

Concursul Ion I. Agârbiceanu 2013

Proba teoretică. Rezolvări

1. a). Ecuațiile de mișcare sunt:

$$m\ddot{x} = -b\dot{x}$$

1,5 p

$$m\ddot{y} = -b\dot{y} - mg$$

Condițiile inițiale: $x(0) = y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0 \cos \theta$, $\dot{y}(0) = v_0 \sin \theta$ 0,5 p

Ecuațiile sunt liniare cu coeficienți constanți; se folosește metoda lui Euler căutând soluții exponențiale. Soluțiile sunt:

$$x(t) = \frac{mv_0 \cos \theta}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right), \quad y(t) = \left(\frac{mv_0 \sin \theta}{b} + \frac{m^2 g}{b^2} \right) \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right) - \frac{mg}{b} t \quad 3 \text{ p}$$

- b). Punem condiția $y(\tau) = 0$ și găsim relația din enunț 0,5 p

Dacă reținem numai primii trei termeni din dezvoltarea exponențialei, găsim succesiv

$$\tau \approx \left(\frac{v_0 \sin \theta}{g} + \frac{m}{b} \right) \left(\frac{b}{m} \tau - \frac{1}{2} \frac{b^2}{m^2} \tau^2 \right)$$

$$\tau = \frac{2v_0 \sin \theta}{g + \frac{bv_0 \sin \theta}{m}} \quad 1 \text{ p}$$

Numeric $\tau \approx 58,25 \text{ s}$ 0,5 p

Exponentul $\frac{b\tau}{m} = \frac{\tau}{100} \approx 0,058 \ll 1$, deci aproximația este validă. 0,5 p

- c). $x(\tau) \approx 29.402 \text{ m}$ 1 p

d). În absența frecării cu aerul $\tau_0 = 60 \text{ s}$ și $x(\tau_0) \approx 31.177 \text{ m}$. Discuție. Eroarea relativă care se face reținând numai primii trei termeni ai dezvoltării exponențialei este mai mică de 3% în cazul duratei și mai mică de 7% în cazul lui $x(\tau)$ 1,5 p

2. a). Folosim analiza dimensională: $F \propto \rho^\alpha v^\beta A^\gamma$. Înlocuind în funcție de unitățile fundamentale se găsește $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = 2$, adică $F \propto \rho v^2 A$ 2 p

b). Diferența de presiune dintre două suprafețe de arie A aflate la înălțimile z și $z + dz$ este $[P(z) - P(z + dz)] = \rho(z)gAdz$, sau $dP = -\rho g dz$ 1 p

Presiunea este legată de densitate prin legea gazelor perfecte $P = \frac{\rho}{M} RT$, unde M este

masa molară a aerului. Se găsește ecuația $d\rho = -\rho \frac{gM}{RT} dz$ 1 p

Dependența căutată este $\rho(z) = \rho_0 \exp\left[-\frac{Mgz}{RT}\right]$ 1 p

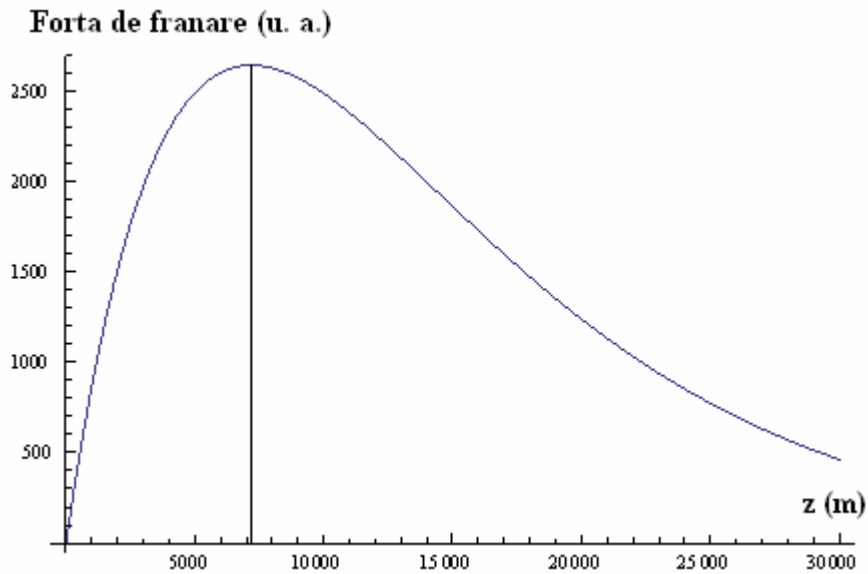
c). Folosim relația găsită la punctul a) scrisă la înălțimea z . Deoarece accelerația este constantă, înlocuim $v^2 = 2az$ și găsim $F \propto 2azA\rho_0 \exp\left[-\frac{Mgz}{RT}\right]$ 1,5 p

Forța de frecare este maximă la înălțimea h la care $\frac{dF}{dz}\bigg|_{z=h} = 0$,

de unde $h = \frac{RT}{gM}$ 1 p

Aplicație numerică: $h \approx 7,326 \text{ km}$ 0,5 p

d).



2 p

3. a) Sarcina electrică totală a nucleului este $Q = \rho_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^a r'^2 \left(1 - \frac{\bar{r}'^2}{a^2}\right) dr'$ 1 p

Rezultă $Q = \frac{8\pi\rho_0 a^3}{15}$ 1 p

b). În exterior o distribuție cu simetrie sferică se comportă ca o sarcină punctuală plasată în origine. 0,5 p

Rezultă: $\vec{E}_{ext} = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^3} \vec{r}$ 1 p

În interior aplicăm legea lui Gauss pe o suprafață sferică de rază r centrată în origine, ținând cont că intensitatea câmpului electric este orientată radial și depinde numai de

distanța r față de centru: $4\pi r^2 E_{int} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^r r'^2 \left(1 - \frac{\bar{r}'^2}{a^2}\right) dr'$ 1 p

$$\text{de unde } \vec{E}_{\text{int}} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2} \right) \vec{r} \quad 1 \text{ p}$$

$$E_{\text{int}}(a) = E_{\text{ext}}(a) = \frac{2\rho_0 a}{15\varepsilon_0} \quad 0,5 \text{ p}$$

$$\text{c). } \vec{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr} \frac{\vec{r}}{r}, \quad 1 \text{ p}$$

$$V_{\text{ext}}(r) = \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r} \quad 1 \text{ p}$$

$$V_{\text{int}}(r) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{r^2}{6} - \frac{r^4}{20a^2} \right) + \text{const} \quad 1 \text{ p}$$

$$\text{Punem condiția de continuitate } V_{\text{int}}(a) = V_{\text{ext}}(a) \quad 0,5 \text{ p}$$

$$\text{și găsim } \text{const} = \frac{\rho_0 a^2}{4\varepsilon_0}, \text{ deci}$$

$$V_{\text{int}}(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{a^2}{4} - \frac{r^2}{6} + \frac{r^4}{20a^2} \right) \quad 0,5 \text{ p}$$

4. Considerând că protonul se mișcă paralel cu axa Ox și că $E \approx E_0$, rezultă:

$$\text{a). } \Delta E_{\text{cin}} = eE_0 d \quad 0,5 \text{ p}$$

$$\text{Raza cercului rezultă egalând forța centripetă cu cea magnetică: } r = \frac{mv}{qB} \quad 0,5 \text{ p}$$

b). Câmpul electric trebuie să fie alternativ pentru ca să accelereze protonul de fiecare dată când ajunge în regiunea centrală 0,5 p

Forța Lorentz magnetică este perpendiculară pe viteză în orice punct al traiectoriei, deci lucrul mecanic magnetic este nul. Particula are o mișcare circulară uniformă în afara regiunii centrale unde este accelerată de câmpul electric 0,5 p

După cum se vede în figură, protonul parcurge primul semicerc cu viteza

$$v_1 = \sqrt{\frac{2eE_0 d}{2m}}, \text{ deoarece prima variație a energiei cinetice este jumătate din valoarea}$$

de la punctul a). Raza primului semicerc este: $r_1 = \frac{mv_1}{qB}$. În continuare variația energiei

cinetice la fiecare trecere prin regiunea centrală este mărimea ΔE_{cin} calculată la punctul a) 2 p

Viteza și raza celui de-al n -lea semicerc sunt egale respectiv cu

$$v_n = \sqrt{v_{n-1}^2 + \frac{2}{m} \Delta E_{\text{cin}}} = \sqrt{\frac{(2n-1)eE_0 d}{m}} \quad r_n = \frac{mv_n}{eB} \quad 1,5 \text{ p}$$

Protonul parcurge fiecare semicerc de lungime πr_j cu viteza constantă v_j , așadar durata dintre două treceri prin regiunea de accelerare este mereu aceeași, egală cu

$$T = \frac{\pi r_j}{v_j} = \frac{\pi m}{eB} \quad 1 \text{ p}$$

Câmpul electric trebuie să-și schimbe polaritatea cu frecvența $f = \frac{1}{T}$ **0,5 p**

La ieșirea din ciclotron raza traiectoriei este egală cu a , viteza finală este deci

$$v_{\text{fin}} = \frac{eaB}{m}, \text{ iar energia cinetică finală } (E_{\text{cin}})_{\text{fin}} = \frac{e^2 a^2 B^2}{2m} \quad 1 \text{ p}$$

La fiecare rotație completă protonul suferă două accelerări, variația energiei cinetice fiind ΔE_{cin} de la punctul a) (în afară de prima rotație, când variația energiei cinetice este jumătate din ΔE_{cin} , deoarece protonul pleacă din centru). Numărul de rotații este

$$\text{dat de relația } (E_{\text{cin}})_{\text{fin}} = (2N - 1)\Delta E_{\text{cin}}. \text{ Neglijăm unitatea și găsim } N = \frac{ea^2 B^2}{4mE_0 d} \quad 1 \text{ p}$$

$$\text{c). } \Delta E_{\text{cin}} = 3,2 \cdot 10^{-16} \text{ J} = 2 \text{ keV}$$

$$v_1 = 4,377 \cdot 10^5 \text{ ms}^{-1}$$

$$T = 6,56 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

$$v_{\text{fin}} = 9,58 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-1}$$

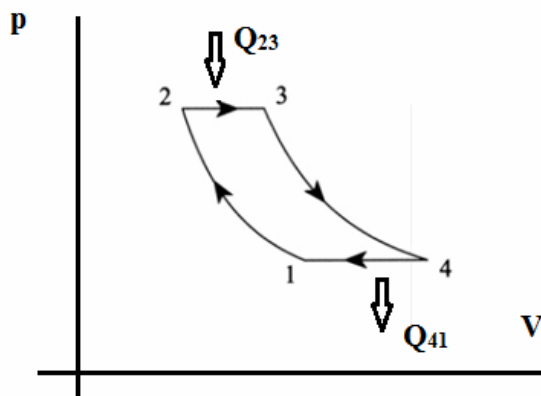
$$N \approx 120 \text{ rotații}$$

$$f = 1,52 \cdot 10^7 \text{ Hz}$$

$$(E_{\text{cin}})_{\text{fin}} = 0,479 \text{ MeV}$$

1 p

5. a).



1 p

b). Scriind adiabatele sub forma $Tp^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{const}$, se arată că $\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$ **2,5 p**

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{41}|}{Q_{23}} = 1 - \frac{\nu C_p (T_4 - T_1)}{\nu C_p (T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = 1 - \left(\frac{1}{8} \right)^{1/3} = 0,5 \quad 2,5 \text{ p}$$

$$\text{c). } dS = \frac{dU}{T} + \frac{pdV}{T} = \frac{C_V dT}{T} + \frac{RdV}{V} \quad 1 \text{ p}$$

$$\text{Prin integrare } S(T, V) = C_V \ln T + R \ln V + S_0 \quad 1 \text{ p}$$

d). Procesele $1 \rightarrow 2$ și $3 \rightarrow 4$ sunt adiabatice reversibile, entropia este constantă. Variația oricărei funcții de stare de-a lungul unui ciclu este nulă. Deci în toate cazurile $\Delta S = 0$ **2 p**

6. Scriem ecuația gazelor perfecte sub forma $T(p, \rho) = \frac{M}{m} \frac{pV}{R} = \frac{M}{R} \frac{p}{\rho}$ **1 p**

unde presiunea și densitatea depind de înălțimea z . Derivăm:

$$\frac{dT}{dz} = \frac{M}{R} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} - \frac{M}{R} \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dz}$$
 2 p

Atmosfera fiind adiabetică, $pV^\gamma = \text{const}$, deci $p = \text{const} \times \rho^\gamma$,

$$\text{și } dp = \text{const} \times \gamma \rho^{\gamma-1} d\rho = \gamma \frac{p}{\rho} d\rho$$
 2 p

Introducem $d\rho = \frac{\rho}{\gamma p} dp$ în relația lui dT/dz găsim

$$\frac{dT}{dz} = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{M}{R} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz}$$
 2 p

Din formula presiunii hidrostatice $p = \rho g z$ găsim $dp = -\rho g dz$ adică

$$\frac{dT}{dz} = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{Mg}{R}$$
 2 p

$$\text{Numeric } \frac{dT}{dz} \approx -0,01 K / m = -10 K/km$$
 1 p