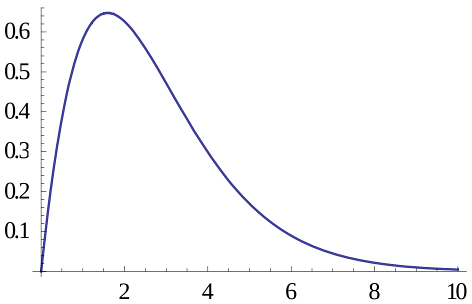
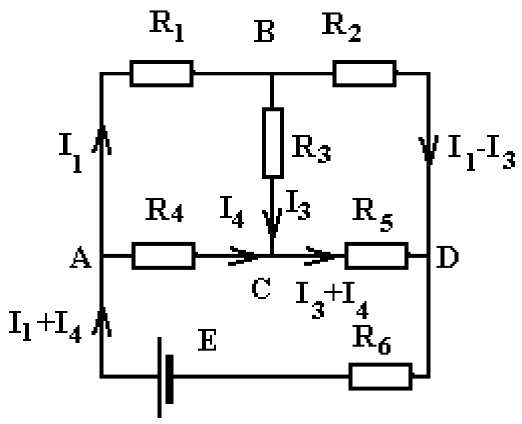
Probleme concurs Agarbiceanu 2016

Rezolvari si barem

1. Solutie. a). Un punct care se vede clar este punctul de contact cu solul …………	**1,5 p**
b). Alte puncte care se vad clar se afla pe spitele care se misca in timpul expunerii astfel incat un punct al lor sa ramana pe spita pe toata durata fotografiei …………..	**2,5 p**
Fie o spita aflata in partea inferioara a fotografiei. Dupa un timp scurt spita s-a miscat, dar pozitia ulterioara o intersecteaza pe cea initiala. Punctul de intersectie este unul dintre punctele cautate, care apare clar in fotografie. Cautam locul geometric al acestor puncte ……………………………………………………….…...................	**2,5 p**
c). Notam cu R raza rotii si studiem o spita care face initial unghiul θ cu verticala. Pe durata expunerii roata s-a rotit cu unghiul $\mathrm{d}\theta$. Centrul rotii s-a deplasat cu $R\mathrm{d}\theta$. Spita a efectuat o translatie cu $R\mathrm{d}\theta$ combinata cu o rotatie de unghi $d\theta$ in jurul capatului de linga ax. Notam cu r pozitia pe spita a unui punct care se vede clar. Atunci $Rd\theta\cos\theta = rd\theta$. Deci $r = R\cos\theta$. Locul geometric este un cerc cu diametrul R dat de spita verticala inferioara a rotii ………………………...................................	**3,5 p**

2. Solutie. a). Rezultanta este suma dintre forta de impingere a gazelor, forta de frecare si forta de atractie gravitationala $\vec{F}_{tot}=\vec{F}_{prop}+\vec{F}_{fr}+\vec{G}$	**1 p**
Sistemul este constituit din racheta la momentul *t*, cand masa ei este *m* si viteza $\vec{V}$, iar la momentul *t*+d*t* din ansamblul racheta de masa *m*+d*m* si viteza $\vec{V}+d\vec{V}$ si gazele ejectate de masa -d*m* si viteza $\vec{V}+\vec{u}$. Legea variatiei impulsului se scrie: $\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{(m+dm)(\vec{V}+d\vec{V})-dm(\vec{V}+\vec{u})-m\vec{V}}{dt}=\vec{F}_{fr}+\vec{G}$. Neglijam termenul in $dmd\vec{V}$ si gasim $\frac{d\vec{p}}{dt}=m\frac{d\vec{V}}{dt}-\frac{dm}{dt}\vec{u}=\vec{F}_{fr}+\vec{G}$	**1,5 p**
Forta de propulsie a gazelor este $\vec{F}_{prop}=\frac{dm}{dt}\vec{u}=-D_m\vec{u}$	**1 p**
b). $m\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{dm}{dt}\vec{u}$, $d\vec{V}=\frac{dm}{m}\vec{u}$, $\vec{V}_{fin}-\vec{V}_0=\vec{u}\int_{m_0}^{m_{fin}}\frac{dm}{m}=\vec{u}\ln\frac{m_{fin}}{m_0}$ ………………………	**2 p**
c). $Q=\frac{m_{fin}V_{fin}^2/2}{m_{etot}u^2/2}$, unde $m_{etot}=m_{fin}-m_0=m_{fin}\left(\exp\left[V_{fin}/u\right]-1\right)$	**1 p**
Notam $x=V_{fin}/u$ si gasim $Q=\frac{x^2}{e^x-1}$	**1 p**
 Maximul functiei se gaseste la *x*=1,59362 si este egal cu *Q*(1,59362)=0,64761 ………………………………………………….......	**1,5 p**
Inseamna ca eficienta maxima se gaseste in jurul valorii $V_{fin}\approx 1{,}5u$ …………………	**1 p**

3. Solutie. a). Din simetria sferica rezulta un camp radial $\vec{E}(r)=E(r)\vec{u}_r$ …………....	**0,5 p**
Se scrie legea lui Gauss pe o sfera de raza $r<a$ $\oint_{sfera} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}$, sau	
$4\pi r^2 E(r)=\frac{4\pi}{3\varepsilon_0} r^3 \rho$, unde ρ este densitatea uniforma de sarcina pozitiva …………	**1,5 p**
Sarcina totala pozitiva fiind egala cu +*e*, densitatea este $\rho=\frac{e}{4\pi a^3/3}$ ……………….	**0,5 p**
Rezulta $\vec{E}(r)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\vec{r}$, forta asupra electronului este $\vec{F}=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\vec{r}=-k\vec{r}$	**0,5 p**
b). Forta este centrala, deci momentul fortei fata de originea sistemului este nul. Rezulta ca momentul cinetic al electronului se conserva si traiectoria se afla in planul perpendicular pe vectorul constant moment cinetic …………………………..	**1,5 p**
c). In acest caz vectorul moment cinetic initial este $\vec{L}(0)=\vec{r}(0)\times m\vec{v}(0)=-L_0\vec{u}_y$, asadar miscarea se face in planul *xOz* ……………………………………………...	**0,5 p**
Legea a 2-a a lui Newton se scrie $m\left(\ddot{x}\vec{u}_x+\ddot{y}\vec{u}_y+\ddot{z}\vec{u}_z\right)=-k\vec{r}$. Deoarece $y(0)=0$ si $\dot{y}(0)=0$ rezulta $y(t)=0$, conform puntului b). Pentru celelalte componente se obtin doua ecuatii de oscilator armonic $\ddot{x}+\omega^2 x=0$, $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=0$, deci $x(t)=x_0\cos\omega t$ si $\ddot{z}+\omega^2 z=0$, $z(0)=0$, $\dot{z}(0)=v_0$, deci $z(t)=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$ …………	**4 p**
d). $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\approx 45{,}25\times 10^{15}$ rad/s ……………………………………………………..	**1 p**

4 Solutie	
a). Cu legile lui Kirchhoff se gaseste in Fig. 1 $I_3 = \dfrac{R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}E$	**1 p**
....	
Aceeasi expresie se gaseste pentru curentul care trece prin R_1 daca sursa se muta in	**0,5 p**
serie cu R_3	**0,5 p**
Daca inversam sensul sursei, se inverseaza sensul curentului prin R_1	
b). In Fig. 2 curentul,prin R_3 are expresia de la pct. a) si este cu siguranta nenul.	
Mutand sursa in serie cu R_3 teorema este corecta. Daca insa inversam sensul sursei,	**1 p**
curentul se anuleaza	**1 p**
Rezulta ca torema nu se aplica circuitelor cu componente neliniare	
Ecuatiile lui Kirchhoff duc la sistemul	
c). $\begin{cases} R_1I_1 + R_3I_3 - R_4I_4 = 0 \\ R_2(I_1 - I_3) - R_5(I_3 + I_4) - R_3I_3 = 0 \\ R_4I_4 + R_5(I_3 + I_4) + R_6(I_1 + I_4) = E \end{cases}$ sau $\begin{cases} I_1 + 3I_3 - I_4 = 0 \\ 2I_1 - 6I_3 - I_4 = 0 \\ 3I_1 + I_3 + 5I_4 = 4{,}6 \end{cases}$ ....**2 p** Rezulta $I_1 = 0{,}9\,\text{A},\ I_3 = 0{,}1\,\text{A},\ I_4 = 1{,}2\,\text{A}$ ....**1 p** 	**3 p**
d). Sursa E din Fig. 3 produce in ramura BC curentul I_3=0,1 A. Aceeasi sursa,	**1,5 p**
singura, montata in ramura BC, produce in rezistorul R_6 acelasi curent de 0,1 A.	**1 p**
Acestuia i se adauga curentul I_1+I_4=2,1 A produs de sursa initiala	**0,5 p**
Rezulta prin superpozitie I_6=2,1+0,1=2,2 A	

5. Solutie. a). Sunt necesari doi sateliti pentru a localiza observatorul pe o suprafata (ca de ex. planul mediator al segmentului care leaga cei doi sateliti)	**2 p**
Un al treilea satelit precizeaza pozitia pe o linie	**1 p**
Al patrulea satelit fixeaza pozitia intr-un punct	**1 p**
b). Un satelit emite un impuls de tact la momentul t_0, iar observatorul il detecteaza la momentul $t_1=t_0+D/c$, unde D este distanta dintre satelit si detector	**1 p**
Daca satelitul nu arata ora exacta, semnalul este emis la momentul diferit t'_0. Observatorul care are o referinta exacta de timp de la alt satelit, interpreteaza diferenta t_1-t'_0 ca o distanta $D'=c(t_1-t'_0)$, care este o eroare asupra pozitiei sale	**2 p**
Pentru un ceas cu prcizia relativa de 4×10^{-13}, avansul sau intarzierea maxima in timp de 24 h=86.400 s, este de 3,456 $\times10^{-8}$ s, ceeace corespunde unei erori de pozitionare de 10,368 m	**3 p**