Capitolul 2

Dinamica punctului material

Mişcarea corpurilor având: (a) viteze mult inferioare vitezei luminii şi (b) loc în domenii spaţiale macroscopice este studiată de *mecanica newtoniană*. Denumirea a fost atribuită în onoarea fizicianului I. Newton[1].

Mişcarea corpurilor cu viteze comparabile cu viteza luminii constituie obiectul de studiu al *mecanicii relativiste*, în timp ce mişcarea unor corpuri (particule) în interiorul unor domenii microscopice (cum este, de exemplu, în interiorul atomilor) constituie obiect de studiu pentru *mecanica cuantică*. Obiectul de studiu al mecanicii newtoniene îl constituie, aşadar, sisteme fizice ce pot fi considerate cazuri limită ale celor două domenii sus-menţionate. De altfel, atât mecanica relativistă, cât şi cea cuantică au apărut mult mai târziu, la începutul secolului XX.

Aşa cum am arătat şi în capitolul anterior, partea mecanicii care studiază mişcarea corpurilor, în contextul cauză-efect, este *Dinamica*. Dinamica newtoniană se fundamentează pe trei principii, care constituie adevăruri ce nu trebuie demonstrate, ci verificate prin consecinţe. Începuturile dinamicii sunt legate de contribuţiile lui Galileo Galilei în secolele XVI-XVII.

---

[1]Isaac Newton (1642-1727) fizician englez este considerat fondatorul ştiinţelor naturii în epoca modernă. Printre cele mai importante contribuţii ştiinţifice ale lui I. Newton amintim: introducerea calculului diferenţial, formularea principiilor mecanicii clasice, studii asupra naturii luminii şi a unor instrumente optice, descoperirea legii atracţiei universale. Principala sa lucrare, *Principiile matematice ale filosofiei naturale*, este şi astăzi considerată una din cele mai valoroase cărţi de ştiinţă publicate de-a lungul anilor. Informaţii suplimentare despre viaţa şi opera ştiinţifică a lui Newton pot fi găsite la adresa de web: http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/∼ history/Mathematicians/Newton.html.

2.1 Principiile dinamicii newtoniene

2.1.1 Enunțul principiilor dinamicii

1. *Principiul I*, cunoscut şi ca *principiul inerţiei*: Un punct material tinde să-şi menţină starea de repaus relativ sau de mişcare rectilinie şi uniformă, atât timp cât nu se află sub acţiunea unor forţe exterioare.

2. *Principiul II*, cunoscut şi ca *principiul fundamental al dinamicii*: Rata de variaţie în timp a impulsului unui punct material este egală cu forţa rezultantă ce acţionează asupra acestuia:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \tag{2.1}$$

3. *Principiul III*, cunoscut şi ca *principiul acţiunii şi reacţiunii*: Dacă două corpuri se află în interacţiune, forţele "resimţite" de fiecare în parte sunt egale ca mărime, dar opuse ca sens. Aceste forţe perechi, numite *acţiune* şi, respectiv, *reacţiune* se manifestă asupra a două corpuri diferite.

Să discutăm, în continuare, câteva dintre implicaţiile acestor principii.

- O primă observaţie, de ordin general: cele trei principii ale dinamicii sunt adevăruri valabile *doar în raport cu un sistem de referinţă inerţial*, **SRI**. În practică, cel mai utilizat **SRI** este aşa-numitul *sistem al laboratorului*, prescurtat **SL**. Trebuie precizat că denumirea de sistem al laboratorului nu trebuie luată *ad literam*, în sensul că ea nu presupune ca studiul mişcării să se facă exclusiv într-un laborator. Din modul în care a fost definit un **SRI**, rezultă că un sistem de referinţă care se deplasează *accelerat* în raport cu un **SRI** este *neinerţial*[2].

- Interacţiunile dintre corpuri se realizează, fie direct (prin contact fizic), fie la distanţă, prin intermediul câmpului (gravitaţional, electromagnetic, etc.).

[2] Deoarece sistemul laboratorului este legat de Pământ şi execută o mişcare de rotaţie, împreună cu acesta, nici măcar **SL** nu este *în mod riguros* un reper inerţial, decât într-o primă aproximaţie.

- Tendinţa corpurilor de a-şi păstra starea de mişcare sau de repaus relativ se numeşte *inerţie*. În termeni cantitativi, măsura inerţiei este exprimată de mărimea fizică denumită *masa inertă* sau *masă inerţială* şi a fost notată cu m în ecuaţia (2.1). Se înţelege că, cu cât este mai mare masa inertă a punctului material, cu atât mai mare este inerţia acestuia la modificarea stării de mişcare.

- Având în vedere că, în mecanica newtoniană, masa inertă este o mărime independentă de timp, ecuaţia principiului II al dinamicii se poate scrie şi sub forma:
$$\frac{md\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}. \tag{2.2}$$

  Aceasta este o formulare mai puţin generală decât ecuaţia (2.1). Conform ecuaţiei (2.2) o aceeaşi forţă $\vec{F}$ va produce acceleraţii diferite, când acţionează asupra unor corpuri de masă diferită, *însă va produce întotdeauna o aceeaşi variaţie de impuls oricărui corp, indiferent de masa inertă a acestuia.*

  Formularea (2.1) este valabilă chiar şi în mecanica relativistă, caz în care multe dintre adevărurile mecanici clasice nu mai sunt valabile. De exemplu, dacă în mecanica clasică acceleraţia, conform ecuaţiei (2.2), este direct proporţională cu forţa, iar vectorii forţă şi acceleraţie au aceeaşi orientare, în mecanica relativistă se demonstrează că aceşti doi vectori nu mai sunt paraleli între ei[3].

- Ecuaţia (2.2) este esenţială în mecanică, deoarece ea exprimă *o legătură directă între factorul cauză (forţa) şi factorul efect acesteia (acceleraţia).*

- Ecuaţia vectorială (2.2) este echivalentă, într-un spaţiu tridimensional, cu trei ecuaţii scalare. De exemplu, într-un sistem de coordonate

[3]În mecanica relativistă se consideră că masa depinde de viteză, conform unei relaţii de forma: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, unde m_0 este masa de repaus a corpului, v - viteza acestuia, iar $c-$ viteza luminii.

carteziene, acestea sunt:

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2}, \tag{2.3}$$

$$F_y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \tag{2.4}$$

$$F_z = m\frac{d^2z}{dt^2}. \tag{2.5}$$

- Toate forţele întâlnite în fizică exprimă intensitatea unor interacţiuni, reductibile la patru tipuri fundamentale: (a) gravitaţionale; (b) electromagnetice; (c) nucleare tari şi (d) nucleare slabe. Cele mai multe dintre interacţiunile dinafara celor fundamentale sunt reductibile la forţe de natură electromagnetică.

- Conform principiului III al dinamicii, în cazul unui sistem izolat de două puncte materiale, acceleraţiile pe care fiecare corp din pereche le capătă sub influenţa celuilalt, sunt orientate pe aceeaşi direcţie, sunt opuse ca sens şi invers proporţionale cu masele lor. Forţele nu există în afara interacţiunii dintre perechi de corpuri. Este foarte important de menţionat că *perechile acţiune-reacţiune acţionează asupra unor corpuri diferite*.

- Pe baza principiului III al dinamicii se poate imagina un procedeu de comparare a maselor. Dacă două puncte materiale sunt supuse *doar* acţiunii celor două forţe - perechi, $\vec{F}_{1\to2}$ şi $\vec{F}_{2\to1}$, cu:

$$\vec{F}_{1\to2} = \frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad \text{şi} \quad \vec{F}_{2\to1} = \frac{d\vec{p}_1}{dt}, \tag{2.6}$$

rezultă că:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0, \quad \text{deci } \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \overrightarrow{const.} \tag{2.7}$$

Aşadar, impulsul unui sistem de două puncte materiale *izolate* este o constantă vectorială. În raport cu un referenţial dat, **R**, între impulsurile unui punct material la două momente t şi t' diferite se poate scrie relaţia:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \quad \text{sau} \quad m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'. \tag{2.8}$$

Prin urmare:

$$m_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}_1') = -m_2 (\vec{v}_2 - \vec{v}_2') \tag{2.9}$$

şi deci:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|\vec{v}_2' - \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1' - \vec{v}_1|} \tag{2.10}$$

- Ori de câte ori studiul experimental al mişcării nu concordă aparent cu previziunile teoretice ale principiilor dinamicii, este nevoie de verificat dacă:

  1. am definit corect sistemul de studiat şi dacă nu am uitat să luăm în considerare o anumită interacţiune;
  2. reperul utilizat aproximează într-o măsură adecvată condiţia de reper galilean;
  3. scara de timp este suficient de precisă;
  4. expresiile concrete ale forţelor sunt corecte.

  Dintre acestea, condiţia (2) pune probleme în mod frecvent, aşa cum am menţionat anterior. De exemplu, o analiză riguroasă a mişcării corpurilor la suprafaţa Pământului implică recurgerea la un sistem de referinţă inerţial galilean legat nu de Pământ, ci de un sistem stelar. În acest context au putut fi explicate efectele deplasării spre est, existenţa a două maree pe zi, comportamentul pendulului Foucault, etc.

Alături de cele trei principii ale dinamicii enumerate mai sus, se mai menţionează (uneori chiar ca un al patrulea principiu) şi aşa-numitul *principiu al independenţei acţiunii forţelor, sau principiul superpoziţiei:*

În cazul în care asupra unui corp (punct material) acţionează mai multe forţe, acceleraţia imprimată corpului este egală cu rezultanta forţelor împărţită la masa acestuia:

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{2.11}$$

Evident, rapoartele $\vec{F}_i/m = \vec{a}_i$ reprezintă, fiecare în parte, acceleraţia pe care fiecare forţă $\vec{F}_i$ ar imprima-o punctului material, *dacă ar acţiona singură, independent de prezenţa celorlalte forţe.* Prin urmare am putea scrie relaţia anterioară şi sub forma:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i. \tag{2.12}$$

2.2 Integrarea ecuației diferențiale a mișcării

Una dintre sarcinile cele mai importante ale mecanicii este determinarea ecuaţiei de mişcare a corpurilor şi/sau ecuaţia traiectoriei. În acest scop, în mecanica newtoniană se pleacă de la ecuaţia principiului fundamental al dinamicii, care permite scrierea *ecuaţiei diferenţiale a mişcării*. O astfel de ecuaţie diferenţială este de ordinul II şi, în unele cazuri, ea poate avea o soluţie analitică. În cazul în care există o soluţie analitică, aceasta se află prin integrare succesivă[4]. Aşa cum vom vedea în continuare, pentru a găsi o soluţie $\vec{r}(t)$ unică, pe lângă cunoaşterea expresiei forţei în ecuaţia (2.2), sunt necesare informaţii suplimentare privind valorile vitezei şi coordonatei la momentul iniţial al mişcării.

În majoritatea cazurilor, forţele sunt funcţii de poziţia relativă a corpurilor, de viteză, sau de timp:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t). \tag{2.13}$$

Valoarea acceleraţiei se află din ecuaţia principiului II al dinamicii. În coordonate carteziene, de exemplu, cele trei componente ale acceleraţiei se vor scrie sub forma:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \tag{2.14}$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{m}F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \tag{2.15}$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{m}F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \tag{2.16}$$

Fiecare din aceste ecuaţii admit o infinitate de soluţii. Găsirea unei soluţii unice presupune cunoaşterea valorilor $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, la un anumit moment specificat. De obicei se precizează valorile acestor mărimi la momentul iniţial, de aceea ansamblul acestor valori se numeşte setul de *condiţii iniţiale*:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0), \tag{2.17}$$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0). \tag{2.18}$$

[4] Există clase de ecuaţii diferenţiale de ordinul II care nu au o soluţie analitică. În acest caz se folosesc o serie de tehnici (cum ar fi cele grafice sau numerice) de calcul al unor soluţii aproximative.

Integrarea ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării se poate face în funcţie de timp sau de-a lungul traiectoriei. Se pot găsi astfel o serie de mărimi fizice (impuls, moment unghiular şi energie) care, în anumite condiţii, sunt constante ale mişcării.

2.2.1 Impulsul. Conservarea impulsului.

Relaţia fundamentală (2.2) se poate scrie sub forma:

$$d\vec{p} = \vec{F}dt. \tag{2.19}$$

Acest lucru înseamnă că variaţia infinitezimală a impulsului punctului material în intervalul de timp dt este determinată de acţiunea forţei $\vec{F}$. Integrând între două momente oarecare de timp, notate t_1 şi t_2, se obţine:

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt, \tag{2.20}$$

care constituie formularea matematică a *teoremei variaţiei impulsului*. Procedând într-o manieră similară aceleia folosite în cazul vitezei şi acceleraţiei medii, cu referire la definirea şi interpretarea geometrică a acestora, putem defini *forţa medie* ca:

$$\vec{F}_m = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt. \tag{2.21}$$

Ultimele două relaţii permit interpretarea geometrică a impulsului ca aria de sub graficul $\vec{F} = \vec{F}(t)$) (vezi Fig.2.1). În situaţia în care forţa variază în timp după o lege oarecare, variaţia infinitezimală a impulsului (dp) este numeric egală cu aria elementară a dreptunghiului (Fdt) obţinut prin divizarea curbei în porţiuni pe care forţa se poate considera constantă. Adunând aria tuturor acestor fâşii se obţine aria regiunii $ABCD$ care este numeric egală cu variaţia totală a impulsului.

Aşa cum am găsit şi în secţiunea anterioară, în cazul unui punct material izolat ($F = 0$), relaţia (2.20) devine:

$$\vec{p}(t_2) = \vec{p}(t_1) = \overrightarrow{const}. \tag{2.22}$$

Impulsul punctului material izolat rămâne constant în timp, atât ca orientare cât şi ca mărime[5].

[5]În mecanica cuantică, valorile impulsului sunt cuantificate.

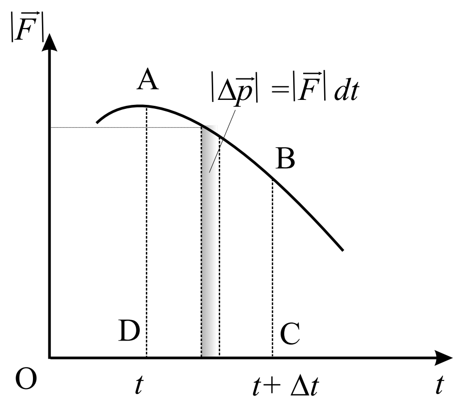

Figura 2.1: Variaţia impulsului are semnificaţia ariei de sub graficul $F = F(t)$. Ea se obţine prin sumarea ariilor dreptunghiurilor elementare: $\Delta p = aria(ABCD)$. Pe durata fiecărui interval dt, forţa are o valoare constantă.

Să analizăm ce se întâmplă cu un sistem izolat de două corpuri aflate în interacţiune.

În Fig.2.2 ele sunt reprezentate ca puncte materiale, notate A şi B, având impulsurile, la un anumit moment dat, $\vec{p}_A$ şi $\vec{p}_B$. Forţa cu care fiecare corp acţionează asupra celuilalt într-un interval infinitezimal de timp produce variaţiile infinitezimale de impuls:

$$\vec{F}_{AB} \cdot dt = d\vec{p}_A; \tag{2.23}$$

$$\vec{F}_{BA} \cdot dt = d\vec{p}_B. \tag{2.24}$$

Adunând cele două relaţii rezultă:

$$\left(\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA}\right) \cdot dt = d(\vec{p}_A + \vec{p}_B). \tag{2.25}$$

Conform principiului al treilea al lui Newton, cele două forţe formează o *pereche acţiune - reacţiune*:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}. \tag{2.26}$$

Ca urmare, legea conservării impulsului unui sistem izolat de două corpuri[6]:

$$\vec{p} = \vec{p}_A + \vec{p}_B = \overrightarrow{const}. \tag{2.27}$$

[6]După cum vom constata ulterior, această lege este valabilă şi pentru sistemele izolate de puncte materiale cu mai mult de două componente.

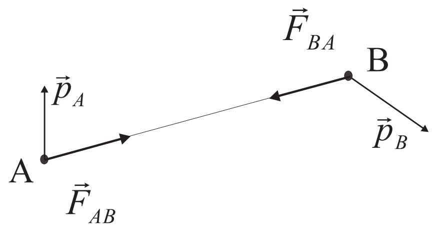

Figura 2.2: Sistem izolat de două corpuri aflate în interacţiune: $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$

În concluzie:
Impulsul total al unui sistem de două puncte materiale izolate se conservă.

2.2.2 Momentul unghiular. Conservarea momentului unghiular.

Să înmulţim vectorial relaţia (2.1) la stânga, cu $\vec{r}$:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}). \tag{2.28}$$

Aici am ţinut cont de faptul că masa inertă este independentă de timp şi că:

$$\vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) - \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}. \tag{2.29}$$

Ultimul termen al ecuaţiei precedente este zero deoarece $d\vec{r}/dt = \vec{v}$, iar vectorii $\vec{v}$ şi $m\vec{v}$ sunt coliniari, produsul lor vectorial fiind, de aceea, nul.

Putem acum defini momentul forţei şi momentul unghiular (sau momentul impulsului) în raport cu un punct, conform ecuaţiilor:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \tag{2.30}$$

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}. \tag{2.31}$$

Folosind aceste mărimi, relaţia (2.28) devine:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{J}}{dt}, \tag{2.32}$$

care reprezintă formularea matematică a *teoremei variaţiei momentului unghiular*:

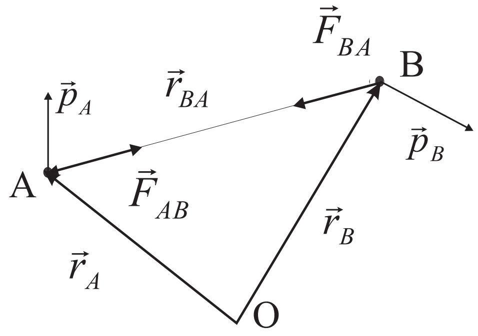

Figura 2.3: Un sistem izolat de corpuri în interacţiune

În raport cu un punct de referinţă dat, momentul forţei ce acţionează asupra unui corp este egal cu rata de variaţie în timp a momentului unghiular al acelui corp.

Integrând ecuaţia precedentă între două momente de timp t_1 şi t_2, se obţine relaţia:

$$\vec{J}(t_2) - \vec{J}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt. \tag{2.33}$$

Dimensiunile momentului forţei şi ale momentului unghiular şi unităţile de măsură corespunzătoare sunt:

$$[M] = [r]\,[F] = ML^2T^{-2}; \tag{2.34}$$
$$\langle M \rangle_{SI} = 1Kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = 1N \cdot m; \tag{2.35}$$
$$[J] = [r]\,[p] = ML^2T^{-1}; \tag{2.36}$$
$$\langle J \rangle_{SI} = 1Kg \cdot m^2 \cdot s^{-1} = 1N \cdot m \cdot s^{-1}. \tag{2.37}$$

În cazul unui punct material izolat, din (2.33) se obţine:

$$\vec{J}(t_2) = \vec{J}(t_1) = \overrightarrow{const}. \tag{2.38}$$

adică, în cazul unui sistem izolat de corpuri *este valabilă legea conservării momentului unghiular.*

Să analizăm ce se întâmplă în cazul unui sistem izolat de două corpuri, A şi B, aflate în interacţiune. În Fig.2.3 vectorii de poziţie corespunzători sunt notaţi $\vec{r}_A$ şi $\vec{r}_B$. Aplicând relaţia (2.32) fiecărui corp, se obţine:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_A \times \vec{F}_{AB} = \frac{d\vec{J}_A}{dt}; \tag{2.39}$$

$$\vec{M}_B = \vec{r}_B \times \vec{F}_{BA} = \frac{d\vec{J}_B}{dt}, \tag{2.40}$$

unde:

$$\vec{J}_A = \vec{r}_A \times \vec{p}_A, \tag{2.41}$$

$$\vec{J}_B = \vec{r}_B \times \vec{p}_B \tag{2.42}$$

sunt momentele unghiulare corespunzătoare ale celor două puncte materiale.

Sumând cele două momente şi ţinând cont de principiul al treilea al dinamicii ($\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$), se obţine:

$$\vec{M} = \vec{M}_A + \vec{M}_B = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}_{AB} \tag{2.43}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\vec{J}_A + \vec{J}_B\right). \tag{2.44}$$

Deoarece vectorul diferenţă:

$$\vec{r}_{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B \tag{2.45}$$

este coliniar cu forţele de interacţiune, rezultă că:

$$\vec{r}_{BA} \times \vec{F}_{AB} = 0. \tag{2.46}$$

De aici:

$$\vec{J} = \vec{J}_A + \vec{J}_B = \overrightarrow{const}. \tag{2.47}$$

adică:

Momentul unghiular al unui sistem de două corpuri izolate este o constantă a mişcării, păstrându-şi orientarea şi mărimea constante în timp.

2.2.3 Lucrul mecanic și puterea

Să înmulţim scalar relaţia fundamentală (2.1), cu vectorul deplasare infinitezimală $d\vec{r}$.

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = md\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right). \tag{2.48}$$

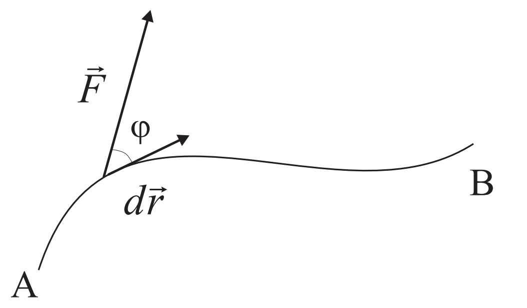

Figura 2.4: Lucrul mecanic elementar la o deplasare infinitezimală pe o traiectorie oarecare depinde de unghiul φ dintre vectorii forţă şi deplasare.

Mărimea:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos\varphi \tag{2.49}$$

reprezintă *lucrul mecanic elementar* efectuat de forţa $\vec{F}$ la deplasarea pe distanţa infinitezimală dr[7]. După cum este definit (ca produs scalar), lucrul mecanic depinde de unghiul dintre direcţia forţei şi cea a vectorului deplasare, putând fi zero, pozitiv sau negativ.

Lucrul mecanic total efectuat la deplasarea între punctele A şi B pe traiectoria marcată în Fig.2.4 se află integrând relaţia (2.49) între cele două puncte:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{2.50}$$

Lucrul mecanic are semnificaţia ariei de sub curba $F(r)$.

Împărţind relaţia (2.49) la dt, putem defini o nouă mărime, numită *putere mecanică*, P:

$$P = \frac{dL}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \tag{2.51}$$

Puterea mecanică este egală cu lucrul mecanic produs în unitatea de timp. Aşadar, puterea este o mărime de stare şi ea are valori instantanee care se pot

[7] A nu se se confunda notaţia dL cu *variaţia lucrului mecanic, care ar fi o mărime fără sens.* Lucrul mecanic este o *mărime de proces* şi nu una de stare, ca urmare dL nu este o variaţie a lui L, ci un L infinit mic. Uneori, pentru a elimina o posibilă confuzie, lucrul mecanic elementar, ca şi o cantitate infinitezimală de căldură se notează cu δL, respectiv, δQ.

modifica de la moment la moment. Ea este o mărime scalară. Dimensiunile lucrului mecanic şi ale puterii sunt, respectiv:

$$[L] = [F]\,[d] = ML^2T^{-2}, \tag{2.52}$$

$$[P] = \frac{[L]}{[t]} = ML^2T^{-3}, \tag{2.53}$$

iar unităţile de măsură corespunzătoare:

$$\langle L\rangle_{SI} = 1N\cdot m = 1J, \tag{2.54}$$

$$\langle P\rangle_{SI} = 1N\cdot m\cdot s^{-1} = 1J\cdot s^{-1} = 1W. \tag{2.55}$$

Un Joule ($1J$) este lucrul mecanic efectuat de o forţă de $1N$ la deplasarea unui punct material pe distanţa de $1m$. Unitatea de măsură a puterii, în Sistemul Internaţional, este Watt-ul, prescurtat W[8].

2.2.4 Energia cinetică

Cantitatea $\frac{1}{2}mv^2$ din relaţia (2.48) se numeşte *energie cinetică* şi se notează cu E_c. Revenind la această relaţie şi ţinând cont de notaţiile făcute, rezultă că:

$$dL = dE_c. \tag{2.56}$$

Integrând ecuaţia anterioară între două puncte de pe traiectorie, găsim:

$$L = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = E_c(B) - E_c(A). \tag{2.57}$$

Relaţia (2.57) reprezintă expresia matematică a *teoremei de variaţie a energiei cinetice*:

Variaţia energiei cinetice a unui punct material, între două stări în decursul mişcării, este egală cu lucrul mecanic efectuat de forţa rezultantă ce acţionează asupra punctului material, pe durata mişcării între aceste stări.

[8]Denumirea a fost dată în onoarea fizicianului James Watt (1736-1819) fizician şi inginer scoţian, inventatorul maşinii moderne cu abur. Informaţii despre contribuţiile sale la dezvoltarea ştiinţei şi tehnicii pot fi găsite la adresa de web: http://www.history.rochester.edu/steam/marshall/.

Relaţia (2.57) ne permite definirea energiei cinetice a punctului material, dacă considerăm că la momentul iniţial acesta era în repaus:

$$E_c = \int_{A(v=0)}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \qquad (2.58)$$

Energia cinetică reprezintă, aşadar, lucrul mecanic necesar pentru a aduce un corp, aflat iniţial în repaus, la o viteză v.

2.2.5 Energia potenţială. Forţe conservative

Să calculăm lucrul mecanic efectuat la deplasarea unui punct material între punctele A şi B. Considerăm că mişcarea mobilului se datorează existenţei unei forţe de interacţiune $\vec{F}$ din partea unui alt corp, situat undeva în vecinătate. Vom considera, în continuare, că forţa F este dependentă *doar* de distanţa dintre corpul de studiat şi un alt corp din vecinătatea lui[9]. Lucrul mecanic elementar, efectuat împotriva forţei de interacţiune, este:

$$dL = -\vec{F} \cdot d\vec{r}. \qquad (2.59)$$

O deplasare elementară, $\vec{dr}$, se poate descompune în două componente, $d\vec{r}_1$ şi $d\vec{r}_2$, după direcţia forţei şi, respectiv, perpendiculară pe aceasta (vezi Fig.2.5). În acest fel, vom putea scrie:

$$dL = -\vec{F} \cdot d\vec{r}_1 - \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 = -\vec{F} \cdot d\vec{r}_1. \qquad (2.60)$$

După cum se constată, lucrul mecanic total al forţei F, atunci când aceasta îşi schimbă punctul de aplicaţie între două puncte de pe traiectorie, are valoarea:

$$L_{AB} = \int_{A}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1, \qquad (2.61)$$

independent de lungimea deplasării după direcţia perpendiculară pe direcţia forţei[10]. O astfel de forţa este denumită *conservativă*. Lucrul mecanic al unei

[9]Proprietăţile unei astfel de forţe vor fi discutate mai în detaliu într-o secţiune următoare, dedicată studiului forţelor dependente de poziţie.

[10]Analiza se poate face şi invers, considerând descompunerea vectorului forţă după direcţiile vectorului deplasre şi, respectiv, perpendiculară pe aceasta. Lucrul mecanic total va depinde doar de componenta forţei de-a lungul deplasării.

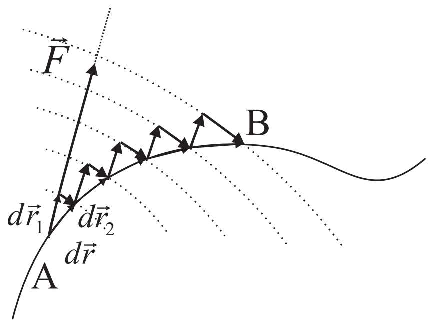

Figura 2.5: Descompunerea unei deplasări infinitezimale de-a lungul şi, respectiv, perpendicular pe direcţia forţei. Lucrul mecanic total nu depinde de deplasarea după direcţia perpendiculară pe direcţia forţei.

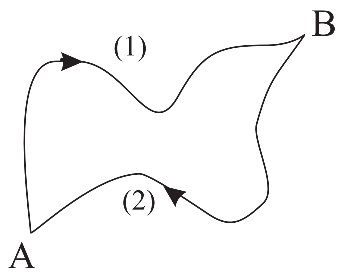

Figura 2.6: Lucrul mecanic nu depinde de drumul urmat: $L_{AB}^{(1)} = L_{AB}^{(2)}$.

forţe conservative este independent de forma traiectoriei, el fiind funcţie doar de poziţia punctelor între care are loc deplasarea.

Ca urmare, indiferent de drumul urmat de punctul material între cele două puncte (drumurile (1) sau (2) în Fig.2.6), lucrul mecanic are aceeaşi valoare.

$$L_{AB}^{(1)} = L_{AB}^{(2)}, \tag{2.62}$$

adică:

$$\left(-\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}\right)_{(1)} = \left(-\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}\right)_{(2)}. \tag{2.63}$$

Trecând totul într-un singur membru şi inversând limitele integralei, rezultă:

$$\left(-\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}\right)_{(1)} + \left(-\int_B^A \vec{F}\cdot d\vec{r}\right)_{(2)} = 0, \tag{2.64}$$

ceea ce înseamnă *condiţia integrală* ca o forţă să fie *conservativă*: integrala pe un contur închis a forţei (denumită şi *circulaţia vectorului forţă pe un contur închis*) trebuie să fie zero:

$$-\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0. \tag{2.65}$$

Având în vedere teorema lui Stokes-Ampère, se poate scrie:

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int (rot\ \vec{F})_n \cdot ds \tag{2.66}$$

Condiţia diferenţială de forţă conservativă este:

$$rot\ \vec{F} = 0. \tag{2.67}$$

Condiţiile (2.65) si (2.67) permit definirea unei mărimi fizice scalare, numită *energie potenţială*, E_p. Ea descrie *capacitatea unui sistem de a efectua lucru mecanic*. Cu ajutorul relaţiei (2.67) se poate scrie:

$$\vec{F} = -grad\ E_p = -\nabla E_p. \tag{2.68}$$

În coordonate carteziene:

$$\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial E_p}{\partial x}\hat{y} - \frac{\partial E_p}{\partial x}\hat{z}. \tag{2.69}$$

Aşadar, vectorul forţă este orientat pe direcţia celei mai rapide creşteri a funcţiei energie potenţială. Pe de altă parte:

$$dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{2.70}$$

Integrând această relaţie rezultă:

$$E_p(B) - E_p(A) = -\int\limits_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{2.71}$$

După cum se observă, nu energia potenţială, ci variaţia acesteia poate fi precizată în mod exact. Pentru a defini energia potenţială a sistemului într-o anumită stare (precizată prin distanţa dintre corpuri, în acest caz), ar trebui definită o stare a sistemului, în care energia potenţială a acestuia să fie considerată zero. În cazul forţelor de tip $F \sim 1/r^2$, aceasta se întâmplă atunci când corpurile se află la o distanţă relativă infinit-mare. În termeni practici, aceasta presupune că distanţa dintre corpuri este atât de mare, încât forţele de interacţiune nu mai produc efecte detectabile[11]. Ca urmare:

$$E_p(B) = -\int\limits_\infty^B \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{2.72}$$

Energia potenţială a unui sistem este egală cu lucrul mecanic necesar "desfacerii" sistemului, iniţial legat, în părţile sale componente (care nu mai interacţionează în urma separării).

2.2.6 Legea conservării energiei mecanice. Forțe conservative

Din relaţiile (2.57) şi (2.71) rezultă:

$$E_c(B) - E_c(A) = -[E_p(B) - E_p(A)], \tag{2.73}$$

adică:

$$E_c(A) + E_p(A) = E_c(B) + E_p(B) = E = const. \tag{2.74}$$

[11] În cazul forţelor de natură gravitaţională, aceste distanţe sunt de ordinul miilor sau milioanelor de km, în schimb în cazul forţelor electrice dintre particulele componente ale nucleului atomic, distanţele "infinite" sunt de ordinul câtorva nanometri.

Aşadar, în cazul în care caracteristicile mişcării mecanice a unui sistem sunt determinate doar de prezenţa unor forţe conservative, energia mecanică totală, E, este o constantă a mişcării[12].

Mărimile pe care le-am obţinut prin integrarea ecuaţiei diferenţiale a mişcării sunt numite *integrale prime* ale mişcării. Ele permit simplificarea calculelor matematice necesare rezolvării unor probleme de mecanică, în sensul că, în locul integrării unor ecuaţii diferenţiale de ordinul II, care se obţin folosind principiul II al dinamicii, se pleacă de la ecuaţii diferenţiale de ordinul I. Din păcate, rezolvarea problemelor de mecanică plecând de la legile de conservare (acolo unde legile de conservare sunt respectate!) este lipsită de posibilitatea de a descrie stările intermediare ale sistemului şi deci de a urmări "filmul" evoluţiei acestuia între stările iniţială şi finală.

2.3 Aplicaţii

1. Un corp de masă m se află iniţial în repaus şi asupra lui se aplică o forţă:

   $$F = F_0 e^{-\lambda t}$$

   unde $\lambda > 0, F_0-$ constante. Determinaţi legea de mişcare şi legea vitezei.

   Rezolvare:

   Deoarece mişcarea se presupune unidimensională:

   $$m\frac{dv}{dt} = F_0 e^{-\lambda t}$$

   După separarea variabilelor se poate integra:

   $$\int_0^v dv = \frac{F_0}{m}\int_0^t e^{-\lambda t}dt$$

[12] Legea conservării energiei mecanice nu se respectă decât în cazul forţelor conservative. Când caracteristicile mişcării sunt determinate de alte tipuri de forţe, se vorbeşte despre legea conservării energiei, în sens general, în sensul că se includ şi efectele disipative, radiative, etc.

Se obţine:

$$v(t) = \frac{F_0}{\lambda m}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$$

Legea spaţiului o obţinem prin integrarea legii vitezei:

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t vdt \\ x(t) &= \int_0^t \left(1 - e^{-\lambda t}\right) dt \\ x(t) &= \frac{F_0}{\lambda^2 m}(e^{-\lambda t} + \lambda t - 1) \end{aligned}$$

2. Să se studieze mişcarea unidimensională a unui corp de masă m sub acţiunea unei forţe de tipul $F = -kv^2$.

   Rezolvare:

   Înlocuim expresia forţei în ecuaţia diferenţială a mişcării:

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^2 \tag{2.75}$$

   După separarea variabilelor:

$$dt = -\frac{m}{k}\frac{dv}{v^2} \tag{2.76}$$

   Găsim:

$$t - t_0 = -\frac{m}{k}\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} \tag{2.77}$$

   ceea ce conduce, după integrare şi considerarea lui $t_0 = 0$, la expresia vitezei:

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{kv_0}{m}t} \tag{2.78}$$

Aflăm legea spaţiului printr-o nouă integrare.

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} \frac{v_0}{1+\frac{kv_0}{m}t} dt \tag{2.79}$$

Integrala din membrul al doilea se rezolvă uşor dacă se face substituţia: $u = 1 + \frac{kv_0}{m}t$. Se obţine:

$$x = x_0 + \frac{m}{k} \ln\left(\frac{kv_0}{m}t + 1\right) \tag{2.80}$$