Capitolul 6

Noțiuni de relativitate restrânsă

Timp de peste 200 de ani, mecanica clasică, guvernată de principiile lui Newton şi transformările lui Galilei, a oferit explicaţii satisfăcătoare fenomenelor observate în natură. S-a constatat însă, că dacă aceste legi sunt aplicate fenomenelor ce se produc cu viteze comparabile cu cea a luminii, se obţin rezultate eronate. Einstein a fost cel care a propus modalităţi de corectare a mecancii clasice, fundamentând teoria relativităţi. Mai exact, Einstein[1] a formulat două teorii distincte: Teoria Relativităţii Restrânse (1905) şi Teoria Relativităţii Generalizate (1915). Aceasta din urmă, este o extindere a primei teorii ce ia în calcul şi fenomenul gravitaţiei[2].

6.1 Relativitatea în mecanica clasică

Un *sistem de referinţă* este constituit dintr-un corp sau sistem de corpuri căruia i se asociază un ansamblu de ceasornice pentru măsurarea timpului şi instrumente pentru măsurarea distanţelor.

Să considerăm două sisteme de referinţă carteziene cu originile în puncte

[1]Albert Einstein (1879-1955), fizician german, este considerat unul dintre cei mai mari oameni de ştiinţă ai tuturor timpurilor. În 1905, la 26 de ani, publică patru lucrări ştiinţifice care revoluţionează fizica. Două dintre acestea se referă la teoria relativităţii restrânse.

[2]calculele implicate depăşesc nivelul cursului de faţă din acest motiv teoria generalizată nu va fi abordată.

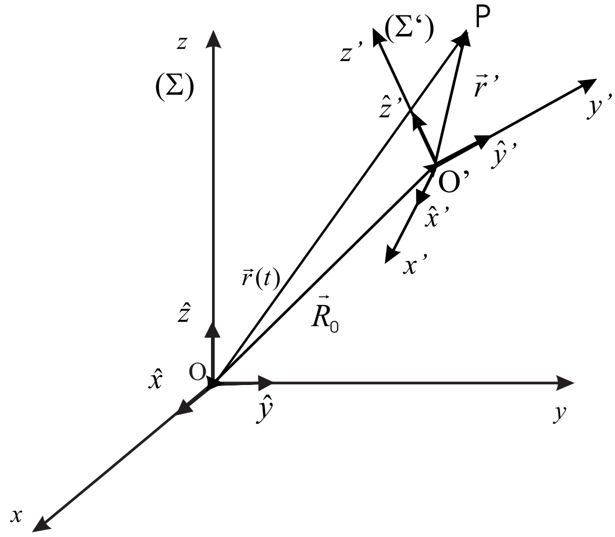

Figura 6.1:

diferite: Σ - sistem de referinţă inerţial[3], pe care să-l considerăm fix şi $\Sigma'-$ sistem aflat în mişcare. În cele două sisteme se află doi observatori ce urmăresc mişcarea unui punct material aflat în P (Fig.6.1).

Presupunând că ambii observatori au aceleaşi instrumente pentru măsurarea distanţelor şi timpului, punctul material este descris de următorii vectori de poziţie (Fig.6.1):

- $\vec{r} = \vec{r}(t)$ în Σ;
$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}, \tag{6.1}$$
- $\vec{r}' = \vec{r}'(t)$ în Σ'.
$$\vec{r}' = x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'. \tag{6.2}$$

Considerăm că originea O' este măsurată de observatorul din sistemul Σ, cu ajutorul vectorului de poziţie $\vec{R}_0$. Atunci:

$$\vec{R}_0 = X\hat{x} + Y\hat{y} + Z\hat{z}, \tag{6.3}$$

unde (X, Y, Z) sunt coordonatele lui O' măsurate din Σ.

[3]Reamintim faptul că un sistem de referinţă inerţial este cel în care sunt valabile principiile mecanicii; în particular principiul inerţiei. Dacă un corp este liber atunci se află în repaus sau în mişcare rectilinie şi uniformă.

Principala ipoteză cu care lucrează mecanica clasică este aceea că timpul "*curge*" la fel în cele două sisteme de referinţă[4]. Ca urmare, considerând că masa este independentă de mişcare iar spaţiul se măsoară la fel în orice sistem de referinţă, mecanica clasică lucrează cu noţiunile de *timp-absolut* şi *masă-absolută*.

Să analizăm în continuare modul cum se transformă coordonatele punctului material atunci când sunt măsurate în sisteme de referinţă diferite.

6.1.1 Transformările lui Galilei

Transformarea coordonatelor

Să considerăm că Σ' se află în mişcare de translaţie faţă de Σ[5]cu viteza:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}_0}{dt}. \tag{6.4}$$

Din Fig.6.1 se observă că:

$$\vec{r} = \vec{R}_0 + \vec{r}', \tag{6.5}$$

unde:

$$\vec{R}_0 = \int \vec{v}dt + const. \tag{6.6}$$

Considerăm că direcţiile axele celor două sisteme de referinţă coincid, adică:

$$\hat{x} = \hat{x}'; \hat{y} = \hat{y}'; \hat{z} = \hat{z}'. \tag{6.7}$$

Legătura dintre coordonate măsurate de observatorii aflaţi în Σ şi Σ' poate fi scrisă sub forma matricială:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \tag{6.8}$$

În cazul particular în care Σ',aflat iniţial în origine, se deplasează de-a lungul axei Ox:

$$\vec{v} = \frac{dX}{dt}\hat{x} \Rightarrow X = vt, \tag{6.9}$$

[4]Teoria relativităţii reinterpretează noţiunile de spaţiu şi timp, considerându-le mărimi dependente una de cealaltă.

[5]În mod simetric, putem gândi că Σ se află în mişcare cu viteza -$\vec{v}$ faţă de Σ'.

şi alegând constanta din (6.6) egală cu zero, se obţin coordonatele lui P măsurate de observatorul din Σ:

$$x = vt + x'; \tag{6.10}$$
$$y = y'; \tag{6.11}$$
$$z = z'. \tag{6.12}$$

În mod evident, coordonatele măsurate de observatorul din Σ'sunt:

$$x' = x' - vt; \tag{6.13}$$
$$y' = y; \tag{6.14}$$
$$z' = z. \tag{6.15}$$

Transformarea vitezelor

Legea de trasformare a vitezei se obţine derivând în raport cu timpul relaţia (6.5):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}, \tag{6.16}$$

Ţinând cont de definiţia vitezei şi de (6.4) , rezultă:

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{u}'. \tag{6.17}$$

Relaţia (6.17) exprimă faptul că *viteza absolută*, $\vec{u}$, măsurată de observatorul din sistemul fix este egală cu suma vectorială dintre *viteza de transport*, $\vec{v}$ şi *viteza relativă* $\vec{u}'$, măsurată de observatorul din sistemul în mişcare.

Transformarea vitezei dintr-un sistem în mişcare într-unul fix este, în mod evident:

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}. \tag{6.18}$$

Relaţia (6.18) este cunoscută ca *transformarea Galilei* a vitezelor.

Revenind la relaţia (6.17), ea mai poate fi scrisă şi sub forma matriceală:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{pmatrix}. \tag{6.19}$$

În cazul particular al translaţiei în lungul axei Ox cu viteza v, relaţiile de transformare ale vitezei devin:

$$u_x = v + u'_x; \tag{6.20}$$
$$u_y = u'_y; \tag{6.21}$$
$$u_z = u'_z, \tag{6.22}$$

sau:

$$u_x = v + u'_x; \tag{6.23}$$
$$u_y = u'_y; \tag{6.24}$$
$$u_z = u'_z. \tag{6.25}$$

Principiul relativității lui Galilei

Până acum am aflat că observatori aflaţi în sisteme de referinţă diferite măsoară valori diferite pentru poziţia şi viteza punctului material. Să analizăm, în continuare, ce pot spune aceştia despre acceleraţiile şi implicit forţele ce acţionează asupra punctului material în mişcare.

Derivând în raport cu timpul expresia vitezei (6.17) se obţine acceleraţia:

$$\vec{a} = \vec{a}_{tr} + \vec{a}', \tag{6.26}$$

unde

$$\vec{a}_{tr} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

sau:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_{tr}. \tag{6.27}$$

Într-un sistem de coordonate cartezian, expresia (6.26) se scrie:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix}. \tag{6.28}$$

Să considerăm că punct material aflat în P este liber în sistemul inerţial (Σ). Atunci, conform principiului fundamental al mecanicii:

$$\overrightarrow{F} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = 0. \tag{6.29}$$

Pentru ca el să fie liber şi în sistemul mobil, cu alte cuvinte pentru ca şi sistemul de referinţă Σ' să fie inerţial, trebuie respectată o condiţie similară:

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{u}'}{dt} = 0. \tag{6.30}$$

Din relaţia (6.26) rezultă imediat că:

$$\vec{a}_{tr} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0, \tag{6.31}$$

adică:

$$\vec{v} = \overrightarrow{const}. \tag{6.32}$$

Relaţia obţinută permite definirea sistemelor de referinţă inerţiale. Orice sistem de referinţă care execută o mişcare rectilinie şi uniformă faţă de un sistem de referinţă inerţial se numeşte *sistem de referinţă inerţial*. Ca urmare, dacă ambele sisteme de referinţă sunt inerţiale rezultă că:

$$\vec{a} = \vec{a}'. \tag{6.33}$$

Înmulţind cu masa inertă, care se postulează a fi constantă în mecanica clasică, se obţine:

$$m\vec{a} = m\vec{a}' \Rightarrow \tag{6.34}$$
$$\vec{F} = \vec{F}'. \tag{6.35}$$

În concluzie, forţa care acţionează asupra unui punct material este aceeaşi în orice sistem de referinţă inerţial sau, mai general, legile mecanicii sunt aceleaşi[6] în orice sistem de referinţă inerţial. Această afirmaţie constituie *principiul relativităţii lui Galilei.* Cu alte cuvinte, toate sistemele de referinţă inerţiale sunt echivalente.

Dacă ecuaţiile matematice care descriu un fenomen au aceeaşi expresie (formă) se spune că sunt *legi invariante.* În cazul de faţă ecuaţiile de mişcare date de mecanica newtoniană sunt invariante la transformările lui Galilei.

[6] Legile mecanicii rămân aceleaşi ca formă a expresiilor şi nu ca valoare. De exemplu, dacă impulsul se conservă într-un sistem de referinţă inerţial el se conservă în toate sistemele de referinţă inerţiale dar valoarea acestei constante este alta.

6.2 Principiile relativității restrânse

Experimentele realizate până la sfârşitul secolului al XIX-lea au demonstrat faptul că nu există nici un sistem de referinţă preferenţial, toate sistemele de referinţă inerţiale fiind echivalente. Explicaţiile teoretice ale acestor constatări experimentale au fost date de Einstein în 1905[7], pe baza următoarelor postulate:

1. Legile fizicii au aceleaşi expresii în toate sistemele de referinţă inerţiale.
2. Viteza maximă de propagare a interacţiunii dintre două corpuri este egală cu viteza de propagare a luminii în vid[8] şi este constantă şi independentă de sistemul de referinţă inerţial.

Primul postulat generalizează valabilitatea expresiilor matematice ale fenomenelor fizice[9] pentru orice sistem de referinţă inerţial. Cu alte cuvinte, acesta consideră invarianţa legilor mecanicii pentru sistemele de referinţă inerţiale.

Postulatul al doilea stabileşte ca limită a vitezei interacţiunilor - viteza de propagare a luminii în vid şi este mai degrabă o formulare a unor constatări experimentale.

Deoarece primul postulat conduce la concluzia că nu există un sistem de referinţă inerţial preferenţial, atunci afirmaţia principiului al doilea se impune ca necesitate: viteza de propagare a luminii trebuie să fie aceeaşi peste tot.

6.3 Transformările Lorentz

Transformările lui Galilei fac legătura între fenomenele măsurate în diferite sisteme de referinţă inerţiale, lăsând invariante legile lui Newton. S-a constatat totuşi, că ecuaţiile ce descriu câmpul electromagnetic[10] nu rămân neschimbate la transformările Galilei. Ce este greşit? Rezultatele experienţelor lui Maxwell sau transformările lui Galilei? Fizicianul danez H. A. Lorentz[11] a decis că trebuie modificate acestea din urmă. El a descoperit,

[7] *Zur electrodynamik der bewegter Körper,* Ann. Phys. 17, 891-921 (1905)

[8] $2.99792458 \times 10^8 \mathrm{ms}^{-1}$

[9] adică legile mecanicii Newtoniene şi ale electromagnetismului lui Mawwell

[10] Ansambluri de câmpuri electrice şi magnetice care se generează reciproc.

[11] Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) fizician danez, a avut constribuţii importante la dezvoltarea teoriei relativităţii şi a teoriei cuantice. În 1902 primeşte alături de Zeeman, premiul Nobel pentru fizică.

pe baza principiilor lui Einstein, un set de transformări matematice între sistemele de referinţă inerţiale (astăzi cunoscute ca ecuaţiile Lorentz), care păstrează invariante ecuaţiile lui Maxwell.

Pentru a discuta transformările Lorentz, să considerăm cele două sisteme de referinţă inerţiale, carteziene: Σ - fix şi Σ'- mobil. Pentru simplificarea calculelor, să considerăm cazul în care sistemul Σ' se deplasează paralel cu axa Ox. La momentul $t = 0$ originile celor două sisteme coincid ($O \equiv O'$). Coordonatele unui punct M măsurate la momentul t în sistemul Σ sunt:

$$
\begin{aligned}
x &= x' + vt; & (6.36)\\
y &= y'; & (6.37)\\
z &= z', & (6.38)
\end{aligned}
$$

iar cele măsurate din sistemul Σ' sunt:

$$
\begin{aligned}
x' &= x - vt; & (6.39)\\
y' &= y; & (6.40)\\
z' &= z. & (6.41)
\end{aligned}
$$

Să facem acum principala ipoteză din mecanica relativistă: să admitem existenţa unui *timp propriu* şi a unor etaloane de *lungime proprii* fiecărui sistem de referinţă inerţial. Atunci:

$$\alpha x' = x - vt. \tag{6.42}$$

Conform postulatului întâi al relativităţii, expresia matematică a ecuaţiei care descrie mişcarea sistemului trebuie să fie aceeaşi în ambele sisteme de referinţă inerţiale. Deci, invarianţa legii de mişcare conduce la:

$$\alpha x = x' + vt', \tag{6.43}$$

deoarece din sistemul Σ' se vede că sistemul Σ se deplasează cu viteza $(-v)$.

Înlocuim pe x' din (6.43) în (6.42) şi apoi îl aflăm pe $\alpha t'$:

$$
\begin{aligned}
\alpha(\alpha x - vt') &= x - vt \Rightarrow & (6.44)\\
(\alpha^2 - 1)x &= \alpha vt' - vt \Rightarrow & (6.45)\\
\alpha t' &= (\alpha^2 - 1)\frac{x}{v} + t. & (6.46)
\end{aligned}
$$

Împărţind ecuaţiile (6.46) şi (6.42) se obţine:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha x'}{\alpha t'} &= \frac{x - vt}{(\alpha^2 - 1)\frac{x}{v} + t} \Rightarrow && (6.47) \\ \frac{x'}{t'} &= \frac{x/t - v}{(\alpha^2 - 1)\frac{x}{vt} + 1} && (6.48) \end{aligned}$$

Deoarece raportul dintre distanţă şi timp reprezintă o viteză, se poate scrie:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{(\alpha^2 - 1)\frac{u_x}{v} + 1}. \tag{6.49}$$

Dacă considerăm drept fenomen analizat propagarea unui semnal luminos, atunci conform postulatului al doilea, viteza de propagare este aceeaşi în ambele sisteme şi este egală cu c:

$$u_x = u'_x = c. \tag{6.50}$$

Ca urmare din relaţia (6.49) rezultă:

$$\begin{aligned} c &= \frac{c - v}{(\alpha^2 - 1)\frac{c}{v} + 1} \Rightarrow && (6.51) \\ \alpha &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. && (6.52) \end{aligned}$$

Transformările lui Lorentz directe (pentru măsurătorile în sistemul fix) devin:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; && (6.53) \\ y &= y'; && (6.54) \\ z &= z'; && (6.55) \\ t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, && (6.56) \end{aligned}$$

iar *transformările Lorentz inverse* (pentru măsurătorile în sistemul mobil):

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \tag{6.57}$$

$$y' = y; \tag{6.58}$$

$$z' = z; \tag{6.59}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{6.60}$$

Transformările lui Lorentz stabilesc legătura dintre coordonatele spaţiale şi cele temporale în aşa fel încât forma ecuaţiilor fizice să rămână aceeaşi în toate sistemele de referinţă inerţiale iar viteza de propagare a luminii să fie aceeaşi în orice sistem de referinţă inerţial. Transformările Lorentz directe se pot scrie şi sub formă matriceală:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}. \tag{6.61}$$

6.4 Consecinţe ale transformărilor Lorentz

6.4.1 Dilatarea duratelor

Să considerăm un sistem fizic oarecare, de exemplu mişcare unui punct material pe o traiectorie oarecare (Fig.6.2). În sistemul Σ coordonatele intersecţiei traiectoriei cu axa Ox sunt $x_1(t_1)$ şi $x_2(t_2)$ iar în sistemul Σ' sunt $x_1'(t_1')$ şi $x_2'(t_2')$.

Durata dintre cele două intersecţii[12], măsurată în Σ este:

$$\Delta t = t_2 - t_1, \tag{6.62}$$

iar durata măsurată în Σ' :

$$\Delta t' = t_2' - t_1'. \tag{6.63}$$

[12]evenimente produse în anumite locuri la anumite momente de timp

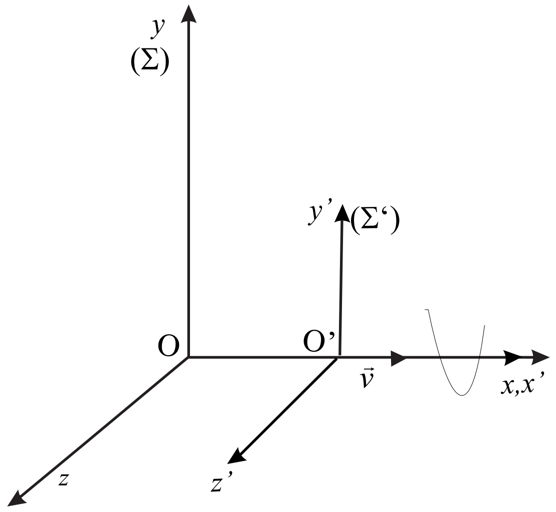

Figura 6.2:

Folosind (6.60) se obţine:

$$\Delta t' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \tag{6.64}$$

$$= \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v}{c^2}\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \tag{6.65}$$

$$= \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{6.66}$$

Ca urmare, durata dintre două evenimente din sistemul Σ' depinde de timp, poziţie şi de viteza de deplasare a sistemului.

Se pot face următoarele observaţii:

1. dacă evenimentele sunt simultane în Σ (adică se produc la acelaşi moment de timp), atunci:

$$t_1 = t_2 \Rightarrow \Delta t' = -\frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \neq 0. \tag{6.67}$$

Rezultă că evenimentele nu mai sunt simultane în sistemul aflat în mişcare. Ca urmare, noţiunea de *simultaneitate este relativă.*

2. dacă evenimentele se produc în acelaşi loc în Σ :

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 0. \tag{6.68}$$

   Durata măsurată în sistemul aflat în mişcare este mai mare decât cea măsurată în sistemul aflat în repaus. Acest fenomen se numeşte *dilatarea duratelor*.

3. dacă se studiază un fenomen periodic, cu perioada T (în Σ) şi T' (în Σ') avem:

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > T. \tag{6.69}$$

   Durata T, măsurată în raport cu sistemul faţă de care sistemul este presupus a fi legat se numeşte *perioada (durata) proprie*. După cum se constată, durata proprie este cea mai mică:

$$T = T'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{6.70}$$

   Ca exemplu al acestui efect, se poate considera dezintegrarea mezonilor π. Deşi au un timp de viaţă foarte scurt şi se dezintegrează în atmosfera terestră înainte de a ajunge pe Pământ, totuşi ei sunt detectaţi de instrumentele de măsură din laborator, datorită fenomenului de dilatare a timpului.

6.4.2 Contracţia lungimilor

Să considerăm că lungimea unei distanţe[13] măsurate în Σ (vezi Fig.6.3) este:

$$l = x_2 - x_1. \tag{6.71}$$

În sistemul Σ' aceeaşi distanţă va avea lungimea:

$$l' = x_2' - x_1'. \tag{6.72}$$

[13] de exemplu, rigle

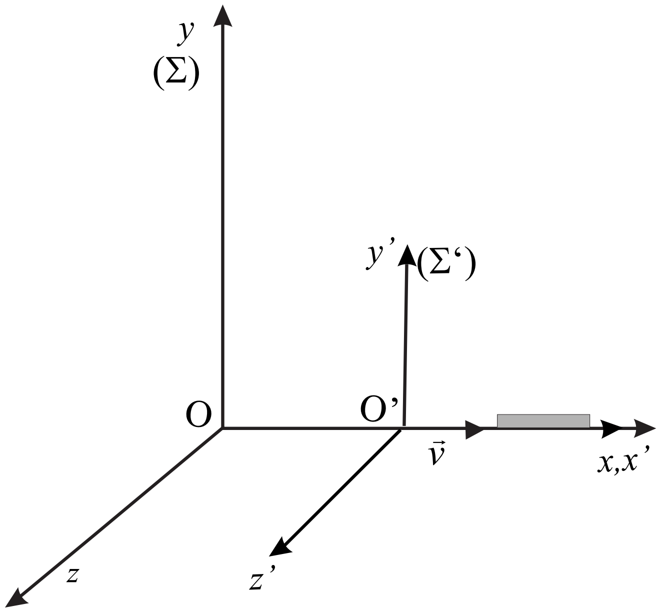

Figura 6.3

Pentru ca măsurătorile din Σ' să indice în mod corect lungimea, citirile coordonatelor corespunzătoare capetelor trebuie făcute în mod simultan. Ca urmare:

$$t'_1 = t'_2. \tag{6.73}$$

Folosind ecuaţia Lorentz (6.60) se obţine:

$$\frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \tag{6.74}$$

$$\Delta t = \frac{v}{c^2}\Delta x = \frac{v}{c^2}l. \tag{6.75}$$

Lungimea măsurată în Σ' va fi, conform ecuaţiei Lorentz (6.57):

$$l' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \tag{6.76}$$

$$l' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{6.77}$$

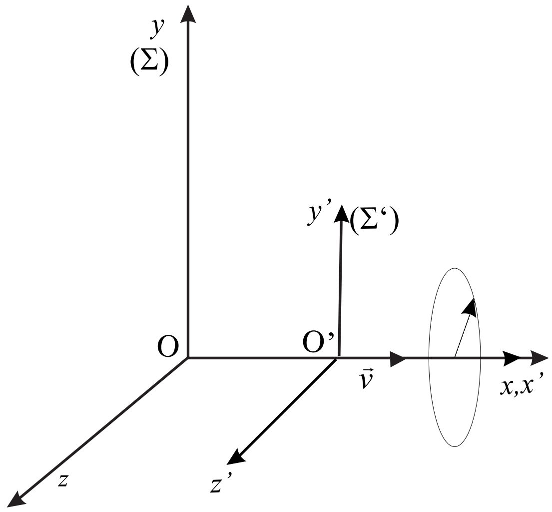

Figura 6.4:

Ca urmare:

$$l' = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v^2}{c^2}\frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} > 0, \tag{6.78}$$

adică

$$l' < l.$$

Lungimile măsurate într-un sistem de referinţă aflat în mişcare sunt mai mici decât cele din sistemul aflat în repaus. Rezultatul exprimat de această relaţie este cunoscut sub numele de *contracţia lungimilor*.

6.4.3 Dependenţa masei de viteză

Să considerăm, în cele ce urmează, că traiectoria unui mobil este un cerc situat într-un plan paralel cu yOz (Fig.6.4).

Mişcarea pe o traiectorie circulară este rezultatul acţiunii unei forţe de tip centripet. Pentru astfel de mişcări, forţa este coliniară cu vectorul de poziţie şi ca urmare, momentul unghiular este constant.

$$\vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = \frac{d\vec{J}}{dt} = 0 \Rightarrow \tag{6.79}$$

$$\vec{J} = \overrightarrow{const}. \tag{6.80}$$

Conform postulatului teoriei relativităţii restrânse, expresia matematică a acestei mărimi este invariantă. Acceptând o aceeaşi expresie matematică în ambele sisteme de referinţă, se poate scrie:

$$\vec{J} = \vec{J'} \Rightarrow \tag{6.81}$$
$$rmv = r'm'v' \Rightarrow \tag{6.82}$$
$$r^2 m\omega = r^{2\prime} m'\omega' \Rightarrow \tag{6.83}$$
$$\sqrt{y^2+z^2}\, m\omega = \sqrt{y'^2+z'^2}\, m'\omega' \Rightarrow \tag{6.84}$$
$$\sqrt{y^2+z^2}\, m\frac{2\pi}{T} = \sqrt{y'^2+z'^2}\, m'\frac{2\pi}{T'} \tag{6.85}$$

Folosind ecuaţiile lui Lorentz şi expresia perioadei în sistemul Σ' rezultă:

$$m' = m\frac{T'}{T} \Rightarrow \tag{6.86}$$
$$m' = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{6.87}$$

Dacă notăm masa de repaus cu $m = m_0$, se obţine dependenţa masei de viteză:

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{6.88}$$

6.4.4 Transformarea vitezelor în teoria relativităţii

Considerăm un fenomen care se desfăşoară cu vitezele u_x, u_y, u_z în sistemul Σ şi u'_x, u'_y, u'_z în sistemul Σ'. Conform definiţiei vitezelor:

$$u_x = \frac{dx}{dt}, u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \tag{6.89}$$

Folosind relaţiile lui Lorentz (6.53) şi (6.56) pe care le diferenţiem, se obţine:

$$u_x = \frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} \tag{6.90}$$
$$= \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}. \tag{6.91}$$

În mod analog se procedează pentru celelalte două componente:

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{dt'+\frac{v}{c^2}dx'} = \frac{u'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c^2}u'_x}; \tag{6.92}$$

$$u_z = \frac{dz'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{dt'+\frac{v}{c^2}dx'} = \frac{u'_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c^2}u'_x}. \tag{6.93}$$

Problema compunerii vitezelor poate fi analizată şi invers, din sistemul de referinţă aflat în mişcare. Deoarece din acest sistem se vede deplasarea celuilalt cu viteza v orientată în sens opus, rezultatele găsite rămân valabile în condiţiile în care înlocuim pe v cu $-v$.

Relaţiile inverse de transformare ale vitezei sunt:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}; \tag{6.94}$$

$$u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c^2}u_x}; \tag{6.95}$$

$$u'_y = \frac{u_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c^2}u_x}. \tag{6.96}$$

Dacă fenomenul studiat este propagarea unui fascicul luminos:

$$u'_x = c, \tag{6.97}$$

rezultă că viteza luminii măsurată în sistemul aflat în mişcare este conform (6.91) şi în acord cu postulatul al doilea al teoriei relativităţii restrânse:

$$u_x = \frac{c+v}{1+\frac{v}{c^2}c} = c. \tag{6.98}$$

Spre amuzament, putem spune că în teoria relativităţii, 1+1=1!

6.5 Forța în teoria relativității

Să vedem acum în ce mod trebuie interpretată ecuaţia fundamentală a mişcării pentru a fi invariantă la transformările Lorentz. Pornim de la expresia:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}, \tag{6.99}$$

care este valabilă în ambele teorii. Impulsul, rămâne definit ca produs între masă şi viteză, doar că, trebuie să avem în vedere dependenţa masei de viteză:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{6.100}$$

Dacă asupra unui corp acţionează un timp îndelungat o forţă constantă, în mecanica clasică se considera că acest fapt conduce la creşterea vitezei la valori oricât de mari (chiar mai mari decât viteza luminii!), lucru interzis de postulatul al doilea al relativităţii. Este corect să admitem că acel corp *câştigă impuls şi nu viteză*! Pe măsură ce viteza creşte, creşte şi masa de mişcare şi, atunci când $v = c$ masa este, din punct de vedere teoretic, infinită. Din acel moment corpul nu mai simte efectul accelerării. Aşadar, oricâte resurse de energie ar avea un accelerator de particule, nu ne ajută la obţinerea de viteze superioare luminii.

În continuare, vom exprima forţa cu ajutorul a două componente care rezultă prin derivarea în raport cu timpul a impulsului:

$$\vec{F} = \vec{v}\frac{dm}{dt} + m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{6.101}$$

$$= \vec{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) + \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{6.102}$$

Să calculăm expresia forţei folosind următorul procedeu:

A. considerăm, *variaţia vitezei* doar *ca mărime*:

- Variaţia vitezei ca mărime va determina componenta longitudinală a forţei:

$$\vec{F}_{tg} = \vec{v}_{tg}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) + m\frac{d\vec{v}_{tg}}{dt} \tag{6.103}$$

$$= \vec{v}_{tg}\left(\frac{1}{2}\right)\left(2\frac{v}{c^2}\right)\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\vec{v}_{tg}}{dt} + \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}_{tg}}{dt} \tag{6.104}$$

$$= \left[\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} + \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]\frac{d\vec{v}_{tg}}{dt} \Rightarrow \tag{6.105}$$

$$= \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\vec{v}_{tg}}{dt} \Rightarrow \vec{F}_{tg} = m_l\frac{d\vec{v}_{tg}}{dt}. \tag{6.106}$$

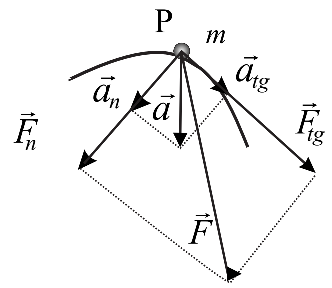

Figura 6.5: Forţa, în teoria relativităţii nu este coliniară cu acceleraţia.

Mărimea notată m_l şi definită ca:

$$m_l = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}, \tag{6.107}$$

se numeşte *masă longitudinală*. Ea este determinată de variaţia vitezei doar ca mărime.

B. considerăm, *variaţia vitezei* doar *ca orientare:*

- Variaţia vitezei ca orientare determină componenta normală a forţei. În această situaţie, $v^2 = const.$ şi prima derivată din (6.102) se anulează, aşa că:

$$\vec{F}_n = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}_n}{dt}. \tag{6.108}$$

Sumând vectorial cele două componente (6.106) şi (6.108), se obţine:

$$\vec{F} = \vec{F}_{tg} + \vec{F}_n = \frac{m_o}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{d\vec{v}_{tg}}{dt} + \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}_n}{dt}. \tag{6.109}$$

După cum se constată din această relaţie, cele două variaţii de viteză (componente ale acceleraţiei) sunt înmulţite cu cantităţi diferite, de aceea forţa în teoria relativităţii nu mai este coliniară cu acceleraţia:

$$\vec{a} = \vec{a}_{tg} + \vec{a}_n = \frac{d\vec{v}_{tg}}{dt} + \frac{d\vec{v}_n}{dt}. \tag{6.110}$$

Ilustrarea acestei observaţii este dată în Fig.6.5.

6.6 Energia relativistă

6.6.1 Relația lui Einstein

Conform definiţiei, lucrul mecanic elementar efectuat de forţa $\vec{F}$ la deplasarea pe distanţa elementară $d\vec{r}$ este:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = d\vec{p} \cdot \vec{v}. \tag{6.111}$$

Impulsul relativist pentru punctul material are expresia:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{6.112}$$

Lucrul mecanic total se obţine prin integrarea relaţiei (6.111) între două puncte de pe traiectorie. Folosind faptul că $dx \cdot y = d(xy) - x \cdot dy$, se obţine:

$$L = \int_A^B dL = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B d\vec{p} \cdot \vec{v} = \tag{6.113}$$

$$= \vec{p} \cdot \vec{v} \,|_A^B - \int_A^B \frac{m_0\vec{v}d\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \tag{6.114}$$

$$= \frac{m_0\vec{v}\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \,|_A^B - \int_A^B \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} d\vec{v}. \tag{6.115}$$

Integrala se calculează uşor dacă se foloseşte rezultatul următor:

$$d\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(-\frac{2v}{c^2}\right) dv = \tag{6.116}$$

$$= -\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{vdv}{c^2} \Rightarrow \tag{6.117}$$

$$\frac{\vec{v}d\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -c^2 d\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right). \tag{6.118}$$

Ca urmare, lucrul mecanic devine:

$$L = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Big|_A^B + m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\Big|_A^B = \tag{6.119}$$

$$= \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left[v^2 + c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right]\Big|_A^B = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Big|_A^B \tag{6.120}$$

$$= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_B^2}{c^2}}} - \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}} \tag{6.121}$$

$$= m(v_B)c^2 - m(v_A)c^2 = E(B) - E(A) = \Delta E. \tag{6.122}$$

Mărimea notată:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{6.123}$$

se numeşte *energie relativistă* a corpului cu masa de repaus m_0 şi viteză de deplasare v.

Relaţia:

$$\Delta E = \Delta m c^2 \tag{6.124}$$

este cunoscută sub numele de *relaţia lui Einstein* dintre masă şi energie.

Oricărei variaţii de masă îi corespunde o variaţie de energie şi invers, oricărei variaţii de energie îi corespunde o variaţie de masă.

Verificarea acestei relaţii de echivalenţă[14] se face prin toate experimentele din fizica particulelor elementare. De exemplu:

- *reacţii dintre particule şi antiparticule*; în cazul reacţiei de anihilare dintre un electron şi un pozitron[15], aflaţi fiecare în repaus, rezultă doi fotoni γ cu energia fiecăruia egală cu $m_0 c^2$.

[14] De regulă, variaţiile energiei determinate în mod practic corespund unor variaţii foarte mici ale masei. De exemplu, pentru 20 kilotone de trinitrotoluen (TNT) dintr-o bombă atomică, variaţia depistată a masei constituenţilor care intră şi care rezultă din reacţie este de circa $1g$.

[15] pozitronul este antiparticula electronului. Antiparticulele sunt, în general, particule elementare care apar în reacţii energetice şi au proprietăţi (electrice, magnetice, etc.) definite de o simetrie specifică (în oglindă). De obicei, particulele şi antiparticulele apar şi dispar în pereche.

- *defectul de masă*; dacă se adună masele constituenţilor unui nucleu şi se compară cu valoarea măsurată a masei nucleului se constată că aceasta din urmă este mai mică. Diferenţa este regăsită sub formă de energie de legătură a nucleului, cea care este responsabilă de stabilitatea sistemului. De exemplu, nucleul de He (format din 2 protoni cu masele M_p şi 2 neutroni cu masele M_n) are $E = M_\alpha c^2 = 3727,44$MeV iar $2M_p c^2 + 2M_n c^2 = 3755,44$MeV. Diferenţa $\Delta E = 28$MeV reprezintă energia de legătură a nucleului.

În cazul deplasărilor cu viteze mult mai mici decât viteza luminii, $v << c$, relaţia se poate aproxima sub forma:

$$E = mc^2 \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + ...\right) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m v^2 + ... \tag{6.125}$$

Termenul $m_0 c^2$ se numeşte energie relativistă de repaus iar $\frac{1}{2}mv^2$ - energie cinetică corespunzătoare vitezei v.

Diferenţa dintre energia relativistă de mişcare şi energia de repaus defineşte *energia cinetică relativistă*:

$$E_c = mc^2 - m_0 c^2 \tag{6.126}$$

6.6.2 Legătura dintre energie şi impuls

Să introducem impulsul $p = mv$ în expresia energiei relativiste:

$$E = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{mv^2}{m^2 c^2}}} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{m^2 c^2}}}. \tag{6.127}$$

Aranjând termenii în această relaţie, se poate scrie:

$$E^2 \left(1 - \frac{p^2}{m^2 c^2}\right) = m_o^2 c^4 \Rightarrow \tag{6.128}$$

$$E^2 - E^2 \frac{p^2}{m^2 c^2} = m_o^2 c^4. \tag{6.129}$$

Deoarece

$$E = mc^2, \tag{6.130}$$

se obţine relaţia dintre impuls şi energie sub forma:

$$E^2 - p^2 c^2 = m_o^2 c^4. \tag{6.131}$$

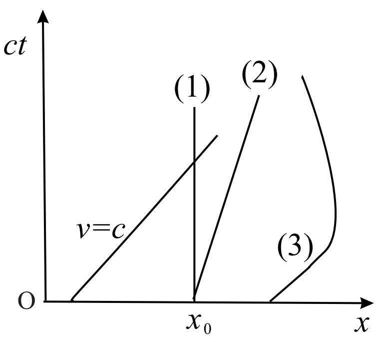

Figura 6.6: Interpretarea geometrică a transformărilor Lorentz

6.7 Universul Minkowski

Transformările Lorentz descriu legătura dintre momentul şi locul desfăşurării oricărui fenomen. Ne putem imagina, un univers spaţiu-timp, cu trei dimensiuni de tip spaţial şi una de tip temporal în care ar putea fi analizate mai direct fenomenele relativiste.

Să aşezăm pe axa orizontală spaţiul (în cazul translaţiei de-a lungul axei Ox vom lua doar coordonata care se modifică, x) iar pe axa verticală - cantitatea ct[16] (numită coordonată spaţială).

Orice punct din universul spaţiu-timp reprezintă un *eveniment*. Totalitatea punctelor care descriu evoluţia unui eveniment defineşte o *linie de univers*.

În Fig.6.6 sunt ilustrate tipuri de traiectorii în diagramele spaţiu-timp: (1) pentru particula în repaus poziţia rămâne neschimbată în timp deci linia de univers este o linie verticală; (2) pentru mişcare rectilinie şi uniformă viteza, reprezentată de panta dreptei, este constantă de aceea linia de univers este o dreaptă înclinată; (3) o mişcare accelerată are panta variabilă în fiecare punct şi ca urmare traiectoria este o curbă (de exemplu, în cazul de faţă, mişcarea este la început rapidă şi apoi lentă).

Linia de univers corespunzătoare propagării unui semnal luminos este reprezentată de dreapta marcată cu $v = c$. Ea este orientată la 45^0 faţă de cele două axe.

[16] Această combinaţie se alege din considerente de omogenizare a dimensiunilor.

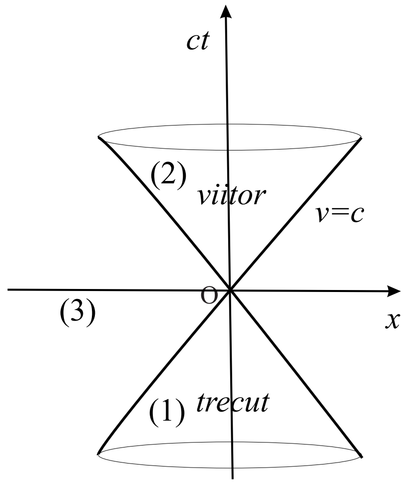

Figura 6.7: Conul Minkowski din vecinătatea originii. Zonă permisă este cea din interiorul conului luminos.

Distanţa dintre două evenimente: de exemplu cel de coordonate $(0, 0)$ (produs în origine) şi cel de coordonate (ct, x) este dată de mărimea:

$$s^2 = x^2 - c^2t^2. \tag{6.132}$$

Această distanţă se numeşte *metrica spaţiului.* Ea este invariantă la transfomările Lorentz.

Diagramele spaţiu-timp, numite şi *diagrame Minkowski* ne permit observaţii intuitive asupra modului în care se modifică elementele cinematice ale mişcării în diferite sisteme de referinţă.

Deoarece ne putem imagina că pe axa distanţelor am putea reprezenta toate cele trei dimensiuni, s^2 are semnificaţia pătratului unui interval definit înt-un spaţiu cu 4 - dimensiuni. Din acest motiv s se numeşte *cuadrivector interval.* Metrica care defineşte această distanţă este diferită de cea dintr-un spaţiu normal, cu trei dimensiuni (metrica euclidiană) prin faptul că apare semnul minus în faţa pătratului unei componente. De aceea, geometria unui astfel de spaţiu este una diferită de cea cu care suntem obişnuiţi.

În Fig.6.7 este reprezentat conul Minkowski din vecinătatea originii. Deoarece toate fenomenele se produc cu viteze mai mici decât viteza luminii, singura zonă permisă este cea din interiorul conului luminos. Regiunea 3 este interzisă, deoarece străbaterea ei ar necesita propagarea cu viteze mai mari decât viteza luminii! Zona din interiorul conului se împarte în două regiuni, analizate în cele ce urmează:

- Fie un eveniment situat într-un punct în spaţiul corespunzător lui $x = 0$, situat în partea negativă a axei temporale. Deoarece acesta se produce la un moment de timp anterior prezentului (considerat la $t = 0$). acest eveniment poate influenţa desfăşurarea evenimentului din origine. Regiunea 1 corespunde *trecutului absolut.*

- Fie un eveniment situat într-un punct în spaţiul corespunzător lui $x = 0$, situat în partea pozitivă a axei temporale. Deoarece acesta se produce la un moment de timp ulterior prezentului (considerat la $t = 0$), acest eveniment poate fi influenţat de desfăşurarea evenimentului din origine. Regiunea 2 corespunde *viitorului absolut.*

6.7.1 Cuadrivectori

Din experienţa nostră de până acum, ştim că x, y, z reprezintă cele trei componente carteziene ale unui spaţiu 3-dimensional. Dacă mai adăugăm o componentă, de dimensiune ct (numită componentă temporală), mărim dimensiunea spaţiului la 4. În acest spaţiu, care nu mai este unul intuitiv[17], vom lucra cu vectori cu 4-dimensiuni, numiţi şi *cuadrivectori.* Din cele discutate până acum, ei sunt invarianţi la transformările Lorentz. Vom not acuadrivectorii prin simbolul $x_i, i = \overline{1,4}$. Algebra pe care o vom folosi seamănă în mare parte cu cea ştiută, doar că, în acest caz, metrica este dată de relaţia:

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2. \tag{6.133}$$

Pentru simplificarea scrierii, vom adopta următoarele convenţii de notaţii:

$$\beta = \frac{v}{c}; \tag{6.134}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{6.135}$$

[17]suntem prizonieri ai spaţiului 3D!

Cuadrivectorul de poziție

Cuadrivectorul de poziţie corespunde unui vector în diagrama spaţiu-timp care are originea în originea sistemului iar vârful în punctul în corespunzător evenimentului studiat. Ca urmare, coordonatele *cuadrivectorului de poziţie* sunt:

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ct. \tag{6.136}$$

Legătura dintre coordonatele vectorului de poziţie dintr-un sistem fix şi unul care se depasează cu viteza constantă v este dată de transformările Lorentz:

$$x_1 = \gamma(x_1' + \beta x_4'); \tag{6.137}$$
$$x_2 = x_2; \tag{6.138}$$
$$x_3 = x_3; \tag{6.139}$$
$$x_4 = \gamma(x_4' + \beta x_1'), \tag{6.140}$$

Sub formă matriceală se poate scrie:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix}, \tag{6.141}$$

sau:

$$x_i = A_{ij} x_j', i = \overline{1,4}. \tag{6.142}$$

unde A_{ij} este matricea transformării:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

În mod evident, transformarea inversă este descrisă de ecuaţiile:

$$x_1' = \gamma(x_1 - \beta x_4); \tag{6.143}$$
$$x_2' = x_2; \tag{6.144}$$
$$x_3' = x_3; \tag{6.145}$$
$$x_4' = \gamma(x_4 - \beta x_1). \tag{6.146}$$

Cuadrivectorul interval

Considerăm că orice modificare a coordonatelor unui eveniment din sistemul fix ($\Delta x_i, i = \overline{1,4}$) este echivalentă cu o modificare a coordonatei corespunzătoare măsurată în sistemul mobil ($\Delta x'_i, i = \overline{1,4}$). Acest lucru este realizat prin calibrarea ceasurilor în cele două sisteme[18].

Cuadrivectorul interval corespunde distanţei dintr-un spaţiu cu 4 dimensiuni dintre două evenimente oarecare. Valoarea infinitezimală a acestuia (în cazul în care evenimentele sunt foarte puţin depărtate unul de altul) este:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2. \tag{6.147}$$

Cuadrivectorul viteză

Cuadrivectorul viteză este definit ca variaţia cuadrivectorului de poziţie în unitatea de timp propriu[19] ($d\tau$):

$$u_i = \frac{dx_i}{d\tau}, i = \overline{1,4}. \tag{6.148}$$

Deoarece durata proprie este cea mai scurtă, adică conform cu (6.69)

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}, \tag{6.149}$$

cuadrivectorul viteză devine:

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\frac{dx_i}{dt}. \tag{6.150}$$

[18]Calibrarea corespunde fixării momentelor de timp în care un semnal (de exemplu lumina) străbate distanţe egale măsurate de-a lungul unei drepte.

[19]Reamintim faptul că timpul propriu este măsurat cu un ceasornic care se deplasează odată cu corpul, adică de observatorul în raport cu care corpul este în repaus.

Folosind notaţia $\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$, se poate scrie:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{dx_1}{dt} = \gamma_u u_x; \tag{6.151}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{dx_2}{dt} = \gamma_u u_y; \tag{6.152}$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{dx_3}{dt} = \gamma_u u_z; \tag{6.153}$$

$$u_4 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{dx_4}{dt} = \gamma_u c; \tag{6.154}$$

unde (u_x, u_y, u_z) sunt componentele carteziene obişnuite ale vectorului viteză $\overrightarrow{u}$. Deci, *cuadrivectorul viteză* este:

$$u_i = (\gamma_u u_x, \gamma_u u_y, \gamma_u u_z, \gamma_u c), \tag{6.155}$$

sau

$$u_i = \gamma_u(\overrightarrow{u}, c).$$

Cuadrivectorul acceleraţie

Cuadrivectorul acceleraţie se defineşte ca variaţia cuadrivectorului viteză în raport cu intervalul de timp propriu:

$$a_i = \frac{du_i}{d\tau} = \gamma_u \frac{du_i}{dt}. \tag{6.156}$$

Cuadrivectorul impuls-energie

Prin definiţie, cuadrivectorul impuls este produsul dintre masa de repaus (deoarece se defineşte în sistemul faţă de care corpul este în repaus) şi cuadrivectorul viteză:

$$p_i = m_0 u_i = (m_0 \gamma_u \overrightarrow{u}, m_0 \gamma_u c). \tag{6.157}$$

Deoarece masa de mişcare este:

$$m = m_0 \gamma_u, \tag{6.158}$$

folosind expresia energiei relativiste $E = mc^2$,*cuadrivectorul impuls* se scrie ca:

$$p_i = \left(m\overrightarrow{u}, \frac{E}{c}\right) = \left(\overrightarrow{p}, \frac{E}{c}\right). \tag{6.159}$$

Se observă că cea de-a patra componentă este proporţională cu energia. Din acest motiv, acest cuadrivector se numeşte *cuadrivector impuls-energie*.

Cuadrivectorul forță - putere

Cuadrivectorul forţă se defineşte ca derivata în raport cu timpul propriu a *cuadrivectorului impuls*:

$$F_i = \frac{dp_i}{d\tau} = \gamma_u \frac{dp_i}{dt}. \tag{6.160}$$

Având în vedere modul în care a fost definit impulsul, se obţine:

$$F_i = \gamma_u \left(\frac{d\vec{p}}{dt}, c\frac{dm}{dt}\right). \tag{6.161}$$

Puterea este definită ca lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp:

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u} = \left(m\frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{u}\frac{dm}{dt}\right) \cdot \vec{u} \tag{6.162}$$

Înlocuind derivata în raport cu timpul a masei:

$$\frac{dm}{dt} = m_0 \frac{d}{dt}(\gamma) = m_0 \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2}\left(-\frac{2\vec{u}}{c^2}\right)\frac{d\vec{u}}{dt} \tag{6.163}$$

$$= (m_0\gamma)\frac{\vec{u}}{c^2}\gamma^2\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\gamma^2}{c^2}m\vec{u}\frac{d\vec{u}}{dt}; \tag{6.164}$$

se obţine:

$$P = m\left(1 + \gamma^2\frac{u^2}{c^2}\right)\vec{u}\frac{d\vec{u}}{dt} = \gamma^2 m\vec{u}\frac{d\vec{u}}{dt} = c^2\frac{dm}{dt}. \tag{6.165}$$

Ca urmare, mărimea componentei a patra a cuadrivectorului forţă, corespunde puterii mecanice. Ea se poate scrie ca:

$$c\frac{dm}{dt} = \frac{P}{c} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c}. \tag{6.166}$$

Componentele *cuadrivectorului forţă-putere* sunt:

$$F_i = \gamma_u \left(\frac{d\vec{p}}{dt}, \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c}\right). \tag{6.167}$$