

Probleme concurs Agârbiceanu 2017

Enunturi

1. O distributie de sarcina cu simetrie sferica in jurul punctului O produce intr-un punct M aflat la distanta r de O un potential electrostatic

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp[-r/a]$$

- a). Calculati intensitatea campului electric in punctul M .
- b). Calculati fluxul campului electric $\Phi(R)$ printr-o sfera de raza R cu centrul in O .
- c). Calculati valorile $\Phi(0)$ si $\Phi(\infty)$.

2. O bobina este alcatuita dintr-un fir conductor cu spire alaturate infasurate pe un tor circular cu sectiune patrata de latura a . Raza medie a torului este R . Numarul total de spire este N , iar intensitatea curentului electric este I .

- a). Descrieti liniile de camp magnetic care trec printr-un punct M din interiorul bobinei.
- b). Calculati valoarea inductiei magnetice in punctul $M(x, y)$ din interiorul bobinei. Acelasi lucru pentru un punct din exteriorul bobinei.
- c). Calculati fluxul magnetic prin suprafata unei spire cu normala orientata in sensul campului.
- d). Notam cu $B_{\max}$ si $B_{\min}$ valorile maxima si minima ale campului magnetic in interiorul bobinei. Calculati valoarea raportului a/R pentru ca variatia relativa a campului sa fie de 10%:

$$2 \frac{B_{\max} - B_{\min}}{B_{\max} + B_{\min}} = 10\%$$

3. O cantitate de gaz ideal monoatomic ($C_V = \frac{3}{2}R$) parcurge un proces termodinamic din starea inițială (p_1, V_1) în starea finală ($p_1/3, 3V_1$). Graficul acestui proces, în coordonate (p, V), este un segment de dreaptă, iar $p_1 = 100 \text{ kPa}$ și $V_1 = 6 \text{ L}$. Să se calculeze: a) căldura primită de gaz în timpul încălzirii; b) căldura schimbată de gaz în întregul proces termodinamic; c) căldura primită de gaz.

4. Un automobil s-a blocat în noroi. Încercând să iasă, șoferul accelerează pe loc, iar anvelopele de rază R , a căror periferie se învârtesc cu viteza v stropesc cu noroi. Arătați că noroiul nu poate ajunge deasupra solului la o înălțime egală cu:

a). diametrul rotii, dacă $v \leq \sqrt{gR}$

b). mărimea $R + v^2 / 2g + gR^2 / 2v^2$, dacă $v > \sqrt{gR}$.

c). Care dintre cele două înălțimi este mai mare ?

Se neglijează rezistența aerului.

5. Într-o anumită fază a evoluției unei stele, când combustibilul termonuclear este aproape consumat, steaua împrăștie în jurul ei o mare cantitate de gaze și de praf, formând ceea ce se numește o *nebuloasă planetară*. Aceasta nebuloasă se disipează în spațiu în câteva zeci de mii de ani, încât gazele și particulele solide (în general silicați) *par nemișcate*, găsindu-se în echilibru mecanic sub acțiunea atracției gravitaționale și a forțelor datorate presiunii luminii. Considerând particulele de formă sferică, perfect reflectorizante și știind că temperatura la suprafața stelei este T_s , să se găsească raza acestor particule cosmice.

Se cunosc: $T_s = 6000 \text{ K}$, constanta lui Stefan-Boltzmann $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$, viteza luminii în vid $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, constanta atracției gravitaționale $K = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$, densitatea particulelor $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$, masa stelei $M_s = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$ și raza stelei $R_s = 6,67 \times 10^5 \text{ km}$.

6.

Un pendul gravitațional este format dintr-un mic corp suspendat de un suport fix printr-un fir inextensibil, fără masă, cu lungimea l . Notând cu θ unghiul făcut de fir cu verticala și cu g accelerația gravitațională, ecuația de mișcare a pendului are forma neliniară:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

Nu există o metodă prin care soluția $\theta(t)$ să poată fi obținută într-o *formă analitică*, adică o expresie exactă de variabila t care să implice funcții elementare.

(i) Dacă amplitudinea unghiulară a pendulului este mică, se poate folosi aproximația de liniarizare $\sin \theta \approx \theta$. **Să se arate că în acest caz legea de mișcare $\theta(t)$ este armonică, și să se determine pulsația proprie a pendulului ω_0 . Depinde pulsația de amplitudine?**

(ii) Dacă amplitudinea este mare, se propune o aproximație de ordin superior, $\sin \theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!}$. În acest caz pendulul este un *oscilator anarmonic*. Vom căuta o soluție de forma unei superpoziții de termeni armonici:

$$\theta(t) = \Theta \sin \omega t + \varepsilon \Theta \sin 3\omega t,$$

unde *coeficientul perturbativ* ε este o constantă adimensională pe care o presupunem mult mai mică decât 1. O soluție aproximativă de acest tip se numește *soluție de perturbație*, deoarece termenul suplimentar din ecuația diferențială perturbă mișcarea care ar fi avut loc în absența acelui termen. **Să se determine expresia pulsației pendulului ω în funcție de ω_0 și amplitudinea Θ a primului termen armonic, și să se arate că pentru amplitudini unghiulare mici expresia se reduce la pulsația proprie în aproximația de liniarizare.**

Aplicație numerică: **Să se demonstreze că pentru $\Theta = 0,3$ rad, modificarea relativă a pulsației este $\Delta\omega / \omega \approx -10^{-2}$, unde $\Delta\omega \equiv \omega - \omega_0$.**

Se cunosc relațiile:

$$\sin^3 \phi = \frac{3}{4} \sin \phi - \frac{1}{4} \sin 3\phi;$$

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2, \text{ dacă } x \text{ este mult mai mic decât } 1.$$