

## Rezolvări 2012

### Rezolvare 1

*Metoda 1.* Fratele mai mare trage mobila oblic, sub unghiul  $\alpha$  față de orizontală. **2 p**

Reacțiunea normală a podelei este  $N = Mg - F \sin \alpha$ . Proiecția orizontală a forței trebuie să fie mai mare decât forța de frecare:  $F \cos \alpha > \mu N = \mu(Mg - F \sin \alpha)$ . Rezultă condiția

$$\cos \alpha + \mu \sin \alpha > \frac{\mu Mg}{F} \quad \mathbf{0,5\ p}$$

sau, înlocuind datele numerice:  $\cos \alpha + \mu \sin \alpha > 10/9$ . Valoarea maximă a sumei din partea stângă se obține pentru  $\operatorname{tg} \alpha = \mu$ . Atunci inegalitatea devine

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sqrt{1 + \mu^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} > 10/9, \quad \mathbf{0,5\ p}$$

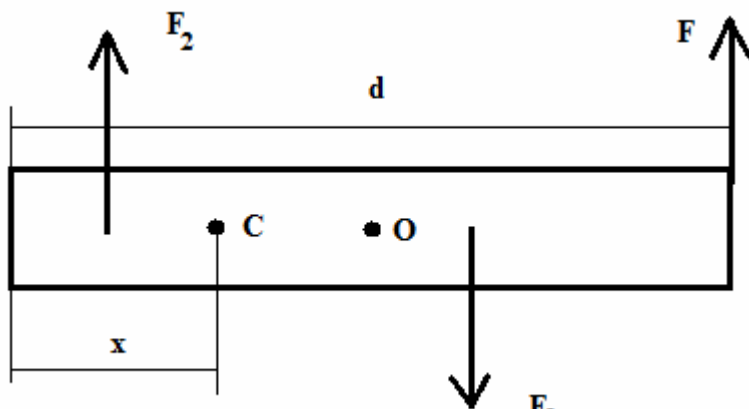
ceea ce este adevărat, deoarece  $1,118 > 1,111$ . Așdar dacă fratele mai mare alege să tragă sub unghiul de frecare (care este  $\operatorname{arctg}(0,5) \approx 26^\circ 34'$ ) el poate muta singur comoda. **0,5 p**

*Metoda 2.* Mezinul nu poate folosi metoda de mai sus, dar are o idee proprie. El aplică o forță orizontală la un capăt al comodei. Mobila începe să se rotească, dar nu în jurul centrului său de masă  $O$ , ci în jurul unui punct notat cu  $C$  pe figura următoare (vedere de sus): **2,5 p**

În acest fel, după o rotație cu  $180^\circ$ , comoda se va deplasa cu distanța  $d-2x$ , unde  $d$  este lungimea totală, iar  $x$  distanța între capătul de care nu trage mezinul și centrul de rotație **0,5 p**

Notăm cu  $F_1$  și  $F_2$  forțele de frecare ale celor două porțiuni din stânga și din dreapta lui  $C$ . Porțiunea din stânga centrului de rotație se deplasează înapoi, așa încât forța de frecare pentru această porțiune este spre înainte. **1 p**

$F_1$  și  $F_2$  sunt proporționale cu greutatea celor două părți, iar momentul total față de  $C$  este nul:



$$F_1 = \frac{d-x}{d} \mu Mg, \quad F_2 = \frac{x}{d} \mu Mg, \quad F(d-x) - F_1 \frac{d-x}{2} - F_2 \frac{x}{2} = 0 \quad \mathbf{1\ p}$$

Înlocuim forțele de frecare în ultima relație și găsim:  $F = \frac{\mu Mg}{2d} \frac{(d-x)^2 + x^2}{d-x}$ . Anulând derivata

$dF/dx$  se găsește condiția de minim pentru forța  $F$ :  $x = (1 - \sqrt{2}/2)d$ .  $\mathbf{1\ p}$

Forța minimă necesară mișcării este:  $F_{\min} = (\sqrt{2} - 1)\mu Mg \approx 331,37\text{ N}$ . Înseamnă că și mezinul poate muta comoda cu metoda lui. **0,5 p**

**Total** **10 p**

## Rezolvare 2

Pentru ca în urma ciocnirilor plastice să se degaje cantitatea maximă de căldură, corpurile trebuie:

- să ajungă la viteze maxime înainte de ciocnire; **1,5 p**
- să rămână în repaus după ciocnire. **2,5 p**

Prima condiție este îndeplinită dacă toate corpurile pleacă de la cea mai mare înălțime posibilă și se ciocnesc în punctul cel mai de jos al emisferei. **1 p**

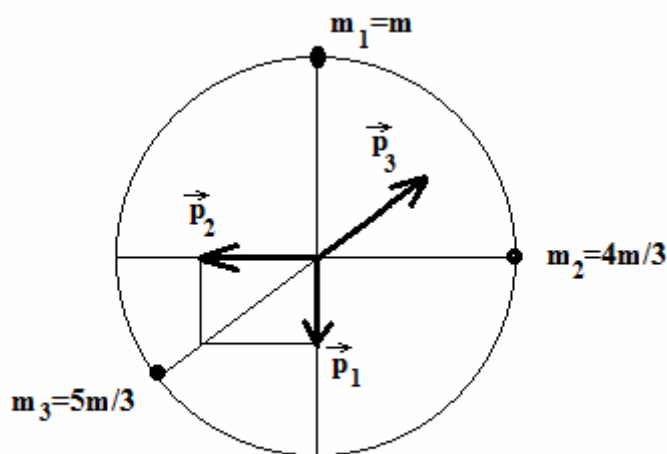
Pentru a îndeplini a doua condiție punctele sunt poziționate inițial în vârfurile unui triunghi înscris în cercul mare al emisferei (ecuatorul superior). Unghiurile triunghiului se determină din condiția anulării componentei orizontale a impulsului total inițial al corpurilor. **1 p**

Cantitatea maximă de căldură degajată este egală cu suma energiilor potențiale inițiale:

$$Q_{\max} = (m_1 + m_2 + m_3)gr \quad \mathbf{0,5\ p.}$$

a) Pozițiile inițiale sunt vârfurile unui triunghi echilateral;  $Q_{\max} = 3mgr$  **1 p**

b) Pozițiile inițiale sunt astfel alese încât vectorii impuls să formeze un triunghi dreptunghic ca în figură; **2 p.**



$$Q_{\max b} = 4mgr \quad \mathbf{0,5\ p}$$

### Problema 3

Scriem condiția de echilibru a gazului în starea finală:

$$p_a A + Mg = pA, \quad 1 \text{ p}$$

sau, cu legea gazelor perfecte

$$(1) \quad \left( p_a + \frac{Mg}{A} \right) V = nRT \quad 0,5 \text{ p}$$

Principiul I al termodinamicii se scrie (convenția de semne din liceu):

$$\Delta U = Q - L = -L \quad (\text{sistem izolat termic}) \quad 1 \text{ p}$$

Sau, introducând variația energiei interne și lucrul mecanic total efectuat asupra gazului,

$$(2) \quad nC_V(T - T_0) = (p_a A + Mg)x \quad 1,5 \text{ p}$$

unde  $x = \frac{V_0 - V}{A}$  este distanța parcursă de piston până la oprire. 0,5 p

Relația (2) se mai scrie:

$$(3) \quad \left( p_a + \frac{Mg}{A} \right) (V_0 - V) = \frac{3nR}{2} (T - T_0) \quad 1 \text{ p}$$

În final, din (1) și (3):

$$T = \frac{3T_0}{5} + \frac{2}{5} \frac{\left( p_a + \frac{Mg}{A} \right) V_0}{nR} \quad 1,5 \text{ p}$$

$$V = \frac{2V_0}{5} + \frac{3}{5} \frac{nRT_0}{p_a + \frac{Mg}{A}} \quad 1,5 \text{ p}$$

Dacă presiunea inițială este egală cu cea finală atunci temperatura și volumul final sunt egale cu cele inițiale,  $T = \frac{3T_0}{5} + \frac{2T_0}{5} = T_0$ ,  $V = \frac{2V_0}{5} + \frac{3V_0}{5} = V_0$  0,5 p

și pistonul este în echilibru de la început 1 p

#### Problema 4

a). Imediat după închiderea întrerupătorului  $K$ :

bobina  $L$  se opune variației curentului,

1 p

iar condensatorul  $C$  se comportă ca un scurt-circuit.

1 p

Montajul  $L$ - $R$  se comportă ca o rezistență de valoare  $R$ , iar montajul  $C$ - $R$  ca un scurt-circuit.

Impedanța totală a circuitului între bornele  $A$  și  $B$  este egală cu  $R$ .

0,5 p

După un interval mare de timp, dat fiind că  $E$  este o tensiune continuă:

bobina devine un scurt-circuit,

1 p

iar condensatorul o întrerupere.

1 p

Montajul  $L$ - $R$  se comportă ca un scurt-circuit, iar montajul  $C$ - $R$  ca o rezistență de valoare  $R$ .

Impedanța totală a circuitului între bornele  $A$  și  $B$  este egală cu  $R$ .

0,5 p

b). Dacă sursa debitează curent alternativ cu pulsația  $\omega$ , impedanța complexă a circuitului este:

$$Z = \frac{i\omega LR}{R + i\omega L} + \frac{R/i\omega C}{R + 1/i\omega C} = \frac{i\omega LR}{R + i\omega L} + \frac{R}{1 + i\omega CR}$$

1 p

sau

$$Z = R \frac{R - \omega^2 CLR + 2i\omega L}{R - \omega^2 CLR + i\omega L + i\omega CR^2}$$

1 p

Dacă  $CR^2 = L$  fracția se simplifică și obținem  $Z=R$ .

1 p

Dacă  $E$  este o sursă de tensiune variabilă nesinusoidală, reactanțele anterioare și impedanța  $Z$  nu mai sunt corecte.

0,5 p

Însă oricare ar fi funcția  $E(t)$ , ea se poate dezvolta în serie Fourier. Pentru orice armonică impedanța are aceeași valoare  $R$ , independentă de frecvență. Așadar în toate cazurile circuitul se comportă ca o rezistență egală cu  $R$ .

1,5 p

### Problema 5

a) Asupra unui electron aflat la distanța  $r$  de axa discului acționează forța magnetică  $\vec{F}_{mgn} = -e\vec{v} \times \vec{B}$ , unde  $-e$  este sarcina electronului. **0,5 p**

Electronul se rotește împreună cu discul cu viteza unghiulară  $\dot{\phi} = \omega$ , așa încât viteza sa este  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ . **1 p**

Forța devine ( $\vec{r} \perp \vec{B}$ ,  $\vec{\omega} // \vec{B}$ ):

$$\vec{F}_{mgn} = -e(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{B} = e\vec{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{B}) - e\vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{B}) = -e\vec{r}(\omega B). \quad \mathbf{1,5\ p}$$

Apare o forță radială care deplasează electronii liberi din conductor de la periferie spre centrul O, așadar un curent prin rezistorul  $R$ . **1 p**

Tensiunea continuă între contacte este:  $U_{AO} = -\int_0^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = \omega B \int_0^a r dr = \frac{\omega B a^2}{2}$ . **1 p**

Curentul prin  $R$  este  $i = \frac{\omega B a^2}{2R}$  **0,5 p**

b) Puterea electrică este dată de  $P = Ri^2 = \frac{\omega^2 B^2 a^4}{4R} = \frac{\dot{\phi}^2 B^2 a^4}{4R}$  **0,5 p**

Teorema variației energiei se scrie

$$\frac{dE_{cin}}{dt} + \frac{\dot{\phi}^2 B^2 a^4}{4R} = Mga\dot{\phi} \quad \mathbf{1,5\ p}$$

Discul se rotește uniform,  $\dot{\phi} = \omega_0 = \text{const}$ , iar derivata energiei cinetice este nulă **1 p**

Rezultă  $\omega_0 = \frac{4MgR}{B^2 a^3} = 62,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . **1 p**

Intensitatea curentului continuu este  $I_0 = \frac{\omega_0 B a^2}{2R} = 25 \text{ A}$ . **0,5 p**

### Problema 6

- a) La o roată din față, unghiul dintre două spițe este  $\varphi = 2\pi / N_1$ . **1,5 p**

Această roată apare nemișcată dacă în timpul  $\tau = 1/24$  dintr-o secundă ea se rotește cu un unghi  $\alpha = k\varphi$ , unde  $k$  este un număr natural. **1,5 p**

Dar în acest timp roata se învârtă cu unghiul  $\alpha = \omega\tau$ , unde  $\omega$  este viteza unghiulară de rotație. **1 p**

Rezultă  $\omega = \frac{\alpha}{\tau} = \frac{2k\pi}{N_1\tau}$ . **1 p**

Viteza căruței este  $v = \omega r$ . **1 p**

Viteza minimă pentru care roțile din față par nemișcate este:

$$v_{\min} = \left( \frac{2k\pi}{N_1\tau} \right)_{k=1} r = \frac{2\pi r}{N_1\tau} \approx 8,8 \text{ m/s.} \quad \mathbf{1 \text{ p}}$$

Alte viteze posibile se obțin punând  $k=2, 3, \dots$  **0,5 p**

- b) Roțile din spate vor apărea nemișcate dacă  $\frac{2k\pi r}{N_1\tau} = \frac{2m\pi R}{N_2\tau}$ , sau  $N_2 = \frac{m}{k} \frac{R}{r} N_1$  **1,5 p**

Numărul cel mai mic de spițe pentru o roată din spate este  $N_2=3$ , obținut pentru  $m=1$  și  $k=3$ . Dacă studentul estimează că 3 spițe sunt prea puține și justifică această părere, se notează și rezultatul

$N_2=9$ , obținut pentru  $m=1$  și  $k=1$ . **1 p**