

Concursul Ion Agârbiceanu 2014

Subiecte teoretice – rezolvări

1. a). Din simetrie, câmpul electric este vertical ($//Oy$) pe mediatoarea segmentului OA . Pentru această justificare și pentru indicarea mediatoarei se acordă **1 p.**

O altă metodă presupune scrierea formulei generale a câmpului total și anularea componentei paralele cu axa Ox . Pentru relațiile

$$\vec{E}_{tot}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{\vec{r} - \vec{a}}{(r-a)^3} \right), \quad E_{totx}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{x-a}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} \right)$$

$$E_{toty}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} \right) \text{ se acordă } \mathbf{1,5 p.}$$

Dacă apoi se găsește expresia corectă a câmpului vertical pe mediatoarea $x=a/2$, anume

$$\vec{E}_{tot} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{y}{\left(\frac{a^2}{4} + y^2 \right)^{3/2}} \vec{u}_y, \text{ se acordă restul de puncte până la } \mathbf{3 p.}$$

b). Din ultima relație de la punctul a) se găsește, pentru $|y| \ll a$:

$$\vec{E}_{tot} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{y}{\left(\frac{a^2}{4} + y^2 \right)^{3/2}} \vec{u}_y \cong \frac{4q}{\pi\epsilon_0} \frac{y}{a^3} \vec{u}_y \quad \mathbf{1 p.}$$

$$\text{Condiția de echilibru este } -mg + \frac{4qq'}{\pi\epsilon_0} \frac{y_{ech}}{a^3} = 0 \quad \mathbf{1 p}$$

$$\text{Rezultă, cu notația din enunț, } y_{ech} = -\frac{mg}{k} < 0, \text{ căci } k = -\frac{4}{\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{a^3} > 0 \quad \mathbf{1 p.}$$

c). Legea a doua a lui Newton pentru corpul scos din poziția de echilibru se scrie :

$$m\ddot{y} = -mg - ky, \text{ sau } \ddot{y} + \frac{k}{m}(y - y_{ech}) = 0 \quad 2 \text{ p.}$$

Perioada mișcării este $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ 1 p

d). Aplicație numerică : $T \approx 5,13 \text{ s.}$ 1 p.

2. a). Alegând pozitiv sensul vertical în sus, legea a doua a lui Newton pe verticală se scrie :

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - 6\pi\eta Rv + \rho_a Vg, \text{ unde } m = \rho_u V, \text{ iar } V = \frac{4\pi}{3}R^3 \quad 1,5 \text{ p.}$$

Ecuția devine :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{9\eta}{2\rho_u R^2}v = g\left(\frac{\rho_a}{\rho_u} - 1\right) \quad 0,5 \text{ p}$$

Soluția ecuației cu condiția inițială $v(0)=0$ este:

$$v(t) = -\frac{2R^2(\rho_u - \rho_a)g}{9\eta} \left[1 - \exp\left(-\frac{9\eta}{2\rho_u R^2}t\right) \right] \quad 2 \text{ p.}$$

b). Din expresia anterioară a vitezei rezultă că viteza limită este coeficientul parantezei pătrate :

$$v_0 = |v(\infty)| = \frac{2R^2(\rho_u - \rho_a)g}{9\eta} \quad 2 \text{ p}$$

$$R = \sqrt{\frac{9\eta v_0}{2(\rho_u - \rho_a)g}} \approx 1,13 \mu\text{m.} \quad 1 \text{ p}$$

c). Forța arhimedică și forța electrică echilibrează greutatea:

$$\frac{4\pi}{3}R^3\rho_u g = \frac{4\pi}{3}R^3\rho_a g + qU/d \quad 1 \text{ p}$$

$$\text{Rezultă } q = \frac{4\pi R^3 g(\rho_u - \rho_a)d}{3U} \approx 4,81 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad 0,5 \text{ p}$$

Picătura are 3 electroni în plus. 0,5 p

Aparatul se poate folosi pentru măsurarea sarcinii electronului (a fost utilizat în acest scop de către Millikan la începutul secolului XX) 1 p.

3. a). Vaporizarea fiind rapidă, căldura necesară se poate obține numai de la solidificarea gheții: $m_g \lambda_t = m_v \lambda_v$ **2,5 p**

Rezultă $m_g = \frac{\lambda_v}{\lambda_v + \lambda_t} m = 48,4 \text{ g.}$ **0,5 p**

Dacă se continuă pomparea, gheața sublimază treptat trecând în stare gazoasă, iar dacă pompa de vid este ideală toți vaporii de apă sunt evacuați. **1 p.**

- b). Căldura cedată de metal este $Q_{ced} = MC(T - T_0) = MC\Delta T$, unde T este temperatura sa inițială. Mărimea ΔT se calculează folosind variația densității cu

temperatura $\rho(T) = \frac{\rho_0}{1 + 3\alpha\Delta T}$ **2,5 p**

Deci $\Delta T = \frac{1}{3\alpha} \left(\frac{\rho_0 V}{M} - 1 \right) = \frac{1}{3,3 \cdot 10^{-5}} \left(\frac{6,8 \cdot 10^3 \times 48 \cdot 10^{-6}}{0,325} - 1 \right) \approx 130,5 \text{ K.}$ **0,5 p.**

Egalăm căldura cedată de metal cu cea necesară topirii unei cantități m_t de gheață și

calculăm $m_t = \frac{MC\Delta T}{\lambda_t} = \frac{C(\rho_0 V - M)}{3\alpha\lambda_t} \approx 45,04 \text{ g.}$ **1,5 p.**

Deoarece $m_t < m_g$ rezultă că nu se topește toată gheața și temperatura finală rămâne $T_0 = 273 \text{ K.}$ **1,5 p.**

4. a). Comprimarea maximă a resortului se produce atunci când cele două corpuri masive se deplasează cu aceeași viteză. **2 p.**

Scriem relațiile de conservare:

pentru impuls $m_1 V_0 = (m_1 + m_2) V'$ **0,5 p**

pentru energie $\frac{m_1 V_0^2}{2} = (m_1 + m_2) \frac{V'^2}{2} + \frac{kA^2}{2}$ **0,5 p.**

Introducem V' din prima ecuație în a doua și găsim comprimarea maximă a resortului

$$A = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \cdot \frac{1}{k} \cdot V_0$$
 1 p.

- b). Deoarece la mult timp după ciocnire ambele corpuri se mișcă în același sens, înseamnă că $m_1 > m_2$ și că resortul este netensionat **2,5 p.**

Ecuatiile de conservare se scriu

$$m_1 V_0 = m_1 V_1 + m_2 V_2$$
 0,5 p

$$\frac{m_1 V_0^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2}$$
 0,5 p

Se găsește $V_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_0$ și $V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_0$ **1,5 p.**

- c). $A=40$ cm, $V_1=0,4$ m/s, $V_2=2,4$ m/s **1 p.**

5. Emisie; Conservarea impulsului și a energiei (cu justificare pentru 1D)

$$m_0 c^2 = m c^2 + E_\gamma \quad 1,5 \text{ p}$$

$$0 = m v - p_\gamma \quad 1,5 \text{ p}$$

$$\text{Deoarece } p_\gamma = E_\gamma / c, \quad m_0 c^2 = m c^2 + m c v \quad 1 \text{ p}$$

Se știe că $m > m_0$, așadar ultima egalitate este imposibilă **1 p.**

(calculul detaliat duce la aceeași concluzie și este punctat la fel)

Absorbție; Conservarea impulsului și a energiei (cu justificare pentru 1D)

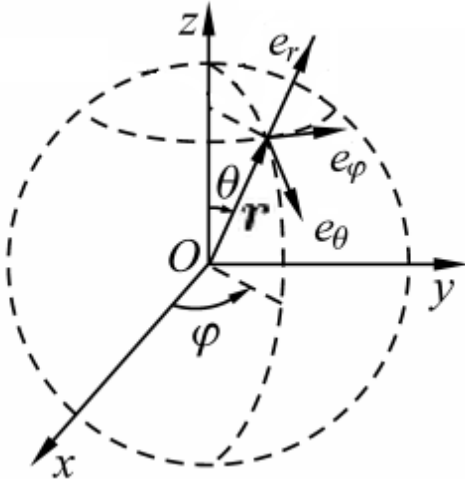
$$m_0 c^2 + E_\gamma = m c^2 \quad 1,5 \text{ p}$$

$$p_\gamma = m v \quad 1,5 \text{ p}$$

$$\text{Deoarece } p_\gamma = E_\gamma / c, \quad m_0 c^2 + m c v = m c^2 \quad 1 \text{ p}$$

Calcule simple duc la alternativele imposibile $v=c$ sau $v=0$ **1 p.**

6. Considerăm rotația sferei în jurul axei polare Oz .



Considerăm suprafața sferică constituită dintr-o alăturare de inele, fiecare de rază $R \sin \theta$ și de lărgime $R d\theta$, pe care se găsește sarcina electrică $\sigma dS = \sigma 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$. Aceasta este în mișcare, deci îi corespunde curentul $I = f \sigma 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$, unde f este frecvența de rotație a sferei, $f = 10 \text{ s}^{-1}$. **2 p**

Fiecare inel va produce un câmp magnetic paralel și cu aceeași sens cu axa. **1 p**

Pentru calculul câmpului magnetic, pornim de la legea Biot-Savart-Laplace

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad \mathbf{2\ p}$$

Pentru un curent circular de rază ρ , la distanța z de planul inelului, câmpul magnetic are o componentă pe axa Oz egală cu $dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \sin \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \frac{\rho}{r}$, iar câmpul magnetic total

produs de curentul circular I este $B_z = \frac{\mu_0 I \rho^2}{2 r^3}$. **2 p**

Aplicăm ultima formulă în cazul câmpului magnetic produs în centrul sferei de un inel care face parte din suprafața sferică

$$dB_z = \frac{\mu_0 f \sigma 2\pi R^2 \sin \theta d\theta}{2} \frac{\rho^2}{R^3} = \frac{\mu_0 f \sigma \pi \sin \theta d\theta}{R} R^2 \sin^2 \theta = \mu_0 f \sigma \pi R \sin \theta d\theta (1 - \cos^2 \theta) \quad \mathbf{2\ p}$$

$$B_z = \pi \mu_0 f \sigma R \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = -\pi \mu_0 f \sigma R \left[\cos \theta \Big|_0^\pi - \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi \right] =$$

$$= \pi \mu_0 f \sigma R \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{4\pi \mu_0 f \sigma R}{3} = 2,63 \cdot 10^{-11} \text{ T} = 26,3 \text{ pT} \quad \mathbf{1\ p}$$