

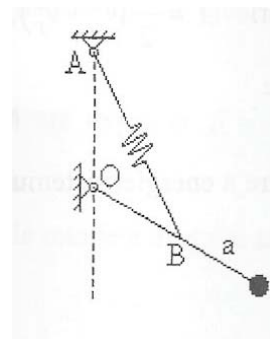


Concursul de fizică generală pentru studenții în inginerie "Ion I Agarbiceanu"

Ediția a X-a, 20 aprilie 2019

Proba teoretică, Secțiunea Fizică I

1. Se consideră un pendul matematic de masă m și lungime $2a$ articulat în punctul O. În punctul B, la mijlocul barei pendulului, se fixează extremitatea unui resort cu constanta elastică k . Cealaltă extremitate a resortului este fixată în punctul A, pe verticala articulației O a barei. Cunoșcând distanța $OA = a$ și faptul că lungimea nedeformată a resortului este tot a , să se determine perioada micilor oscilații ale sistemului în jurul poziției de echilibru. Aplicație numerică: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $m = 100 \text{ g}$, $a = 20 \text{ cm}$ și $k = 6,8 \text{ N/m}$.



Notăm cu θ unghiul făcut de bară cu verticala. Alegând nivelul de referință al energiei potențiale gravitaționale în poziția verticală a barei, energia potențială a sistemului are expresia

$$E_p = 2mga(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}ks^2. \quad 12 \text{ p.}$$

Lungimea resortului deformat este, în acest caz, $l = 2a \cos \frac{\theta}{2}$, iar deformarea lui este $s = 2a \cos \frac{\theta}{2} - a$

$$E_p = 2mga(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}k \left(2a \cos \frac{\theta}{2} - a \right)^2. \quad 12 \text{ p.}$$

În cazul micilor oscilații, $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ și $\cos \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\theta^2}{8}$, rezultă 12 p.

$$E_p = \left(mga - \frac{ka^2}{4} \right) \theta^2 + \frac{ka^2}{2} + \frac{ka^2}{32} \theta^4. \quad 25 \text{ p.}$$

Ultimul termen se neglijează, fiind infinitezimal de ordinul patru, deci

$$E_p = \left(mga - \frac{ka^2}{4} \right) \theta^2 + \frac{ka^2}{2}.$$

0,5/1 p.

Deoarece $x = 2a \sin \theta$ și $y = 2a(1 - \cos \theta)$, de unde rezultă $v_x = \dot{x} = 2a \cos \theta \cdot \dot{\theta}$ și $v_y = \dot{y} = 2a \sin \theta \cdot \dot{\theta}$, iar $v^2 = 4a^2 \dot{\theta}^2$,

$$E_c = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 2ma^2 \dot{\theta}^2.$$

1/2 p.

Din condiția de conservare a energiei totale a sistemului, adică

$$\frac{d}{dt} (E_c + E_p) = 0,$$

1/3 p.

se obține

$$4ma^2 \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + 2 \left(mga - \frac{ka^2}{4} \right) \theta \cdot \dot{\theta} = 0$$

și, în final,

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{2a} - \frac{k}{8m} \right) \theta = 0.$$

1/2 p.

Sistemul efectuează o mișcare oscilatorie dacă $\frac{g}{2a} > \frac{k}{8m}$, iar, în aceste caz, pulsația proprie a micilor

oscilații devine $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2a} - \frac{k}{8m}}$, iar perioada $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{2a} - \frac{k}{8m}}}$.

1/2 p.

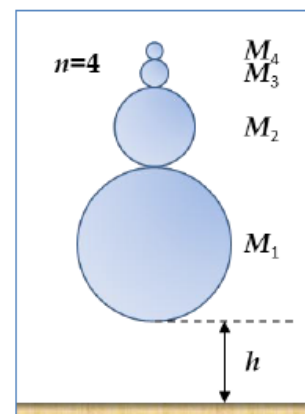
Pentru aplicația numerică considerată, se obține $T \cong 1,57s$.

0,5/1 p.

2. a) O minge de baschet, cu raza R și masa M , se află în repaus la înălțimea h față de sol. Pe ea stă o minge mică de tenis de masă, cu masa m . Se lasă liber cele două mingi. La ce înălțime maximă urcă mingea mică după ciocniri? Considerați ciocnirile perfect elastice și că $m \ll M$.

b) Considerați acum n mingi $M_1, M_2, \dots, M_n$, având masele $m_1, m_2, \dots, m_n$, (cu $m_1 \gg m_2 \gg \dots \gg m_n$) așezate ca în figura 2. Mingile sunt lăsate liber. Determinați, în funcție de n , înălțimea maximă atinsă de mingea n .

c) Dacă $h = 1m$, care este numărul minim de mingi astfel încât mingea superioară să ajungă la cel puțin 1 km?



Chiar înainte ca mingea de baschet să atingă solul, ambele mingi au viteza $v = \sqrt{2gh}$. 12 p

Imediat după ciocnirea cu solul, mingea de baschet urcă cu viteza v . Ca urmare, viteza relativă a celor două mingi este $2v$. 12 p.

Ciocnirea fiind perfect elastică, după ciocnire, viteza relativă are aceeași valoare $2v$ (ciocnirea cu un perete). Față de sol, viteza mingii de tenis va fi $2v+v=3v$. 12 p.

Din conservarea energiei rezultă că mingea de tenis va urca la înălțimea maximă, adică

$$H = 2R + \frac{(3v)^2}{2g}, \text{ adică } H = 2R + 9h. \quad 12 \text{ p.}$$

b. Chiar înainte ca mingea M_1 să atingă solul, toate mingile coboară cu viteza $v = \sqrt{2gh}$.

Se pot determina prin inducție vitezele mingilor după ciocniri. Dacă mingea M_i are viteza v_i după ciocnirea cu mingea M_{i-1} , care este viteza mingii M_{i+1} ?

Viteza relativă a mingii M_{i+1} față de mingea M_i este $v + v_i$ și are același modul și după ciocnire. Cum viteza mingii M_i rămâne practic v_i , viteza de urcare a mingii M_{i+1} este $2v_i + v$.

Deoarece $v_i = v$ se obține: $v_2 = 3v$, $v_3 = 7v$, $v_4 = 15v$, etc. 24 p.

Din conservarea energiei, M_n va ajunge la înălțimea

$$H_n = 2R + \frac{(2^n - 1)^2 v^2}{2g} = 2R + (2^n - 1)^2 h. \quad 24 \text{ p.}$$

c. Pentru $h = 1 \text{ m}$ și $H = 1000 \text{ m}$, se obține $2^n - 1 > \sqrt{1000}$, de unde rezultă $n = 6$. 12 p.

3. Un balon cu volum constant staționează într-o atmosferă aflată în condiții normale de presiune și temperatură. Temperatura aerului atmosferic crescând brusc cu fracțiunea f la presiune constantă, să se afle după cât timp trebuie să arunce pilotul din nacelă pe verticală în jos cu viteza v față de balon un corp astfel ca balonul să-și păstreze altitudinea. Se cunoaște accelerația gravitațională g .

Rezolvare

Din oficiu

(2p)

Din formula de variație a densității unui gaz cu temperatura și presiunea, cu condiția $p = \text{const.}$

$$\rho = \rho_0 \frac{p T_0}{p_0 T}$$

rezultă fracțiunea f' cu care se modifică densitatea gazului (aerul în problema curentă):

$$(\rho_0 - \Delta\rho)(T_0 + \Delta T) = \rho_0 T_0,$$

de unde

$$(\rho_0 - f'\rho_0)(T_0 + fT_0) = \rho_0 T_0.$$

și de aici:

$$f' = \frac{f}{1+f}.$$

(2p)

Condiția de echilibru inițial al balonului de masă m este:

$$mg = V\rho_0 g$$

(1p)

Accelerația balonului va fi dată de diferența dintre greutatea sa și forța arhimedică, care scade o dată cu densitatea aerului:

$$a = \frac{mg - V\rho_0 g(1-f')}{m} = g \left[1 - \frac{V\rho_0}{m(1+f)} \right] = g \frac{f}{1+f}.$$

(2p)

Viteza balonului (orientată în jos) după timpul t va fi:

$$v_b = at = gt \frac{f}{1+f}.$$

(2p)

Masa Δm care trebuie aruncată astfel ca balonul să-și păstreze altitudinea se obține din condiția:

$$(m - \Delta m)g = \frac{V\rho_0}{1+f}g,$$

(2p)

de unde se obține:

$$\Delta m = \frac{V\rho_0 f}{1+f} = \frac{mf}{1+f}.$$

(1p)

Din legea conservării impulsului aflăm viteza v cu care trebuie aruncat în jos obiectul de masă Δm :

$$m\vec{v}_b = (m - \Delta m)\vec{v}_{bf} + \Delta m\vec{v}_{abs} \quad (1p)$$

unde $\vec{v}_b$ este viteza balonului după timpul t scurs din momentul în care la temperatura a început să crească, $\vec{v}_{bf}$ este viteza finală a balonului după aruncarea corpului, iar $\vec{v}_{abs}$ este viteza absolută a corpului față de Pământ.

$$\vec{v} = \vec{v}_{abs} - \vec{v}_b \quad (1p)$$

Pentru ca balonul să-și păstreze altitudinea trebuie ca $\vec{v}_{bf} = 0$, de unde rezultă:

$$m\vec{v}_b = \Delta m\vec{v}_{abs} = \Delta m(\vec{v} + \vec{v}_b) \quad (1p)$$

care este echivalent cu:

$$(m - \Delta m)\vec{v}_b = \Delta m\vec{v}. \quad (1p)$$

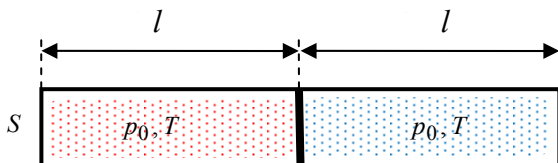
De aici se obține:

$$v = \frac{m - \Delta m}{\Delta m} v_b = \frac{m - \Delta m}{\Delta m} \cdot \frac{gft}{1+f} = \left(\frac{m}{\Delta m} - 1 \right) \cdot \frac{gft}{1+f} = \left(\frac{m(1+f)}{V\rho_0 f} - 1 \right) \cdot \frac{gft}{1+f} = \frac{gt}{1+f}, \quad (2p)$$

de unde

$$t = \frac{v(1+f)}{g}. \quad (2p)$$

4. Se dă cilindrul izolat de exterior din figură. Pistonul despărțitor împarte gazul în două părți egale (același număr de moli $v/2$, același volum $V/2$, aceeași temperatură T și evident aceeași presiune p_0). Singura diferență este că particulele din stânga le vom numi "particule R" (roșii), iar pe cele din dreapta "particule A" (albastre). Vom înlătura pistonul de grosime neglijabilă, iar particulele R și A se vor amesteca din cauza agitației termice. Parametrii noului sistem vor fi: p_0 , V , T , $2v$. Demonstrați că nu este posibil, ca la un moment dat (oricare ar fi acesta în viitor), să avem toate particulele A în partea dreaptă și toate particulele R în partea stângă. Ce concluzie trageți de aici?



Barem rezolvare:

- din oficiu **1.0 p**
- sistemul va evolua către entropia maximă **1.0 p**
- în acea stare gazul format din particulele roșii va avea parametrii $v/2, V, p_0/2, T$.. **0.5 p**
- analog pentru particulele albastre **0.5 p**
- variația entropiei gazului format din particule roșii este

$$\Delta S_R = \frac{\nu}{2} C_V \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + \frac{\nu}{2} R \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = \frac{\nu}{2} R \ln 2 \dots\dots\dots 2.5 \text{ p}$$

- analog pentru particulele albastre: $\Delta S_A = \frac{\nu}{2} C_V \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + \frac{\nu}{2} R \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = \frac{\nu}{2} R \ln 2 \dots\dots\dots 2.5 \text{ p}$

- variația totală a entropiei sistemului este: $\Delta S = \Delta S_R + \Delta S_A = \nu R \ln 2 > 0 \dots\dots\dots 1.0 \text{ p}$

- proces ireversibil. Nu va mai ajunge niciodată la starea de început $\dots\dots\dots 1.0 \text{ p}$

5. O placă plană omogenă de masă $m_0 = 20\text{kg}$ are forma unui pătrat de latură $a_0 = 0,5\text{m}$, ambele mărimi fiind măsurate în sistemul propriu. Sistemul de referință (S') se deplasează cu viteza $V = \frac{4}{5}c$ în raport cu un referențial (S) astfel că $Ox \parallel O'x'$, iar placa se deplasează uniform față de (S') cu viteza $w = \frac{3}{5}c$ pe direcția $O'x'$. Se cer:

- Mărimea diagonalei plăcii și unghiul format de diagonală cu direcția de mișcare, în raport cu (S');
- Densitatea superficială ρ' a plăcii în raport cu (S');
- Impulsul și energia cinetică în raport cu (S).
- Durata unui proces ce se desfășoară pe placă, determinată de un observator legat de (S), dacă un observator legat de (S') determină o durată $\Delta t'$.

Se cunosc viteza luminii în vid $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ și densitatea de energie în sistemul propriu

$$\rho_0 = 8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Rezolvare

Din oficiu

1
(2p)

a)

$$a'_x = a_0 \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}} = a_0 \frac{4}{5}; a'_y = a_0 \cdot (\cancel{1p})^{0,5}$$

$$d' = \sqrt{a'^2_x + a'^2_y} = a_0 \sqrt{1 + \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)} = \frac{a_0}{5} \sqrt{41} \text{m.} (\cancel{1p})^{0,5}$$

$$\tan \theta' = \frac{a_0}{a_0 \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} = \frac{5}{4}; \Rightarrow \theta' = \arctan \frac{5}{4}. (\cancel{2p})^{\uparrow \uparrow}$$

b)

$$\rho' = \frac{m'}{V'}.$$

$$\rho' = \frac{m_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)} V \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)_0} = \frac{\rho_0}{1 - \frac{w^2}{c^2}} = \rho_0 \frac{25}{16}. (\cancel{2p})^{\uparrow \uparrow}$$

c)

$$V = \frac{w + v}{1 + \frac{wv}{c^2}} = \frac{\frac{7}{5}c}{1 + \frac{12}{25}} = \frac{35}{37}c. (\cancel{2p})^{\uparrow \uparrow}$$

$$P = m(V)V = \frac{m_0 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{m_0 \frac{35}{37}c}{\sqrt{1 - \frac{35^2}{37^2}}} = \frac{35}{12}m_0 c. (\cancel{2p})^{\uparrow \uparrow}$$

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 = \left[\left(\frac{35}{12}\right)^2 + 1 \right] m_0^2 c^4 = \frac{35^2 + 12^2}{12^2} m_0^2 c^4. (\cancel{2p})^{\uparrow \uparrow}$$

$$E_c = E - E_0 = \left(\sqrt{\frac{35^2 + 12^2}{12^2}} - 1 \right) m_0 c^2 = 2E_0. (\cancel{1p})^{0,5}$$

d)

$$\Delta t' = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}; \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, (\cancel{1p})^{0,5}$$

unde $V = V_x$.

$$\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\frac{4}{5}}{\sqrt{1 - \frac{35^2}{37^2}}} = \frac{37}{15}. (\cancel{2p})^{\uparrow \uparrow}$$

$$\Delta t = \frac{37}{15} \Delta t'. (\cancel{2p})^{\uparrow \uparrow}$$

6. O tijă metalică subțire de lungime $L=1200$ mm se rotește într-un câmp magnetic uniform cu o turație $n=1200$ rot/min, în jurul unei axe perpendiculare pe tijă și care trece la o distanță $l=250$ mm de una dintre extremități. Vectorul inducție magnetică $B=1$ mT este paralel cu axa de rotație. Determinați tensiunea care apare între extremitățile tijei.

Rezolvare:

Axa de rotație trece printr-un punct aflat la o distanță l de un capăt al tijei și $L-l$ de celălalt capăt.

De asemenea, tensiunea dintre punctele de pe tijă simetrice aflate la distanța l de centrul de rotație este nulă. Astfel, tensiunea dintre extremitățile tijei este dată de relația:

$$U = \frac{d\Phi_m}{dt} = B \frac{dS}{dt} = B \frac{S}{\tau}$$

Unde S este suprafața coroanei circulare de rază interioară l și rază exterioară $L-l$

$$S = \pi[(L-l)^2 - l^2] = \pi L(L-2l)$$

$$\text{iar } \tau = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{20s^{-1}} = \frac{1}{20}s \text{ este perioada de rotație.}$$

Avem în final

$$U = B\pi L(L-2l)\nu \cong 53mV.$$