Concursul "Ion I. Agârbiceanu" 2015

Subiecte teoretice – Rezolvari

Subiectul 2.

a). Presiunea scade la departarea de centrul Lunii, $\rho g_L(r)dr = -dp$, **2 p**

deci $\dfrac{dp}{dr} = -\rho g_L(r) = -\dfrac{\mu}{RT} p g_L(r)$, (1) **0,5 p**

unde μ este masa molara a aerului, , cu $g_L(r) = \dfrac{GM_L}{r^2} = \dfrac{4\pi}{3} G\rho_0 r$, G constanta gravitationala, M_L masa Lunii si ρ_0 densitatea constanta a Lunii **1 p**

Deci $g_L(r) = g_L(a)\dfrac{r}{a} = \dfrac{g}{6}\dfrac{r}{a}$ (2) **0,5 p**

Din (1) si (2) gasim ecuatia diferentiala $\dfrac{dp}{p} = -\dfrac{\mu g}{6RTa} r dr$ **1 p**

care se integreaza $\ln p\Big|_{p0}^{p1} = -\dfrac{\mu g}{12RTa} r^2\Big|_{a/\sqrt{2}}^{a}$, **1,5 p**

unde p_1 este presiunea la suprafata Lunii. Calculele numerice duc la

$\ln\dfrac{p_1}{p_0} = -\dfrac{\mu g a}{24RT} \approx -9{,}33$ **1 p**

Numeric, $p_1 \approx 8{,}8 \cdot 10^{-5}$ atm **0,5 p**

b). Fiintele ar putea trai in grote, acolo presiunea atmosferica este cea de pe Pamant, chiar daca spre suprafata Lunii ea se apropie de cea din vidul interplanetar. **2 p**

Subiectul 3.

Folosim cuadrivectorii energie-impuls:

pentru electroni $\mathcal{P}_e = \left(\vec{p}_e;\, i\frac{m_e c^2}{c}\right) = \left(\vec{p}_e;\, i\frac{E_e}{c}\right)$ **1 p**

pentru fotoni $\mathcal{P}_{ph} = \left(\vec{p}_{ph};\, ip_{ph}\right) = \left(\vec{p}_{ph};\, i\frac{E_{ph}}{c}\right)$ **1 p**

Patratele lor sunt invarianti relativisti: $(\mathcal{P}_e)^2 = -\,m_e^2 c^2$, $(\mathcal{P}_{ph})^2 = 0$ **1 p**

Scriem conservarea cuadriimpulsului, notant cu indicele superior "prim" marimile dupa interactiune: $\mathcal{P}_{ph} + \mathcal{P}_e = \mathcal{P}'_{ph} + \mathcal{P}'_e$ **1 p**

Trecem $\mathcal{P}'_{ph}$ in stanga, ridicam la patrat si simplificam, introducand unghiul θ intre directiile fotonilor incident si imprastiat. Se gaseste in final:

$$E'_{ph} = \frac{E_{ph}\left(cp_e + E_e\right)}{E_{ph}\left(1-\cos\theta\right) + E_e + cp_e\cos\theta}$$ **2 p**

Maximul energiei fotonului imprastiat apare pentru minimul numitorului, adica pentru retro-imprastiere, $\cos\theta = -1$, si deci $\theta = \pi$, $(E'_{ph})_{\max} = \frac{E_{ph}\left(cp_e + E_e\right)}{2E_{ph} + E_e - cp_e}$ **2 p**

Deoarece $m_e c^2 << E_e$, scriem $cp_e \approx E_e = 27$ GeV, $E_{ph} = hc/\lambda = 2{,}42$ eV si gasim

$$(E'_{ph})_{\max} \approx \frac{2E_{ph}}{2E_{ph}/E_e + 1 - cp_e/E_e} = \frac{E_{ph}}{Eph/E_e + m_{oe}^2 c^4/(4E^2{}_e)} \approx 13{,}5 \text{ GeV}$$ **2 p**

Subiectul 4.

a). Din simetrie, campul electric si potentialul nu depind decat de variabila x, iar directia campului electric este paralela in orice punct cu axa O. Deci $\vec{E}(\vec{r}) = E(x)\vec{u}_x$, $V(\vec{r}) = V(x)$.

Operatorul ∇ se reduce la derivata fata de x: $\nabla = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ **1 p**

Planul yOz fiind plan de simetrie, intensitatea campului electric este o functie impara de x, iar potentialul o functie para de x: $E(-x) = -E(x)$, $V(-x) = V(x)$. Rezulta ca in planul yOz campul electric este nul. **1 p**

Pentru a gasi campul electric aplicam legea lui Gauss. **0,5 p**

In interiorul partii incarcate, pentru $|x| < a$, scriem $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, cu solutia $E_1(x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0} + C_1$.

Deoarece $E(0)=0$, rezulta $C_1=0$, deci $\vec{E}_1(x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}\vec{u}_x$. **1,5 p**

In exterior, pentru $|x| > a$, legea lui Gauss este $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = 0$, cu solutia $E_2(x) = C_2$.

Continuitatea in $x=a$ duce la $C_2 = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}$. **1 p**

Deci $\vec{E}_2(x) = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}\vec{u}_x$ pentru $x>a$ si $\vec{E}_2(x) = -\frac{\rho a}{\varepsilon_0}\vec{u}_x$ pentru $x<-a$ **1 p**

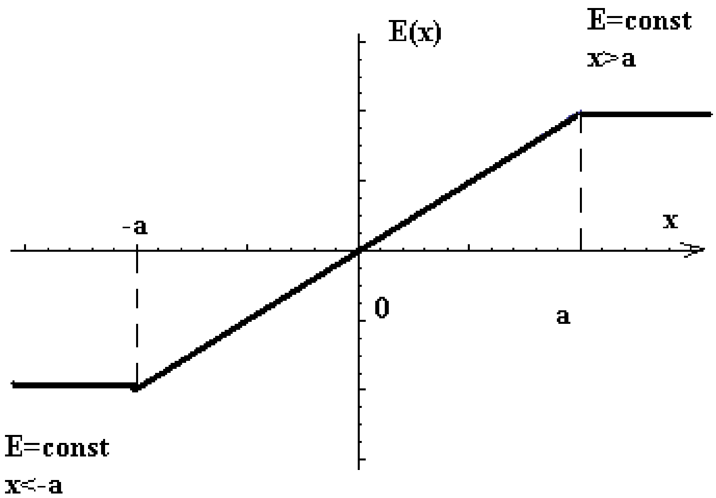
Potentialul se gaseste prin integrarea ecuatiei $-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = E(x)$, **0,5 p**

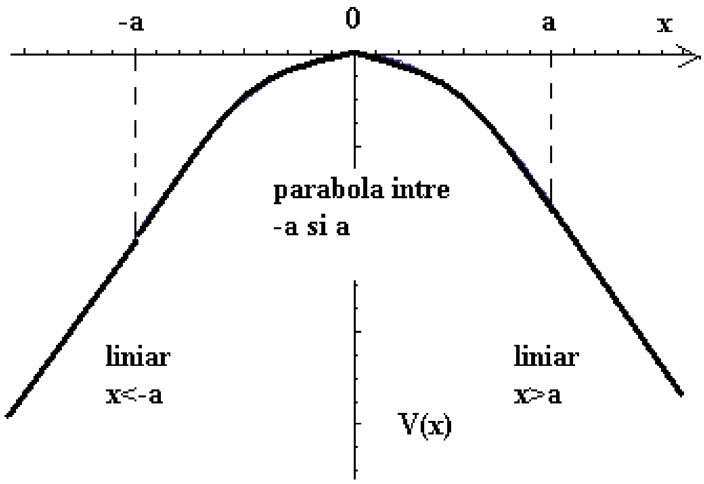
tinand cont ca $V(0)=V_0$. Se gaseste usor:

$V_1(x) = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0} + V_0$ pentru $|x| < a$ **1 p**

In exterior, tinand cont de continuitatea potentialului in punctele $x=a$ si $x=-a$, gasim

$V_2(x) = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}\left(\frac{a}{2} - |x|\right) + V_0$ **1 p** b). Desenele **1,5 p**





Subiectul 5.

a). $P = F_r v_{\lim} = k v_{\lim}^4$, $k = \dfrac{P}{v_{\lim}^4} = \dfrac{5\times 10^6}{5^4} = 8000\ \mathrm{kgsm^{-2}}$. **1 p**

b). Variatia energiei cinetice $\dfrac{dE_c}{dt} = P$ se scrie $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{mv^2}{2}\right) = -kv^4$ **1 p**

Separam variabilele si integram: $t = -\dfrac{m}{k}\displaystyle\int_{v_1}^{v_2}\dfrac{dv}{v^3} = \dfrac{m}{2k}\left(\dfrac{1}{v_2^2} - \dfrac{1}{v_1^2}\right) = 27{,}5\ \mathrm{s}$ **2,5 p**

c). Teorema variatiei energiei cinetice se poate scrie si sub forma:

$\dfrac{dE_c}{dx} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{mv^2}{2}\right) = -kv^3\dfrac{dx}{dt}$, $\quad \dfrac{dt}{dx}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{mv^2}{2}\right) = -kv^3$ **2,5 p**

sau $dx = -\dfrac{m}{k}\dfrac{dv}{v^2}$ **1,5 p**

Integrarea duce la $d = \dfrac{m}{k}\left(\dfrac{1}{v_2} - \dfrac{1}{v_1}\right)$=87,5 m **1,5 p**