentiala: gravitationala, prin coborarea corpului de masa m si elastica, prin alungirea resortului $U = -mgy + k\frac{x^2}{2}$. Trecem in coordonate generalizate:

$x = a\sin\theta,\ \ y = l(1-\cos\theta)\ \ T = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2$

$L = T - U = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta) - \frac{ka^2 \sin^2\theta}{2}.$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}\left(ml^2 \dot{\theta}\right) = ml^2 \ddot{\theta} \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} = mgl\sin\theta - ka^2 \sin\theta\cos\theta$$

Ecuatia de miscare este $ml^2\ddot{\theta} - \sin\theta\left(mgl - ka^2\cos\theta\right)$. Pentru mici oscilatii $\cos\theta \approx 1,\ \sin\theta \approx \theta$.

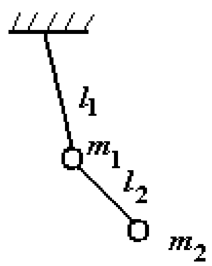
$$\ddot{\theta} + \left(\frac{ka^2}{ml^2} - \frac{g}{l}\right)\theta = 0$$

Pentru existenta oscilatiilor paranteza trebuie sa fie pozitiva, $\frac{ka^2}{l} > mg$. Pulsatia de oscilatie este $\omega_1 = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{ka^2}{m} - gl}$.

b). Se modifica numai energia potentiala. Ecuatia Lagrange devine $ml\ddot{\theta} - \sin\theta(mg - 2kl\cos\theta)$, care pentru θ mic devine $\ddot{\theta} + \left(\frac{2k}{m} - \frac{g}{l}\right)\theta = 0$. Apar oscilatii numai daca $mg < 2kl$. Pulsatia este $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m} - \frac{g}{l}}$.

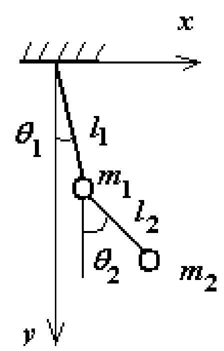
2.4.5. Pendul dublu

a). Sa se gaseasca ecuatiile Lagrange pentru pendulul dublu plan din figura.



b). Sa se gaseasca pulsatiile oscilatilor sitemului in cazul particular $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$ =0,5 m. Se cunoaste g=10 m/s^2.

a). F=3n-l=6-4=2. Alegem coordonatele generalizate unghiulare θ_1, θ_2 si axele carteziene din figura alaturata. Alegem U=0 pe axa Ox.



$T = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right)$ energia cinetica

$U = -m_1 g y_1 - m_2 g\left(y_1 + y_2\right)$ energia potentiala

Trecem la coordonate generalizate si scriem functia Lagrange:

$$L = T - U = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g l_2 \cos\theta_2$$

Pentru unghiuri mici, $\cos(\theta_1 - \theta_2) \approx 1$. Dupa derivare aproximam si $\sin\theta_i \approx \theta_i$,. i=1, 2

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \left(m_1 + m_2\right) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\left(m_1 + m_2\right) g l_1 \sin\theta_1 \approx -\left(m_1 + m_2\right) g l_1 \theta_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 g l_2 \sin\theta_2 \approx -m_2 g l_2 \theta_2$$

Ecuatiile Lagrange sunt (in dreapta sunt ecuatiile pentru $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$):

$$\begin{cases} \left(m_1 + m_2\right) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 = -\left(m_1 + m_2\right) g l_1 \theta_1 \\ m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 = -m_2 g l_2 \theta_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 + 2g\theta_1 = 0 \\ l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 + g\theta_2 = 0 \end{cases}$$

Cautam solutii de forma $\theta_1 = a\sin\omega t$, $\theta_2 = b\sin\omega t$. Sistemul fiind omogen, pentru solutii nebanale determinantul trebuie sa fie nul. Rezulta doua frecvente de oscilatie $\omega_1^2 = \frac{g}{l}\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$, $\omega_2^2 = \frac{g}{l}\sqrt{2}\left(\sqrt{2} + 1\right)$. Numeric: $\omega_1 \approx 3{,}4$ rad/s, $\omega_2 \approx 8{,}3$ rad/s.