Capitolul 3

Mişcarea oscilatorie

Una dintre cele mai importante mişcări cunoscute în natură este *mişcarea oscilatorie*. *O mişcare periodică, ce se reia cu regularitate la intervale egale de timp, se numeşte mişcare oscilatorie*. Ea apare în urma aplicării unei mici perturbaţii unui sistem, aflat iniţial în echilibru stabil.

Mişcări oscilatorii se întâlnesc în natură într-o mare diversitate de sisteme (fizice, chimice, biologice etc). În fizică sunt cunoscute sisteme oscilante de natură şi dimensiuni spaţiale foarte diferite. Mişcări oscilatorii execută, de exemplu, ionii reţelei cristaline dintr-un solid, dar şi anumite stele duble. Mişcări oscilatorii pot fi efectuate, în anumite condiţii, de către componentele atomilor sau nucleelor, dar şi de către unele sisteme stelare.

Modele operaţional simple de sisteme oscilante sunt *pendulul matematic* şi *pendulul elastic*. În primul caz este vorba de un corp de mici dimensiuni, suspendat în câmpul gravitaţional de un fir sau o tijă de masă neglijabilă, inextensibilă. În al doilea caz este vorba de un corp legat de capătul unui resort de masă neglijabilă. Resortul şi corpul sunt plasate, fie în câmpul gravitaţional terestru, fie pe un suport orizontal, în absenţa frecărilor.

Deşi natura fizică a oscilatorilor este foarte diferită, *există o serie de caracteristici generale ale mişcării oscilatorii, care se regăsesc în cazul tuturor sistemelor oscilante*. Aşa cum vom vedea ulterior, folosind un aparat matematic relativ simplu, se pot defini câteva mărimi adimensionale ce caracterizează orice tip de oscilator. Mai mult decât atât, se pot stabili o serie de analogii între mărimi de natură diferită, specifice unor oscilatori de natură

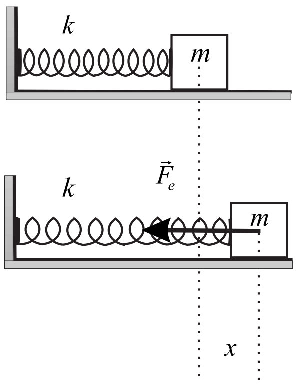

Figura 3.1: Un pendul elastic, constituit dintr-un corp de masă m, cuplat cu un resort de constantă elastică k.

diferită[1] şi se pot scrie direct o serie de rezultate, plecându-se de la oricare din domeniile în care astfel de sisteme oscilante sunt studiate.

3.1 Oscilaţii liniare libere

Să considerăm unul dintre cele mai simple exemple de sisteme mecanice oscilante, cel al unui corp de masă m fixat de un perete rigid printr-un resort de constantă elastică k, în absenţa frecării (vezi Fig.3.1). Vom nota deplasarea faţă de poziţia de echilibru[2], la momentul de timp t, cu $x(t)$. Forţa elastică ($\vec{F_e}$) este singura forţă necompensată, întrucât greutatea corpului de masă m ($\vec{G}$) este anulată de către reacţiunea normală din partea planului. Aplicând principiul al II-lea al dinamicii, găsim ecuaţia diferenţială a mişcării:

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t). \tag{3.1}$$

Semnul minus din expresia forţei indică faptul că forţa elastică dezvoltată în resort tinde să micşoreze deformaţia resortului. Trecând totul în membrul

[1]In decursul acestui capitol vom discuta, de exemplu, o analogie mecano-electrică, pe baza căreia se pot defini o serie de mărimi noi în mecanică, plecând de la mărimi foarte cunoscute în electricitate.

[2]Perturbaţia faţă de starea de echilibru poate fi, în general, o distanţă, un unghi, dar şi o sarcină electrică deplasată într-un circuit, o concentraţie, un potenţial etc.

stâng al ecuaţiei precedente şi împărţind prin m se obţine:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \tag{3.2}$$

Mărimea ω_0, definită de relaţia:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.3}$$

se numeşte *pulsaţia proprie a mişcării*[3]. După cum rezultă şi din modul în care a fost definită, pulsaţia proprie este o mărime specifică oscilatorului. Ea nu depinde de regimul în care acesta se mişcă, fiind un fel de "carte de identitate" a oricărui oscilator.

O altă mărime specifică mişcării oscilatorii este *frecvenţa proprie* a acestuia, notată cu ν. Ea reprezintă *numărul de oscilaţii complete ce se produc în interval de 1s.* Unitatea de măsură a frecvenţei este s^{-1} sau Hertz (Hz).

Pulsaţia ω_0 este *numărul de oscilaţii complete ce se produc în 2π secunde.* Unitatea de măsură a pulsaţiei este $rad\ s^{-1}$. Între cele două mărimi există relaţia:

$$\omega_0 = 2\pi\nu. \tag{3.4}$$

Relaţia (3.1) ne permite să interpretăm pătratului pulsaţiei proprii, ca *forţa ce acţionează asupra unităţii de masă, pe unitatea de deplasare*, $\omega^2 = k/m = F/m/x$.

Perioada proprie a mişcării reprezintă *timpul în care are loc o oscilaţie completă a sistemului.* Expresia ei este:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{3.5}$$

În cazul micilor oscilaţii, perioada mişcării nu depinde de amplitudinea acestora, de aceea se spune că micile oscilaţii sunt *izocrone.*

Este foarte uşor de verificat că ecuaţia (3.2) admite o soluţie de forma:

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t. \tag{3.6}$$

Constantele A şi B se determină din condiţiile iniţiale ale elongaţiei şi, respectiv, vitezei:

$$A = x(0), \tag{3.7}$$

$$B = \frac{\omega_0}{\dot{x}\,(0)}. \tag{3.8}$$

[3]Uneori, pulsaţia mişcării se mai numeşte şi *frecvenţă unghiulară*, deşi cele două mărimi diferă printr-un factor de 2π.

Există mai multe modalităţi de exprimare a soluţiei ecuaţiei (3.2). De exemplu, înlocuind constantele A şi B din ecuaţia (3.6) cu alte două constante, C şi φ, definite prin relaţia:

$$\begin{aligned} A &= C\cos\varphi, \\ B &= C\sin\varphi, \end{aligned} \tag{3.9}$$

se poate exprima legea de mişcare $x(t)$ sub forma unei singure funcţii armonice, de amplitudine C şi fază iniţială φ:

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t - \varphi). \tag{3.10}$$

O a treia posibilitate de exprimare a soluţiei, cea mai comodă din punct de vedere al calculului matematic, este cea în care se folosesc numere complexe. Forma funcţiei de variabilă complexă care descrie mişcarea este sugerată de constatările experimentale, care arată că atât elongaţia x, cât şi derivatele sale de ordinul I şi ordinul II respectă acelaşi tip de dependenţă temporală. Evident, o dependenţă având în expresia sa funcţia exponenţială e^x ar putea fi o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale (3.2). Aşadar, se alege drept soluţie funcţia:

$$x(t) = Ce^{\lambda t}. \tag{3.11}$$

Vom calcula acum derivata a doua a lui $x(t)$ şi o vom înlocui, împreună cu $x(t)$ în ecuaţia (3.2). Se observă că ambii termeni din ecuaţia ce se obţine în urma acestei înlocuiri, au factor comun cantitatea $Ce^{\lambda t}$, adică $x(t)$. Cum ne interesează să găsim o soluţie ne-banală, $Ce^{\lambda t} \neq 0$, rezultă ecuaţia algebrică:

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0, \tag{3.12}$$

numită *ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei diferenţiale* (3.2) . Rezolvarea ecuaţiei caracteristice ne permite determinarea valorilor constantei λ:

$$\lambda_{1,2} = \pm j\omega_0, \quad j = \sqrt{-1}. \tag{3.13}$$

Am găsit, aşadar, două valori ale lui λ care verifică această ecuaţie[4]. Soluţia generală a ecuaţiei oscilatorului armonic va fi o combinaţie liniară a celor

[4]Numărul de soluţii λ este egal cu gradul ecuaţiei caracteristice şi, deci, cu ordinul ecuaţiei diferenţiale a mişcării. Aşadar, orice ecuaţie diferenţială de ordinul II admite două soluţii particulare.

două soluţii particulare[5]:

$$x(t) = A_+ e^{j\omega_0 t} + A_- e^{-j\omega_0 t}, \tag{3.14}$$

unde A_+, A_- sunt mărimi complexe.

Folosind reprezentarea trigonometrică a numerelor complexe:

$$e^{\pm j\alpha} = \cos\alpha \pm j\sin\alpha, \tag{3.15}$$

rezultă că soluţia (3.14) este echivalentă cu celelalte forme (3.10) şi (3.6), deoarece:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_+(\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t) + A_-(\cos\omega_0 t - j\sin\omega_0 t) && (3.16)\\ &= (A_+ + A_-)\cos\omega_0 t + j(A_+ - A_-)\sin\omega_0 t && (3.17)\\ &= A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = C\cos(\omega_0 t - \varphi). && (3.18) \end{aligned}$$

3.1.1 Energia mişcării oscilatorii armonice

Energia totală a mişcării este suma energiilor cinetice şi potenţiale ale oscilatorului:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + E_p(t). \tag{3.19}$$

Energia potenţială, determinată de forţa elastică, este:

$$E_p(t) = -\int_0^x (-kx(t))dx = \frac{1}{2}kx^2(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2(t). \tag{3.20}$$

Ca urmare:

$$E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 C^2 \sin^2(\omega_0 t - \varphi) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 C^2 \cos^2(\omega_0 t - \varphi) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 C^2. \tag{3.21}$$

Aşa cum ne aşteptam, energia totală a oscilatorului liniar este o constantă a mişcării.

[5]Proprietatea ca orice combinaţie liniară de soluţii să fie o nouă soluţie a sistemului (*principiul superpoziţiei*) este proprie doar ecuaţiilor diferenţiale liniare. Acest lucru face ca legile fizicii guvernate de ecuaţii liniare să fie mult mai uşor de înţeles şi explicat decât cele guvernate de ecuaţii neliniare.

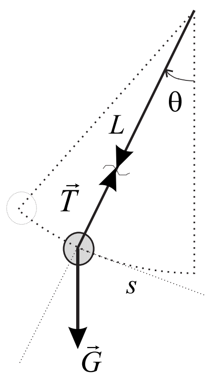

Figura 3.2: Un pendul matematic cu masa m şi lungimea L.

3.1.2 Exemplu. Pendulul matematic

Să determinăm legea de mişcare şi frecvenţa de oscilaţie a unui corp cu masa m suspendat de un fir inextensibil de lungime L (*pendul matematic*) lăsat liber la momentul iniţial $t = 0$, din poziţia θ_0.

Fie θ unghiul pe care îl face firul cu axa verticală (vezi Fig.3.2). Coordonata care descrie depărtarea faţă de poziţia de echilibru este lungimea arcului, s ($s = L\theta$). Forţa care produce mişcarea este componenta tangenţială a greutăţii (componenta normală este compensată de tensiunea din fir!). Ca urmare:

$$m(\ddot{L\theta}) = -mg\sin\theta, \tag{3.22}$$

sau, trecând totul în primul membru al ecuaţiei şi împărţind prin mL:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0. \tag{3.23}$$

În aproximaţia micilor oscilaţiilor ale pendulului, $sin\theta \cong \theta$, aşa încât:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0. \tag{3.24}$$

Prin identificarea termenilor găsim:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}. \tag{3.25}$$

Alegând soluţia de forma (3.10), constantele C (amplitudinea mişcării) şi φ (faza iniţială) se determină din condiţiile iniţiale, $\theta(0) = \theta_0$; $\dot{\theta}(0) = 0$.

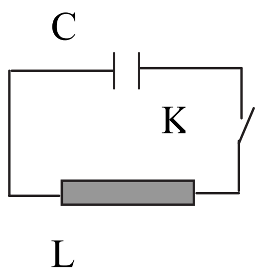

Figura 3.3: Circuit LC serie.

Ecuaţia de mişcare a pendulului are, în concluzie, expresia:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_0 t. \tag{3.26}$$

3.1.3 Un exemplu din electricitate. Circuitul LC serie

Să analizăm oscilaţiile libere care apar într-un circuit electric format dintr-o bobină de inductanţă L şi un condensator de capacitate C, legate în serie (Fig.3.3).

Să considerăm că, printr-o metodă oarecare, condensatorul C s-a încărcat cu sarcina electrică q_0. Aceasta înseamnă că o sarcină negativă $-q_0$ a fost deplasată de pe o armătură, pe cealaltă. Cum ambele armături erau iniţial neutre, armătura de pe care s-a luat sarcina $-q_0$ rămâne încărcată cu sarcina $+q_0$, iar armătura pe care am adus această sarcină va deveni încărcată cu sarcina $-q_0$. După închiderea întrerupatorului K la momentul $t_0 = 0$, la un moment ulterior, t, sarcina electrică rămasă încă nedeplasată este $q(t)$:

$$q(t) = Cu(t) = CL\frac{di}{dt} = CL\,\frac{d^2q}{dt^2}. \tag{3.27}$$

În ecuaţia anterioară am ţinut cont că tensiunea la bornele condensatorului este, în orice moment după închiderea întrerupătorului K, egală cu tensiunea la bornele inductanţei L, care, la rândul ei este: $u_L = -Ldi/dt$. Ecuaţia anterioară conduce, după rearanjarea termenilor, la *ecuaţia diferenţială a sarcinii electrice transportate prin circuit*:

$$\ddot{q}(t) + \frac{1}{CL}q(t) = 0, \tag{3.28}$$

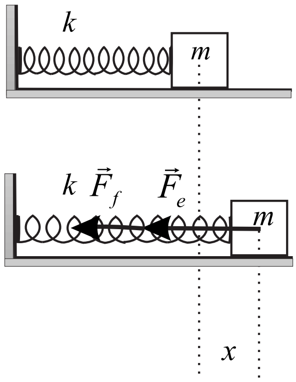

Figura 3.4: Un pendul elastic în regim amortizat (se consideră că frecarea este de tip vâscos)

având soluţia:

$$q(t) = q_0 \cos \sqrt{\frac{1}{LC}}\, t. \tag{3.29}$$

3.2 Oscilaţii amortizate

În analiza efectuată până în prezent am neglijat orice fenomen de disipare a energiei. În realitate, oscilaţiile "se sting" după un oarecare timp, ca urmare a disipării (transformării în căldură) energiei înmagazinate iniţial în oscilator.

Să analizăm, în cele ce urmează, mişcarea oscilatorie efectuată în prezenţa frecării. Să considerăm că frecarea dintre oscilator şi mediul înconjurător este una de natură vâscoasă, caz în care forţa de frecare este proporţională cu cu viteza.

Ecuaţia principiului II al dinamicii, pentru sistemul reprezentat în Fig.3.4 este:

$$m\ddot{x} = F_f + F_e; \tag{3.30}$$

$$m\ddot{x} = -rx - kx, \tag{3.31}$$

unde r este coeficientul de rezistenţă.

După rearanjarea termenilor şi împărţirea prin m, se obţine:

$$\ddot{x} + 2\delta\, \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{3.32}$$

unde s-au folosit notaţiile:

$$\delta = \frac{r}{2m},\ \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \tag{3.33}$$

δ fiind denumit *coeficientul de amortizare*.

Ecuaţia diferenţială (3.32) este de ordin doi, omogenă şi cu coeficienţi constanţi. Urmând acelaşi algoritm ca şi în cazul oscilaţiilor liniar armonice (alegând soluţii de tip exponenţial), se obţine ecuaţia caracteristică:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0, \tag{3.34}$$

cu soluţiile:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \tag{3.35}$$

Caracterul mişcării este determinat de relaţia dintre efectele forţei de frecare şi forţei elastice, traduse aici prin relaţia dintre δ^2 şi ω_0^2:

1. *Mişcare sub-amortizată* ($\delta < \omega_0$)

   Aceasta apare în situaţia în care efectul forţei de frecare nu este determinant. Amortizarea este slabă, iar mişcarea se numeşte *subamortizată* sau, simplu, *mişcare oscilatorie amortizată.* Cantitatea de sub radical este, în acest caz, negativă. Soluţia ecuaţiei diferenţiale a mişcării este de forma:

   $$x(t) = e^{-\delta t}(A_1 e^{j\omega_1 t} + B_1 e^{-j\omega_1 t}), \tag{3.36}$$

   iar pulsaţia oscilaţiilor amortizate, denumită şi *pseudo-pulsaţie*, este:

   $$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \tag{3.37}$$

   Deoarece deplasarea particulei faţă de poziţia de echilibru este o mărime reală, rezultă că A şi B sunt constante complexe şi legate între ele prin relaţia $A_1^* = B_1$. Sub formă reală, soluţia oscilatorului amortizat este de forma:

   $$x(t) = C_1 e^{-\delta t}\cos(\omega t - \phi_1), \tag{3.38}$$

   unde:

   $$\begin{aligned} A_1 + B_1 &= C_1 \cos\phi_1, \\ A_1 - B_1 &= jC_1 \sin\phi_1. \end{aligned} \tag{3.39}$$

   Constantele A_1 şi B_1, sau C_1 si φ_1 se determină din condiţiile iniţiale.

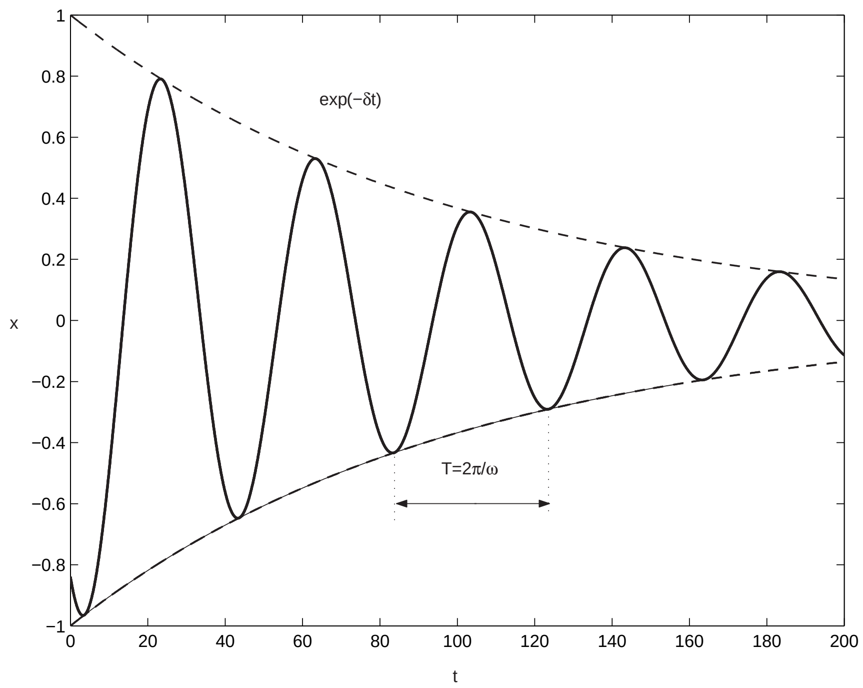

Figura 3.5: Dependenţa de timp a elongaţiei unei mişcări oscilatorii amortizate.

Din ecuaţia (3.38) se observă că mişcarea este, şi în acest caz, periodică, dar cu o pulsaţie mai mică decât cea a oscilaţiilor libere (care se produc în absenţa frecării). În plus, amplitudinea scade exponenţial în timp, aşa cum rezultă din Fig.3.5.

Mişcarea oscilatorie amortizată se "stinge" cu atât mai repede, cu cât factorul de amortizare, δ, este mai mare. Într-adevăr, într-un interval de timp $\tau = 1/\delta$, numit *constanta de timp* a oscilatorului, amplitudinea oscilaţiilor scade de e ($\cong 2,71$) ori. În intervalul de timp $T = 2\pi/\omega$, amplitudinea ($A(t) = C_1 e^{-\delta t}$) scade de $e^{\delta T}$ ori.

Se poate defini o nouă mărime, numită *decrement logaritmic al amortizării*:

$$D = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau}. \tag{3.40}$$

Ca urmare, în intervalul de timp τ, oscilatorul va executa un număr de oscilaţii, N, cu atât mai mic, cu cât D este mai mare (δ şi T sunt mai mari):

$$N = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\delta T} = \frac{1}{D}. \tag{3.41}$$

Pentru caracterizarea performanţelor unui oscilator se foloseşte cel mai adesea mărimea:

$$Q = \pi N = \frac{\omega}{2\delta}, \tag{3.42}$$

care se numeşte *factor de calitate*. Evident, oscilatorul va fi cu atât mai "*bun*", adică va avea Q mare (oscilează un timp mai îndelungat), cu cât δ este mai mic.

După un interval de timp: $t \cong 5\tau$, amplitudinea oscilaţiilor amortizate scade la 1% din valoarea maximă. De aceea, acest interval de timp se numeste *durata practică* a procesului de "*stingere*" a oscilaţiilor. Pentru a avea şi după acest interval de timp oscilaţii practic sesizabile, este necesar să le întreţinem cu o sursă exterioară.

2. *Mişcare supra-amortizată* $(\delta > \omega_0)$

   În această situaţie, cantitatea de sub radical este pozitivă şi, ca urmare, radicalul este un număr real. Mişcarea nu mai este periodică, soluţia fiind exponenţială:

   $$x(t) = A_1 e^{-(\delta-\omega_0)t} + B_1 e^{(\delta-\omega_0)t}. \tag{3.43}$$

   O dată cu trecerea timpului, corpul, scos din poziţia de echilibru la momentul $t = 0$, revine la poziţia neperturbată după un interval de timp considerabil. Regimul supra-amortizat este ales, de exemplu, în funcţionarea autovehiculelor, sau maşinilor unelte, când se doreşte eliminarea oscilaţiilor nedorite, ce ar putea apărea în decursul funcţionării. În acest scop, acestea sunt prevăzute cu *amortizoare.*

3. *Mişcare cu amortizare critică* $\delta = \omega_0$

   În acest caz $\delta = \omega_0$, astfel încât ecuaţia de rezolvat este:

   $$\ddot{x} + 2\delta\,\dot{x} + \delta^2 x = 0. \tag{3.44}$$

   Deşi cele două soluţii particulare devin egale (întrucât $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$), teoria ecuaţiilor diferenţiale arată că există şi o a doua soluţie, de forma $te^{\lambda t}$. Ca urmare, soluţia ecuaţiei diferenţiale a mişcării este:

   $$x(t) = e^{-\delta t}(A_1 + B_1 t). \tag{3.45}$$

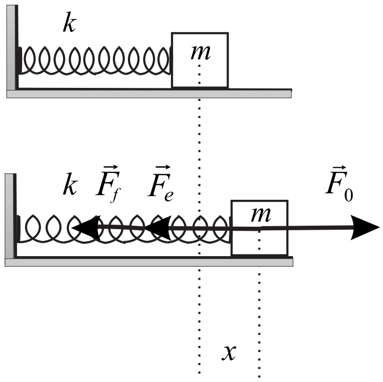

Figura 3.6: Un pendul elastic funcţionînd în regim forţat

Pentru aceleaşi condiţii iniţiale, în cazul amortizării critice, corpul se va întoarce în poziţia de echilibru în cel mai scurt timp. În funcţie de valorile constantelor A şi B şi de semnul acestora, corpul se apropie asimptotic de poziţia de echilibru sau o traversează o singură dată înainte de a reveni la ea. Regimul amortizat critic este ales în funcţionarea instrumentelor magnetoelectrice, întrucât în acest regim deviaţia echipajului mobil are loc foarte rapid şi nu apar oscilaţii mecanice ale acului indicator în jurul valorii indicate.

3.3 Oscilații forțate

Să analizăm în continuare ce se întâmplă dacă acţionăm din exterior cu o forţă care să compenseze pierderile prin frecare. Presupunem că forţa exterioară este periodică, cu amplitudinea F_0 şi frecvenţa Ω, de forma:

$$F = F_0 \cos \Omega t. \tag{3.46}$$

Putem să reprezentăm forţa sub forma complexă:

$$\widehat{F} = F_0 e^{j\,\Omega\, t} \tag{3.47}$$

şi, în final, să luăm în considerare doar valoarea reală a acesteia.

Ecuaţia diferenţială a mişcării pentru sistemul din Fig.3.6 devine în acest caz:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f e^{-j\,\Omega\, t}, \tag{3.48}$$

unde:

$$\delta = \frac{r}{2m},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},\ f = \frac{F_0}{m}. \tag{3.49}$$

Ecuaţia (3.48) este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul doi, neomogenă (din cauza termenului independent de variabila x, din membrul doi). Soluţia unei astfel de ecuaţii este de forma:

$$x(t) = x_{omog}(t) + x_{part}(t), \tag{3.50}$$

unde x_{omog} este soluţia ecuaţiei omogene (aflată deja!) iar x_{part} este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene, de forma termenului liber:

$$x_{part}(t) = \bar{C}e^{j\Omega t}. \tag{3.51}$$

$\bar{C}$ este, în general, o mărime complexă ce conţine şi informaţiile legate de întârzierea în fază. Alegerea expresiei matematice de o asemenea formă este justificată de comportarea practică a oscilatorului forţat care execută, în final, o mişcare periodică cu pulsaţia forţei exterioare.

Înlocuind soluţia (3.51) în ecuaţia (3.48), se obţine, după simplificarea factorului nenul (exponenţiala):

$$\left(-\Omega^2 - j2\delta\Omega + \omega_0^2\right)\bar{C} = f. \tag{3.52}$$

Amplitudinea complexă este:

$$\bar{C} = \frac{f}{(\omega_0^2 - \Omega^2) - j2\delta\Omega}. \tag{3.53}$$

Soluţia generală a mişcării poate fi scrisă sub forma:

$$x(t) = e^{-\delta t}(Ae^{j\omega_1 t} + Be^{-j\omega_1 t}) + \frac{f}{(\omega_0^2 - \Omega^2) - j2\delta\Omega}e^{j\Omega t}, \tag{3.54}$$

în care constantele A şi B se determină din condiţiile iniţiale.

Deoarece primul termen al ecuaţiei (3.54) (soluţia ecuaţiei omogene) scade exponenţial în timp, el va fi nenul doar un interval de timp limitat, denumit *timp tranzitoriu*. După trecerea regimului tranzitoriu, mişcarea intră într-un *regim permanent* de oscilaţie, iar legea de mişcare este dată doar de soluţia particulară $x(t) = x_{part}(t)$:

$$x(t) = \frac{f}{(\omega_0^2 - \Omega^2) - j2\delta\Omega}e^{j\Omega t}. \tag{3.55}$$

Înmulţind (3.53) cu complexul conjugat al lui $\bar{C}$, se obţin partea reală şi cea complexă a amplitudinii de oscilaţie:

$$\bar{C} = f\left[\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2} + j\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}\right] = Ce^{j\Phi}. \tag{3.56}$$

Ca urmare, modulul amplitudinii complexe este:

$$C = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}, \tag{3.57}$$

iar faza acesteia:

$$tg\Phi = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \tag{3.58}$$

Soluţia mişcării este partea reală a expresiei complexe:

$$x(t) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} e^{j(\Omega t - arctg\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2})} \tag{3.59}$$

adică:

$$x(t) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} \cos(\Omega t - arctg\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}). \tag{3.60}$$

3.3.1 Fenomenul de rezonanţă

Dependenţa amplitudinii de frecvenţa forţei exterioare este neliniară, prezentând un maxim pentru $\Omega = \Omega_r$. Acest maxim se găseşte din condiţiile:

$$\frac{dC}{d\Omega} = 0, \ \frac{d^2C}{dC^2} < 0, \tag{3.61}$$

adică:

$$-\frac{f}{2}\left[(\omega_0^2 - \Omega_r^2)^2 + (2\delta\Omega_r)^2\right]^{-3/2}\left[2\left(\omega_0^2 - \omega_r^2\right)(-2\Omega_r) + (2\delta\Omega_r)(2\delta)\right] = 0. \tag{3.62}$$

Aşadar, rezonanţa amplitudinii apare atunci când pulsaţia forţei exterioare are valoarea:

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \tag{3.63}$$

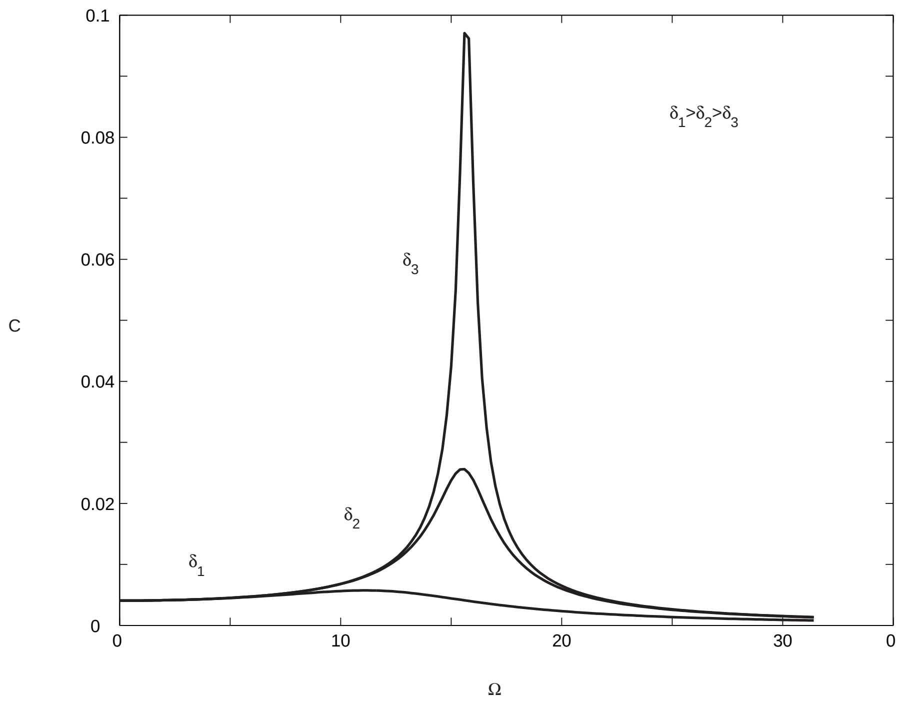

Figura 3.7: Curbe de rezonanţă pentru trei valori diferite ale coeficientului de amortizare ($\delta_1 > \delta_2 > \delta_3$).

La rezonanţă, amplitudinea oscilaţiilor forţate este:

$$C_{\max} = \frac{f}{2\delta\Omega_r}. \tag{3.64}$$

Constatăm că, în condiţii de amortizare slabă, pulsaţia Ω_r tinde spre valoarea pulsaţiei proprii a oscilatorului, ω_0. Odată cu scăderea amortizării, amplitudinea maximă de rezonanţă creşte asimptotic spre infinit.

Fenomenul de creştere a amplitudinii oscilaţiilor forţate la o valoare maximă, atunci când pulsaţia forţei exterioare are valoarea Ω_r se numeşte rezonanţă a amplitudinii.

În Fig.3.7 este ilustrat modul în care se modifică curba de rezonanţă pentru trei valori ale coeficientului de amortizare ($\delta_1 > \delta_2 > \delta_3$).

Mărimea notată $\alpha = \frac{C}{C_{max}}$ se numeşte *amplitudine normată.* Pentru amortizări mici ($\delta < \omega_0$) şi pulsaţii apropiate de pulsaţia de rezonanţă

($\Omega \cong \omega_r \cong \omega_0$), se găseşte că amplitudinea normată are valoarea:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega_0}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}, \tag{3.65}$$

unde Q a fost definit de relaţia (3.42).

Scăderea lui α la valoarea $\frac{1}{\sqrt{2}}$ are loc pentru pulsaţiile Ω_1 şi Ω_2 care satisfac relaţiile:

$$\frac{\omega_0}{\Omega_1} - \frac{\Omega_1}{\omega_0} = +\frac{1}{Q}, \ \frac{\omega_0}{\Omega_2} - \frac{\Omega_2}{\omega_0} = -\frac{1}{Q}. \tag{3.66}$$

Intervalul dintre frecvenţele corespunzătoare scăderii amplitudinii la $1/\sqrt{2}$ din valoarea maximă[6] se numeşte *lărgimea curbei de rezonanţă* (B). Deci:

$$B = \Omega_2 - \Omega_1. \tag{3.67}$$

Din relaţiile (3.66), prin adunarea şi scăderea lor, rezultă, în aproximaţia considerată ($\Omega \cong \Omega_r \cong \omega_0$), o formulă de calcul pentru factorul de calitate a oscilatorului forţat:

$$Q = \frac{\omega_0}{B}. \tag{3.68}$$

Comparând cele două expresii găsite pentru factorul de calitate se observă că:

$$B = 2\delta. \tag{3.69}$$

Lărgimea curbei de rezonanţă este egală cu dublul constantei de amortizare.

3.4 Probleme

1. Ecuaţia de mişcare a unui corp este:

$$x = 2sin^2(1,00t - \frac{\pi}{4}), \tag{3.70}$$

   unde x este măsurat în cm iar pulsaţia în rad/s.

   (a) Determinaţi amplitudinea, faza iniţială şi perioada oscilaţiilor;

   (b) Aflaţi viteza şi acceleraţia;

[6] Cu alte cuvinte, scăderea la jumătate a puterii

Răspuns: Deoarece:

$$x = 2sin^2(1,00t - \frac{\pi}{4}) = [1 - cos(2,00t - \frac{\pi}{2})], \qquad (3.71)$$

a). mişcarea este oscilatorie armonică, avînd următoarele caracteristici: amplitudinea x_0=1 cm, faza iniţială ϕ_0=$\frac{\pi}{2}$) rad iar perioada oscilaţiilor T_0=$\frac{2\pi}{\omega_0}$=$\frac{2\pi}{2,00}$=π s.

b). viteza şi acceleraţia mişcării sunt:

$$v = \frac{dx}{dt} = 2,00sin(2,00t - \frac{\pi}{2});\ a = \frac{dv}{dt} = 4,00cos(2,00t - \frac{\pi}{2}) \qquad (3.72)$$

2. Cât este decrementul logaritmic al unui pendul matematic de lungime l ştiind că timpul de relaxare al oscilaţiilor este τ?

   Răspuns: Conform definiţiei, decrementul logaritmic este:

$$D = \delta T = \frac{1}{\tau}T = \frac{2\pi}{\tau}\frac{1}{\sqrt{\frac{l}{g} - \frac{1}{\tau^2}}} \qquad (3.73)$$

3. Un corp cu masa m = 5Kg se deplasează unidimensional (de-a lungul direcţiei x), sub acţiunea a două forţe: o forţă orientată în sens invers deplasării, având valoarea $F = 40x(N/m)$ şi o forţă proporţională cu viteza, care are valoarea de 200N la viteza $v = 10m/s$.Se consideră următoarele condiţii iniţiale: $x(t = 0) = 20$m, $\dot{x}(t = 0) = 0$.Să de determine:

   (a) ecuaţia diferenţială a mişcării;

   (b) soluţia mişcării;

   (c) amplitudinea, perioada şi frecvenţa mişcării;

   (d) timpul de relaxare, decrementul logaritmic şi factorul de calitate.

   Rezolvare:

   (a) Conform principiului fundamental al mecanicii clasice, ecuaţia diferenţială a mişcării este:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -F_e - F_f \Rightarrow \\ m\ddot{x} &= -kx - r\dot{x}, \end{aligned}$$

unde $k = 40$N/m şi 200N$= r \cdot 10$m/s adică $r = 20$Ns/m. Aşadar:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x &= 0, \\ \ddot{x} + 4\dot{x} + 8x &= 0(ms^{-2}). \end{aligned}$$

Prin identificarea cu forma generală a ecuaţiei oscilatorului amortizat, rezultă: $2\delta = 4(s^{-1}), \omega_0^2 = 8(s^{-2})$.

(b) Deoarece $\delta^2 = 4$ şi $\omega_0^2 = 8, (\delta^2 < \omega_0^2)$ mişcarea este sub-amortizată cu frecvenţa $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 2(s^{-2})$. Soluţia ecuaţiei diferenţiale a mişcării este oscilaţia amortizată:

$$x(t) = Ce^{-\delta t}\cos(\omega t - \varphi).$$

Amplitudinea şi faza mişcării le aflăm din condiţiile iniţiale:

$$\begin{aligned} t &= 0 : x(t = 0) = C\cos\varphi = 20m \\ t &= 0 : \dot{x}(t = 0) = -\delta C\cos\varphi + \omega C\sin\varphi = 0m/s \end{aligned}$$

Din a doua relaţie rezultă:

$$tg\varphi = \frac{\delta}{\omega} \Rightarrow \varphi = arctg1 = \frac{\pi}{4},$$

şi ca urmare:

$$C = \frac{20}{\cos\varphi} = 20\sqrt{2}(m).$$

Soluţia mişcării devine:

$$x(t) = 20\sqrt{2}e^{-2t}\cos(2t - \frac{\pi}{4})(m).$$

(c) Prin identificarea cu ecuaţia generală, s-a obţinut amplitudinea $C = 20\sqrt{2}(m)$, iar perioada şi frecvenţa sunt:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi(s) \\ \nu &= \frac{1}{T} = \pi^{-1}(s^{-1}). \end{aligned}$$

(d) Timpul de relaxare şi decrementul logaritmic sunt respectiv:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{\delta} = 0.5s \\ D &= \frac{T}{\tau} = 2\pi.\end{aligned}$$

Ca urmare putem calcula şi factorul de calitate:

$$Q = \frac{\pi}{D} = 0.5$$