## 2.3. MECANICA ANALITICA 3. LEGI DE CONSERVARE

### 2.3.1. Integrale prime ale miscarii

In cursul miscarii punctelor unui sistem, coordonatele $q_\alpha$ si impulsurile $p_\alpha$ variaza in timp (ca si vitezele $\dot{q}_\alpha$). Exista insa anumite **functii de** $q_\alpha$ si $p_\alpha$ **care raman constante si care se numesc integrale prime ale miscarii**. Numarul lor este egal cu 2*f*-1. Printre acestea exista unele foarte importante, care caracterizeaza fundamental sistemul studiat. Acestea sunt **aditive** si sunt legate de **simetrii esentiale ale spatiului si timpului**. **Acestea sunt cazuri particulare ale teoremei lui Noether care afirma ca orice simetrie duce la o lege de conservare.**

### 2.3.2. Conservarea energiei

Presupunem ca **uniformitatea timpului**, asa incat Hamiltonianul nu depinde explicit de timp, ${\partial H}/{\partial t} = 0$. Atunci conform (2.2.5) si (2.2.6)

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{p}_\alpha}\frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}t} + \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{p}_\alpha}\frac{\mathrm{d}q_\alpha}{\mathrm{d}t} = \sum_{\alpha=1}^{f} (\dot{\mathrm{q}}_\alpha \dot{p}_\alpha - \dot{p}_\alpha \dot{\mathrm{q}}_\alpha) = 0$$

Rezulta ca **Hamiltonianul este constant de-a lungul traiectoriei in spatiul Γ**.

Sa aratam ca in acest caz **Hamiltonianul este energia totala a sistemului.** Pornim de la definitia Hamiltonianului (2.2.1) si de la expresia Lagrangeianului (2.1.12'):

$$H(p,q) = \sum_{\alpha=1}^{f} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L(q,\dot{q}) = \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - L(q,\dot{q}) = \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - L(q,\dot{q}) \quad (2.3.1)$$

Ultima egalitate tine cont ca *U* nu depinde de vitezele generalizate. Folosim acum teorema a lui Euler despre functiile omogene: Fie *f*(*x, y, z,*) o functie omogena de grad *k*, adica $f(ax, ay, az) = a^k f(x, y, z)$. Derivam egalitatea in functie de $a$ si gasim $x\frac{\partial f}{\partial(ax)} + y\frac{\partial f}{\partial(ay)} + z\frac{\partial f}{\partial(az)} = ka^{k-1} f(x, y, z)$. Punand $a$=1 gasim rezultatul lui Euler: $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = kf(x, y, z)$. Aplicam teorema ultimei sume din (2.3.1) si tinem cont ca energia cinetica este functie patratica de vitezele generalizate: $\sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha = 2T$.

Deci (2.3.1) se scrie $H(p, q) = 2T - (T - U) = T + U =$ Energia totala a sistemului.

Deci **daca Hamiltonianul nu depinde explicit de timp el este egal cu energia totala a sistemului si este o constanta a miscarii.**

*Observatie*. Demonstratia s-ar fi putut face folosind o functie Lagrange independenta de timp. Vom folosi Lagrangeiana pentru restul paragrafelor.

### 2.3.3. Conservarea impulsului

**Omogenitatea spatiului duce la conservarea impulsului.** Daca spatiul este omogen, proprietatile sistemului nu depind de o translatie a tuturor punctelor $\vec{r}_\alpha \rightarrow \vec{r}_\alpha + \vec{\varepsilon}$ si functia Lagrange nu depinde de translatie. Variatia lui $L$ este

$$\delta L = \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_\alpha} \delta \vec{r}_\alpha = \vec{\varepsilon} \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_\alpha} = 0$$

Anularea variatiei este consecinta invariantei Lagrangeianului la translatie. deoarece $\vec{\varepsilon}$ este oarecare, rezulta anularea ultimei sume:

$$\sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_\alpha} = 0 \qquad (2.3.2)$$

Introducem **impulsul total al sistemului**

$$\vec{P} = \sum_{\alpha=1}^{f} \vec{p}_\alpha \qquad (2.3.3)$$

Suma din (2.3.2) se scrie succesiv

$$\sum_{\alpha=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{f}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}=\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}=\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{f}\vec{p}_\alpha=\frac{d\vec{P}}{dt}=0 \qquad (2.3.4)$$

*Observatia 1.* **Daca sistemul este invariant la orice translatie (spatiu omogen) atunci impulsul total al sistemului se conserva.** Daca sistemul este invariant numai la translatiile de-a lungul unei directii, se conserva impulsul total numai de-a lungul acelei directii (vezi exemplul 2.4.3 MA4, pag.3).

*Observatia 2.* Daca sistemul este format din doua puncte izolate fata de exterior, (2.3.2) se scrie $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_1}+\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_2}=-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_1}-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_2}=0$, sau $\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=0$, care este **a 3-a lege a lui Newton**.

### 2.3.4. Conservarea momentului cinetic

**Momentul cinetic** al unui punct material de masa $m$ si impuls $\vec{p}$ fata de un punct $O$ este produsul vectorial

$$\boxed{\vec{l}=\vec{r}\times\vec{p}} \qquad (2.3.5)$$

Momentul cinetic al intregului sistem este suma momentelor cinetice ale particulelor:

$$\boxed{\vec{L}=\sum_{\alpha=1}^{f}\vec{l}_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{f}\vec{r}_\alpha\times\vec{p}_\alpha} \qquad (2.3.5')$$

Sa presupunem ca spatiul este izotrop, adica functia Lagrange (si Hamiltonianul de altfel) nu se modifica la o rotatie cu un unghi oarecare. Rotim sistemul cu un unghi mic $\delta\vec{\varphi}$ care este definit in figura 2. Vectorul este asezat de-a lungul axei de rotatie si are modulul egal cu unghiul de rotatie $\delta\varphi$ in jurul axei $Oz$. Din figura se vede ca $\delta\vec{r}=\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}$

Rotatia cu $\delta\vec{\varphi}$ modifica si vitezele tuturor punctelor cu $\delta\vec{v}=\delta\vec{\varphi}\times\vec{v}$. Introducem aceste variatii in conditia de invarianta a functiei Lagrange:

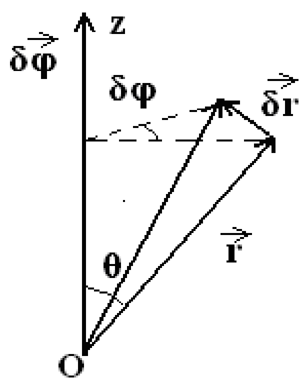

Fig.2 Unghiul de rotatie

$$\delta L = \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_{\alpha}} \delta \vec{r}_{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_{\alpha}} \delta \vec{v}_{\alpha} \right) = 0$$

Inlocuim derivatele functiei Lagrange si variatiile:

$$\sum_{\alpha} \left( \dot{\vec{p}}_{\alpha} \delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_{\alpha} + \vec{p}_{\alpha} \delta \vec{\varphi} \times \vec{v}_{\alpha} \right) = 0$$

Permutam ciclic factorii produselor vectoriale si apoi scoatem de sub suma operatorul de derivare:

$$\delta \vec{\varphi} \sum_{\alpha} \left( \vec{r}_{\alpha} \times \dot{\vec{p}}_{\alpha} + \vec{v}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha} \right) = \delta \vec{\varphi} \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} \left( \vec{r}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha} \right) = 0$$

Deoarece $\delta \vec{\varphi}$ este arbitrar, derivata sumei se anuleaza:

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha} \left( \vec{r}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha} \right) = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \qquad (2.3.6)$$

**Daca spatiul este izotrop, se conserva momentul cinetic total al sistemului**.

**DISCUTIE camp central**