Capitolul 4

Dinamica sistemelor discrete de particule

În capitolele anterioare am recurs, din motive de simplitate, la modelul punctului material. Corpurile din viaţa reală pot fi aproximate, într-o măsură mai mare sau mai mică, ca fiind puncte materiale. Modele mai apropiate de realitate ar fi acelea în care corpurile reale sunt aproximate prin *sisteme de puncte materiale.* Acestea pot fi formate dintr-un număr finit de puncte - aşa-numitele *sisteme discrete* de puncte - sau pot conţine, chiar in orice volum elementar, un număr enorm de particule - aşa-numite *sisteme cu distribuţie continuă* de masă, pe scurt, *medii continue.* Din categoria sistemelor discrete de puncte, putem aminti, ca exemple, atomii sau moleculele unui gaz, electronii din interiorul atomului[1], sau planetele sistemului solar. Dintre exemplele cele mai cunoscute de sisteme continue, vom aminti *modelul de fluid*, sau cel de *corp solid.* Pentru a se menţine ca o entitate stabilă, între constituenţii unui astfel de sistem, sau între aceştia şi corpurile exterioare, trebuie să se exercite forţe de atracţie sau forţe de legătură.

Deoarece, într-un fel sau altul, orice sistem este alcătuit dintr-un ansamblu de corpuri ce pot fi considerate puncte materiale, mărimile caracteristice sistemelor de particule se exprimă *ca o sumă* de mărimi specifice punctului material. *Evident, această sumă va fi una algebrică, în cazul mărimilor scalare şi una vectorială, în cazul mărimilor vectoriale.* Trebuie menţionat că, în cazul sistemelor de puncte materiale, apar şi o serie de mărimi noi, care nu se pot defini în cazul unui punct material (cum ar fi temperatura, densitatea, concentraţia, etc.).

[1]în limitele modelului planetar al atomului

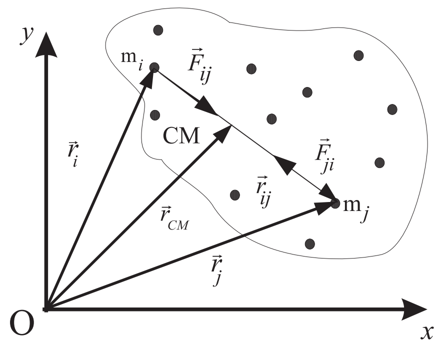

Figura 4.1: Sistem de puncte materiale

În acest capitol vom studia legile mecanicii sistemelor discrete de puncte materiale, pe baza cunoştinţelor acumulate în studiul mişcării punctului material.

4.1 Mărimi caracteristice sistemelor de particule

Să considerăm un sistem alcătuit dintr-un număr N de particule de mase m_i (Fig.4.1). Întrucât masa este o mărime scalară, masa sistemului va fi egală cu suma (algebrică) a maselor particulelor sistemului:

$$m = \sum_{i=1}^{N} m_i. \tag{4.1}$$

Dacă notăm cu $\vec{v}_i$ vitezele fiecărui punct material constituent al sistemului, se poate defini impulsul sistemului ca suma (vectorială) a impulsurilor fiecărui punct material:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i. \tag{4.2}$$

În cazul sistemelor de puncte materiale, există două categorii distincte de forţe: *forţe interne* şi *forţe externe*. Forţele de interacţiune dintre perechile de particulele constituente ale sistemului se numesc *forţe interne*. Forţele de interacţiune dintre particulele sistemului şi alte corpuri din exteriorul acestuia

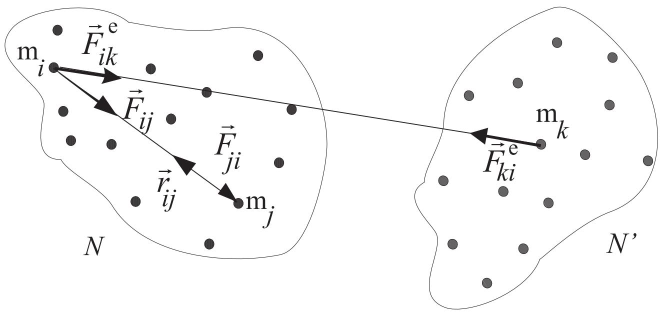

Figura 4.2: Două sisteme de puncte materiale aflate în interacţiune.

se numesc *forţe externe*. Rezultanta forţelor interne este nulă:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{int}} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \vec{F}^{\text{int}} = 0, \tag{4.3}$$

întrucât, conform principiului acţiunii şi reacţiunii, acţiunea exercitată de punctul material i asupra punctului j din sistem este egală în modul şi opusă ca sens cu reacţiunea exercitată de punctul j asupra lui i:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}. \tag{4.4}$$

Aşadar:

Rezultanta forţelor interne unui sistem de puncte materiale este nulă.

Să considerăm, în cele ce urmează, că asupra sistemului acţionează un alt sistem (exterior), format din N' corpuri. Forţa totală (externă) ce acţionează asupra sistemului de N particule va fi:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ext} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N'} \vec{F}_{ik}^{e} = \vec{F}^{ext}. \tag{4.5}$$

Având în vedere şi ecuaţia (4.3), rezultă că:

Forţa rezultantă ce acţionează asupra unui sistem de puncte materiale este egală cu suma forţelor de interacţiune dintre componentele sistemului şi corpurile exterioare acestuia.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}^{\text{int}} + \vec{F}^{ext} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N'} \vec{F}_{ik}^{e}. \tag{4.6}$$

4.2 Centrul de masă. Proprietățile centrului de masă.

Noţiunea de *centru de masă* a fost deja introdusă la studiul problemei celor două corpuri. Vom generaliza această definiţie pentru cazul unui sistem de N particule caracterizate de vectorii de poziţie $\vec{r}_i$.

Centrul de masă al unui sistem de puncte materiale este un punct geometric reprezentativ pentru sistem, definit prin vectorul de poziţie:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i, \tag{4.7}$$

unde m reprezintă masa sistemului.

Derivând relaţia (4.7) în raport cu timpul, se obţine viteza centrului de masă:

$$\vec{v}_{CM} = \dot{\vec{r}}_{CM} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i. \tag{4.8}$$

Se observă că produsul:

$$m\vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \tag{4.9}$$

reprezintă impulsul sistemului. Prin urmare, *impulsul centrului de masă este egal cu impulsul sistemului, centrul de masă fiind un punct reprezentativ al acestuia.*

Derivând încă o dată în raport cu timpul relaţia (4.7) se obţine acceleraţia centrului de masă:

$$\vec{a}_{CM} = \dot{\vec{v}}_{CM} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{v}}_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i. \tag{4.10}$$

Relaţia poate fi rescrisă sub forma:

$$m\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}^{ext}. \tag{4.11}$$

Deci, acceleraţia pe care o are centrul de masă este aceeaşi cu acceleraţia pe care ar căpăta-o un corp punctiform, de masă egală cu masa sistemului, sub acţiunea unei forţe egală cu $\vec{F}^{ext}$. Această observaţie permite simplificarea studiului dinamicii unui sistem de corpuri, în sensul că, mai întâi se determină caracteristicile mişcării centrului de masă sub acţiunea forţei rezultante şi ulterior se determină mişcarea fiecărei componente a sistemului în raport cu centrul de masă.

4.3 Legea conservării impulsului

Ecuaţia (4.11) conduce direct la legea conservării impulsului unui sistem de puncte izolate de exterior. Întrucât, în cazul unui sistem izolat, $\vec{F}^{ext} = 0$:

$$\vec{a}_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \vec{const}., \tag{4.12}$$

ceea ce reprezintă formularea matematică a legii conservării impulsului sistemului:

Impulsul unui sistem izolat de puncte materiale se conservă.

Aşa cum s-a constatat în cazul problemei celor două corpuri, uneori este mai simplă analiza mişcării sistemelor de puncte materiale în raport cu *sistemul centrului de masă* (**SCM**), urmând ca revenirea la *sistemul laboratorului* (**SL**) să se facă doar în final, pentru a se compara rezultatele obţinute cu experimentul.

În cazul în care asupra sistemului nu acţionează forţe exterioare, **SCM** este inerţial. Vectorul de poziţie al unui corp oarecare din sistem poate fi scris ca:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + (\vec{r}_i)_{SCM}. \tag{4.13}$$

Derivând relaţia în raport cu timpul, rezultă că viteza fiecărui corp depinde de sistemul de referinţă în care aceasta a fost definită:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + (\vec{v}_i)_{SCM}. \tag{4.14}$$

4.4 Legea conservării energiei

Să calculăm lucrul mecanic efectuat de forţele interne şi externe care acţionează asupra particule i a sistemului, pentru a o deplasa între punctele caracterizate de vectorii de poziţie $\vec{r_1}$ şi $\vec{r_2}$.

$$L_i^{\text{int}} + L_i^{ext} = \int_{r_1}^{r_2} (\vec{F}_i^{\text{int}} + \vec{F}_i^{ext}) d\vec{r}_i = \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\vec{p}_i}{dt} d\vec{r}_i = \tag{4.15}$$

$$= \int_{v_1}^{v_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \frac{1}{2} m_i v_i^2(t) - \frac{1}{2} m_i v_i^2(0), \tag{4.16}$$

adică:

$$L^{\text{int}} + L^{ext} = E_c(t) - E_c(0), \tag{4.17}$$

unde:

$$L^{\text{int}} = \sum_{i=1}^{N} L_i^{\text{int}}; \; L^{ext} = \sum_{i=1}^{N} L_i^{ext}; \tag{4.18}$$

$$E_c(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2(t), \; E_c(0) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2(0). \tag{4.19}$$

Se observă că la variaţia energiei cinetice a sistemului contribuie atât forţele interne cât şi cele externe. În cazul în care forţele care acţionează asupra sistemului sunt conservative, atunci se pot defini energiile potenţiale corespunzătoare acestora.

$$L^{\text{int}} + L^{ext} = -(E_p^{\text{int}}(t) - E_p^{\text{int}}(0)) - (E_p^{ext}(t) - E_p^{ext}(0)). \tag{4.20}$$

Folosind ecuaţiile (4.17) şi (4.20) se ajunge la *legea conservării energiei totale*:

$$E_c(t) + E_p^{\text{int}}(t) + E_p^{ext}(t) = E_c(0) + E_p^{\text{int}}(0) + E_p^{ext}(0) = const. \tag{4.21}$$

În cazul unui sistem izolat, $L_{ext} = 0$ şi ca urmare se obţine legea conservării energiei mecanice:

$$E_c(t) + E_p^{\text{int}}(t) = E_c(0) + E_p^{\text{int}}(0) = const. \tag{4.22}$$

Energia potentială, în cazul unui sistem de corpuri între care se manifestă forţe de interacţiune gravitaţională, depinde doar de distanţa relativă dintre corpuri şi nu depinde de sistemul de referinţă ales pentru studiul mişcării:

$$E_p^{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} E_p^{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|). \tag{4.23}$$

Factorul $1/2$ este necesar pentru a elimina sumarea de două ori a aceluiaşi termen, iar:

$$E_p^{ij} = -\gamma \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \tag{4.24}$$

Singurul termen care depinde de sistemul de referinţă ales pentru studiul mişcării este energia cinetică. Având în vedere relaţia (4.14), energia cinetică definită în SL este:

$$\begin{aligned}
E_c &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i[(\vec{v}_i)^2_{SCM} + 2(\vec{v}_i)_{SCM}\vec{v}_{CM} + v^2_{CM}] && (4.25)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{v}_i)^2_{SCM} + \vec{v}_{CM}\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{v}_i)_{SCM} + \frac{1}{2}\vec{v}_{CM}\sum_{i=1}^{N} m_i && (4.26)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i(\vec{v}_i)^2_{SCM} + \frac{1}{2}m\vec{v}_{CM}\\
&= (E_c)_{SCM} + \frac{1}{2}m\vec{v}_{CM}. && (4.27)
\end{aligned}$$

Deoarece impulsul centrului de masă măsurat în raport cu centrul de masă este nul, rezultă:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{v}_i)_{SCM} = m(\vec{v}_{CM})_{SCM} = 0. \tag{4.28}$$

În concluzie, energia cinetică a unui sistem, măsurată în raport cu **SL**, este egală cu energia cinetică măsurată în **SCM** (numită *energie cinetică internă*) la care se adaugă energia cinetică de translaţie a CM (numită *energie cinetică orbitală*).

Energia internă este:

$$E_{\text{int}} = (E_c)_{SCM} + E_p^{\text{int}}. \tag{4.29}$$

Deoarece pentru forţele de tip atractiv energia potenţială este negativă, energia internă a unui sistem poate avea atât valori pozitive cât şi valori negative, după cum energia cinetică internă este mai mică sau mai mare decât energia potenţială internă.

Un sistem se numeşte *legat* dacă forţele interne îl menţin localizat într-o regiune finită din spaţiu (exemplu sistemul planetar, sistemul atomic, sistemul nuclear etc.). Sistemele legate au energie internă negativă.

Sistemul este stabil atunci când:

$$E_{\mathrm{int}} = 0. \tag{4.30}$$

Pentru a desface sistemul în părţile componente şi a elibera astfel particulele din sistem, trebuie să furnizăm acestuia o energie pozitivă de valoare:

$$E_{leg} = -E_{\mathrm{int}}. \tag{4.31}$$

4.5 Legea conservării momentului unghiular

Să calculăm momentul forţei care acţionează asupra punctului material i din sistem, în raport cu originea O:

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i. \tag{4.32}$$

Asupra punctului i acţionează atât forţe din partea celorlalte puncte din sistem cât şi forţe din exterior:

$$\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ij}^{int} + \vec{F}_i^{ext}. \tag{4.33}$$

Momentul total al forţelor care acţionează asupra sistemului este dat de suma vectorială a momentelor individuale:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{int}\right) + \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}\right). \tag{4.34}$$

Suma dublă conţine termeni de tipul:

$$\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{int}\right) + \left(\vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}^{int}\right), \tag{4.35}$$

care, datorită faptului că:

$$\vec{F}_{ij}^{int} = -\vec{F}_{ji}^{int}, \tag{4.36}$$

se anulează, întrucât conţine produse vectoriale de vectori coliniari:

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}^{int} = \vec{r}_{ji} \times \vec{F}_{ij}^{int} = 0. \tag{4.37}$$

Momentul unghiular total va fi determinat doar de forţele exterioare:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} \right). \tag{4.38}$$

Pe de altă parte:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i), \tag{4.39}$$

din cauza coliniarităţii vectorilor $\vec{v}_i$ şi $\vec{p}_i$ ($\vec{v}_i \times \vec{p}_i = 0$). Se obţine:

$$\vec{M} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \vec{J}_i = \frac{d\vec{J}}{dt}, \tag{4.40}$$

unde:

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^{N} \vec{J}_i \tag{4.41}$$

este *momentul unghiular total* al sistemului de puncte materiale. Această mărime se conservă, adică îşi păstrează neschimbate mărimea, direcţia şi sensul:

$$\vec{J} = \overrightarrow{const.} \tag{4.42}$$

atunci când:

(a) sistemul este izolat adică, $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ext} = 0$;

(b) când asupra sistemului acţionează forţe de tip central, adică $\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} = 0$.