NUME SI PRENUME
....
UNIVERSITATEA
....

Probleme alese:			

CONCURSUL DE FIZICĂ GENERALĂ PENTRU STUDENȚII ÎN INGINERIE "ION I. AGARBICEANU"

Ediția a XI-a 2023 13 Mai 2023

Proba teoretică, Secţiuna Fizică 2

Fiecare concurent participă in concurs cu 3 din cele 6 subiecte, la alegere. Pe prima foaie de concurs candidatul va specifica sub semnatură numerele subiectelor pentru care a optat.

1. Se consideră o particulă de masă m aflată într-o groapă de potenţial unidimensională cu pereţii infiniţi, în interiorul gropii $V=0$ pentru $|x|<L$. Funcţia de undă a particulei în groapa de potenţial este de forma $\psi(x)=A\sin kx+B\cos kx$.

a) Aplicaţi funcţiei de undă condiţiile la frontieră şi arătaţi că se obţine $k=\dfrac{n\pi}{2L}$, $n=1,2,3,\ldots$, cu $A=0$ pentru n impar şi $B=0$ pentru n par.

b) Densitatea de probabilitate de localizare a particulei într-un punct x din spaţiu este egală cu $|\psi(x)|^2$. Folosiţi acest lucru pentru a norma funcţia de undă, adică determinaţi constantele de normare A sau B.

c) Folosiţi rezultatul obţinut la punctul c) pentru a calcula valoarea medie şi incertitudinea lui x în funcţie de n. Arătaţi că pentru valori foarte mari ale lui n rezultatele tind către valorile clasice obţinute pentru o particulă care se deplasează înainte şi înapoi într-o groapă, cu viteză constantă: $\langle x\rangle=0$, $\langle x^2\rangle^{1/2}=L/\sqrt{3}$.

d) Ecuaţia Schrödinger poate fi scrisă ca $\left(\frac{\hat{p}^2}{2m}+V\right)\psi = E\psi$, unde $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ pentru cazul unidimensional. Arătaţi că în starea n particula are energia $E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{8mL^2}n^2$.

e) Prima tranziţie din seria Lyman a hidrogenului are lungimea de undă egală cu 121,6 nm. Folosind modelul gropii de potenţial unidimensionale, estimaţi o dimensiune caracteristică a atomului de hidrogen.

P.O. 2 p.

a) Condiţiile la frontieră sunt $\psi(L) = \psi(-L) = 0$, de unde se obţine

$B\cos kL + A\sin kL = 0$ şi 1 p.

$B\cos kL - A\sin kL = 0$ 1 p.

Adunând şi scăzând relaţiile anterioare se obţine $B = 0$ şi $\sin kL = 0$ sau $A = 0$ şi $\cos kL = 0$, astfel încât se obţine $k = \frac{n\pi}{2L}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, cu $A = 0$ pentru n impar şi $B = 0$ pentru n par. 3 p.

Se observă că funcţiile de undă au paritate bine precizată, adică ele sunt impare pentru n par şi pare pentru n impar.

b) Trebuie să impunem condiţia $\int_{-L}^{L}|A|^2\sin^2 kx\,\mathrm{d}x = 1$, pentru n par, sau $\int_{-L}^{L}|B|^2\cos^2 kx\,\mathrm{d}x = 1$, pentru n impar. Deoarece $\cos^2 y = \frac{1+\cos 2y}{2}$ şi $\sin^2 y = \frac{1-\cos 2y}{2}$, se obţine $|A| = |B| = \frac{1}{\sqrt{L}}$, fazele lui A şi B fiind arbitrare şi neimportante din punct de vedere fizic pentru această problemă. 2 p.

c) Datorită simetriei problemei (groapa de potenţial simetrică faţa de origine) rezultă că $\langle x\rangle = 0$. Abaterea standard asupra poziţiei este $\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$, deci va trebui calculat numai $\langle x^2\rangle$

$$\langle x^2\rangle = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}x^2\sin^2\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)\mathrm{d}x,$$ 1 p.

pentru n par şi la fel pentru n impar trecând funcţia sinus în funcţia cosinus. Integrând prin părţi, se obţine

$$\langle x^2\rangle = \frac{L^2}{3}\left(1-\frac{6}{n^2\pi^2}\right)$$ 2 p.

pentru orice valoare a lui n.

În cazul clasic $\langle x^2\rangle = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}x^2\mathrm{d}x = \frac{L^2}{3}$.

d) În interiorul gropii $V=0$, şi astfel se obţine $E=\dfrac{\hbar^2k^2}{2m}$, cu k dat de condiţiile la frontieră.

2 p.

e) Considerăm diferenţa dintre energiile stărilor cu $n=1$ şi $n=2$, ca fiind energia fotonului emis în prima tranziţie din seria Lyman, deci

$$E_2-E_1=\frac{3\pi^2\hbar^2}{8mL^2}=\frac{2\pi\hbar c}{\lambda}.$$ 4 p.

Dimensiunea efectivă a atomului de hidrogen estimată astfel este

$$L=\sqrt{\frac{3\pi\hbar\lambda}{16mc}}\cong 1{,}59\times 10^{-10}\,\mathrm{m}.$$ 2 p.

2. Un microscop electronic poate distinge separat două puncte situate la distanţa d dacă această distanţă satisface condiţia $d\geq\dfrac{\lambda}{2A}$, unde λ este lungimea de undă de Broglie a electronilor, iar A este o constantă a aparatului, numită apertură numerică. Cunoscând tensiunea de accelerare a electronilor $U=100\,\mathrm{kV}$ şi că $A=0{,}15$, să se determine valoarea minimă a lui d. Se consideră că electronul se mişcă relativist. Se cunosc: $m_{oe}=9{,}1\times 10^{-31}$ kg , $c\cong 3\cdot 10^8$ m/s şi $h=6{,}626\times 10^{-34}$Js.

P.O. 2 p.

Impulsul relativist al electronului este:

$$p=\frac{m_{0e}v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},$$ (1) 2 p.

iar lungimea de unde de Broglie asociată va fi:

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{m_{0e}v}.$$ (2) 2 p.

Energia cinetică a electronului se află din relaţia:

$$\frac{m_{0e}c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}-m_{0e}c^2=eU,$$ (3) 2 p.

din care se determină viteza electronului:

$$v=c\,\frac{\sqrt{\dfrac{eU}{m_{0e}c^2}\left(2+\dfrac{eU}{m_{0e}c^2}\right)}}{1+\dfrac{eU}{m_{0e}c^2}}$$ (4) 2 p.

Înlocuind relaţia (4) în expresia (2), se obţine:

$$\lambda = \frac{h}{m_{0e}c}\frac{1}{\sqrt{2\frac{eU}{m_{0e}c^2}\left(1+\frac{eU}{2m_{0e}c^2}\right)}}. \qquad (5) \qquad 2\text{ p.}$$

Deoarece în cazul de faţă avem $\frac{eU}{2m_{0e}c^2} << 1$, se poate face aproximaţia:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{eU}{2m_{0e}c^2}}} \cong \frac{1}{1+\frac{eU}{4m_{0e}c^2}} \approx 1-\frac{eU}{4m_{0e}c^2} \qquad (6) \qquad 2\text{ p.}$$

Ţinând seama de relaţia (6), lungimea de undă dată de expresia (5) devine:

$$\lambda \cong \frac{h}{\sqrt{2m_{0e}eU}}\left(1-\frac{eU}{4m_{0e}c^2}\right). \qquad (7) \qquad 2\text{ p.}$$

Introducând expresia lui λ din (7) în condiţia pusă $d \geq \frac{\lambda}{2A}$, rezultă:

$$d \geq \frac{h}{2A\sqrt{2m_{0e}eU}}\left(1-\frac{eU}{4m_{0e}c^2}\right). \qquad (8) \qquad 2\text{ p.}$$

Numeric, avem:

$d_{\min} \cong 0{,}123$ Å. 2 p.

3. Ştiind că temperatura suprafeţei corpului uman este $\theta = 36\ ^0C$, calculaţi puterea radiaţiei emise de corp. Se presupune că trupul uman se comportă ca un corp gri cu factorul de emisivitate $\varepsilon = 0.6$ şi că suprafaţa medie a corpului uman este $S = 1.5\ m^2$. Care este timpul τ necesar ca un corp uman echivalent cu o masă $m = 75$ kg de apă ($c = 4200$ J/kg $\cdot\ K$) plasat în vid în spaţiul cosmic (la ~ 0 K) să ajungă la temperatura $T_0 = 273\ K$? Se consideră că temperatura corpului este uniformă şi că nu există reacţii metabolice de creştere a temoeraturii. Se cunoaşte constanta Stefan-Boltzmann $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}$.

Barem rezolvare :

- din oficiu 1.0 p

- cantitatea elementară de energie radiată de corpul uman este:

$dW = \Phi dt = S\varepsilon\sigma T^4 dt$ 1.5 p

-puterea radiaţieo emise de corp:

$P = \frac{dW}{dt} = \varepsilon\sigma S T^4 = 465\ W$ 1.0 p

- numeric :

P = 465 W 0.5 p

- energia radiată de corp va diminua temperatura a. î.

$dW = -mcdT$ 1.5 p

- rezultă:

$$S\varepsilon\sigma T^4 dt = -mcdT$$ 1.5.p

- prin integrare se obţine :

$$\tau = \int_0^\tau dt = -\frac{mc}{S\varepsilon\sigma} \cdot \int_T^{T_0} \frac{dT}{T^4} = \frac{mc}{3\varepsilon\sigma S}\left(\frac{1}{T_0^3} - \frac{1}{T^3}\right) = 8.73 \text{ "ore"}$$ 2.0 p

- numeric $\tau = \int_0^\tau dt = 8.73$ "ore" 1 p

4. De pe suprafaţa unei lentile convergente cu distanţa focală f se aruncă vertical in sus două bile cu vitezele iniţiale v01 şi v02. Să se determine:
   a. Viteza minimă (vlim) pentru care bilele produc imagini reale în lentilă
   b. Intervalul de timp pentru care cele două bile produc simultan imagini reale în lentilă ştiind că v01=nvlim şi v02=(n+1)vlim
   c. Intervalul de timp pentru care doar una dintre bile produce o imagine reală

din oficiu 1.0 p

Condiția de obținere a unei imagini reale prin lentilă $y \geq f$. 1.0p

Aplicăm condiția de limită și obținem $f = \frac{v_{lim}^2}{2g}$, de unde $v_{lim} = \sqrt{2gf}$ 2p

Se rezolvă inecuațiile $y_1 = v_{01}t - \frac{gt^2}{2} \geq f$ respectiv $y_2 = v_{02}t - \frac{gt^2}{2} \geq f$.

Pentru prima, se obțin timpii $t_1^{(1)} = \sqrt{\frac{2f}{g}}\left(n - \sqrt{n^2-1}\right)$, respectiv $t_2^{(1)} = \sqrt{\frac{2f}{g}}\left(n + \sqrt{n^2-1}\right)$.

2p

Intervalul de timp considerat se ia între rădăcini, adică $\Delta t_1 = t_2^{(1)} - t_1^{(1)} = 2\sqrt{\frac{2f}{g}(n^2-1)}$.

1p

Pentru cea de-a doua bilă, rezolvarea inecuației dă timpii: $t_1^{(2)} = \sqrt{\frac{2f}{g}}\left(n + 1 - \sqrt{n(n+2)}\right)$, respectiv $t_2^{(2)} = \sqrt{\frac{2f}{g}}\left(n + 1 - \sqrt{n(n+2)}\right)$. 1p

Se observă că $t_1^{(2)} < t_1^{(1)}$ și $t_2^{(2)} > t_2^{(1)}$. De aici, intervalul căutat este $\Delta t_1 = 2\sqrt{\frac{2f}{g}(n^2-1)}$.

1p

Din considerațiile de mai sus, intervalul de timp cerut este: $\Delta t_2 = \left[t_1^{(2)}, t_1^{(1)}\right] \cup \left[t_2^{(1)}, t_2^{(2)}\right]$

1p

5. Două unde monocromatice cu frecvenţe egale se propagă în fază pe direcţii paralele perpendicular pe o plăcuţă neomogenă de grosime L. În porţiunea străbătută de prima undă, indicele de refracţie n1(z)=n0 iar cea de-a doua undă pătrunde într-o zonă în care indicele de refracţie este $n_2(z) = \left(1 + \left(\frac{z}{L}\right)^2\right)$ Care este grosimea plăcuţei astfel încât, la ieşirea din plăcuţă, cele două unde se anulează reciproc.

din oficiu 1.0 p

Scriem fazele acumulate de fiecare dintre cele două unde la propagarea prin zonele plăcuței. Pentru prima undă avem $\phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\int_0^L n_0 dz = \frac{2\pi n_0 L}{\lambda}$, unde λ este lungimea de undă, și z este direcția comună de propagare prin plăcuță. 3p

Pentru cea de-a doua undă, faza acumulată se scrie: $\phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\int_0^L n_2 dz = \frac{2\pi}{\lambda}\int_0^L \left(1 + \frac{z^2}{L^2}\right) dz = \frac{2\pi}{\lambda}\left(L + \frac{L^2}{3}\right)$.. 3p

Pentru ca undele să se anuleze, defazajul dintre ele trebuie să fie $\Delta\phi = \pi$, sau echivalent $L + \frac{L^2}{3} - n_0 L = \frac{\lambda}{2}$, 2p

de unde rezultă $L = \frac{3\lambda}{4-3n_0}$ 1p

6. Intr-o incintă, introducem N01 nuclee radioactive cu activitatea λ1. Produsul dezintegrării, este la rândul său radioactiv cu activitatea l2. Ştiind că produsul final este stabil, găsiţi legea de dezintegrare pentru produsul intermediar şi determinaţi momentul de timp pentru care activitatea sa este maximă.

din oficiu 1.0 p

Scriem legea de dezintegrare pentru primul produs: $-dN_1 = \lambda_1 N_1 dt$, de unde $N_1 = N_{01}\exp(-\lambda t)$ 1p

Pentru produsul intermediar avem: $dN_2 = dN_1 - \lambda_2 N_2 dt$. Împărțim cu dt și obținem: $\frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_1}{dt} - \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$. Înmulțim cu $\exp(\lambda_2 t)$ în ambii termeni și avem:

$\frac{dN_2}{dt}\exp(\lambda_2 t) + N_2\lambda_2\exp(\lambda_2 t) = \lambda_1 N_1 \exp(\lambda_2 t)$ 1p

Termenul stâng este de fapt derivata în raport cu timpul a funcției $N_2\exp(\lambda_2 t)$, de unde rezultă că:

$\frac{d}{dt}(N_2\exp(\lambda_2 t)) = \lambda_1 N_1 \exp(\lambda_2 t) = \lambda_1 N_{01}\exp\left((\lambda_2 - \lambda_1)t\right)$ 1p

Separăm variabilele și obținem:

$$d(N_2 \exp(\lambda_2 t)) = \lambda_1 N_{01} \exp\big((\lambda_2 - \lambda_1)t\big)dt \qquad 1p$$

Integrăm în ambii termeni și obținem:

$$N_2 \exp(\lambda_2 t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{01}\big(\exp\big((\lambda_2 - \lambda_1)t\big) + C\big) \qquad 1p$$

Constanta de integrare se scoate din condiția inițială $N_2 = 0$ (deoarece inițial nu există produs intermediar). Avem: $C = N_2(0) = -1$. Se obține expresia produsului intermediar:

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{01}(\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)\,) \qquad 1p$$

Momentul de timp la care activitatea este maximă este atunci când N_2 este maxim. Se aplică condiția de extrem pe relația de mai sus și se obține:

$$\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{max} = 0 \qquad 1p$$

Din derivare avem:

$$\frac{\lambda_1 N_{01}}{\lambda_2 - \lambda_1}(-\lambda_1 \exp(-\lambda_1 \tau) + \lambda_2 \exp(\lambda_2 \tau)) = 0 \qquad 1p$$

Cantitatea din paranteză se egalează cu zero, și se obține, după calcule: $\tau = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$ 1p