Capitolul 1

Cinematica punctului material

1.1 Obiectul cinematicii. Modelul de punct material

Mişcarea este o proprietate *intrinsecă* a materiei, în sensul că nu există materie în repaus absolut, după cum nu poate fi concepută mişcare fără suportul material. Modificarea stării de mişcare a unui sistem fizic este, de regulă, studiată ca o consecinţă a acţiunii corpurilor înconjurătoare, sau ca rezultat al interacţiunilor unor părţi din interiorul sistemului. Modificarea stării de mişcare poate fi studiată, pentru început, doar pur descriptiv, *fără a lua în considerare cauzele care o determină.* O astfel de abordare *geometrică* a mişcării este cunoscută drept *abordarea cinematică*, iar capitolul corespunzător din mecanică poartă numele de *Cinematică.* Deoarece un astfel de demers este mai simplu, el este ales în primă instanţă, atât pe considerente didactice[1], cât şi în ideea introducerii unor noţiuni şi mărimi fizice strict necesare ulterior în studiul mecanicii. Cinematica precede, aşadar, *Dinamica* – partea mecanicii în care sunt luate în considerare efectele unor factori-cauză şi anume *forţele* cu care corpurile exterioare sau interioare acţionează asupra sistemului studiat.

Descrierea completă a mişcării unui sistem fizic real este adesea o problemă fie prea complexă, fie nerelevantă. În practică, într-un anumit context, se pot ignora anumite amănunte, ne-esenţiale pentru problema studiată. O

[1] În condiţiile în care este necesară o abordare a unei teme de studiat, pornind de la simplu, spre complex – şi complet!

reprezentare simplificată a unui sistem sau a unui proces fizic se numeşte *model fizic*. Modelele fizice şi modelarea sunt instrumente esenţiale, nu numai în fizică, ci în întreg procesul cunoaşterii lumii înconjurătoare.

Descrierea matematică asociată unui model fizic simplu este, de asemenea, simplă. Din păcate, cu cât recurgem la modele tot mai simple, cu atât ne îndepărtăm mai mult de realitate. Cum lumea reală este întotdeauna mult mai complicată decât modelele cu care se operează în fizică, trebuie să fim conştienţi că şi rezultatele obţinute sunt, într-un anume sens, incomplete. Recurgerea la modele simple este necesară în faza incipientă a cunoaşterii naturii, inclusiv în şcoală. Pe măsura luării în considerare a aspectelor considerate iniţial ne-esenţiale, ne apropiem mai mult de realitate, cu preţul utilizării unui instrument matematic mai sofisticat şi mai dificil.

În fizică sunt cunoscute multe exemple de modele care au evoluat, în procesul cunoaşterii, într-o succesiune cuprinzând mai multe etape. Exemplele cele mai cunoscute sunt modelul atomului şi/sau al nucleului, modelul de fluid sau cel de solid rigid, diferite modele de unde etc.

Cel mai simplu model din mecanică este cel al *punctului material*. El poate fi folosit ori de câte ori se studiază mişcarea de translaţie a unui obiect sau sistem de obiecte, de dimensiuni mult mai mici decât distanţele parcurse. Un corp este astfel asimilat unui punct material[2], în care se consideră a fi concentrată întreaga sa masă. Se înţelege că un corp nu trebuie să fie neapărat ”mic” în accepţiunea proprie a cuvântului, pentru a fi tratat ca punct material. În măsura în care un astfel de punct material este în mişcare, el se denumeşte şi *mobil*, adică punct material în mişcare.

Modelul punctului material se aplică cu acelaşi succes, atât pentru studierea mişcării unor corpuri de dimensiuni şi mase gigantice (cum ar fi corpurile din interiorul sistemului solar), cât şi unor corpuri de dimensiuni nanoscopice (atomi, nuclee, electroni, etc.).

Abordarea care pleacă de la modelul de punct material este utilă în paşii ulteriori, când se trece la studiul mecanicii corpurilor de dimensiuni ce nu mai pot fi reduse la un punct. Dacă un corp este prea mare pentru a mai putea fi considerat particulă, el poate fi gândit ca o "colecţie" (un sistem) de puncte materiale. Rezultatele găsite în mecanica punctului material se extrapolează pentru sistemele de puncte, cu precauţiile necesare unei astfel de operaţii.

Mărimile fizice cele mai importante în cinematică sunt *viteza şi accelera-*

[2]Uneori, un punct material se denumeşte şi *particulă*.

ţia. Vom începe prin a defini aceste mărimi, urmând a le găsi expresiile în raport cu diferite sisteme de coordonate.

1.2 Traiectoria şi ecuaţiile cinematice

Pentru a studia modul în care se modifică în timp poziţia unui punct material în raport cu un altul, este nevoie de a defini un sistem de referinţă (denumit adesea şi reper), considerat fix în contextul problemei de studiat. Poziţia în raport cu reperul a punctului material a cărui mişcare o studiem este precizată prin aşa-numitul *vector de poziţie.* Acesta, notat cel mai adesea cu $\vec{r}$, are originea în originea reperului, iar vârful – în punctul material studiat. Proiecţiile lui $\vec{r}$ pe axele sistemului de referinţă utilizat (notat prescurtat cu **SR**) determină, de asemenea, în mod univoc, poziţia unui punct din spaţiu.

Într-un spaţiu tridimensional, poziţia mobilului, notată cu P în Fig.1.1, este determinată de un triplet de *numere*, numite *coordonate*, care reprezintă distanţe şi/sau unghiuri. Utilizarea reprezentării vectoriale are avantajul că expresiile mărimilor cinematice nu depind de tipul de coordonate ales.

Distanţa dintre două puncte din spaţiu se numeşte *metrică.* Mecanica newtoniană foloseşte metrica euclidiană, denumită adesea şi metrica galileeană, în memoria lui Galileo Galilei[3]. Distanţa dintre două puncte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $P_2(x_2, y_2, z_2)$, exprimată într-un sistem de coordonate carteziene[4], este dată de relaţia:

$$d = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \tag{1.1}$$

Traiectoria unui corp este curba descrisă de acesta în decursul mişcării, adică locul geometric al poziţiilor succesive ocupate de mobil în decursul

[3]Galileo Galilei (1564-1642), fizician italian, este considerat primul om de ştiinţă al epocii moderne. Principalele sale contribuţii în fizică sunt legate de descoperirea legilor mişcării pendulului, ale căderii libere a corpurilor, precum şi unele dispozitive tehnice (luneta astronomică, un nou model de pompa hidraulică, balanţa hidrostatică). A susţinut ipoteza heliocentrică a lui Copernicus. Cartea sa cea mai importantă este *Dialoguri despre principalele două sisteme ale lumii*, publicată la Florenţa în 1632 şi dedicată analizei critice a sistemului geocentric al lui Ptolemeu şi, respectiv, heliocentric al lui Copernicus. Printr-o coincidenţă, 1642 este anul morţii lui Galilei şi naşterii lui Newton. Informaţii suplimentare despre viaţa şi opera lui Galilei pot fi găsite şi la adresa de web: http://galileo.imss.firenze.it/museo/b/egalilg.html

[4]în funcţie de simetria problemei de studiat, pot fi folosite şi repere de tip sferic sau cilindric.

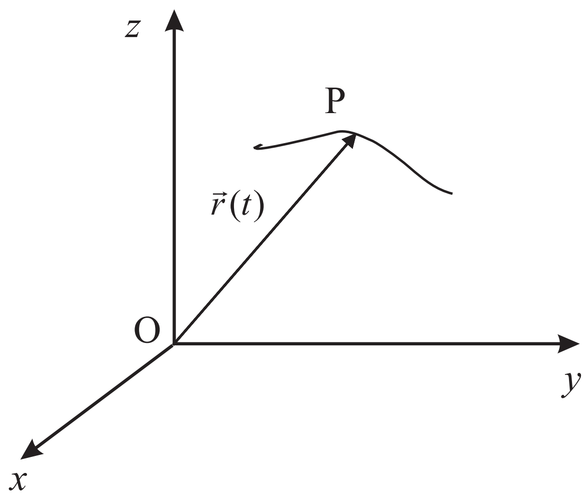

Figura 1.1: Reprezentarea traiectoriei unui punct material. La momentul t punctul mobil se află în P, descris de vectorul de poziţie $\vec{r}$.

mişcării. În mecanica clasică se consideră că traiectoria corpului este bine determinată[5], iar mulţimea poziţiilor succesive ocupate de acesta în decursul mişcării este *continuă*.

Să descriem, aşadar, poziţia unui punct material care se deplasează pe o curbă oarecare, cu ajutorul unui *vector de poziţie*, notat $\vec{r}$ (Fig.1.1). Legea de mişcare a mobilului este exprimată generic prin ecuaţia vectorială:

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \tag{1.2}$$

care este echivalentă cu trei ecuaţii scalare, ce descriu variaţiile în timp ale coordonatelor mobilului. De exemplu, în cazul unui sistem de coordonate cartezian tridimensional:

$$x = x(t), \tag{1.3}$$
$$y = y(t), \tag{1.4}$$
$$z = z(t). \tag{1.5}$$

[5] În mecanica cuantică, specifică sistemelor microscopice, se consideră că poziţia unei micro-particule (şi deci şi traiectoria acesteia) nu pot fi determinate cu orice precizie, de aceea se vorbeşte doar de o anumită *probabilitate* ca particula să se găsească, la un moment dat, într-o anumită zonă din spaţiu. Particula însăşi este "de-localizată", iar traiectoria ei se specifică print-un *nor de probabilitate*, care, în anumite cazuri se numeşte şi *orbital*.

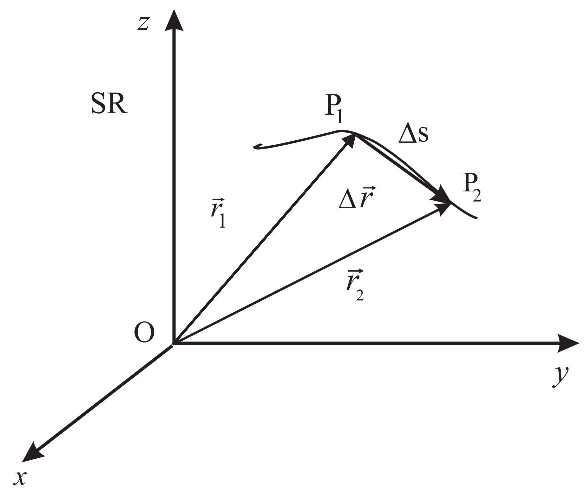

Figura 1.2: Vectorul deplasare, în intervalul $t_2 - t_1$, notat cu $\Delta\vec{r}$, reprezintă diferenţa vectorilor de poziţie ai punctelor P_1 şi P_2: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

Ecuaţiile (1.3), (1.4), (1.5) se numesc *ecuaţii parametrice* ale mişcării (parametrul este timpul t). Prin eliminarea timpului din ecuaţiile parametrice sus-menţionate, se obţine ecuaţia traiectoriei.

1.3 Vectorul deplasare, viteza și accelerația

Să considerăm că, în decursul mişcării sale, un mobil se află la momentul t_1 într-un punct P_1, descris de vectorul de poziţie $\vec{r}_1$ şi că la momentul t_2 el a ajuns în punctul P_2, descris de vectorul de poziţie $\vec{r}_2$, situaţie reprezentată în Fig.1.2. Distanţa dintre punctele P_1 şi P_2 între care s-a deplasat mobilul poate fi interpretată ca fiind modulul unui vector, $\Delta\vec{r}$, denumit *vector deplasare*:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \tag{1.6}$$

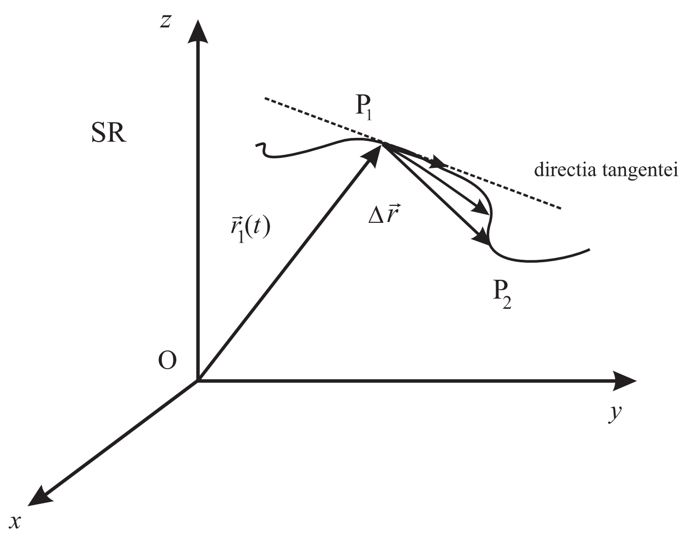

Figura 1.3: Pe măsură ce scade intervalul Δt, punctul P_2 se apropie din ce în ce mai mult de P_1, iar vectorul deplasare tinde să ajungă pe direcţia tangentei la traiectorie.

1.3.1 Viteza medie și viteza instantanee

Se defineşte *viteza medie* pe o porţiune Δs de traiectorie ca fiind raportul:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \tag{1.7}$$

unde s este coordonata curbilinie, măsurată *de-a lungul traiectoriei.*

Întrucât măsurarea distanţelor de-a lungul traiectoriei este mai puţin convenabilă, se preferă exprimarea vitezei mobilului în funcţie de coordonate sau de vectorii de poziţie ale acestuia. După cum rezultă din Fig.1.3, lungimea traiectoriei Δs parcursă de mobil într-un interval de timp finit, Δt, diferă semnificativ de mărimea vectorului deplasare, $\Delta\vec{r}$. Aşa cum vom vedea imediat, $\Delta\vec{r}$ ar fi o mărime mult mai convenabil de folosit pentru calcularea vitezei punctului material. Dacă considerăm $t_1 = t$ şi $t_2 = t + \Delta t$, atunci, în condiţiile în care $\Delta t \to 0$, vectorul deplasare Δr devine, la limită, egal cu distanţa curbilinie Δs. În plus, Δr devine tangent la curba-traiectorie (Fig.1.3).

În aceste circumstanţe, se poate defini *viteza instantanee* a mobilului:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \tag{1.8}$$

Constatăm, pe de altă parte, că viteza instantanee (sau momentană) este chiar derivata vectorului de poziţie în raport cu timpul:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \tag{1.9}$$

Ca urmare, *viteza instantanee (momentană)*, adică viteza mobilului *într-un punct* este un vector tangent la traiectorie; *mărimea sa este dată de derivata în raport cu timpul a vectorului său de poziţie.* Vectorul viteză instantanee este tangent la traiectorie, în timp ce vectorul viteză medie are direcţia secantei.

Pe de altă parte, pentru a calcula viteza medie a mobilului într-un interval de timp Δt, acesta se împarte în n subintervale Δt_1, Δt_2, ..., Δt_n atât de mici, încât pe durata fiecărui subinterval viteza instantanee să rămână practic constantă[6]. Viteza medie se defineşte ca:

$$v_m = \frac{v_1\Delta t_1 + v_2\Delta t_2 + ... + v_n\Delta t_n}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + ... + \Delta t_n} = \frac{1}{\Delta t}\sum_{i=1}^{n} v_i\Delta t_i. \tag{1.10}$$

Dacă aceste intervale de timp devin din ce în ce mai mici, vitezele medii pe fiecare interval de timp Δt_i se apropie de valorile instantanee şi, ca urmare, suma din relaţia anterioară devine o integrală:

$$v_m = \lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} v_i\Delta t_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta t_i} = \frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t}^{t+\Delta t} v dt. \tag{1.11}$$

Având în vedere cele două definiţii ale vitezei medii, date de (1.10) şi (1.11), rezultă:

$$\Delta s = v_m \Delta t = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} v\ dt = aria(ABCD). \tag{1.12}$$

Ca urmare, spaţiul parcurs de mobil într-un interval oarecare de timp reprezintă, din punct de vedere geometric, aria de sub curba vitezei, delimitată de dreptele $t = const.$ şi $t + \Delta t = const.$

[6]Prin urmare, viteza instantanee poate să varieze prin salt doar la trecerea între intervalele Δt_i şi Δt_{i+1}, $i = 1...n$

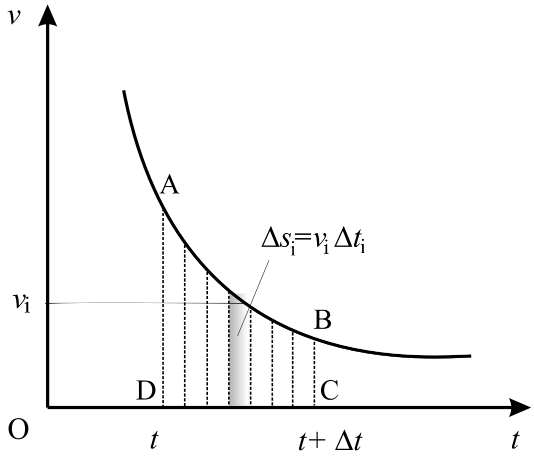

Figura 1.4: Pe durata fiecărui subinterval Δt_i, viteza rămâne practic constantă, v_i. Distanţa parcursă în subintervalul i este $\Delta s = v_i\ \Delta t_i$

Considerând momentul iniţial $t = 0$, spaţiul parcurs devine:

$$s(t) = s_0 + \int_0^t v(t)dt, \tag{1.13}$$

unde s_0 este coordonata curbilinie iniţială a corpului.

În termeni vectoriali, se poate scrie pentru vectorul de poziţie la momentul t:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t)dt, \tag{1.14}$$

unde $\vec{r}_0$ reprezintă vectorul de poziţie la momentul iniţial.

Dimensiunea şi unitatea de măsură a vitezei sunt, respectiv:

$$[v] = \frac{[\Delta s]}{[\Delta t]} = LT^{-1}; \tag{1.15}$$

$$\langle v \rangle_{SI} = 1m \cdot s^{-1}. \tag{1.16}$$

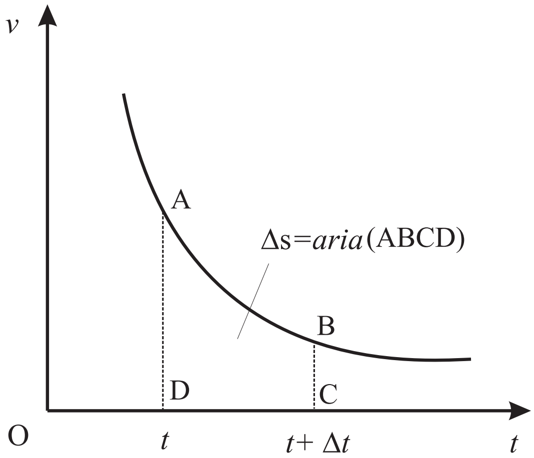

Figura 1.5: Spaţiul total parcurs de mobil în intervalul de timp specificat reprezintă suma ariilor dreptunghiurilor elementare.

1.3.2 Accelerația medie și accelerația instantanee

Pentru a caracteriza variaţia în timp a vectorului viteză, se defineşte o nouă mărime fizică, denumită *acceleraţie*. Ca şi în cazul vitezei, se poate defini o *acceleraţie medie* şi o *acceleraţie instantanee*. Acceleraţia medie este definită prin relaţia:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \tag{1.17}$$

Mărimea acceleraţiei medii a unui mobil care se deplasează între două puncte, de exemplu, P_1 şi P_2 (Fig.1.6) depinde de variaţia netă a vitezei în intervalul considerat.

Pentru precizarea ratei de variaţie în timp a vitezei instantanee se introduce noţiunea de *acceleraţia instantanee*, definită prin relaţia:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{1.18}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{1.19}$$

Acceleraţia este un vector care are orientarea lui $\Delta\vec{v}$. Ea reprezintă derivata de ordinul întâi a vitezei în raport cu timpul, prin urmare, derivata de ordinul doi a vectorului de poziţie, $\vec{r}(t)$ în raport cu acelaşi parametru.

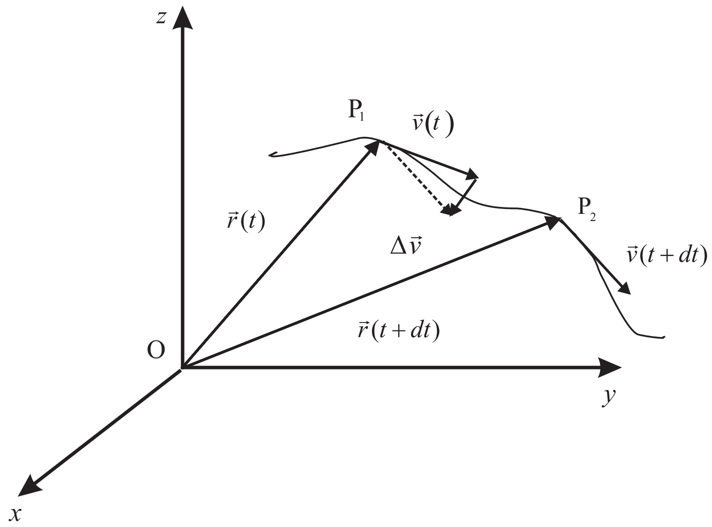

Figura 1.6: Determinarea variaţiei vitezei $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)$ în intervalul de timp dt.

Având în vedere definiţiile acceleraţiei medii şi ale acceleraţiei instantanee, (1.17) şi (1.20), se poate exprima acceleraţia medie şi sub forma:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{a}_i \Delta t_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta t_i} = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \vec{a} dt. \tag{1.20}$$

Se poate introduce, ca şi în cazul vitezei, o interpretare grafică. Pentru a determina variaţia de viteză a mobilului, în condiţiile în care acceleraţia nu este constantă, împărţim intervalul de timp în subintervale pe care acceleraţia îşi păstrează valoarea constantă. Aria fiecărui dreptunghi cu înălţimea a şi lăţimea Δt_i reprezintă chiar variaţia de viteză mobilului în acest interval de timp.

Sumând acum ariile tuturor dreptunghiurilor elementare, se obţine aria de sub curba vitezei (analog cu situaţia prezentată în Fig.1.5).

$$\Delta v = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} a dt = aria(ABCD). \tag{1.21}$$

Ca urmare, variaţia de viteză are semnificaţia ariei de sub curba $a = a(t)$,

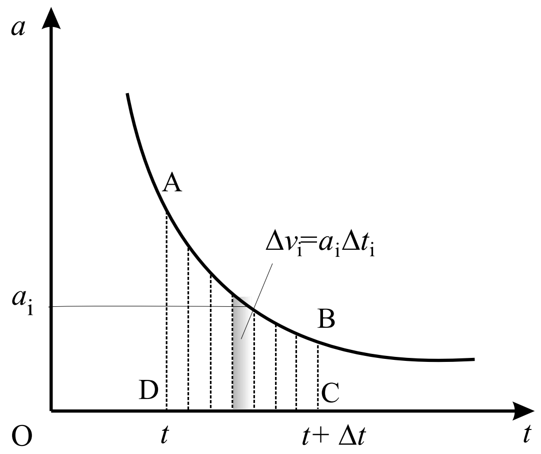

Figura 1.7: Pentru a determina variaţia vitezei în intervalul de timp Δt, îl divizăm în subintervale Δt_i pe care acceleraţia este practic constantă, a_i. Variaţia vitezei în subintervalul i este $\Delta v_i = a_i \Delta t_i$, adică aria unui dreptunghi.

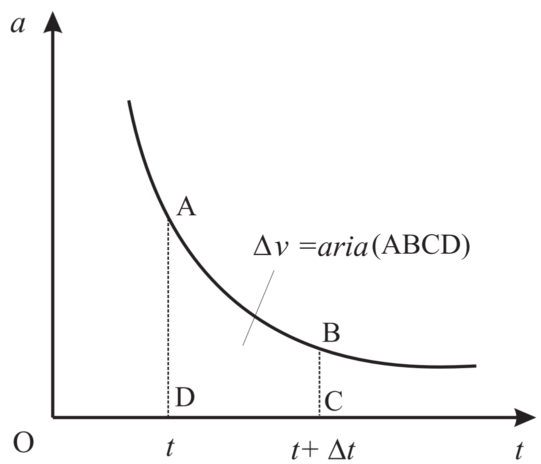

Figura 1.8: Sumarea după toate dreptunghiurile elementare determină aria de sub curba acceleraţiei

în intervalul de timp finit considerat. Considerând momentul iniţial $t = 0$, la un moment final oarecare, relaţia de mai sus se poate scrie, în cazul general:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)dt, \tag{1.22}$$

unde $\vec{v}_0$ reprezintă viteza iniţială a corpului. În cazul particular, în care acceleraţia este constantă, iar mişcarea - unidimensională, relaţia (1.22) devine:

$$v(t) = v_0 + at, \tag{1.23}$$

iar (1.14):

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2. \tag{1.24}$$

Dimensiunea şi unitatea de măsură pentru acceleraţie sunt, respectiv:

$$[a] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = LT^{-2}; \tag{1.25}$$

$$\langle a \rangle_{SI} = 1m \cdot s^{-2}. \tag{1.26}$$

1.4 Coordonate carteziene

În sistemul de *coordonate carteziene*, vectorul de poziţie al unui , P, este descris prin coordonatele sale x, y, z, obţinute prin proiecţia lui P pe cele trei plane reciproc perpendiculare:

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z). \tag{1.27}$$

Denumirea de coordonate carteziene vine de la numele lui René Descartes[7].

[7]René Descartes (1595-1650), matematician, fizician şi filosof francez, cunoscut şi sub numele său latinizat – Cartesius. Dintre contibuţiile sale cel mai importante în domeniul cunoaşterii, pot fi amintite introducerea sistemului de coordonate carteziene şi a geometriei analitice. Ca filosof, a marcat ruperea de scolastici, introducând principiile cunoaşterii raţionale. În două din cele mai importante cărţi ale sale, *Discurs asupra metodei* (1637) şi *Meditaţii* (1641), a încercat să extindă metodele cunoaşterii matematice în toate domeniile cunoaşterii. Este autorul celebrei aserţiuni *Cogito, ergo sum (Cuget, deci exist).* O scurtă biografie a lui R. Descartes poate fi găsită la adresa de web: http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/ history/Mathematicians/Descartes.html.

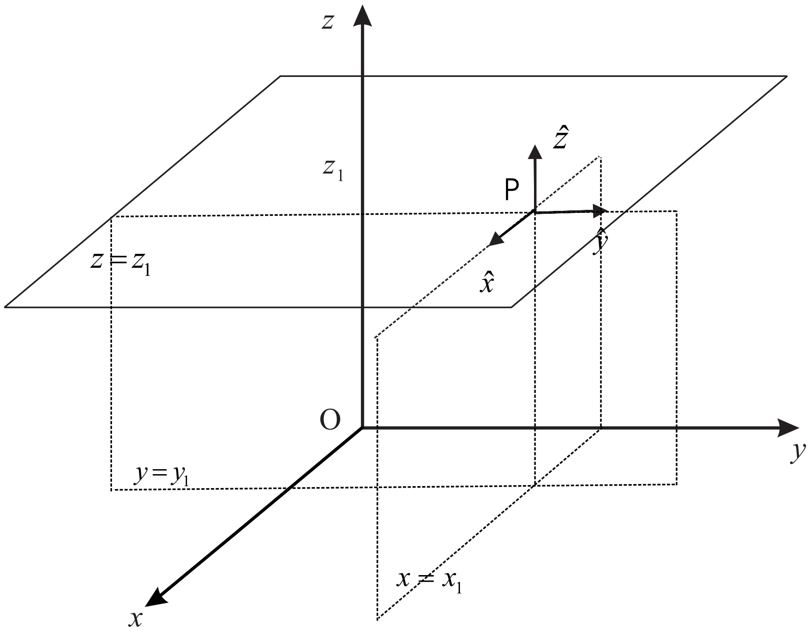

Figura 1.9: Sistemul de coordonate cartezian ($Oxyz$) şi versorii ($\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$)

În Fig.1.9, punctul P se găseşte la intersecţia a trei plane imaginare, reciproc perpendiculare, $x = x_1, y = y_1, z = z_1$. Fiecare dintre acestea sunt paralele cu planele triedrului drept $Oxyz$. Vom atribui apoi fiecăreia din axele triedrului $Oxyz$ câte un vector-unitate, orientat în sensul creşterii lui x, y, şi, respectiv, z. Aceşti vectori-unitate, pe care noi îi vom nota cu $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$[8], se numesc *versori* (Fig.1.9).

Deoarece orice vector poate fi exprimat ca o combinaţie liniară de aceşti trei versori, ei formează *baza sistemului.* Baza sistemului respectă regula burghiului drept, adică:

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}. \tag{1.28}$$

De exemplu, vectorul de poziţie se poate exprima prin relaţia:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}. \tag{1.29}$$

Vom găsi expresiile vitezei şi acceleraţiei, pornind de la expresia unei

[8]Uneori ei se notează cu $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ şi $\hat{k}$, sau $\hat{e}_x, \hat{e}_y$ şi $\hat{e}_z$

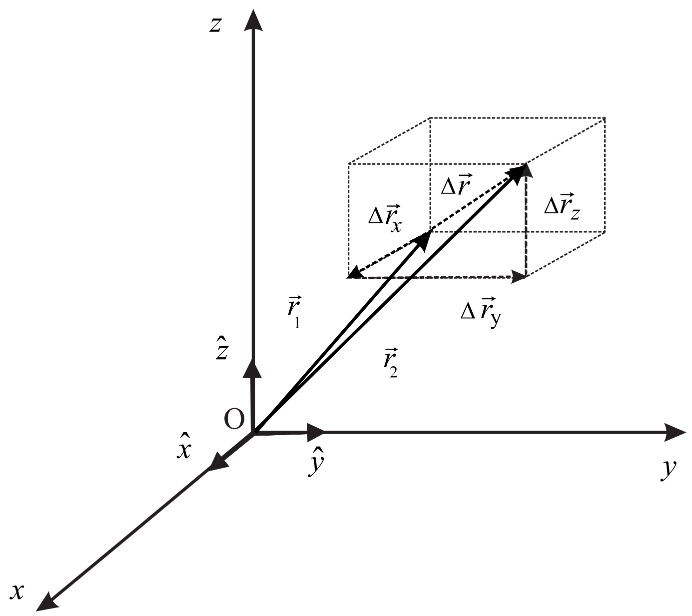

Figura 1.10: Descompunerea vectorului deplasare $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ după cele trei direcţii independente

deplasări elementare, $\Delta\vec{r}$:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\,\hat{x} + (y_2 - y_1)\,\hat{y} + (z_2 - z_1)\,\hat{z} = \Delta x \cdot \hat{x} + \Delta y \cdot \hat{y} + \Delta z \cdot \hat{z}. \tag{1.30}$$

Această expresie se poate găsi pe cale geometrică, considerând că orice deplasare reală reprezintă suma a trei deplasări succesive independente, în decursul cărora se modifică doar una din coordonate. Conform (Fig.1.10), se observă că:

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_x + \Delta\vec{r}_y + \Delta\vec{r}_z, \tag{1.31}$$

unde $\Delta\vec{r}_x, \Delta\vec{r}_y, \Delta\vec{r}_z$ reprezintă deplasări "virtuale", efectuate pe direcţiile x, y, şi z. Trecând la limita timpilor de observaţie foarte mici, $\Delta t \to 0$, expresia devine:

$$d\vec{r} = dx \cdot \hat{x} + dy \cdot \hat{y} + dz \cdot \hat{z}. \tag{1.32}$$

Făcând raportul dintre elementul de deplasare infinitezimală şi intervalul de timp corespunzător acesteia, se obţine expresia vitezei:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}. \tag{1.33}$$

Mărimea vectorului viteză este:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{1.34}$$

În mod similar se pocedează pentru acceleraţie:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{x} + \frac{dv_y}{dt}\hat{y} + \frac{dv_z}{dt}\hat{z} = \dot{v}_x\hat{x} + \dot{v}_y\hat{y} + \dot{v}_z\hat{z} \tag{1.35}$$

$$= \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}. \tag{1.36}$$

Mărimea vectorului acceleraţie este:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{1.37}$$

Un volum elementar dV în coordonate carteziene poate fi scris ca un produs de trei deplasări infinitezimale reciproc perpendiculare (Fig.1.10):

$$\Delta V = dx \cdot dy \cdot dz, \tag{1.38}$$

iar un element de suprafaţă în coordonate carteziene va avea expresia:

$$dA_z = dx \cdot dy;\ dA_x = dy \cdot dz;\ dA_y = dz \cdot dx. \tag{1.39}$$

Folosirea coordonatelor carteziene este preferată din motive de simplitate matematică. Aceasta se datorează şi faptului că, fiind mereu orientaţi de-a lungul axelor triedrului drept, versorii $\hat{x}, \hat{y}$ şi $\hat{z}$ rămân constanţi în orientare şi, ca urmare, derivatele lor în raport cu timpul sunt nule. În funcţie de simetria mişcării şi de datele concrete ale problemei de studiat, putem recurge şi la alte tipuri de sisteme de coordonate. Dintre acestea, în cele ce urmează, ne vom referi la coordonatele *legate de mobilul în mişcare.*

1.5 Coordonate polare plane

Variabilele care descriu poziţia mobilului în sistemul de *coordonate polare* plane sunt distanţa până la origine, notată ρ şi unghiul φ, măsurat în raport cu o axă de referinţă arbitrar aleasă (în cazul nostru Ox - Fig.1.11).

Legătura dintre coordonatele polare plane şi cele carteziene se exprimă sub forma:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi; \\ y &= \rho\sin\varphi. \end{aligned} \tag{1.40}$$

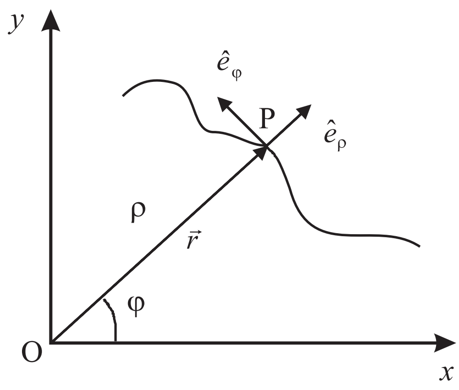

Figura 1.11: Sistemul de coordonate polare plane

Versorii sistemului de coordonate polare plane sunt $\hat{e}_\rho$ şi $\hat{e}_\varphi$.

Să considerăm, în cele ce urmează, o deplasare infinitezimală a mobilului din punctul P_1 in punctul P_2 (Fig.1.12). Vectorul deplasare corespunzător intervalului de timp dt este notat în cu $d\vec{r} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$. Această deplasare infinitezimală reală $\vec{dr}$ poate fi considerată ca o rezultanta unei succesiuni de deplasări virtuale după două direcţii perpendiculare, $\vec{dr}_\varphi$ şi $\vec{dr}_\rho$, în decursul cărora variază, pe rând, doar una dintre coordonate. Ca urmare, vectorul deplasare infinitezimală poate fi scris sub forma:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_\varphi + d\vec{r}_\rho, \tag{1.41}$$

în care:

- $d\vec{r}_\varphi$ (ρ constant, $\varphi-$variabil) reprezintă o deplasare infinitezimală de unghi $d\varphi$, pe un arc de cerc de rază ρ;
- $d\vec{r}_\rho$ (φ constant, $\rho-$variabil) reprezintă o deplasare infinitezimală de-a lungul lui $\vec{\rho}(t + \Delta t)$ (translaţie de lungime $d\rho$).

Ca urmare, ţinând cont de versorii direcţiilor de deplasare, se obţine:

$$d\vec{r} = \rho d\varphi \hat{e}_\varphi + d\rho \hat{e}_\rho. \tag{1.42}$$

Prin împărţirea la intervalul de timp infinitezimal, dt, se obţine:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \rho\frac{d\varphi}{dt}\hat{e}_\varphi + \frac{d\rho}{dt}\hat{e}_\rho = \rho\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \dot{\rho}\hat{e}_\rho = v_\varphi\hat{e}_\varphi + v_\rho\hat{e}_\rho. \tag{1.43}$$

S-au obţinut două componente ale vitezei:

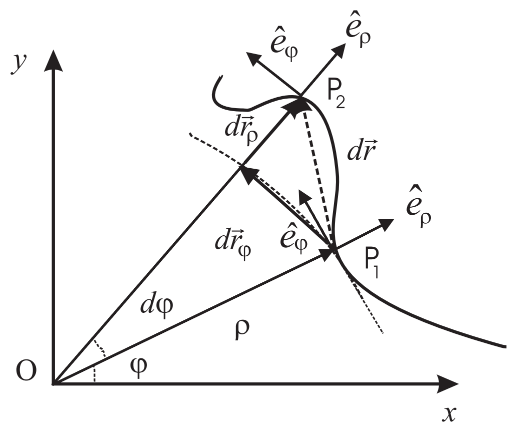

Figura 1.12: Vectorului deplasare infinitezimală $d\vec{r}$ se obţine, aplicând regula triunghiului, ca o sumă de deplasări infinitezimale, în care variază mai întâi φ, apoi ρ.

- o *componentă azimutală*, v_φ, determinată de variaţia vectorului de poziţie doar ca orientare;
- o *componentă radială*, v_ρ, determinată de variaţia vectorului de poziţie doar ca mărime.

$$v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \qquad (1.44)$$

$$v_\rho = \dot{\rho}. \qquad (1.45)$$

Un element de suprafaţă (o suprafaţă infinitezimală) are, în coordonate polare plane, (Fig.1.13) expresia:

$$dA = d\rho \cdot \rho d\varphi. \qquad (1.46)$$

1.5.1 Viteza unghiulară

Variaţia în unitatea de timp a unghiului descris de vectorul de poziţie reprezintă o nouă mărime fizică, numită *viteză unghiulară*. Viteza unghiulară instantanee este limita acestui raport atunci când intervalul de timp tinde către zero.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \qquad (1.47)$$

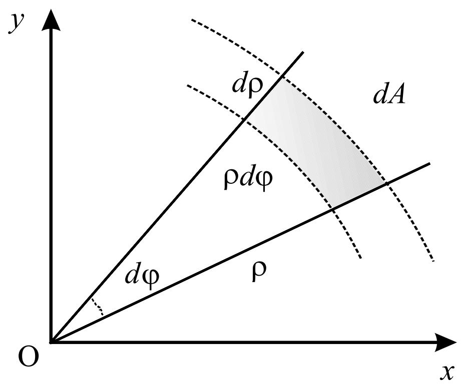

Figura 1.13: Un element de suprafaţă în coordonate polare plane.

Se poate defini viteza unghiulară ca "*spaţiul unghiular*" (prescurtat – unghiul) parcurs de mobil in unitatea de timp. Viteza unghiulară este asociată întotdeauna mişcării de rotaţie. Direcţia vectorului viteză unghiulară este perpendiculară pe planul de rotaţie a mobilului, iar sensul este dat de regula burghiului drept sau a mîinii drepte (Fig.1.14):

Dacă aşezăm degetele împreunate în sensul de rotaţie, atunci, degetul mare orientat de-a lungul axei de rotaţie indică sensul vitezei unghiulare.

Viteza tangenţială într-o mişcarea circulară este legată de viteza unghiulară prin relaţia:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{1.48}$$

Dacă proiectăm vectorul $\vec{\omega}$ pe axele unui sistem de referinţă cartezian, atunci:

$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{x} + \omega_y \hat{y} + \omega_z \hat{z}, \tag{1.49}$$

unde ω_x, ω_y, ω_z sunt componentele corespunzătoare pe axele Ox, Oy şi Oz. Folosind exprimarea sub forma unui determinant a produsului vectorial, ecuaţia (1.48) se poate scrie sub forma:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \tag{1.50}$$

$$= (\omega_y z - \omega_z y)\,\hat{x} + (\omega_z x - \omega_x z)\,\hat{y} + (\omega_x y - \omega_y x)\,\hat{z}. \tag{1.51}$$

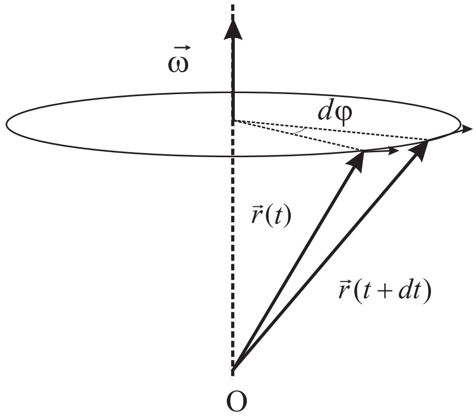

Figura 1.14: Reprezentarea vectorului viteză unghiulară.

Deoarece vectorul de poziţie poate fi scris ca o matrice cu o singură linie,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{1.52}$$

conform regulilor de înmulţire matriceală, vectorul $\vec{v}$ poate fi exprimat ca rezultatul înmulţirii a două matrice:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ -\omega_z & 0 & -\omega_x \\ \omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overset{\rightrightarrows}{\Omega}\, \vec{r}. \tag{1.53}$$

Ca urmare, viteza unghiulară constituie un *tensor*. Acesta se caracterizează printr-o matrice cu trei linii şi trei coloane:

$$\overset{\rightrightarrows}{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ -\omega_z & 0 & -\omega_x \\ \omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.54}$$

Spre deosebire de viteză şi acceleraţie care sunt *vectori polari* (au punctul de aplicaţie în punctul material), viteza unghiulară este un *vector axial*. Un *vector axial* nu are punctul de aplicaţie fixat într-un punct ci poate "*aluneca*" liber de-a lungul unei axe (perpendiculara pe traiectorie). Vectorii axiali, spre deosebire de cei polari, nu îşi schimbă sensul la operaţia de oglindire (atunci când $x \to -x$, $y \to -y$, $z \to -z$). În cazul lor, regula burghiului drept devine *regula burghiului stâng* adică $\hat{x} \times \hat{y} = -\hat{z}$ (vezi Fig.1.15).

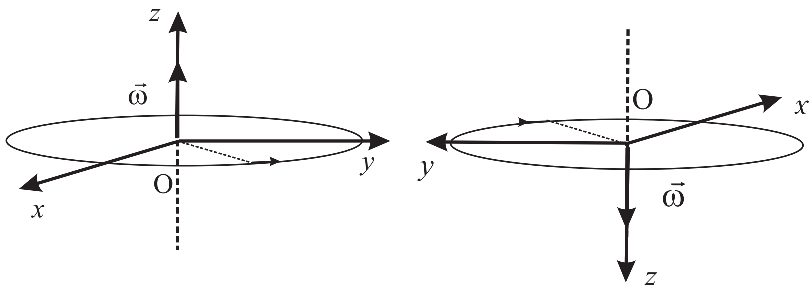

Figura 1.15: Ilustrarea operaţiei de oglindire.

1.6 Aplicaţii

1. Vectorul de poziţie al unui punct material este dat de legea de mişcare:

$$\vec{r} = 5(\cos 3t)\hat{x} + 4(\sin 3t)\hat{y}$$

unde (r) este măsurat în metri iar timpul t în secunde. Determinaţi:

a). viteza şi acceleraţia particulei la momentul $t = 10s$ de la începerea mişcării;

b). traiectoria pe care se mişcă punctul material.

Rezolvare:

a). Legea vitezei punctului material se determină din relaţia de definiţie:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(5\cos 3t\hat{x} + 4\sin 3t\hat{y}) \\ &= -15\,(\sin 3t)\,\hat{x} + 12(\cos 3t)\hat{y}\end{aligned}$$

Mărimea vectorului viteză este:

$$\begin{aligned}|\vec{v}| &= \sqrt{(15\sin 3t)^2 + (12\cos 3t)^2} \\ &= 3\sqrt{(-9\cos^2 3t + 25)}\end{aligned}$$

La momentul $t = 10s$ viteza este:

$$v(1) = 3\sqrt{(-9\cos^2 30 + 25)} = 14.936 m/s$$

Pentru acceleraţie se procedează în mod similar:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(-15\sin 3t\hat{x} + 12\cos 3t\hat{y}) \\ &= -45\,(\cos 3t)\,\hat{x} - 36\,(\sin 3t)\,\hat{y}\end{aligned}$$

Mărimea vectorului acceleraţie este:

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= \sqrt{(-45\cos 3t)^2 + (-36\sin 3t)^2} \\ &= 9\sqrt{(9\cos^2 3t + 16)}\end{aligned}$$

La momentul $t = 10s$ acceleraţia este:

$$a(1) = 9\sqrt{(9\cos^2 30 + 25)} = 45.\,192m/s$$

b). Ecuaţia traiectoriei de găseşte prin eliminarea timpului din ecuaţiile cinematice ale mişcării:

$$\begin{aligned}x &= 5\cos 3t \\ y &= 4\sin 3t\end{aligned}$$

Folosind relaţia fundamentală din trigonometrie:

$$\sin^2 3t + \cos^2 3t = 1$$

se obţine:

$$\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{25} = 1$$

Aceasta reprezintă ecuaţia unei elipse cu semiaxele de 4 şi respectiv $5m$.

2. Un punct material se deplasează cu viteza constantă v pe o elice definită de ecuaţiile parametrice:

$$\begin{aligned}x &= 5\cos 2t \\ y &= 5\sin 2t \\ z &= vt\end{aligned}$$

unde distanţele (x, y, z) sunt măsurate în metri iar timpul t în secunde. Determinaţi acceleraţia particulei în funcţie de timp.

Rezolvare:

Conform definiţieie, acceleraţia este:

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}$$

unde:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(-10\sin 2t) = -20\cos 2t \\
\ddot{y} &= \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d}{dt}(10\cos 2t) = -20\sin 2t \\
\ddot{z} &= \frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{d}{dt}(v) = 0
\end{aligned}$$

Vectorul acceleraţie este:

$$\vec{a} = -20\cos 2t\hat{x} - 20\sin 2t\hat{y}$$

iar mărimea acceleraţiei depinde de timp după legea:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-20\cos 2t)^2 + (-20\sin 2t)^2} = 20m/s^2$$

3. Se ştie că viteza unui punct material variază în timp după legea:

$$\vec{v}(t) = 1.5t^2\hat{x} + 1.8t\hat{y} + t^3\hat{z}(m/s)$$

unde t este măsurat în secunde. Determinaţi:

a). deplasarea punctului material între moentele de timp $t_1 = 1s$ şi $t_2 = 3s$;

b). mărimea şi orientarea acceleraţiei (cosinuşii directori ai unghiurilor α, β, γ dintre vectorul acceleraţie şi axele de coordonate) la momentul de timp $t_2 = 3s$.

Rezolvare:

a). Variaţia vectorului de poziţie în intervalul de timp considerat:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

este:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Din definiţia vitezei se observă că:

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \vec{v}dt \\ \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} d\vec{r} &= \int_{t_2}^{t_1} \vec{v}dt \\ \vec{r}_2 - \vec{r}_1 &= \int_1^3 (1.5t^2\hat{x} + 1.8t\hat{y} + t^3\hat{z})dt \\ &= 13.0\hat{x} + 7.2\hat{y} + 20.0\hat{z} \end{aligned}$$

Mărimea acestei deplasări este:

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{13.0^2 + 7.2^2 + 20.0^2} = 24.917m$$

b). Vectorul acceleraţie este:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(1.5t^2\hat{x} + 1.8t\hat{y} + t^3\hat{z} = \\ &= 3.0t\hat{x} + 1.8\hat{y} + 3t^2\hat{z} \end{aligned}$$

iar mărimea:

$$\begin{aligned} a(t &= 2) = \sqrt{(3.0 \times 2)^2 + (1.8)^2 + (3.0 \times 4)^2} \\ &= 13.537m/s^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{a_x}{a} = \frac{3.0 \times 2}{13.537} = 0.4432 \\ \cos\beta &= \frac{a_y}{a} = \frac{1.8}{13.537} = 0.1329 \\ \cos\gamma &= \frac{a_z}{a} = \frac{3.0 \times 4}{13.537} = 0.8864 \end{aligned}$$

Evident că trebuie să se verifice relaţia:

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= 1 \\ 0.4432^2 + 0.1329^2 + 0.8864^2 &= 0.9998 \end{aligned}$$