Concursul de Fizică generala pentru ingineri "Ion I. Agârbiceanu" - 2018

21 Aprilie 2018

Departamentul de Fizică, Universitatea POLITEHNICA din Bucureşti

REZOLVARI

Problema 1

Notam cu α si β unghiurile făcute de fir cu veticala în stâga şi in dreapta.

a). Daca alegem in punctul de suspensie referinta energiei potentiale gravitationale, energia totala in cele doua parti este, respectiv :

$E_s = \frac{ml^2\dot{\alpha}^2}{2} - mgl\cos\alpha$ in stanga

$E_d = \frac{m(l-d)^2}{2}\dot{\beta}^2 - mg(l-d)\cos\beta - mgd$ in dreapta

b). $\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0$ in stanga

$\ddot{\beta} + \frac{g}{l-d}\sin\beta = 0$ in dreapta

c). Pentru mici oscilatii, in ecuatiile de la punctul b) se inlocuieste sinusul cu arcul. O oscilatie completa se face in perioadaT care se calculeaza adunand jumatate din perioada din partea stanga cu jumatate din perioada din partea dreapta. Rezultatul este:

$T = \pi\left[\left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} + \left(\frac{l-d}{g}\right)^{1/2}\right]$

Aplicatia numerica: $T = 3\pi/2$

d). Neglijand frecarile, inaltimile maxime sunt egale, insa amplitudinile unghiulare sunt evident diferite, si anume pendulul mai lung dinstanga are o amplitudine unghiulara mai mica

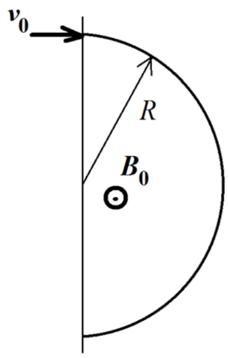
Problema 2

a). Se poate lucra nerelativist, deoarece U_0 este mica si deci $v_0 = \sqrt{2qU_0/m}$

Ecuatia de miscare este $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}_0$.

Campul magnetic nu modifica modulul vitezei

Traiectoria este un semicerc de raza $R = \frac{mv_0}{qB_0}$



b). Distanta este diferenta dintre cele doua diametre parcurse de cele doua tipuri de ioni :

$d = \frac{2}{B_0}\left(\frac{2U_0}{q}\right)^{1/2}\left(m_1^{1/2} - m_2^{1/2}\right)$

Aplicatie numerica $d \approx 0,77$ mm

Problema 3

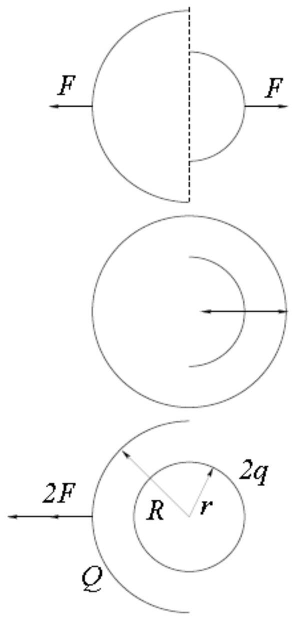
Pentru a calcula forta, presupunem ca sarcinile de pe emisfera au acelasi semn. Completam emisfera mare pana la o sfera intreaga cu sarcina $2Q$. Cum nu exista nicun camp electric in interiorul sferei incarcate, nu va actiona nicio forta asupra emisferei mici; deducem ca forta pe care o produce emisfera mare aditionala anuleaza forta creata de emisfera initiala.

Sa completam emisfera mica pana la o sfera de sarcina $2q$ si raza r.Din discutia anterioara putem spune ca forta rezultanta a celor doua emisfere mici este tocmai dublul fortei pe care vrem s-o aflam. Aceasta se calculaza usor deoarece stim campul sferei mici la nivelul emisferei mari care are densitatea de sarcina $\sigma = Q/2\pi R^2$.

$$2F = \int\int \sigma dSE_z = 2\pi R^2 \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \sigma \frac{2q\cos\theta}{R^2} \quad (1)$$

$$F = \frac{qQ}{2R^2} \quad (2)$$

- rezultat independent de raza emisferei mici



Problema 4

(a) ramurile de sus si de jos sunt echivalente, astfel tensiunea pe condensatorul central este zero.

$$C_a = 2\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{2C}\right)^{-1} = \frac{4}{3}C \tag{3}$$

(b) din considerente de simetrie, tensiunea pe condensatorii externi C este aceeasi, o notam cu U_1. Similar, pentru condensatorii $2C$ va fi U_2, cu conditia $U_1 + U_2 = V$ - caderea de tensiune totala. Caderea de tensiune pe condensatorul din mijloc este $U_2 - U_1$. Scriem sistemul

$$q_1 = CU_1 \tag{4}$$

$$q_2 = 2CU_2 \tag{5}$$

$$q_{centru} = q_1 - q_2 = C\left(U_2 - U_1\right) \tag{6}$$

Rezolvand, obtinem

$$C_b = \frac{q_1 + q_2}{V} = \frac{7}{5}C \tag{7}$$

(c) Efectuand o taietura verticala dupa primul condensator vertical - lantul infinit care rezulta este acelasi cu cel initial

$$\frac{1}{C_c} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C + C_c} \quad \Rightarrow \quad C_c = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}C \tag{8}$$

(d) Varfurile care au acelasi potential se pot conecta - rezulta schema echivalenta: (3 paralel) - (6 paralel) - (3 paralel)

$$\frac{1}{C_d} = \frac{1}{3C} + \frac{1}{6C} + \frac{1}{3C} = \frac{5}{6C} \quad \Rightarrow \quad C_d = \frac{6}{5}C \tag{9}$$

Problema 4

(a) sa consideram una dintre ciocniri. Presupunem ca are loc la o distanta l de perete, iar v si V vitezele bilei si blocului *dupa* ciocnire. Aratam ca marimea $l\,(v - V)$ este un invariant. Adica e aceeasi pentru oricare ciocnire.

Timpul pana la urmatoarea ciocnire este $Vt + vt = 2l$ (deoarece suma distantelor parcurse de cele doua obiecte este $2l$). Atunci urmatoarea ciocnire are loc la distanta l' de perete data de

$$l' = l - Vt = l - \frac{2lV}{V+v} = \frac{l\,(v-V)}{v+V} \tag{10}$$

Atunci

$$l'\,(v+V) = l\,(v-V) \tag{11}$$

Tinem cont de faptul ca in urma unei ciocniri elastice viteza relativa inainte de ciocnire este egala cu viteza relativa dupa ciorcnire. Astfel, daca v' si V' sunt vitezele dupa urmatoarea ciocnire, atunci

$$v + V = v' - V'. \tag{12}$$

Se observa deci ca

$$l'\,(v' - V') = l\,(v - V)\,. \tag{13}$$

Care este importanta acestui invariant? Dupa prima ciocnire, blocul continua sa se deplaseze cu viteza V_0, pana la o corectie de ordinul m/M, iar bila capata o viteza egala cu $2V_0$, tot pana la o corectie de ordinul m/M. Astfel, invariantul $l\,(v-V)$ este esential, egal cu $L\,(2V_0 - V_0) = LV_0$.

Fie $L_{\min}$ cea mai mica distanta pana la perete. Cand blocul atinge aceasta pozitie viteza sa va fi zero. Atunci toate energia cinetica initiala a bocului este transferata bilei. Astfel, $v = V_0\sqrt{M/m}$ si invariantul nostru spune ca $LV_0 = L_{\min}\left(V_0\sqrt{M/m} - 0\right)$, adica

$$L_{\min} = L\sqrt{\frac{m}{M}}. \tag{14}$$

Problema 5

Fie θ unghiul pe care il face o margea cu verticala, iar N forta normala din partea cercului asupra ei, sensul spre centru fiind pozitiv. Acceleratia centripeta (radiala), $F = ma$, este

$$N + mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}. \tag{15}$$

Inaltimea pe care a coborat margeaua este $R - R\cos\theta$, iar conservarea energiei inseamna

$$\frac{mv^2}{2} = mgR\left(1-\cos\theta\right) \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gR\left(1-\cos\theta\right). \tag{16}$$

Ecuatia radiala $F = ma$ devine

$$N = \frac{mv^2}{R} - mg\cos\theta = 2mg\left(1-\cos\theta\right) - mg\cos\theta \tag{17}$$

$$= mg\left(2-3\cos\theta\right). \tag{18}$$

Conform legii a treia a dinamicii, aceasta este si forta pe care o exercita margeaua asupra cercului. Aceasta forta este pozitiva daca $2 - 3\cos\theta$ >0.

Deoarece sunt doua margele, rezultanta fortelor este verticala

$$2N\cos\theta = 2mg\left(2-3\cos\theta\right)\cos\theta. \tag{19}$$

Valoarea lui θ care da valoarea maxima a fortei de desprindere se obtine facand derivata in raport cu θ egala cu 0.

$$0 = \frac{d}{d\theta}\left(2\cos\theta - 3\cos^2\theta\right) \tag{20}$$

$$= -2\sin\theta + 6\sin\theta\cos\theta. \tag{21}$$

Deci maximul este atins cand $\cos\theta = 1/3$, in care caz forta ascensionala este

$$2mg\left(2-3\left(\frac{1}{3}\right)\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2mg}{3}. \tag{22}$$

Cercul se va desprinde de pamant daca

$$\frac{2mg}{3} > Mg \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{M} > \frac{3}{2}. \tag{23}$$