2.1. MECANICA ANALITICA 1. ECUATIILE LAGRANGE

2.1.1. Introducere

Problema generala a mecanicii pentru un sistem de n puncte materiale (pm):

Pornind de la starea initiala $\vec{r}_i(0)=\vec{r}_{i0}$ si $\vec{v}_i(0)=\vec{v}_{i0}$ si folosind ecuatiile date de legea a 2-a a lui Newton $m_i\ddot{\vec{r}}_i=\vec{F}_i$ (i=1, 2, ...n) trebuie sa calculam starea sistemului la un moment ulterior t, $\vec{r}_i(t)$ si $\vec{v}_i(t)$.

Daca punctele se misca liber, rezolvam **3*n* ecuatii diferentiale** de ordinul 2.

Daca in plus exista l **constrangeri** care leaga pozitiile si vitezele punctelor si eventual timpul, $f_k(\vec{r}_i,\vec{v}_i,t)=C_k$, k=1, 2, ..., l vom avea *de rezolvat* **3*n*+*l* ecuatii cu 3*n* necunoscute dependente** unele de altele.

Exemplul 1. 2 pm se misca fara frecare pe o sfera imobila de raza R, distanta dintre ele ramanand constanta si egala cu d sub actiunea unor forte exterioare date. Scrieti ecuatiile de miscare.

Rezolvare 1. Ecuatiile Newton $m_1\ddot{\vec{r}}_1=\vec{F}_1$, $m_2\ddot{\vec{r}}_2=\vec{F}_2$ 6 ecuatii

Legaturile $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=d^2$, $x_1^2+y_1^2+z_1^2=R^2$,

$x_2^2+y_2^2+z_2^2=R^2$ 3 ecuatii

In total 9 ecuatii cu 6 necunoscute $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ dependente prin cele 3 legaturi. Deci numai 3 variabile sunt independente. Numarul

$$\boxed{f=3n-l} \tag{2.1.1}$$

se numeste **numarul de grade de libertate** al sistemului.

N-ar fi mai bine sa rezolvam numai *f*=3*n*-*l* ecuatii cu *f*=3*n*-*l* necunoscute independente ? In cazul exemplului de mai sus am avea 3 ecuatii cu 3 necunoscute independente. **Aceasta este sarcina *Mecanicii Analitice*.**

Cel mai important este sa **gasim variabilele independente**, numite **coordonate generalizate** si sa scriem ecuatiile care inlocuiesc ecuatiile lui Newton, numite **ecuatiile Lagrange.**

2.1.2. Coordonate generalizate

Sa notam coordonatele generalizate cu $q_\alpha(t),\ \ \alpha = 1, 2, ..., f$ **.** Sunt alese a.i. sa tina cont de legaturi si ***sa fie independente.*** In exemplul 1 pag. 1 cele 3 coordonate generalizate sunt unghiuri: doua unghiuri pentru un punct (longitudinea si colatitudinea) si un unghi pentru al doilea punct.

Exemplul 2. Un pendul matematic plan. f=1, deoarece n=1 si l=2. Ce alegem pentru q ?

Exemplul 3. In sistemul din figura cele doua corpuri se misca fara frecare, unul de-a lungul axei Ox, celalalt in planul xOy.

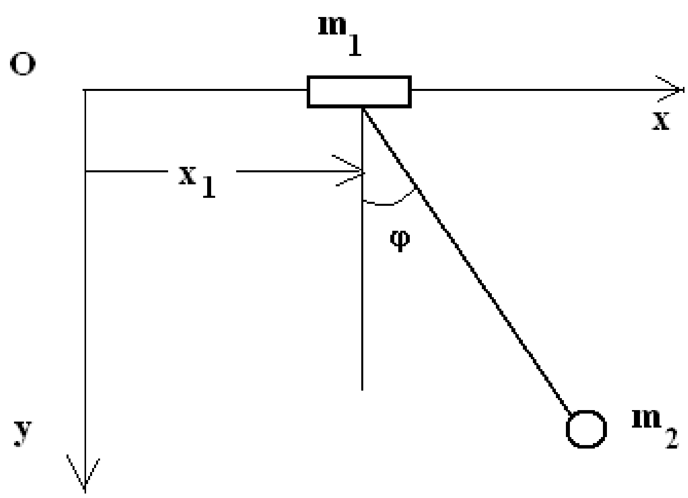

Fig. 1

n=2; f=4 (care sunt legaturile ?). Deci f=$3 \times 2 - 4 = 2$. Alegeti dintre perechile demai jos o pereche adecvata de variabile independente:

a) $q_1 = x_1,\quad q_2 = x_2$ b) $q_1 = x_1,\quad q_2 = y_1$ c) $q_1 = x_2,\quad q_2 = \varphi$
d) $q_1 = x_1,\quad q_2 = \pi/2 - \varphi$ e) $q_1 = x_1,\quad q_2 = x_2 - x_1$ f) $q_2 = x_1,\quad q_1 = \varphi$

Odata alese coordonatele generalizate trebuie sa gasim ecuatiile pe care le satisfac ele.

Acestea nu sunt ecuatiile lui Newton.

Putem construi un spatiu cu dimensiunea f, numit spatiu de configuratie. Ce reprezinta un punct in acest spatiu ? Pentru miscarea unui singur punct, este vorba despre *pozitia* acestuia. In cazul general......

2.1.3. Principiul minimei actiuni (Hamilton). Ecuatiile Lagrange

[Vezi L. D. Landau, E. M. Lifsit, Mecanica, Ed. Tehnica, Bucuresti, 1966]

Orice sistem mecanic este caracterizat de o functie numita **Lagrangeian *L*** care depinde de coordonatele generalizate q_α, de vitezele generalizate $\dot{q}_\alpha$ si de timp

$$L\left(q_1, q_2, ..., q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_f, t\right) \equiv L\left(q, \dot{q}, t\right) \tag{2.1.2}$$

Presupunem ca punctele sistemului se misca din pozitiile ocupate la momentul t_1 $q^{(1)} = \{q_1(t_1), q_2(t_1), ..., q_f(t_1)\}$ in pozitiile $q^{(2)} = \{q_1(t_2), q_2(t_2), ..., q_f(t_2)\}$ pe care le ocupa la momentul t_2. Miscarea sistemului se face ai integrala numita **actiune**

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) \mathrm{d}t} \tag{2.1.3}$$

sa aiba valoarea minima. **Acesta este principiul minimei actiuni, sau principiul lui Hamilton.**

DISCUTIE local-global, functionala *S*, dependenta de traiectorie.

Aceasta inseamna ca din toate miscarile posibile (adica acelea compatibile cu legaturile si caracterizate de functii q continue si derivabile) sistemul "alege" miscarea care minimizeaza functionala *S* din ec. (3).

Sa cautam ecuatiile satisfacute de functia L pentru a se obtine minimizarea integralei (2.1.3). Pentru simplitate, presupunem ca sistemul are un singur grad de libertate, asadar exista o singura coordonata generalizata $q(t)$ care minimizeaza actiunea. Orice alta miscare compatibila cu legaturile descrisa de o functie $q(t) + \delta q(t)$ duce la o valoare mai mare a actiunii *S*. O astfel de miscare, numita **virtuala** si. variatia δq .corespunzatoare se observa in Fig. 2.

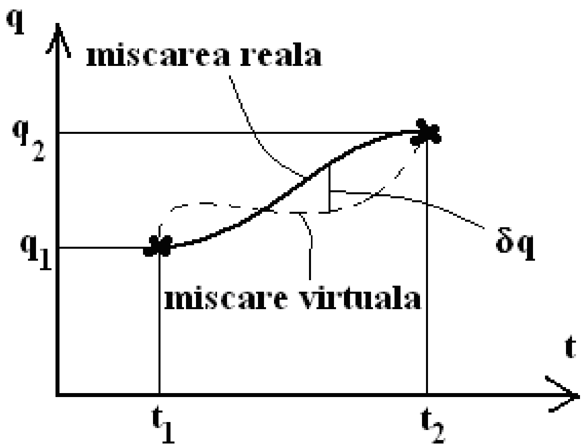

Fig. 2

Variatia $\delta q(t)$ este mica, iar la capete se anuleaza

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \tag{2.1.4}$$

Principiul lui Hamilton se scrie:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} [L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t)] dt = 0$$

Dezvoltam in serie si retinem termenii de ordinul intai

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0$$

Conform Fig. 2 variatia δ se efectueaza pentru un timp fixat si comuta cu diferentiala d, care se calculeaza pe o singura curba. Deci $\delta \dot{q} = \delta \frac{dt}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q$.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q \right) dt = 0$$

Integram prin parti al doilea termen din integrala si gasim

$$\delta S = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0$$

Primul termen este nul, iar al doilea trebuie sa se anuleze pentru orice variatie δq, asadar paranteza trebuie sa fie nula. Obtinem ecuatia

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0} \qquad (2.1.5)$$

Daca sunt mai multe grade de libertate, coordonatele generalizate sunt independente ca si variatiile lor. Se obtin *f* ecuatii numite **ecuatiile Lagrange (sau Euler-Lagrange)**:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0}, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, f \qquad (2.1.5')$$

Acestea sunt ecuatii de miscare care leaga coordonatele, vitezele si acceleratiile si inlocuiesc ecuatiile lui Newton. Sunt in numar de f=3n-l si **toate necunoscutele sunt independente**.

Observatia 1. In majoritatea problemelor studiate la curs ***L*** **nu depinde explicit de timp**.

Observatia 2. Fie un sistem mecanic compus din doua parti inchise *A* si *B*, fiecare caracterizat de un lagrangeian, fie ele L_A si L_B. Daca indepartam cele doua parti pana nu mai interactioneaza, functia Lagrange totala este $L \to L_A + L_B$. Miscarea sistemului *A* nu este influentata de sistemul *B* si reciproc. **DISCUTIE sisteme corelate cuantic**.

Observatia 3. Fie doua functii Lagrange care nu difera decat printr-o derivata totala a unei functii de coordonate si de timp:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t) \qquad (2.1.6)$$

Calculul actiunilor duce la:

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t)dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt = S + f(q_2, t_2) - f(q_1, t_1)$$

Termenul suplimentar dispare la variatia actiunii si deci conditiile $\delta S' = 0$ si $\delta S = 0$ coincid si duc la aceleasi ecuatii de miscare. *Functia Lagrange este determinata numai pana la o derivata totala a unei functii de coordonate si de timp*.

1.2.4. Principiul relativitatii al lui Galilei

Sisteme de referinta DISCUTIE.

Definitii. **Corp liber**: nesupus nici unei influente exterioare.

Sistem de referinta inertial SRI: un SR in care spatiul este omogen si izotrop, iar timpul uniform. Intr-un astfel de SRI un corp liber initial in repaus ramane in repaus.

Lagrangeianul unui corp liber intr-un SRI. Functia Lagrange a unui punct material liber care se misca intr-un SRI nu poate depinde de pozitia $\vec{r}$ (spatiu omogen si izotrop) sau de timpul t (timpul uniform). Deci L depinde doar de viteza. Dar nu de vectorul viteza (spatiu izotrop) ci numai de modulul sau, deci de patratul $\vec{v}^2 = v^2$,

$$L = L(v^2) \tag{2.1.7}$$

Deoarece L nu depinde de pozitie, $\partial L / \partial \vec{r} = 0$ si ecuatiile Lagrange (2.1.5') devin $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 0$, adica $\partial L / \partial \vec{v} = \text{const}$ (constanta vectoriala). Dar L si deci derivatele sale depind doar de viteza, deci **viteza corpului este constanta**

$$\vec{v} = \text{const} \tag{2.1.8}$$

<u>Legea I Newton (principiul inertiei)</u>: intr-un SRI un corp liber se misca cu viteza constanta (ca vector)

Aceasta miscare este urmata de corp si fata de alte SR care se misca fata de primul SRI cu viteze constante in diverse directii. **Putem enunta principiul relativitatii al lui Galilei.**

Toate SR care se misca rectiliniu si uniform fata de un SRI sunt SRI iar legile mecanicii sunt aceleasi in toate aceste sisteme.

La trecerea de la un SRI *S* la altul *S'* care se misca rectiliniu si uniform cu viteza $\vec{V}$ vectorul nde pozitie se transforma cu relatia

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{V}t \qquad (2.1.9')$$

iar timpul ramane acelasi

$$t' = t \qquad (2.1.9'')$$

sau matricial, daca $\vec{V} = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y + V_z \vec{u}_z$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -V_x \\ 0 & 1 & 0 & -V_y \\ 0 & 0 & 1 & -V_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \qquad (2.1.10)$$

1.2.5. Functia Lagrange a unui punct material liber

Fata e un SRI functia Lagrange a unui punct material liber depinde numai de patratul vitezei. Se poate arata ca functia Lagrange este proportionala cu patratul vitezei, adica $L = av^2$, unde *a* este o constanta. Notand cu *m*/2 constanta *a*, se gaseste

$$L_{liber} = \frac{mv^2}{2} \qquad (2.1.11)$$

Constanta *m* este **masa particulei.** Asadar in acest caz functia Lagrange coincide cu energia cinetica a corpului.

Exemple de functii Lagrange pentru o particula:

in coordonate carteziene $$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) \qquad (2.1.12')$$

in coordonate sferice $$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2\right) \qquad (2.1.12'')$$

in coordonate cilidrice $$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) \qquad (2.1.12''')$$

1.2.6. Functia Lagrange a unui sistem de particule

Pentru un **sistem inchis** (adica puncte izolate de exterior) de n puncte care nu interactioneaza intre ele generalizam relatia (2.1.11)

$$L_{liber} = \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}, \qquad (2.1.11'')$$

sau, in coordonate carteziene,

$$L_{liber} = T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \vec{v}_i^{\,2}}{2} \qquad (2.1.11''')$$

Punctele libere nu au decat **energie cinetica**, care in mecanica analitica se noteaza cu T.

Sa presupunem acum ca punctele interactioneaza intre ele, ramanand totusi izolate de exterior. Interactiunea se poate descrie adaugand o functie de coordonate $-U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n)$, numita **energie potentiala**

$$\boxed{L = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \vec{v}_i^{\,2}}{2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n)} \qquad (2.1.12)$$

Observaiia 1. U depinde doar de coordonate si nu de viteze sau de timp. De ce ?

Observatia 2. Timpul este nu numai uniform, dar si izotrop, caci schimbarea $t \to -t$ nu modifica ecuatiile, asa ca **in mecanica miscarile sunt reversibile**.

Observatia 3. In coordonate generalizate functia Lagrange se scrie

$$\boxed{L = \sum_{\alpha,\beta=1}^{f} \mu_{\alpha\beta}(q_1, ..., q_f)\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta - U(q_1, ..., q_f)} \qquad (2.1.12')$$

Coeficientii $\mu_{\alpha\beta}(q_1,...,q_f)$ care depind de coordonatele gemeralizate nu mai sunt masele particulelor, dar energia cinetica $T = \sum_{\alpha,\beta=1}^{f} \mu_{\alpha\beta}(q_1,...,q_f)\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$ este tot o functie patratica de viteze (generalizate).

Observatia 4. Functia Lagrange $L = T - U$ este **diferenta** dintre energia cinetica si cea potentiala a sistemului. Functia Lagrange se masoara in Joule. Actiunea, cf. relatiei de definitie (2.1.3) se masoara in $\mathrm{J \cdot s}$

1.2.7. Ecuatiile lui Newton

Ecuatia Lagrange (2.1.5') in coordonate carteziene se scrie

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = 0, \qquad i = 1,2,...,n \qquad (2.1.13')$$

si folosind expresia (2.1.12) gasim **ecuatiile lui Newton** (pentru masa constanta)

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \qquad \text{sau} \qquad \boxed{m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}} \qquad (2.1.13'')$$

Vectorul

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \equiv -\nabla U \qquad (2.1.14)$$

este **forta** care actioneaza asupra particulei numarul *i*. Putem rescrie (2.1.13") sub forma obisnuita $m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i$. Tinand cont de formularea initiala a lui Newton (1.2.2) $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$ putem sa identificam impulsul cu derivata $\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i}$ si sa scriem

$$\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \qquad (2.1.15)$$

Exemplu: oscilator armonic 1D.

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2},\ U = \frac{kx^2}{2},$$

$$L = T - U = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$$

Calculam derivatele partiale $\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx = F_x$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_x$

Ecuatia Lagrange este $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{p}_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}) = m\ddot{x} = -kx$, adica legea a doua Newton

$$m\ddot{x} = -kx \qquad (2.1.16)$$

Daca nu lucram in coordonate carteziene, derivata

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \equiv p_\alpha} \qquad (2.1.17)$$

se numeste **impuls generalizat conjugat cu coordonata generalizata q_α.** Exista f astfel de impulsuri generalizate, toate independente, ca si coordonatele q_α. Le vom folosi in capitolul 2.2. Derivata in functie de coordonata

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \equiv Q_\alpha} \qquad (2.1.18)$$

este **forta generalizata asociata coordonatei q_α.**